МИНИСТЕРСТВО ПУТЕЙ СООБЩЕНИЯ РФ
ИРКУТСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ПУТЕЙ СООБЩЕНИЯ



ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИИ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

Учебное пособие
для студентов заочного отделения
всех специальностей

ИРКУТСК
2003

КОМПЛЕКС МЕТОДИЧЕСКИХ ПОСОБИЙ ПО МАТЕМАТИКЕ ДЛЯ ЗАОЧНОГО ОБУЧЕНИЯ

Под редакцией доктора технических наук,
профессора А. П. Хоменко

- Комплексные числа. Основы линейной алгебры. Системы линейных уравнений
- Векторная алгебра и аналитическая геометрия
- Введение в анализ
- Дифференциальное исчисление функций одной переменной
- Дифферинциальное исчисление функций нескольких переменных
- Линейное программирование. Динамическое программирование
- **Интегральное исчисление функций одной переменной**
- Кратные, криволинейные и поверхностные интегралы. Элементы теории поля
- Обыкновенные дифференциальные уравнения
- Ряды
- Теория функций комплексной переменной. Операционное исчисление
- Вариационное исчисление. Уравнения математической физики
- Теория вероятностей
- Математическая статистика
- Марковские случайные процессы и теория игр
- Дискретная математика

МИНИСТЕРСТВО ПУТЕЙ СООБЩЕНИЯ РФ

ИРКУТСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
УНИВЕРСИТЕТ ПУТЕЙ СООБЩЕНИЯ

ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИИ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

Учебное пособие
для студентов заочного отделения
всех специальностей

Под редакцией
доктора технических наук, профессора А.П. Хоменко

Иркутск 2003

УДК 517.3

Бояркина Г.П. Интегральное исчисление функции одной переменной: Учебное пособие. Иркутск, 2003.68 с.

Учебное пособие содержит достаточно полное изложение основных вопросов курса интегрального исчисления функции одной переменной, соответствующих требованиям к минимуму основной обязательной программы по подготовке дипломированных специалистов. Пособие снабжено большим количеством пдробно разобранных примеров. В пособие включены контрольные вопросы для самопроверки и десять вариантов контрольной работы.

Учебное пособие предназначено для студентов всех специальностей второго курса заочной формы обучения, но может быть полезно при изучении соответствующих разделов математики на дневном отделении.

Ил.14 Табл.3 Библиогр.: 7 назв.

Рецензенты: канд.физ.-мат. наук О.А.Горбачев,
доц.Иркутского филиала МГТУ ГА;
канд.техн. наук, доц, Г.И.Суханов (ИрГУПС)

© Иркутский государственный университет путей сообщения, 2003

Оглавление

Вопросы для самоконтроля.....
Глава 1. Неопределенный интеграл..... 5
1.1. Первообразная, неопределенный интеграл, его свойства..... 5
1.2. Таблица основных интегралов..... 8
1.3. Основные методы интегрирования..... 9
1.3.1. Непосредственное интегрирование 9
1.3.2. Интегрирование подстановкой 9
1.3.3. Интегрирование по частям 10
1.4. Интегрирование рациональных выражений..... 12
1.4.1. Разложение рациональной дроби на простейшие.... 12
1.4.2. Интегрирование простейших рациональных выражений..... 18
1.5. Интегрирование тригонометрических выражений..... 22
1.6. Интегрирование иррациональных выражений..... 27
Глава 2. Определенный интеграл..... 31
2.1.Задача, приводящая к понятию определенного интеграла . 31
2.2. Определенный интеграл, его свойства..... 32
2.3. Необходимое и достаточное условия интегрируемости функции..... 35
2.4. Вычисление определенного интеграла. Формула Ньютона-Лейбница..... 36
2.5. Основные методы вычисления определенного интеграла..... 38
2.5.1. Замена переменной в определенном интеграле..... 38
2.5.2. Интегрирование по частям..... 39
2.6. Несобственные интегралы..... 40
2.6.1. Несобственные интегралы 1 рода..... 40
2.6.2. Несобственные интегралы 2 рода..... 42
2.7. Общий принцип приложений определенного интеграла..... 44
2.8. Вычисление площади плоской фигуры..... 44
2.9. Вычисление длины плоской фигуры..... 49
2.10.Вычисление объема тела..... 52
2.11.Приближенное вычисление определенного интеграла.... 54
Задачи контрольной работы..... 57
Библиографический список..... 67

ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЯ

Глава 1.Неопределенный интеграл.

1. Первообразная, ее свойства.
2. Неопределенный интеграл, его свойства, геометрический смысл.
3. Таблица основных интегралов.
4. Непосредственное интегрирование; замена переменой; интегрирование по частям.
5. Интегрирование простейших рациональных выражений:
$$\int\frac{dx}{ax+b},\int\frac{dx}{(ax+b)^k},\int\frac{dx}{ax^2+bx+c},$$
$$\int\frac{(Mx+N)dx}{ax^2+bx+c},\int\frac{(Mx+N)}{(x^2+px+q)^k}dx.$$
6. Интегрирование рациональных выражений.
7. Интегрирование тригонометрических выражений. Универсальная тригонометрическая подстановка.
8. Интегрирование простейших иррациональных выражений:
$$\int\frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}},\ \int\frac{(Mx+N)dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}.$$
9. Интегрирование иррациональных выражений.

Глава2. Определенный интеграл.

10. Задача, приводящая к определению определенного интеграла.
11. Определенный интеграл, его свойства.
12. Замена переменной, интегрирование по частям.
13. Несобственные интегралы 1 и 2 рода: определения, сходимость, теоремы сравнения.
14. Вычисление площади плоской фигуры.
15. Вычисление длины плоской кривой.
16. Вычисление объема тела.
17. Приближенное вычисление определенного интеграла (формула Симпсона).

Во многих задачах науки и техники приходится не по заданной функции искать ее производную, а наоборот – восстанавливать функцию по ее производной. Например, по известному закону изменения пути с течением времени $S = S(t)$ методом дифференцирования находим скорость $V = \frac{dS}{dt}$, а затем и ускорение $a = \frac{dV}{dt}$. Часто приходится решать обратную задачу: ускорение a задано функцией от времени t: $a = a(t)$, требуется определить скорость V и пройденный путь S в зависимости от t. Таким образом, здесь оказывается нужным по функции $a = a(t)$ восстановить ту функцию $V = V(t)$, для которой a является производной, и затем, зная функцию $V(t)$, найти ту функцию $S = S(t)$, для которой производная будет $V(t)$.

1.1. ПЕРВООБРАЗНАЯ. НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ, ЕГО СВОЙСТВА

Определение. Функция $F(x)$ называется первообразной для функции $f(x)$ на интервале $(a;b)$, если $F(x)$ дифференцируема на $(a;b)$ и $F'(x) = f(x)$.

Пример1. $F(x) = \sqrt{x}$ есть первообразная для функции $f(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ на интервале $(0;+\infty)$, так как $\left(\sqrt{x}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$.

Пример2. $F(x) = \frac{x^3}{3} + 2x$ есть первообразная для функции $f(x) = x^2 + 2$ на интервале $(-\infty;+\infty)$, так как $\left(\frac{x^3}{3} + 2x\right)' = x^2 + 2$.

Справедливы следующие теоремы.

Теорема 1. Если $F(x)$ первообразная для функции $f(x)$ на $(a;b)$, то $F(x) + C$ также первообразная, где C – произвольное постоянное число.

Доказательство. Так как $F(x)$ первообразная для функции $f(x)$, то справедливо равенство $F'(x) = f(x)$.
Вычислим производную от функции $F(x) + C$:

$$(F(x) + C)' = F'(x) + C' = F'(x) = f(x).$$

Следовательно, $F(x)+C$ также первообразная для функции $f(x)$.

Лемма. Функция, производная которой на некотором интервале $(a;b)$ равна нулю, постоянна на этом интервале.

Теорема 2. Если $F_1(x)$ и $F_2(x)$ две первообразные для $f(x)$ на $(a;b)$, то $F_2(x)=F_1(x)+C$ на $(a;b)$, где C – некоторая постоянная.

Доказательство. По условию $F_1'(x)=F_2'(x)=f(x)$. Составим функцию $\Phi(x)=F_2(x)-F_1(x)$. Очевидно, что

$$\Phi'(x)=F_2'(x)-F_1'(x)=f(x)-f(x)=0,\quad x\in(a;b).$$

Используя лемму, заключаем, что $\Phi(x)=C$, т.е. $F_2(x)-F_1(x)=C$.

Отсюда $F_2(x)=F_1(x)+C$.

Определение. Семейство всех первообразных $F(x)+C$ функции $f(x)$ на интервале $(a;b)$ называется неопределенным интегралом этой функции на интервале $(a;b)$ и записывается

$$\int f(x)dx=F(x)+C.$$

Знак $\int$ называется интегралом, $f(x)dx$ – подынтегральным выражением, $f(x)$ – подынтегральной функцией.

Операция нахождения неопределенного интеграла называется интегрированием функции $f(x)$. Сформулируем ряд свойств неопределенного интеграла, вытекающих из его определения.

1. Производная от неопределенного интеграла равна подынтегральной функции $\left(\int f(x)dx\right)'=f(x)$.

Действительно, пусть $\int f(x)dx=F(x)+C$, где $F'(x)=f(x)$.

Тогда

$$\left(\int f(x)dx\right)'=\left(F(x)+C\right)'=F'(x)=f(x).$$

2. Дифференциал от неопределенного интеграла равен подынтегральному выражению

$$d\left(\int f(x)dx\right)=f(x)dx.$$

Действительно,

$$\int f(x)dx=F(x)+C,$$

отсюда

$$d\left(\int f(x)dx\right)=d(F(x)+C)=dF(x)=F'(x)dx=f(x)dx.$$

3. Интеграл от дифференциала функции равен этой функции, сложенной с произвольной постоянной

$$\int dF(x) = F(x) + C.$$

Действительно,

$$\int dF(x) = \int F'(x)dx = F(x) + C.$$

4. Неопределенный интеграл от суммы (разности) двух функций равен сумме (разности) неопределенных интегралов от этих функций:

$$\int (f_1(x) \pm f_2(x))dx = \int f_1(x)dx \pm \int f_2(x)dx.$$

Действительно, возьмем производные от левой и правой частей:

$$\left[\int (f_1(x) + f_2(x))dx\right]' = f_1(x) + f_2(x).$$

$$\left[\int f_1(x)dx + \int f_2(x)dx\right]' = \left[\int f_1(x)dx\right]' + \left[\int f_2(x)dx\right]' = f_1(x) + f_2(x).$$

5. Постоянный множитель можно вынести за знак неопределенного интеграла, т.е.

$$\int k\, f(x)dx = k\int f(x)dx.$$

Геометрический смысл неопределенного интеграла Пусть $F(x)+C$ – неопределенный интеграл функции $f(x)$ на некотором интервале $(a;b)$. При фиксированном значении $C = C_1$ получим конкретную функцию $y_1 = F(x) + C_1$, для которой можно построить график, его называют интегральной кривой. Положив $C = C_2$, получим другую функцию $y_2 = F(x) + C_2$ с соответствующей кривой. Следовательно, неопределенный интеграл $F(x)+C$ можно рассматривать как уравнение семейства интегральных кривых. Величина C является параметром этого семейства: каждому конкретному значению C соответствует единственная интегральная кривая в семействе.

Пример 3. $F(x) = x^2 + C$ является неопределенным интегралом функции $f(x) = 2x$.

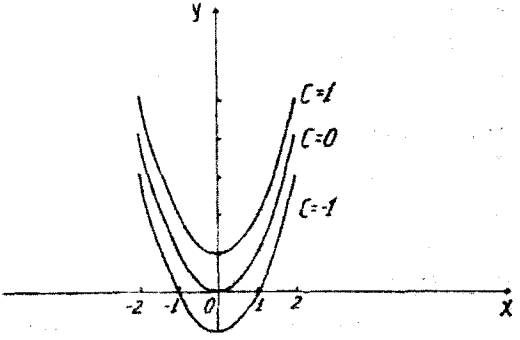


Рис. 1

1.2. ТАБЛИЦА ОСНОВНЫХ ИНТЕГРАЛОВ

1. $\int 0\,dx = C$.

2. $\int u^n du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + C, \quad n \neq -1.$

3. $\int \frac{1}{u} du = \ln|u| + C$.

4. $\int a^u du = \frac{a^u}{\ln a} + C, \quad \int e^u du = e^u + C$.

5. $\int \sin u\, du = -\cos u + C$.

6. $\int \cos u\, du = \sin u + C$.

7. $\int \frac{du}{\cos^2 u} = tgu + C$.

8. $\int \frac{du}{\sin^2 u} = -ctgu + C$.

9. $\int \frac{du}{u^2 + a^2} = \begin{cases} \frac{1}{a} arctg \frac{u}{a} + C, \\ -\frac{1}{a} arcctg \frac{u}{a} + C, \end{cases} \quad \int \frac{du}{1+u^2} = \begin{cases} arctgu + C, \\ -arcctgu + C. \end{cases}$

10. $\int \frac{du}{u^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln\left|\frac{u-a}{u+a}\right| + C$.

11. $\int \frac{du}{\sqrt{a^2 - u^2}} = \begin{cases} arcsin \frac{u}{a} + C, \\ -arccos \frac{u}{a} + C, \end{cases} \quad \int \frac{du}{\sqrt{1-u^2}} = \begin{cases} arcsin u + C, \\ -arccos u + C. \end{cases}$

12. $\int \frac{du}{\sqrt{u^2 \pm a^2}} = \ln\left|u + \sqrt{u^2 \pm a^2}\right| + C$.

Вывод этих формул основан на прямом использовании определения неопределенного интеграла.

1.3. ОСНОВНЫЕ МЕТОДЫ ИНТЕГРИРОВАНИЯ

1.3.1. Непосредственное интегрирование

При непосредственном интегрировании используем следующие преобразования дифференциала:

1. $dx = \frac{1}{a}d(ax+b)$, то есть, всегда можем добавить под знак дифференциала "нужное слагаемое b" или "нужный множитель a", при этом вводим компенсирующий множитель "$\frac{1}{a}$",например, $dx = \frac{1}{3}d(3x+2)$.

2. $\varphi'(x)\cdot dx = d(\varphi(x))$

Эта операция называется подведение функции под знак дифференциала,

например, $\frac{1}{\cos^2 x}dx = d(tgx)$ или

$$(2x+3)dx = d(x^2+3x-5).$$

Пример 4.

$$\int(x^2-3x+4)^5\cdot(2x-3)dx = \int(x^2-3x+4)^5 d(x^2-3x+4) =$$

$$= \frac{(x^2-3x+4)^6}{6}+C.$$

Пример 5.

$$\int\frac{dx}{\sqrt{1-4x^2}\cdot\arcsin 2x} = \frac{1}{2}\int\frac{2dx}{\sqrt{1-4x^2}\cdot\arcsin 2x} = \frac{1}{2}\int\frac{d(\arcsin 2x)}{\arcsin 2x} =$$

$$= \frac{1}{2}\ln|\arcsin 2x|+C.$$

1.3.2. Интегрирование подстановкой (замена переменной)

Теорема. Если $f(x)$– непрерывная функция на интервале $(a;b)$, и функция $x=\varphi(t)$ есть непрерывно – дифференцируемая (имеющая непрерывную производную) функция на некотором интервале изменения t, то справедлива формула

$$\int f(x)dx = \left|x=\varphi(t), dx=\varphi'(t)dt\right| = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt.$$

Пример 6.

$$\int\frac{(\sqrt{1+x})dx}{x} = \left|\begin{array}{l}1+x=t^2,\\ x=t^2-1,\\ dx=2tdt\end{array}\right| = \int\frac{t\,2t\,dt}{t^2-1} = \int\frac{2t^2dt}{t^2-1} = 2\int\frac{(t^2-1+1)dt}{t^2-1} =$$

$$= 2\int\left(1+\frac{1}{t^2-1}\right)dt = 2\left(t+\frac{1}{2}\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right|\right)+C = 2\left(\sqrt{1+x}+\frac{1}{2}\ln\left|\frac{\sqrt{1+x}-1}{\sqrt{1+x}+1}\right|\right)+C.$$

Пример 7.

$$\int\sqrt[3]{1+3x}dx = \left|\begin{array}{l} 1+3x = t^3, \\ x = \frac{1}{3}\left(t^3-1\right), \\ dx = t^2dt \end{array}\right| = \int t\cdot t^2dt = \int t^3dt = \frac{t^4}{4}+C = \frac{1}{4}(1+3x)^{\frac{4}{3}}+C.$$

1.3.3. Интегрирование по частям

Теорема. Пусть $u(x)$, $v(x)$ ***– две непрерывные функции, имеющие непрерывные производные. Справедлива формула интегрирования по частям***

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du.$$

Действительно,

$$\left(u(x)\,v(x)\right)' = u'(x)\,v(x) + u(x)\,v'(x),$$

отсюда

$$u(x)\,v'(x) = \left(u(x)\,v(x)\right)' - u'(x)\,v(x).$$

Тогда

$$\int u(x)\,v'(x)dx = \int\left(u(x)\,v(x)\right)'dx - \int u'(x)\,v(x)dx.$$

Учитывая, что $v'(x)dx = dv(x)$, $\quad u'(x)dx = du(x)$,

получим

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du.$$

Интегрирование по частям применяют в том случае, когда под знаком интеграла стоит произведение двух функций различной структуры и ни одна из них не является производной другой или части другой функции, причем за $u(x)$ принимают ту функцию, которая после дифференцирования наиболее упрощается, за dv все, что "осталось" под знаком интеграла, при условии, что dv может быть найден.

Интегралы, которые вычисляются с помощью интегрирования по частям, можно разбить на три группы.

I.Интегралы вида $\int P_n(x)e^{ax}dx$, $\quad \int P_n(x)\sin ax\,dx$, $\quad \int P_n(x)\cos axdx$.

Для этой группы интегралов за функцию $u(x)$ следует взять много-

член $P_n(x)$, т.е. $u = P_n(x)$, за dv - все что "осталось" под знаком интеграла.

Пример 8.

$$\int (x+1)e^x dx = \begin{Bmatrix} u = x+1, dv = e^x dx, \\ du = dx, v = \int e^x dx = e^x \end{Bmatrix} = (x+1)e^x - \int e^x dx =$$

$$= (x+1)e^x - e^x + C.$$

Пример 9.

$$I = \int x^2 \cos 2x dx = \begin{Bmatrix} u = x^2, dv = \cos 2x dx, \\ du = 2x dx, v = \frac{1}{2}\sin 2x \end{Bmatrix} = \frac{1}{2}x^2 \sin 2x - \frac{1}{2}\int \sin 2x \, 2x \, dx =$$

$$= \frac{1}{2}x^2 \sin 2x - \int x \sin 2x dx.$$

В результате применения формулы интегрирования по частям получили интеграл $\int x \sin 2x dx$, который также берется по формуле интегрирования по частям

$$u = x, du = dx, dv = \sin 2x, v = -\frac{1}{2}\cos 2x.$$

Таким образом,

$$I = \frac{1}{2}x^2 \sin 2x + \frac{1}{2}x \cos 2x - \frac{1}{2}\int \cos 2x \, dx = \frac{1}{2}x^2 \sin 2x +$$

$$+ \frac{1}{2}x \cos 2x - \frac{1}{4}\sin 2x + C.$$

II. Интегралы вида $\int P_n(x) \ln x dx$, $\int P_n(x) \arcsin x dx$,

$\int P_n(x) \arccos x dx$, $\int P_n(x) \operatorname{arctg} x dx$.

Для этой группы интегралов за dv рекомендуется взять $P_n(x)dx$, т.е. $dv = P_n(x)dx$.

Пример 10.

$$\int \left(x^2+1\right) \ln x dx = \begin{Bmatrix} u = \ln x, dv = \left(x^2+1\right)dx, \\ du = \frac{dx}{x}, v = \frac{x^3}{3} + x \end{Bmatrix} = \ln x \left(\frac{x^3}{3} + x\right) -$$

$$- \int \left(\frac{x^3}{3} + x\right)\frac{1}{x} dx = \ln x \left(\frac{x^3}{3} + x\right) - \int \left(\frac{x^2}{3} + 1\right) dx = \ln x \left(\frac{x^3}{3} + x\right) - \left(\frac{x^3}{9} + x\right) + C.$$

Пример 11.

$$\int x\,arctg\,x\,dx = \begin{Bmatrix} u = arctgx, dv = xdx, \\ du = \dfrac{dx}{1+x^2}, v = \dfrac{x^2}{2} \end{Bmatrix} = \frac{x^2}{2} arctgx - \frac{1}{2}\int \frac{x^2 dx}{1+x^2} =$$

$$\frac{x^2}{2} arctgx - \frac{1}{2}\int\left(1 - \frac{1}{1+x^2}\right)dx = \frac{x^2}{2} arctgx - \frac{x}{2} + \frac{1}{2} arctgx + C.$$

III. Интегралы вида $\int e^{ax} \sin bx\,dx$, $\int e^{ax} \cos bx\,dx$.

Для нахождения интегралов этого вида формула интегрирования по частям применяется дважды, причем за функцию $u(x)$ рекомендуется оба раза обозначать либо e^{ax}, либо тригонометрическую функцию.

Пример 12.

$$\int e^{2x} \cos 3x dx = \begin{Bmatrix} u = e^{2x}, dv = \cos 3x dx, \\ du = 2e^{2x} dx, v = \dfrac{1}{3}\sin 3x \end{Bmatrix} = e^{2x}\frac{1}{3}\sin 3x -$$

$$-\frac{2}{3}\int e^{2x} \sin 3x dx = \begin{Bmatrix} u = e^{2x}, dv = \sin 3x, \\ du = 2e^{2x} dx, v = -\dfrac{1}{3}\cos 3x \end{Bmatrix} = e^{2x}\frac{1}{3}\sin 3x -$$

$$-\frac{2}{3}(-e^{2x}\frac{1}{3}\cos 3x + \frac{2}{3}\int e^{2x} \cos 3x dx = \frac{1}{3}e^{2x}\sin 3x + \frac{2}{9}e^{2x}\cos 3x -$$

$$-\frac{4}{9}\int e^{2x} \cos 3x dx + C.$$

Обозначив $I = \int e^{2x} \cos 3x dx$, получим

$$I = e^{2x}\frac{1}{3}\sin 3x + \frac{2}{9}e^{2x}\cos 3x - \frac{4}{9} I + C.$$

Из последнего уравнения находим

$$I = \frac{1}{13}e^{2x}(3\sin 3x + 2\cos 3x) + C.$$

Таким образом,

$$\int e^{2x} \cos 3x dx = \frac{1}{13}e^{2x}(3\sin 3x + 2\cos 3x) + C.$$

1.4. ИНТЕГРИРОВАНИЕ РАЦИОНАЛЬНЫХ ВЫРАЖЕНИЙ

1.4.1. Разложение рациональной дроби на простейшие

Определение. Отношение двух алгебраических многочленов

$$f(x)=\frac{P_m(x)}{Q_n(x)},\ \textit{где}$$

$$P_m(x)=a_m x^m+a_{m-1}x^{m-1}+\ldots+a_1x+a_0,\quad a_m\neq 0,\quad m>0,$$

$$Q_n(x)=b_n x^n+b_{n-1}x^{n-1}+\ldots+b_1x+b_0,\quad b_n\neq 0,\quad n>0,$$

называется рациональной дробью.

Если $m<n$, то рациональная дробь $\frac{P_m(x)}{Q_n(x)}$ называется правильной например, $\frac{2x+3}{3x^2+4x-5}$, если $m\geq n$, то рациональная дробь называется неправильной, например, $\frac{3x+2}{4x-3}$, $\frac{2x^2-3x+2}{3x-1}$.

Простейшими рациональными выражениями являются выражения вида:

$$\frac{1}{x-a};\ \frac{1}{(x-a)^k};\ \frac{Mx+N}{x^2+px+q};\ \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^k}.$$

Если рациональная дробь $\frac{P_m(x)}{Q_n(x)}$ неправильная, то ее всегда можно представить в виде суммы целой рациональной функции $M_{m-n}(x)$ и правильной дроби $\frac{P_{n-1}(x)}{Q_n(x)}$: $\frac{P_m(x)}{Q_n(x)}=M_{m-n}(x)+\frac{P_{n-1}(x)}{Q_n(x)}$.

Например, $\frac{x^3+2x^2+x-1}{2x+3}$ неправильная дробь.

Целую часть выделяем делением многочлена, стоящего в числителе, на многочлен, стоящий в знаменателе:

$$\begin{array}{l|l}
x^3+2x^2+x-1 & 2x+3 \\
\underline{-\left(x^3+\frac{3}{2}x^2\right)} & \overline{\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{4}x+\frac{1}{8}} \\
\frac{1}{2}x^2+x-1 & \\
\underline{-\left(\frac{1}{2}x^2+\frac{3}{4}x\right)} & \\
\frac{1}{4}x-1 & \\
\underline{-\left(\frac{1}{4}x+\frac{3}{8}\right)} & \\
-\frac{11}{8} &
\end{array}$$

Данная дробь представляется в виде

$$\frac{x^3+2x^2+x-1}{2x+3}=\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{4}x+\frac{1}{8}-\frac{11}{8}\cdot\frac{1}{2x+3}.$$

Это действие называется выделением "целой части" уголком: первый член частного получим делением первого члена делимого на первый член делителя. Записываем в частное. Умножаем делитель на полученный результат и подписываем под делимым, вычитаем это произведение из делимого. Получаем разность, которая является многочленом степени ниже исходной. Продолжаем деление до тех пор, пока степень остатка будет меньше степени делителя:

$$\frac{x^3+2x^2+x-1}{2x+3}=\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{4}x+\frac{1}{8}-\frac{11}{8}\cdot\frac{1}{2x+3}.$$

Правильная рациональная дробь может быть представлена в виде суммы простейших дробей:

$$\frac{P_m(x)}{Q_n(x)}=\frac{P_m(x)}{b_n(x-a)^k(x-b)^l\left(x^2+px+q\right)^s}=$$

$$=\frac{A_1}{x-a}+\frac{A_2}{(x-a)^2}+\ldots+\frac{A_k}{(x-a)^k}+\frac{B}{x-b}+\frac{B_2}{(x-b)^2}+\ldots+\frac{B_k}{(x-b)^k}+\frac{M_1x+N_1}{x^2+px+q}+$$

$$+\frac{M_2x+N_2}{\left(x^2+px+q\right)^2}+\ldots+\frac{M_sx+N_s}{\left(x^2+px+q\right)^s}.$$

На практике представление правильной дроби $\frac{P_m(x)}{Q_n(x)}$ в виде линейной комбинации простейших дробей проводят по следующей схеме:

а) знаменатель $Q_n(x)$ данной дроби раскладывают на множители;

б) записывают дробь $\frac{P_m(x)}{Q_n(x)}$ в виде линейной комбинации простейших дробей:

$$\frac{P_m(x)}{Q_n(x)}=\frac{A_1}{x-a}+\frac{A_2}{(x-a)^2}+\ldots+\frac{A_k}{(x-a)^k}+\frac{M_1x+N_1}{x^2+px+q}+$$

$$+\frac{M_2x+N_2}{(x^2+px+q)^2}+\ldots+\frac{M_sx+N_s}{(x^2+px+q)^s},$$

где k – кратность корня a; s – кратность корня $z=a\pm bi$;

в) приводят эту линейную комбинацию простейших дробей к общему зна-

менателю $Q_n(x)$. В результате получают тождественные дроби, у которых знаменатели одинаковые, следовательно, равны и многочлены, стоящие в числителе;

г) приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x в левой и правой частях полученного равенства многочленов, получают систему для определения неопределенных коэффициентов;

д) записывают $\dfrac{P_m(x)}{Q_n(x)}$ в виде линейной комбинации простейших дробей.

Разложить следующие дроби на сумму простейших дробей.

Пример 13. $\dfrac{2x+3}{2x^2-3x-2}$.

а) найдем корни многочлена, стоящего в знаменателе дроби:

$$2x^2-3x-2=0, \qquad x_1=2, \qquad x_2=-\frac{1}{2}.$$

Корнями являются действительные числа, следовательно, квадратный многочлен может быть представлен в виде произведения линейных множителей:

$$2x^2-3x-2=2(x-2)\left(x+\frac{1}{2}\right)=(x-2)(2x+1);$$

б) дробь $\dfrac{2x+3}{2x^2-3x-2}$ представим в виде суммы простейших дробей:

$$\frac{2x+3}{2x^2-3x-2}=\frac{A}{x-2}+\frac{B}{2x+1};$$

в) $\dfrac{A}{x-2}+\dfrac{B}{2x+1}=\dfrac{A(2x+1)+B(x-2)}{(x-2)(2x+1)}$, т.е.

$$\frac{2x+3}{2x^2-3x-2}=\frac{A(2x+1)+B(x-2)}{(x-2)(2x+1)};$$

г) приравниваем числители: $2x+3=2Ax+A+Bx-2B$.

Сравниваем коэффициенты при степенях x:

$$\begin{array}{c|l} x^1 & 2=2A+B, \\ x^0 & 3=A-2B. \end{array}$$

Из полученной системы находим A и B:

$$A=\frac{7}{5}, \qquad B=-\frac{4}{5}.$$

д) разложение имеет вид

$$\frac{2x+3}{2x^2-3x-2}=\frac{7}{5(x-2)}-\frac{4}{5(2x+1)}.$$

2. $\dfrac{x+2}{x^3-x^2-x+1}$.

а) $x^3-x^2-x+1=x^2(x-1)-(x-1)=(x-1)(x^2-1)=(x-1)^2(x+1).$

Корнями многочлена, стоящего в знаменателе рациональной дроби, является действительные корни $x=-1$, $x=1$, причем последний корень кратности 2 (т.е. повторяется 2 раза).

б) $$\frac{x+2}{x^3-x^2-x+1}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{(x-1)^2}+\frac{C}{x+1};$$

в) $$\frac{A}{x-1}+\frac{B}{(x-1)^2}+\frac{C}{x+1}=\frac{A(x^2-1)+B(x+1)+C(x-1)^2}{(x-1)^2(x+1)};$$

$$\frac{x+2}{x^3-x^2-x+1}=\frac{A(x^2-1)+B(x+1)+C(x-1)^2}{(x-1)^2(x+1)};$$

г) $x+2=A(x^2-1)+B(x+1)+C(x-1)^2.$

Для нахождения неопределенных коэффициентов иногда удобно не сравнивать коэффициенты при одинаковых степенях x в левой и правой частях равенства, а использовать метод частных значений, т.е. вместо x подставляем конкретные значения:

$x=1$ | $3=2B$, $B=\dfrac{2}{3}$,

$x=-1$ | $1=4C$, $C=\dfrac{1}{4}$,

$x=0$ | $2=-A+B+C$, $A=-2+B+C=-2+\dfrac{3}{2}+\dfrac{1}{4}=-\dfrac{1}{4}$.

д) $$\frac{x+2}{x^3-x^2-x+1}=-\frac{1}{4(x-1)}+\frac{3}{2(x-1)^2}+\frac{1}{4(x+1)}.$$

Пример 14. $\dfrac{2x+1}{x^3-2x^2+5x}$.

а) $x^3-2x^2+5x=x\left(x^2+2x+5\right)$, $x^2+2x+5=0$, $D=1-5=-4$, действительных корней нет. Следовательно, квадратный трехчлен x^2+2x+5 разложить на линейные множители нельзя;

б) $\dfrac{2x+1}{x^3-2x^2+5x}=\dfrac{A}{x}+\dfrac{Bx+C}{x^2+2x+5}$;

в) $\dfrac{A}{x}+\dfrac{Bx+C}{x^2+2x+5}=\dfrac{A\left(x^2+2x+5\right)+x\left(Bx+C\right)}{x\left(x^2+2x+5\right)}$;

г) $2x+1=Ax^2+2Ax+5A+Bx^2+Cx$.

Для определения A,B,C сравниваем коэффициенты при одинаковых степенях x в левой и правой частях полученного равенства многочленов:

$$\begin{array}{c|l} x^2 & 0=A+B, \\ x^1 & 2=2A+C, \\ x^0 & 1=5A. \end{array}$$

Решая полученную систему, находим

$$A=\frac{1}{5}, \qquad B=-\frac{1}{5}, \qquad C=\frac{8}{5}.$$

д) $\dfrac{2x+1}{x^3-2x^2+5x}=\dfrac{1}{5x}-\dfrac{x-8}{5\left(x^2+2x+5\right)}$.

Пример 15. $\dfrac{x^3-2}{\left(x^2+2\right)^2}$.

а) $\left(x^2+2\right)^2=0$. Сумма x^2+2 не раскладывается на линейные множители, причем эта скобка во второй степени;

б) дробь $\dfrac{x^3-2}{\left(x^2+2\right)^2}$ представим в виде суммы простейших дробей:

$$\frac{x^3-2}{\left(x^2+2\right)^2}=\frac{Ax+B}{x^2+2}+\frac{Cx+D}{\left(x^2+2\right)^2};$$

в) $\dfrac{Ax+B}{x^2+2}+\dfrac{Cx+D}{\left(x^2+2\right)^2}=\dfrac{\left(Ax+B\right)\left(x^2+2\right)+Cx+D}{\left(x^2+2\right)^2}$;

$$\frac{x^3-2}{\left(x^2+2\right)^2}=\frac{(Ax+B)\left(x^2+2\right)+Cx+D}{\left(x^2+2\right)^2};$$

$$x^3-2=(Ax+B)\left(x^2+2\right)+Cx+D;$$

г) $x^3-2=Ax^3+Bx^2+2Ax+2B+Cx+D.$

$$\begin{array}{c|l} x^3 & 1=A, \\ x^2 & 0=B, \\ x^1 & 0=2A+C, \\ x^0 & -2=2B+D. \end{array}$$

Решая полученную систему, находим

$$A=1, \qquad B=0, \qquad C=-2, \qquad D=-2;$$

д) следовательно, $\dfrac{x^3-2}{\left(x^2+2\right)^2}=\dfrac{x}{x^2+2}-\dfrac{2x+2}{\left(x^2+2\right)^2}.$

1.4.2. Интегрирование простейших рациональных выражений

Простейшими рациональными выражениями являются выражения вида:

$$\frac{1}{x-a}, \quad \frac{1}{(x-a)^k}, \quad \frac{Mx+N}{x^2+px+q}, \quad \frac{Mx+N}{\left(x^2+px+q\right)^k}.$$

а) *интегралы вида* $\displaystyle\int\frac{dx}{x-a}$, $\displaystyle\int\frac{dx}{ax+b}$.

$$\int\frac{dx}{x-a}=\int\frac{d(x-a)}{x-a}=\ln|x-a|+C.$$

В общем случае

$$\int\frac{dx}{ax+b}=\frac{1}{a}\int\frac{d(ax+b)}{ax+b}=\frac{1}{a}\ln|ax+b|+C;$$

б) *интегралы вида* $\displaystyle\int\frac{dx}{(x-a)^k}$, $\displaystyle\int\frac{dx}{(ax+b)^k}$.

$$\int\frac{dx}{(x-a)^k}=\int(x-a)^{-k}d(x-a)=\frac{(x-a)^{-k+1}}{-k+1}+C=-\frac{1}{(k-1)(x-a)^{k-1}}+C.$$

В общем случае

$$\int \frac{dx}{(ax+b)^k} = \frac{1}{a}\int (ax+b)^{-k}\, d(ax+b) = \frac{1}{a}\cdot\frac{(ax+b)^{-k+1}}{-k+1} + C =$$

$$= -\frac{1}{a(k-1)(ax+b)^{k-1}} + C;$$

в) ***интегралы вида*** $\int \frac{dx}{ax^2+bx+c}$.

Выделяя в знаменателе полный квадрат относительно x, исходный интеграл сводится к одному из табличных интегралов $\int \frac{du}{u^2 \pm a^2}$.

Пример 16.

$$\int \frac{dx}{4x^2+12x+13} = \int \frac{dx}{\left((2x)^2+2\cdot 2x\cdot 3+9\right)-9+13} = \int \frac{dx}{(2x+3)^2+4} =$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{d(2x+3)}{(2x+3)^2+2^2} = \frac{1}{4}\,arctg\,\frac{2x+3}{2} + C;$$

г) ***интегралы вида*** $\int \frac{Mx+N}{x^2+px+q}dx$, $\int \frac{Mx+N}{ax^2+bx+c}dx$.

Выделим в числителе производную знаменателя x^2+px+q:

$$\left(x^2+px+q\right) = 2x+p.$$

$$\int \frac{Mx+N}{x^2+px+q}dx = \int \frac{\frac{M}{2}(2x+p)-\frac{M}{2}p+N}{x^2+px+q}dx = \frac{M}{2}\int \frac{2x+p}{x^2+px+q}dx +$$

$$+\frac{2N-Mp}{2}\int \frac{dx}{x^2+px+q} = \frac{M}{2}\int \frac{d\left(x^2+px+q\right)}{x^2+px+q} + \frac{2N-Mp}{2}\int \frac{d\left(x+\frac{p}{2}\right)}{\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+\left(q-\frac{p^2}{4}\right)} =$$

$$= \frac{M}{2}\ln\left|x^2+px+q\right| + \frac{2N-Mp}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}}\cdot arctg\,\frac{x+\frac{p}{2}}{\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}} + C =$$

$$= \frac{M}{2}\ln\left|x^2+px+q\right| + \frac{2N-Mp}{\sqrt{4q-p^2}}\cdot arctg\,\frac{2x+p}{\sqrt{4q-p^2}} + C.$$

Замечание. Если в результате выделения полного квадрата в знаменателе мы получили не сумму, а разность квадратов, то интеграл

$\int \frac{Mx+N}{x^2+px+q}dx$ с помощью аналогичных преобразований сведется к сумме табличных интегралов вида $\int \frac{1}{u}du$ и $\int \frac{1}{u^2-a^2}du$.

Пример 17.

$$\int \frac{3x+2}{4x^2+4x-3}dx = \int \frac{\frac{3}{8}(8x+4)-\frac{3}{2}+2}{4x^2+4x-3}dx = \frac{3}{8}\int \frac{8x+4}{4x^2+4x-3}dx +$$

$$+\frac{1}{2}\int \frac{1}{4x^2+4x-3}dx = \frac{3}{8}\int \frac{d(4x^2+4x-3)}{4x^2+4x-3} + \frac{1}{2}\int \frac{1}{(2x+1)^2-4}dx =$$

$$= \frac{3}{8}\ln|4x^2+4x-3| + \frac{1}{4}\int \frac{d(2x+1)}{(2x+1)^2-2^2} == \frac{3}{8}\ln|4x^2+4x-3| +$$

$$+\frac{1}{16}\ln\left|\frac{2x+1-2}{2x+1+2}\right| + C = \frac{3}{8}\ln|4x^2+4x-3| + \frac{1}{16}\ln\left|\frac{2x-1}{2x+3}\right| + C.$$

Пример 18.

$$\int \frac{2x+3}{4x^2+4x+5}dx = \int \frac{\frac{1}{4}(8x+4)-1+3}{4x^2+4x+5}dx = \frac{1}{4}\int \frac{8x+4}{4x^2+4x+5}dx +$$

$$+2\int \frac{1}{4x^2+4x+5}dx = \frac{1}{4}\int \frac{d(4x^2+4x+5)}{4x^2+4x+5} + 2\int \frac{1}{(2x+1)^2+4}dx =$$

$$= \frac{1}{4}\ln|4x^2+4x+5| + \frac{1}{2}2\int \frac{d(2x+1)}{(2x+1)^2+2^2} + C = \frac{1}{4}\ln|4x^2+4x+5| +$$

$$+\frac{1}{2}arctg\frac{2x+1}{2} + C;$$

д) ***интеграл вида*** $\int \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^k}dx$

где $I = \int \frac{d(x+\frac{p}{2})}{\left(\left(x+\frac{p}{2}\right)^2 + \left(q-\frac{p^2}{4}\right)\right)^k}$.

Полагая в последнем интеграле $x+\frac{p}{2}=t$, $q-\frac{p^2}{4}=a^2$, получим

$$I = \int \frac{dt}{(t^2 + a^2)^k} = I_k.$$

Этот интеграл можно вычислить, используя рекуррентную формулу

$$I_k = \frac{1}{2(k-1)a^2} \cdot \frac{t}{(t^2 + a^2)^{k-1}} + \frac{2k-3}{2(k-1)a^2} \cdot I_{k-1}, \quad k = 2,3,...$$

Пример 19.

$$\int \frac{2x+3}{(4x^2+4x+5)^2} dx = \int \frac{\frac{1}{4}(8x+4)-1+3}{(4x^2+4x+5)^2} dx = \frac{1}{4}\int \frac{8x+4}{(4x^2+4x+5)^2} dx +$$

$$+ 2\int \frac{dx}{(4x^2+4x+5)^2} = \frac{1}{4}\int \frac{d(4x^2+4x+5)}{(4x^2+4x+5)^2} + 2\int \frac{dx}{\left((2x+1)^2+4\right)^2} =$$

$$= -\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4x^2+4x+5} + 2 \cdot \frac{1}{2}\int \frac{d(2x+1)}{\left((2x+1)^2+4\right)^2} + C.$$

Последний интеграл вычислим отдельно:

$$\int \frac{d(2x+1)}{\left((2x+1)^2+2^2\right)^2} = \{2x+1=t\} = \int \frac{dt}{(t^2+2^2)^2} = I_2.$$

Для вычисления этого интеграла применим рекуррентную формулу при $k = 2,\ a = 2$:

$$I_2 = \frac{1}{2 \cdot 1 \cdot 4} \cdot \frac{t}{t^2+4} + \frac{2 \cdot 2 - 3}{2 \cdot (2-1) \cdot 4}\int \frac{dt}{t^2+4} = \frac{1}{8} \cdot \frac{t}{t^2+4} + \frac{1}{16} arctg \frac{t}{2} + C =$$

$$= \frac{1}{8} \cdot \frac{2x+1}{(2x+1)^2+4} + \frac{1}{16} arctg \frac{2x+1}{2} + C =$$

$$= \frac{1}{8} \cdot \frac{2x+1}{4x^2+4x+5} + \frac{1}{16} arctg \frac{2x+1}{2} + C.$$

Окончательно имеем

$$\int \frac{2x+3}{(4x^2+4x+5)^2} dx = -\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4x^2+4x+5} + \frac{1}{8} \cdot \frac{2x+1}{4x^2+4x+5} +$$

$$+ \frac{1}{16} arctg \frac{2x+1}{2} + C.$$

Общее правило интегрирования рациональных выражений:

Если рациональная дробь неправильная, то ее необходимо представить в виде суммы целой части и правильной дроби.

1. Оставшуюся правильную дробь разложить на сумму простейших дробей.

2. Вычислить интегралы от целой части и всех простейших дробей.

3. Записать ответ в виде суммы полученных интегралов.

1.5. ИНТЕГРИРОВАНИЕ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ВЫРАЖЕНИЙ

1 случай. Интегралы вида $\int R(\sin x, \cos x)dx$.

$$\int R(\sin x, \cos x)dx = \left| \begin{array}{l} tg\frac{x}{2} = t, x = 2arctgt, dx = \frac{2dt}{1+t^2}, \\ \sin x = \frac{2tg\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}} = \frac{2t}{1+t^2}, \\ \cos x = \frac{1-tg^2\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}} = \frac{1-t^2}{1+t^2} \end{array} \right| =$$

$$= \int R\left(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}\right)\frac{2dt}{1+t^2} = \int R_1(t)dt.$$

Подстановка $tg\frac{x}{2} = t$ называется универсальной тригонометрической подстановкой.

Пример 20.

$$\int \frac{dx}{1+\sin x} = \left\{ tg\frac{x}{2} = t, x = 2arctgt, dx = \frac{2dt}{1+t^2}, \sin x = \frac{2t}{1+t^2} \right\} =$$

$$= \int \frac{2}{\left(1+t^2\right)\left(1+\frac{2t}{1+t^2}\right)}dt = 2\int \frac{1+t^2}{\left(1+t^2\right)\left(1+t^2+2t\right)}dt =$$

$$= 2\int \frac{1}{(1+t)^2}dt = -\frac{2}{1+t} + C = \frac{2}{1+tg\frac{x}{2}} + C.$$

2 случай. Интегралы вида $\int \sin^m x \cos^n x \; dx$.

а) m,n – целые, положительные, хотя бы одно из них нечетное, $(m = 2k+1)$.

Используется подстановка $\cos x = t$.

$$\int \sin^m x \cos^n x \, dx = \int \sin^{2k+1} x \cos^n x dx =$$
$$= \int \sin^{2k} x \cos^n x \sin x dx =$$
$$= -\int (1-\cos^2 x)^k \cos^n x d(\cos x) = \{\cos x = t\} =$$
$$= -\int (1-t^2)^k t^n dt = \int R(t) dt.$$

Пример 21.

$$\int \sin^3 x \cos^2 x dx = \int \sin^2 x \cos^2 x \sin x dx =$$
$$= -\int (1-\cos^2 x)\cos^2 x d(\cos x) = \{\cos x = t\} =$$
$$= -\int (1-t^2) t^2 dt = -\int (t^2 - t^4) dt = -\frac{t^3}{3} + \frac{t^5}{5} + C = -\frac{\cos^3 x}{3} + \frac{\cos^5 x}{5} + C;$$

б) m,n – целые, положительные, n – нечетное $(n = 2k+1)$.

Подстановка $\sin x = t$.

$$\int \sin^m x \cos^n x \, dx = \int \sin^m x \cos^{2k+1} x dx = \int \sin^m x (1-\sin^2 x)^k d(\sin x)$$
$$= \{\sin x = t\} = \int t^m (1-t^2)^k dt = \int R(t) dt.$$

Пример 22.

$$\int \sin^4 x \cos^3 x dx = \int \sin^4 x \cos^2 x \cos x dx = \int \sin^4 x (1-\sin^2 x) d(\sin x) =$$
$$= |\sin x = t| == \int t^4 (1-t^2) dt = \int (t^4 - t^6) dt = \frac{t^5}{5} - \frac{t^7}{7} + C =$$
$$= \frac{\sin^5 x}{5} - \frac{\sin^7 x}{7} + C;$$

в) m,n – целые, положительные, четные. В этом случае целесообразно применить формулы понижения степени:

$$\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}, \qquad \cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}, \qquad \sin x \cos x = \frac{1}{2}\sin 2x,$$

которые приводят рассматриваемый интеграл к интегралам того же типа, но с меньшими, также неотрицательными, степенями.

Пример 23.

$$\int \cos^4 x dx = \int \left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)^2 dx = \frac{1}{4}\int (1 + 2\cos 2x + \cos^2 2x) dx =$$

$$= \frac{1}{4}\left(x + \sin 2x + C + \frac{1}{2}\int (1+\cos 4x) dx \right) = \frac{1}{4}x + \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{1}{8}x +$$

$$+ \frac{1}{32}\sin 4x + C = \frac{3}{8}x + \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{1}{32}\sin 4x + C.$$

г) m,n – целые, отрицательные, четные. В этом случае удобно применить подстановку $tgx = t$ и использовать формулы:

$$\cos^2 x = \frac{1}{1+tg^2 x} = \frac{1}{1+t^2}, \quad \sin^2 x = \frac{tg^2 x}{1+tg^2 x} = \frac{t^2}{1+t^2}, \quad dx = \frac{1}{1+t^2}dt.$$

Пример 24.

$$\int \frac{1}{\sin^2 \cos^4 x} dx = \left| \begin{array}{l} tgx = t, \quad x = arctgt, \quad dx = \dfrac{1}{1+t^2}dt, \\ \sin^2 x = \dfrac{t^2}{1+t^2}, \quad \cos^2 x = \dfrac{1}{1+t^2} \end{array} \right| =$$

$$= \int \frac{(1+t^2)(1+t^2)^2}{(1+t^2)t^2} dt = \int \frac{(1+t^2)^2}{t^2} dt = \int \frac{t^4 + 2t^2 + 1}{t^2} dt = \int \left(t^2 + 2 + \frac{1}{t^2} \right) dt =$$

$$= \frac{1}{3}t^3 + 2t - \frac{1}{t} + C = \frac{1}{3}tg^3 x + 2tgc - ctgx + C;$$

д) m,n – целые, отрицательные. В этом случае целесообразно применять подстановку $\cos x = t$ или $\sin x = t$.

Пример 25.

$$I = \int \frac{dx}{\sin^2 x \cos x} = \int \frac{\cos dx}{\sin^2 x \cos^2 x} = \int \frac{d(\sin x)}{\sin^2 x(1-\sin^2 x)} = |\sin x = t| =$$

$$= \int \frac{dt}{t^2(1-t^2)}.$$

Разложим подынтегральную дробь на сумму простейших дробей:

$$\frac{1}{t^2(1-t^2)} = \frac{A}{t} + \frac{B}{t^2} + \frac{C}{1-t} + \frac{D}{1+t}.$$

$$\frac{1}{t^2(1-t^2)} = \frac{At(1-t^2) + B(1-t^2) + Ct^2(1+t) + Dt^2(1-t)}{t^2(1-t^2)}.$$

Отсюда $1 = At - At^3 + B - Bt^2 + Ct^2 + Ct^3 + Dt^2 - Dt^3$.

Для нахождения неопределенных коэффициентов сравниваем коэффициенты при одинаковых степенях t в левой и правой частях полученного равенства:

$$\begin{array}{c|l} t^3 & 0 = -A + C - D, \\ t^2 & 0 = -B + C + D, \\ t^1 & 0 = A, \\ t^0 & 1 = B. \end{array}$$

Решая полученную систему, находим:

$$A = 0; \quad B = 1; \quad C = \frac{1}{2}; \quad D = \frac{1}{2}.$$

Окончательно получили

$$\frac{1}{t^2(1-t^2)} = \frac{1}{t^2} + \frac{1}{2(1-t)} + \frac{1}{2(1+t)}.$$

Тогда

$$\int \frac{dt}{t^2(1-t^2)} = \int \left(\frac{1}{t^2} + \frac{1}{2(1-t)} + \frac{1}{2(1+t)} \right) dt = -\frac{1}{t} - \frac{1}{2}\ln|1-t| + \frac{1}{2}\ln|1+t| +$$

$$+ C = -\frac{1}{t} + \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+t}{1-t}\right| + C = -\frac{1}{\sin x} + \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+\sin x}{1-\sin x}\right| + C.$$

3 случай. Интегралы вида

$$\int \sin ax \cos bx dx, \quad \int \sin ax \sin bx dx, \quad \int \cos ax \cos bx dx.$$

Указанные интегралы непосредственно вычисляются, если их подынтегральные функции преобразовать согласно формулам:

$$\sin ax \cos bx = \frac{1}{2}(\sin(a+b)x + \sin(a-b)x),$$

$$\sin ax \sin bx = \frac{1}{2}(\cos(a-b)x - \cos(a+b)x),$$

$$\cos ax \cos bx = \frac{1}{2}(\cos(a+b)x + \cos(a-b)x).$$

Пример 26.

$$\int sin\,3x\,cos\,4x dx = \frac{1}{2}\int (sin\,7x + sin(-x))dx = \frac{1}{2}\int sin\,7x dx - \frac{1}{2}\int sin\,x dx =$$

$$= -\frac{1}{14}\cos 7x + \frac{1}{2}\cos x + C.$$

4 случай. Интегралы вида

$$\int R(tgx)dx, \quad \int tg^m x dx, \quad \int R(ctgx)dx, \quad \int ctg^m x dx.$$

Интегралы $\int R(tgx)dx$, $\int tg^m x dx$ с помощью подстановки $tgx = t$ сводятся к интегралам от рациональной функции. Аналогично, для интегралов $\int R(ctgx)dx$, $\int ctg^m x dx$ используется подстановка $ctgx = t$.

Пример 27.

$$\int \frac{dx}{1+tgx} = \left| tgx = t, x = arctgt, dx = \frac{dt}{1+t^2} \right| = \int \frac{dt}{(1+t^2)(1+t)}.$$

Разложим подынтегральную дробь на сумму простейших дробей:

$$\frac{1}{(1+t^2)(1+t)} = \frac{At+B}{1+t^2} + \frac{C}{1+t} = \frac{(At+B)(1+t)+C(1+t^2)}{(1-t^2)(1+t)}.$$

Отсюда

$$1 = At + B + At^2 + Bt + C + Ct^2.$$

Сравниваем коэффициенты при одинаковых степенях t в левой и правой частях полученного равенства:

$$\begin{array}{c|l} t^2 & 0 = A + C, \\ t^1 & 0 = A + B, \\ t^0 & 1 = B + C. \end{array}$$

Решая полученную систему, находим: $A = -\frac{1}{2}$; $B = \frac{1}{2}$; $C = \frac{1}{2}$.

Следовательно,

$$\frac{1}{(1+t^2)(1+t)} = -\frac{1}{2}\cdot\frac{t-1}{1+t^2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1+t}.$$

Тогда

$$\int \frac{dt}{(1+t^2)(1+t)} = \int \left(-\frac{1}{2}\frac{t-1}{1+t^2} + \frac{1}{2}\frac{1}{1+t} \right) dt = -\frac{1}{2}\int \frac{t}{1+t^2} dt +$$

$$+ \frac{1}{2}\int \frac{1}{1+t^2} dt + \frac{1}{2}\int \frac{1}{1+t} dt = -\frac{1}{4}\ln|1+t^2| + \frac{1}{2} arctgt +$$

$$+\frac{1}{2}\ln|1+t|+C=-\frac{1}{4}\ln|1+tg^2x|+\frac{x}{2}+\ln|1+tgx|+C=$$

$$=\frac{1}{2}\ln|\cos x|+\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}\ln|1+tgx|+C.$$

Пример 28.

$$\int ctg^3 x dx=\left\{ctgx=t, x=arcctgx, dx=-\frac{dt}{1+t^2}\right\}=-\int\frac{t^3dt}{1+t^2}=$$

$$=-\int\left(t-\frac{t}{1+t^2}\right)dt=-\int tdt+\frac{1}{2}\int\frac{d\left(t^2+1\right)}{t^2+1}==-\frac{1}{2}t^2+\frac{1}{2}\ln|1+t^2|=$$

$$=-\frac{1}{2}ctg^2x+\frac{1}{2}\ln|1+ctg^2x|+C=-\frac{1}{2}ctg^2x-\ln|\sin x|+C.$$

1.6. ИНТЕГРИРОВАНИЕ ИРРАЦИОНАЛЬНЫХ ВЫРАЖЕНИЙ

1 случай. Интегралы вида $\int R(x, x^{\frac{m_1}{n_1}}, x^{\frac{m_2}{n_2}}, ..., x^{\frac{m_k}{n_k}})dx$.

Пусть $n=\text{НОК}(n_1, n_2, ..., n_k)$ (НОК – наименьшее общее кратное).

Сделаем подстановку: $x=t^n$, $dx=nt^{n-1}dt$.

Пример 29. $\int\frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}$.

Выпишем показатели степеней x: $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, тогда $n=\text{НОК}(2,3)=6$, $x=t^6$, $dx=6t^5dt$.

$$\int\frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}=\int\frac{6t^5dt}{t^3+t^2}=6\int\frac{t^3dt}{t+1}=6\int\left(t^2-t+1-\frac{1}{t+1}\right)dt=$$

$$6\left(\frac{1}{3}t^3-\frac{1}{2}t^2+t-\ln|t+1|\right)++C=2\sqrt{x}-3\sqrt[3]{x}+6\sqrt[6]{x}-6\ln|\sqrt[6]{x}+1|+C.$$

2 случай. Интегралы вида

$$\int R(x,(ax+b)^{\frac{m_1}{n_1}},(ax+b)^{\frac{m_2}{n_2}},...,(ax+b)^{\frac{m_k}{n_k}})dx.$$

Этот интеграл сводится к интегралу от рациональной функции с помощью подстановки: $ax+b=t^n$, где $n=\text{НОК}(n_1, n_2, ..., n_k)$.

Пример 30.

$$\int\frac{x^2dx}{(4x-3)\sqrt{4x-3}}=\left\{\begin{matrix}n=\text{НОК}(1,2)=2,4x-3=t^2\\ x=\dfrac{t^2+3}{4},\quad dx=\dfrac{t}{2}dt\end{matrix}\right\}=\int\frac{\left(t^2+3\right)^2t}{16\cdot2\cdot t^2\cdot t}dt=$$

$$=\frac{1}{32}\int\frac{t^4+6t^2+9}{t^2}dt=\frac{1}{32}\int\left(t^2+6+\frac{9}{t^2}\right)dt=\frac{1}{32}\left(\frac{t^3}{3}+6t-\frac{9}{t}\right)+C=$$

$$=\frac{1}{96}(4x-3)^{\frac{3}{2}}+\frac{3}{16}(4x-3)^{\frac{1}{2}}-9(4x-3)^{\frac{1}{2}}+C.$$

3 случай. Интегралы вида

$$\int R(x,\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{m_1}{n_1}},\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{m_2}{n_2}},...,\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{m_k}{n_k}})dx.$$

Этот интеграл сводится к интегралу от рациональной функции с помощью подстановки: $\dfrac{ax+b}{cx+d}=t^n$, где $n=\text{НОК}(n_1,n_2,...,n_k)$.

4 случай. Интеграл вида $\displaystyle\int\frac{1}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx.$

В результате выделения под знаком радикала полного квадрата, интегралы этого вида сводятся к табличным интегралам $\displaystyle\int\frac{du}{\sqrt{u^2\pm a^2}}$ или $\displaystyle\int\frac{du}{\sqrt{a^2\pm u^2}}$.

Пример 31.

$$\int\frac{1}{\sqrt{4x^2+4x-3}}dx=\int\frac{1}{\sqrt{(2x+1)^2-4}}dx=\frac{1}{2}\int\frac{d(2x+1)}{\sqrt{(2x+1)^2-4}}=\left|2x+1=t\right|=$$

$$=\frac{1}{2}\int\frac{dt}{\sqrt{t^2-4}}=\frac{1}{2}\ln\left|t+\sqrt{t^2-4}\right|+C=\frac{1}{2}\ln\left|2x+1+\sqrt{4x^2+4x-3}\right|+C.$$

5 случай. Интеграл вида $\displaystyle\int\frac{Mx+N}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx.$

Вычисление этого интеграла можно разбить на этапы:

1. В числителе подынтегральной дроби выделим производную подкоренного выражения, стоящего в знаменателе, и сделаем компенсирующие преобразования с числителем.
2. Интеграл разобьем на два интеграла так, чтобы числитель подынтегральной дроби первого интеграла содержал производную подкоренного выражения.
3. Первый полученный интеграл будет табличным, вычисление второго

интеграла $\int \frac{1}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx$ приведено выше.

Пример 32.

$$\int \frac{3x+2}{\sqrt{4x^2+4x+5}}dx = \int \frac{\frac{3}{8}(8x+4)-\frac{3}{2}+2}{\sqrt{4x^2+4x+5}}dx = \frac{3}{8}\int \frac{(8x+4)}{\sqrt{4x^2+4x+5}}dx +$$

$$+\frac{1}{2}\int \frac{1}{\sqrt{4x^2+4x+5}}dx = \frac{3}{8}\int \frac{d(4x^2+4x+5)}{\sqrt{4x^2+4x+5}} + \frac{1}{2}\int \frac{1}{\sqrt{4x^2+4x+5}}dx =$$

$$= \frac{3}{8}2\sqrt{4x^2+4x+5} + \frac{1}{4}\int \frac{d(2x+1)}{\sqrt{(2x+1)^2+4}} + C = \frac{3}{4}\sqrt{4x^2+4x+5} +$$

$$+\frac{1}{4}\ln\left|2x+1+\sqrt{4x^2+4x+5}\right| + C.$$

Замечание. Если в подкоренном выражении коэффициент при x^2 $a<0$, то в результате выделения полного квадрата исходный интеграл сведется к сумме интегралов вида $\int u^n du$ и $\int \frac{1}{\sqrt{a^2-u^2}}du$.

6 случай. Интегралы вида

$$\int R\left(x,\sqrt{a^2-x^2}\right)dx, \quad \int R\left(x,\sqrt{a^2+x^2}\right)dx, \quad \int R\left(x,\sqrt{x^2-a^2}\right)dx.$$

а) ***интегралы вида*** $\int R\left(x,\sqrt{a^2-x^2}\right)dx$ с помощью тригонометрической подстановки $x = a\sin t$ или $x = a\cos t$ сводятся к интегралам от тригонометрической функции.

Пример 33.

$$\int\left(\sqrt{4-x^2}\right)dx = \left|x = 2\sin t, \quad dx = 2\cos t dt\right| = \int\sqrt{4-4\sin^2 t}\,2\cos t dt =$$

$$= 4\int\sqrt{1-\sin^2 t}\cos t dt = 4\int\cos^2 t dt = 2\int(1+\cos 2t)dt =$$

$$= 2\left(t+\frac{1}{2}\sin 2t\right) + C = 2\arcsin\frac{1}{2}x + \frac{x}{2}\sqrt{4-x^2} + C;$$

б) ***интегралы вида*** $\int R\left(x,\sqrt{a^2+x^2}\right)dx$ с помощью тригонометрической подстановки $x = a\ tgt$ или $x = a\ ctgt$ сводятся к интегралам от тригонометрической функции.

Пример 34.

$$I=\int\frac{1}{x^4\sqrt{x^2+4}}dx=\left|x=2tgt,\quad dx=\frac{2}{\cos^2 t}dt\right|=$$

$$=\int\frac{2}{\cos^2 t\cdot 16tg^4t\sqrt{4tg^2t+4}}dt=\frac{1}{16}\int\frac{\cos^4 t\cos t}{\cos^2 t\sin^4 t}dt=$$

$$=\frac{1}{16}\int\frac{\cos^3 t}{\sin^4 t}dt=\frac{1}{16}\int\frac{(1-\sin^2 t)d(\sin t)}{\sin^4 t}=$$

$$=\frac{1}{16}\left(\int\frac{d(\sin t)}{\sin^4 t}-\int\frac{d(\sin t)}{\sin^2 t}\right)=-\frac{1}{48\sin^3 t}+\frac{1}{16\sin t}+C.$$

Выразим $\sin t$ через x, используя тригонометрическую формулу $\sin t=\frac{tgt}{\sqrt{1+tg^2t}}$ и саму подстановку $x=2tgt$, т.е. $tgt=\frac{x}{2}$:

$$\sin t=\frac{\frac{x}{2}}{\sqrt{1+\frac{x^2}{4}}}=\frac{x}{\sqrt{4+x^2}}.$$

Окончательно

$$I=-\frac{(4+x^2)\sqrt{4+x^2}}{48x^3}+\frac{\sqrt{4+x^2}}{16x}+C;$$

в) ***интегралы вида*** $\int R\left(x,\sqrt{x^2-a^2}\right)dx$ с помощью тригонометрической подстановки $x=\frac{a}{\sin t}$ или $x=\frac{a}{\cos t}$ сводятся к интегралам от тригонометрического выражения.

Пример 35.

$$\int\frac{\sqrt{x^2-4}}{x}dx=\left|x=\frac{2}{\cos t},\quad dx=\frac{2\sin t}{\cos^2 t}dt\right|=\int\frac{\sqrt{\frac{4}{\cos^2 t}-4}\cdot 2\sin t\cos t}{\cos^2 t\cdot 2}dt=$$

$$=2\int\frac{\sin^2 t}{\cos^2 t}dt=2\int tg^2tdt=\left|tgt=z,\ t=arctgz,\ dt=\frac{dz}{1+z^2}\right|=2\int\frac{z^2}{1+z^2}dz=$$

$$=2\int\left(1-\frac{1}{1+z^2}\right)dz=2z-2arctgz+C=2tgt-2t+C=$$

$$=\left|\cos t=\frac{2}{x},tgt=\frac{\sin t}{\cos t}=\frac{\sqrt{1-\cos^2 t}}{\cos t}=\frac{\sqrt{1-\frac{4}{x^2}}\cdot x}{2}=\frac{\sqrt{x^2-4}}{2}\right|=$$

$$= 2\frac{\sqrt{x^2-4}}{2} - 2\arccos\frac{2}{x} + C.$$

Глава 2. ОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

2.1. ЗАДАЧА, ПРИВОДЯЩАЯ К ПОНЯТИЮ ОПРЕДЕЛЕННОГО ИНТЕГРАЛА

Пусть на плоскости введена прямоугольная декартова система координат ***XOY*** и на отрезке $[a;b]$, где $a < b$, определена непрерывная неотрицательная функция $f(x)$, т.е. $y = f(x)$.

Определение. Фигура ***ABCD***, ограниченная снизу отрезком $[a;b]$ оси ***OX***, сверху – графиком функции $y = f(x)$, а слева и справа – отрезками прямых $x = a$ и $x = b$, называется криволинейной трапецией (рис.2)

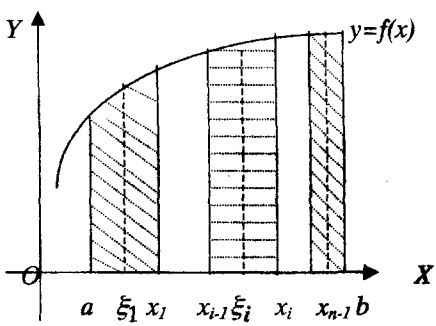


Рис.2

Необходимо вычислить площадь криволинейной трапеции, ограниченной графиком кривой $y = f(x)$, прямыми $x = a$ и $x = b$ и осью ***OX***.

1. Разобьем отрезок $[a;b]$ на n частей точками:

$$a = x_0 < x_1 < ... < x_n = b.$$

Обозначим i-ый отрезок $[x_{i-1};x_i]$ и длину его $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, $i = 1,2...,n$.

2. На каждом из полученных частичных отрезков $[x_{i-1};x_i]$ выберем произвольную точку $\xi_i \in [x_{i-1};x_i]$ и найдем значение функции в этой точке $f(\xi_i)$.
3. Произведение $f(\xi_i)\Delta x_i$ определяет площадь прямоугольника, основанием которого служит отрезок $[x_{i-1};x_i]$, а высотой $f(\xi_i)$.
4. Составим сумму

$$S_n = f(\xi_1)\Delta x_1 + f(\xi_2)\Delta x_2 + ... + f(\xi_n)\Delta x_n = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i.$$

5. Пусть $max\,\Delta x_i \to 0$, т.е. число частичных отрезков стремится к ∞. Если при этом величина S_n стремится к определенному пределу S, независящему от способа разбиения отрезка $[a;b]$ на n частей и выбора точек ξ_i внутри каждого полученного отрезка, то величину S будем называть площадью криволинейной трапеции.

Таким образом,

$$S = \lim_{\max \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i .$$

2.2.ОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ, ЕГО СВОЙСТВА

Определение. Число A называется определенным интегралом от функции $f(x)$ ***на отрезке*** $[a;b]$, ***если при любых разбиениях отрезки*** $[a;b]$ ***таких, что*** $max\,\Delta x_i \to 0$, ***и при любом выборе точек*** ξ_i ***интегральная сумма*** $\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$ ***стремится к одному и тому же пределу A.***

Этот факт записывают следующим образом:

$$\lim_{max\,\Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i = \int_a^b f(x)dx .$$

Функция $f(x)$ называется подынтегральной функцией, $[a;b]$ отрезком интегрирования, a и b – нижним и верхним пределами интегрирования соответственно.

Свойства определенного интеграла

1. Если $f(x)$=1, то

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b 1dx = b - a .$$

2. Постоянный множитель можно выносить за знак определенного интеграла:

$$\int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)dx .$$

Действительно,

$$\int_a^b kf(x)dx = \lim_{\max \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} kf(\xi_i)\Delta x_i = k \lim_{\max \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i = k\int_a^b f(x)dx$$

3. Определенный интеграл от алгебраической суммы нескольких функций равен алгебраической сумме определенных интегралов от слагаемых:

$$\int_a^b (f_1(x) + f_2(x))dx = \int_a^b f_1(x)dx + \int_a^b f_2(x)dx.$$

Действительно,

$$\int_a^b (f_1(x) + f_2(x))dx = \lim_{\max \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^n (f_1(\xi_i) + f_2(\xi_i))\Delta x_i =$$

$$= \lim_{\max \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^n f_1(\xi_i)\Delta x_i + \lim_{\max \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^n f_2(\xi_i)\Delta x_i = \int_a^b f_1(x)dx + \int_a^b f_2(x)dx.$$

4. $\int_a^a f(x)dx = 0.$

5. $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx.$

6.Пусть $f(x)$ интегрируема на отрезке $[a;b]$. Если точка $c \in [a;b]$, то

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

Доказательство. При разбиении отрезка $[a;b]$ на части включим точку с в число точек деления. Если $c = x_k$, то

$$\sum_{i=1}^n f(\xi_i)\Delta x_i = \sum_{i=1}^k f(\xi_i)\Delta x_i + \sum_{i=k+1}^n f(\xi_i)\Delta x_i.$$

Каждая из написанных сумм является интегральной суммой функции для отрезков $[a;c]$ и $[c;b]$.

Следовательно,

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

Замечание. Точка с может быть внешней по отношению к отрезку $[a;b]$.

7.Если $f(x) \geq 0$ для любого $x \in [a;b]$, то

$$\int_a^b f(x)dx \geq 0.$$

8.Если на отрезке $[a;b]$, где $a < b$, функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ удовлетворяют условию $f(x) \leq \varphi(x)$, то

$$\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b \varphi(x)dx.$$

Доказательство. Рассмотрим разность

$$\int_a^b \varphi(x)dx - \int_a^b f(x)dx = \int_a^b (\varphi(x) - f(x))dx = \lim_{\max \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^n (\varphi(\xi_i) - f(\xi_i))\Delta x_i.$$

Здесь $\varphi(\xi_i) - f(\xi_i) \geq 0$ по условию теоремы, следовательно, каждое слагаемое интегральной суммы неотрицательно, неотрицательна вся интегральная сумма и неотрицателен ее предел, т.е.

$$\int (\varphi(x) - f(x))dx \geq 0$$

или

$$\int_a^b \varphi(x)dx - \int_a^b f(x)dx \geq 0.$$

Таким образом,

$$\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b \varphi(x)dx.$$

9. (Оценка определенного интеграла).

Если m и M – наименьшее и наибольшее значения функции $f(x)$ на отрезке $[a;b]$ и $a < b$, то

$$(b-a)m \leq \int_a^b f(x)dx \leq (b-a)M.$$

Доказательство. По условию $m \leq f(x) \leq M$.

На основании свойства 8 имеем

$$\int_a^b m dx \leq \int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b M dx.$$

Учитывая, что

$$\int_a^b m dx = m(b-a), \quad \int_a^b M dx = M(b-a),$$

получаем

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a).$$

10. (Теорема о среднем). Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a;b]$, то на этом отрезке найдется такая точка $x = \xi$, что справедливо следующее равенство:

$$\int_a^b f(x)dx = f(\xi)(b-a).$$

Доказательство. Пусть для определенности $a < b$. Если m и M наименьшее и наибольшее значения функции $f(x)$ на $[a;b]$, то

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a).$$

Отсюда $m \le \frac{1}{(b-a)}\int_a^b f(x)dx \le M$.

Обозначив $\mu = \frac{1}{(b-a)}\int_a^b f(x)dx$, имеем $m \le \mu \le M$.

Так как $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a;b]$, то она принимает все промежуточные значения, заключенные между m и M.

Следовательно, существует значение $\xi \in [a;b]$, для которого $f(\xi) = \mu$, т.е.

$$f(\xi) = \frac{1}{(b-a)}\int_a^b f(x)dx,$$

отсюда

$$\int_a^b f(x)dx = (b-a)f(\xi).$$

Замечание. Значение функции $f(\xi) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$ называется средним интегральным значением $f(x)$ на интервале $(a;b)$.

Геометрический смысл определенного интеграла: определенный интеграл от функции $f(x)$ по отрезку $[a;b]$ равен площади криволинейной трапеции, ограниченной линиями $y = f(x)$, $y = 0$, $x = a$, $x = b$, т.е.

$$S = \int_a^b f(x)dx.$$

Механический смысл определенного интеграла: определенный интеграл от скорости $v(t)$ по отрезку времени $[a;b]$ равен пути, пройденному точкой от момента $t = a$ до момента $t = b$:

$$l = \int_a^b v(t)dt.$$

2.3. НЕОБХОДИМОЕ И ДОСТАТОЧНОЕ УСЛОВИЯ ИНТЕГРИРУЕМОСТИ ФУНКЦИИ

Теорема 1. (необходимое условие интегрируемости).
Если функция $f(x)$ интегрируема на некотором отрезке $[a;b]$, то она ограничена на этом отрезке.

Теорема 2. (достаточное условие интегрируемости).
Если функция $f(x)$ непрерывна на некотором отрезке $[a;b]$, то она интегрируема на этом отрезке.

2.4.ВЫЧИСЛЕНИЕ ОПРЕДЕЛЕННОГО ИНТЕГРАЛА. ФОРМУЛА НЬЮТОНА-ЛЕЙБНИЦА

Теорема 1. Если $f(x)$ ***непрерывная функция и*** $\Phi(x)=\int_a^x f(t)dt$, ***то имеет место равенство*** $\Phi'(x)=f(x)$.

Доказательство. Найдем $\Phi'(x)$.

Составим

$$\Delta\Phi(x)=\Phi(x+\Delta x)-\Phi(x)=\int_a^{x+\Delta x} f(t)dt-\int_a^x f(t)dt=\int_x^{x+\Delta x} f(t)dt=$$

$$=(x+\Delta x-x)f(\xi)=\Delta x f(\xi),$$

где $\xi\in[x;x+\Delta x]$ (см. св-ва 3.10), тогда

$$\frac{\Delta\Phi(x)}{\Delta x}=f(\xi) \text{ и } \Phi'(x)=\lim_{\Delta x\to 0} f(\xi),$$

и так как $x+\Delta x\to x$ при $\Delta x\to 0$, то и $\xi\to x$, следовательно,

$$\Phi'(x)=f(x).$$

Иными словами, производная от определенного интеграла по переменному верхнему пределу равна значению подынтегральной функции, подсчитанной при верхнем пределе.

Замечание. Из сформулированной выше теоремы следует, что всякая непрерывная функция имеет первообразную. Действительно, если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a;x]$, то в этом случае определенный интеграл $\int_a^x f(t)dt$ существует, т.е. существует функция

$$\Phi(x)=\int_a^x f(t)dt.$$

Так как $\Phi'(x)=f(x)$, то функция $\Phi(x)$ является первообразной от функции $f(x)$.

Теорема 2. (формула Ньютона-Лейбница). Если $F(x)$ ***есть какая-либо первообразная от непрерывной функции*** $f(x)$, ***то справедлива формула***

$$\int_a^b f(x)dx=F(b)-F(a).$$

Доказательство. Пусть $F(x)$ - некоторая первообразная от функции $f(x)$. По теореме 1 функция $\int_a^x f(t)dt$ есть также первообразная от $f(x)$. Но две любые первообразные от данной функции отличаются на постоянное слагаемое C^*. Следовательно, можно записать

$$\int_a^x f(t)dt = F(x) + C^*.$$

Для определения постоянного C^* положим в этом равенстве $x = a$, тогда

$$\int_a^a f(t) = F(a) + C^* \text{ или } 0 = F(a) + C^*,$$

откуда $C^* = -F(a)$.

Следовательно,

$$\int_a^x f(t)dt = F(x) - F(a).$$

Полагая, $x = b$, получим формулу Ньютона-Лейбница

$$\int_a^b f(t)dx = F(b) - F(a)$$

или, заменив переменную интегрирования t на x:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

Выражение $F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$ называется двойной подстановкой.

С учетом последнего, формулу Ньютона-Лейбница можно записать

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a).$$

Пример 1.

$$\int_1^2 xdx = \frac{1}{2}x^2\Big|_1^2 = \frac{1}{2}(4-1) = \frac{3}{2}.$$

Пример2.

$$\int_0^1 e^{2x}dx = \frac{1}{2}\int_0^1 e^{2x}d(2x) = \frac{1}{2}e^{2x}\Big|_0^1 = \frac{1}{2}\left(e^2 - e^0\right) = \frac{1}{2}\left(e^2 - 1\right).$$

Пример 3.

$$\int_1^{\pi} \cos x dx = \sin x \Big|_0^{\pi} = \sin\pi - \sin 0 = 0.$$

2.5. ОСНОВНЫЕ МЕТОДЫ ВЫЧИСЛЕНИЯ ОПРЕДЕЛЕННОГО ИНТЕГРАЛА

2.5.1. Замена переменной в определенном интеграле

Теорема. Пусть дан интеграл $\int_a^b f(x)dx$, *где функция* $f(x)$ *непрерывна на* $[a;b]$. *Пусть* $x = \varphi(t)$, *где* $\varphi(t)$ *- монотонная в некоторой области D. Если:*

1) $\varphi(\alpha) = a$, $\varphi(\beta) = b$, α *и* $\beta \in D$;

2) $\varphi(t)$ *и* $\varphi'(t)$ *непрерывны на отрезке* $[\alpha;\beta]$;

3) $f(\varphi(t))$ *определена и непрерывна на отрезке* $[\alpha;\beta]$,

то

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = \int_\alpha^\beta f_1(t)dt.$$

Замечание 1. Отметим, что при вычислении определенного интеграла с помощью замены переменной, мы не возвращаемся к старой переменной.

Замечание 2. Чаще новую переменную вводят по формуле $\psi(x) = t$, тогда $x = \psi^{-1}(t)$, находят dx и пересчитывают пределы интегрирования

$$x \Big| \begin{matrix} a \\ b \end{matrix} \sim t \Big| \begin{matrix} \psi(a) \\ \psi(b) \end{matrix}.$$

Пример 4.

$$\int_0^3 \frac{x^3}{\sqrt{9-x^2}} dx = \left\{ \begin{array}{l} x = 3\sin t, dx = 3\cos t dt \\ x = 0, 3\sin t = 0, t_1 = 0 \\ x = 3, 3\sin t = 3, \sin t = 1, t_2 = \dfrac{\pi}{2} \end{array} \right\} =$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{27\sin^3 t 3\cos t}{\sqrt{9-9\sin^2 t}}dt = 27\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^3 t\cos t}{\sqrt{1-\sin^2 t}} = 27\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^3 t\cos t}{\cos t}dt =$$

$$= 27\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\cos^2 t)\sin t dt == -27\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\cos^2 t)d(\cos t) =$$

$$= -27\left(\cos t - \frac{\cos^3 t}{3}\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} = -27\left(\cos\frac{\pi}{2} - \cos 0 - \frac{1}{3}\cos^3\frac{\pi}{2} + \frac{1}{3}\cos^3 0\right) =$$

$$= -27\left(-1+\frac{1}{3}\right) = 27\frac{2}{3} = 18.$$

Пример 5.

$$\int_0^4 \frac{x}{\sqrt{2+4x}}dx = \left\{\begin{array}{l} 2+4x = t^2,\ x = \frac{1}{4}(t^2-2), dx = \frac{1}{2}tdt \\ x=0,\ t^2=2,\ t_1=\sqrt{2}, \\ x=4,\ t^2=18,\ t_2=3\sqrt{2} \end{array}\right\} = \int_{\sqrt{2}}^{3\sqrt{2}} \frac{(t^2-2)t}{4\cdot 2t}dt = \frac{1}{8}\int_{\sqrt{2}}^{3\sqrt{2}} (t^2-2)dt =$$

$$= \frac{1}{8}\left(\frac{t^3}{3} - 2t\right)\Bigg|_{\sqrt{2}}^{3\sqrt{2}} = \frac{1}{8}\left(\frac{54\sqrt{2}}{3} - 6\sqrt{2} - \frac{4\sqrt{2}}{3} + 2\sqrt{2}\right) = \frac{38\sqrt{2}}{24} = \frac{19\sqrt{2}}{12}.$$

2.5.2. Интегрирование по частям

Теорема. Если функции $u = u(x)$ ***и*** $v = v(x)$ ***непрерывные вместе со своими производными на*** $[a;b]$, ***то***

$$\int_a^b udv = uv\Big|_a^b - \int_a^b vdu.$$

Доказательство. $(uv)' = u'v + uv'$.

Интегрируя обе части тождества в пределах от a до b, получим:

$$\int_a^b (uv)'dx = \int_a^b u'vdx + \int_a^b uv'dx.$$

Так как $\int (uv)'dx = uv + C$, то $\int_a^b (uv)'dx = uv\Big|_a^b$, поэтому последнее равенство может быть записано в виде

$$uv\Big|_a^b = \int_a^b v du + \int_a^b u dv$$

или окончательно

$$\int_a^b u dv = uv\Big|_a^b - \int_a^b v du.$$

Пример 6.

$$\int_1^2 \ln x dx = \left\{\begin{matrix} u = \ln x, dv = dx \\ du = \dfrac{dx}{x}, v = x \end{matrix}\right\} = x\ln x\Big|_1^2 - \int_1^2 x\frac{dx}{x} = 2\ln 2 - \ln 1 - x\Big|_1^2 =$$

$$= 2\ln 2 - 2 + 1 = 2\ln 2 - 1.$$

2.6. НЕСОБСТВЕННЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

При определении $\int_a^b f(x)dx$ предполагалось, что:

1. Отрезок интегрирования $[a;b]$ конечен.
2. Функция $f(x)$ определена и ограничена на этом отрезке.

Если нарушается хотя бы одно из условий 1 - 2, то интеграл называется несобственным интегралом.

Несобственные интегралы разделяются на несобственные интегралы 1 рода и несобственные интегралы 2 рода.

2.6.1. Несобственные интегралы 1 рода

К несобственным интегралам 1 рода относятся интегралы, у которых нарушено первое условие ,т.е. отрезок интегрирования не конечен

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx, \quad \int_{-\infty}^a f(x)dx, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx.$$

Определение. Если существует конечный предел $\lim\limits_{b\to+\infty}\int\limits_a^b f(x)dx = S$, ***то говорят, что несобственный интеграл*** $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ ***сходится и за его значение принимается найденный предел.***

Если же предел $\lim\limits_{b\to+\infty}\int\limits_a^b f(x)dx$ не существует, то несобственный интеграл $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ называется расходящимся (не существует).

Аналогично определяется сходимость или расходимость несобственных интегралов и для других бесконечных интервалов:

$$\int\limits_{-\infty}^{b} f(x)dx = \lim_{a\to-\infty}\int\limits_a^b f(x)dx,$$

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int\limits_{-\infty}^{c} f(x)dx + \int\limits_{c}^{-\infty} f(x)dx = \lim_{a\to-\infty}\int\limits_a^c f(x)dx + \lim_{b\to+\infty}\int\limits_c^b f(x)dx.$$

Последнее равенство следует понимать так: если оба несобственные интегралы, стоящие справа, сходятся, то сходится интеграл, стоящий слева.Если хотя бы один из интегралов правой части расходится, то расходится интеграл, стоящий слева.

Пример 7.

$$\int\limits_0^{+\infty}\frac{dx}{1+x^2} = \lim_{b\to+\infty}\int\limits_0^b\frac{dx}{1+x^2} = \lim_{b\to+\infty} arctgx\Big|_0^b = \lim_{b\to+\infty}(arctgb - arctg0) = \frac{\pi}{2} - 0 = \frac{\pi}{2}.$$

Предел существует (равен конечному числу), следовательно, несобственный интеграл первого рода сходится.

Пример 8.

$$\int\limits_1^{+\infty}\frac{dx}{x} = \lim_{b\to+\infty}\int\limits_1^b\frac{dx}{x} = \lim_{b\to+\infty}\ln|x|\Big|_1^b = \lim_{b\to+\infty}(\ln b - \ln 1) = \infty - 0 = \infty.$$

Предел не существует, следовательно, несобственный интеграл 1 рода расходится.

Во многих случаях бывает достаточно установить, сходится данный интеграл или расходится, и оценить его значение. Для этого могут быть полезны следующие две теоремы.

Теорема 1. Если для всех x $(x > a)$ ***выполняется неравенство*** $0 \le f(x) \le \varphi(x)$ ***и если*** $\int_a^{+\infty} \varphi(x)dx$ ***сходится, то*** $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ ***также сходится, при этом*** $\int_a^{+\infty} f(x)dx \le \int_a^{+\infty} \varphi(x)dx$.

Теорема 2. Если для всех x $(x > a)$ ***выполняется неравенство*** $0 \le \varphi(x) \le f(x)$, ***причем*** $\int_a^{+\infty} \varphi(x)dx$ ***расходится, то расходится и интеграл*** $\int_a^{+\infty} f(x)dx$.

В теоремах 1-2 рассматривались несобственные интегралы от неотрицательных функций. Для случая функции $f(x)$, меняющей знак в бесконечном интервале, имеет место следующая теорема.

Теорема 3. Если интеграл $\int_a^{+\infty} |f(x)|dx$ ***сходится, то интеграл*** $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ ***сходится абсолютно.***

В этом случае последний интеграл называется абсолютно сходящимся.

2.6.2. Несобственные интегралы 2 рода

К несобственным интегралом 2 рода относятся интегралы от неограниченных на $[a;b]$ функций, т.е. нарушено 2-ое условие (ограниченности $f(x)$ на $[a;b]$).

Пусть функция $f(x)$ определена и непрерывна на интервале $[a;b)$ и

$$\lim_{x \to b} f(x) = \infty.$$

Интеграл $\int_a^b f(x)dx$ от функции $f(x)$ определяется следующим образом:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_a^{b-\varepsilon} f(x).$$

Если предел, стоящий справа, существует, то говорят, что несобственный интеграл 2 рода сходится или существует. Если же предел, стоящий справа, не существует, то несобственный интеграл расходится или не существует.

Если функция имеет точку разрыва на левом конце отрезка $[a;b]$, то

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{a+\varepsilon}^b f(x).$$

Если функция $f(x)$ имеет разрыв в точке $x=c$, $c\in[a;b]$ и $\lim\limits_{x\to c} f(x)=\infty$ хотя бы с одной стороны, то $\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_a^c f(x)dx + \int\limits_c^b f(x)dx$.

Если каждый из несобственных интегралов, стоящих справа, сходится, то сходится и интеграл, стоящий слева.

Пример 9. $\int\limits_{0,5}^{1}\dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$.

Подынтегральная функция $f(x)=\dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$ не определена при $x=1$, следовательно, мы имеем несобственный интеграл 2 рода (при верхнем пределе).

$$\int_{0,5}^{1}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{0,5}^{1-\varepsilon}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \lim_{\varepsilon\to 0}\arcsin x\Big|_{0,5}^{1-\varepsilon} =$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0}(\arcsin(1-\varepsilon)-\arcsin 0,5) == \frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{3}.$$

Несобственный интеграл сходится и равен $\dfrac{\pi}{3}$.

Пример 10. $\int\limits_{-1}^{1}\dfrac{dx}{x^2}$.

На отрезке интегрирования $[-1;1]$ подынтегральная функция $f(x)=\dfrac{1}{x^2}$ имеет точку разрыва $x=0$.

$$\int_{-1}^{1}\frac{dx}{x^2} = \int_{-1}^{0}\frac{dx}{x^2}+\int_{0}^{1}\frac{dx}{x^2} = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{-1}^{0-\varepsilon}\frac{dx}{x^2} + \lim_{\delta\to 0}\int_{0+\delta}^{1}\frac{dx}{x^2}.$$

Рассмотрим первое слагаемое.

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{-1}^{0-\varepsilon}\frac{dx}{x^2} = \lim_{\varepsilon\to 0}\left(-\frac{1}{x}\right)\Big|_{-1}^{0-\varepsilon} = \lim_{\varepsilon\to 0}\left(-\frac{1}{\varepsilon}+1\right)=\infty.$$

Предел не существует, следовательно, несобственный интеграл 2 рода $\int\limits_{-1}^{1}\dfrac{dx}{x^2}$ по определению расходится.

Для определения сходимости несобственных интегралов от разрывных функций и оценки их значений могут быть применены теоремы, аналогичные теоремам для оценки интегралов с бесконечными пределами.

2.7.ОБЩИЙ ПРИНЦИП ПРИЛОЖЕНИЯ ОПРЕДЕЛЕННОГО ИНТЕГРАЛА

Общий принцип приложений определенного интеграла к вычислению геометрических, физических и других величин.

1. Вычисляемая величина A произвольным образом разбивается на n малых величин: $A = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$.
2. Каждая величина a_i заменяется величиной a_i^* (близкой к a_i), вычисление которой ведется по известной формуле; ошибка $\alpha_i = a_i - a_i^*$ должна быть бесконечно малой высшего порядка по сравнению с a_i, т.е. a_i и a_i^* - бесконечно малые одного порядка.
3. Величину a_i^* выражают через некоторую переменную x, выбранную так, чтобы a_i^* приняло вид $f(x_i)\Delta x_i$.
4. Искомая величина вычисляется как предел суммы

$$A = \lim_{\max \Delta x \to 0} \sum_{i=1}^{n} a_i^* = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x_i = \int_a^b f(x)dx.$$

2.8.ВЫЧИСЛЕНИЕ ПЛОЩАДИ ПЛОСКОЙ ФИГУРЫ

1 случай.

а) Площадь криволинейной трапеции, ограниченной непрерывной кривой $y = f(x) > 0$ и прямыми $x = a$, $x = b$, $y = 0$ (рис. 3), вычисляем по формуле $S = \int_a^b f(x)dx$;

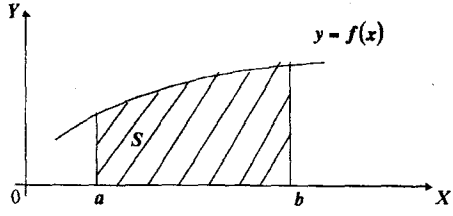


Рис.3

б) **Площадь фигуры**, заключенной между двумя кривыми $y = f_1(x)$ и

$y = f_2(x)$, а справа и слева отрезками прямых $x = a$ и $x = b$ (возможно точки) (рис.4), вычисляем по формуле $S = \int_a^b (f_2(x) - f_1(x))dx$.

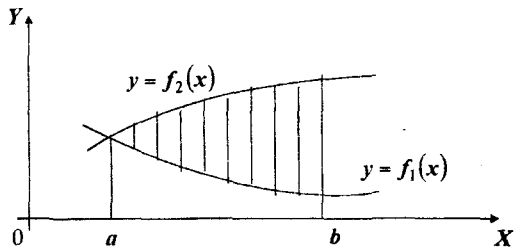


Рис.4

Пример 12. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями $y = 4 - x^2$, $y = 2x + 1$.

Решение. Построим фигуру, ограниченную заданными линиями.

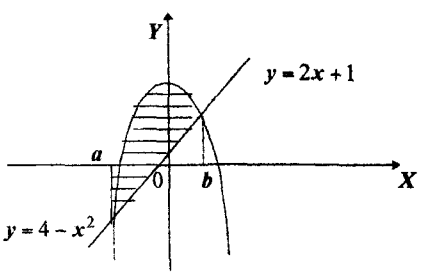


Рис.5

Данная фигура ограничена сверху кривой $y = 4 - x^2$ и снизу прямой $y = 2x + 1$, то для вычисления площади применим формулу:

$$S = \int_a^b (y_2(x) - y_1(x))dx.$$

Для того чтобы найти пределы изменения x, найдем абсциссы точек пересечения линий:

$$\begin{cases} y = 4 - x^2, \\ y = 2x + 1. \end{cases}$$

$$4 - x^2 = 2x + 1,\ x^2 + 2x - 3 = 0,\ x_1 = -3,\ x_2 = 1.$$

Следовательно, для данной области $-3 \le x \le 1$, т.е. $a = -3$, $b = 1$.

$$S=\int_{-3}^{1}\left(4-x^2-2x-1\right)dx=-\int_{-3}^{1}\left(x^2+2x-3\right)dx=\left(\frac{x^3}{3}+x^2-3x\right)\Bigg|_{-3}^{1}=$$

$$=-\left(\frac{1}{3}+1-3+9-9-9\right)=\frac{32}{3}.$$

Ответ: $S=\frac{32}{3}$ (кв.ед.);

в) Площадь фигуры, заключенной между двумя кривыми $x=\varphi_1(y)$ и $x=\varphi_2(y)$, а снизу и сверху отрезками прямых $y=c$ и $y=d$ (возможно точками) (рис.6), вычисляем по формуле $S=\int_{c}^{d}\left(\varphi_2(x)-\varphi_1(x)\right)dy$.

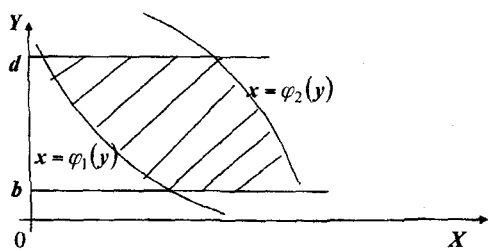


Рис.6

Пример 13. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями $y^2=x+1$, $y=1-x$.

Решение. Построим фигуру, ограниченную линиями $y^2=x+1$, $y=1-x$ (рис.7).

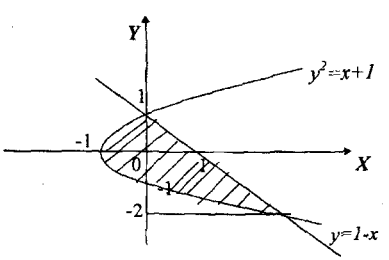


Рис.7

Фигуру можно рассматривать относительно оси ***OY***: слева ограничена кривой $x=y^2-1$, справа $x=1-y$.

Найдем ординаты точек пересечения:

$$\begin{cases}x=y^2-1,\\ x=1-y.\end{cases}$$

$$y^2 - 1 = 1 - y,\ y^2 + y - 2 = 0,$$
$$y_1 = -2,\ y_2 = 1, \text{ т.е. } c = -2,\ d = 1.$$

Тогда

$$S = \int_{-2}^{1}(1 - y - y^2 + 1)dy = \int_{-2}^{1}(2 - y - y^2)dy = \left(2y - \frac{1}{2}y^2 - \frac{1}{3}y^3\right)\Bigg|_{-2}^{1} =$$
$$= 2 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + 4 + 2 - \frac{8}{3} = 4{,}5.$$

Ответ: $S = 4{,}5$ (кв.ед).

2 случай. Пусть криволинейная трапеция ограничена кривой, заданной уравнениями в параметрической форме (рис.8):

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t). \end{cases}$$
$$\alpha \le t \le \beta \quad \text{и} \quad x(\alpha) = a, \quad x(\beta) = b.$$

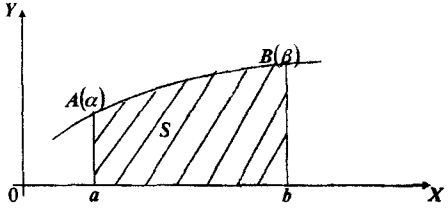


Рис.8

Так как $S = \int_a^b y(x)dx$, сделаем замену переменной в этом интеграле:

$$x = x(t),\ dx = x'(t)dt,\ y(x) = y(x(t)) = y(t).$$

Следовательно, $$S = \int_{\alpha}^{\beta} y(t)x'(t)dt.$$

Эта формула справедлива как для криволинейной трапеции, так и для замкнутой кривой или петли.

Пример 14. Вычислить площадь области, ограниченной одной аркой циклоиды и осью OX:

$$\begin{cases} x = 2(t - \sin t), \\ y = 2(1 - \cos t). \end{cases}$$

Решение. Построим одну арку циклоиды, для этого составим таблицу значений.

Таблица 1

t	0	$\frac{1}{4}\pi$	$\frac{1}{2}\pi$	$\frac{3}{4}\pi$	π	$\frac{5}{4}\pi$	$\frac{3}{2}\pi$	$\frac{7}{4}\pi$	2π
x	0	0,16	1,14	3,28	6,28	9,27	11,42	12,41	12,56
y	0	0,58	2	3,14	4	3,41	2	0,58	0

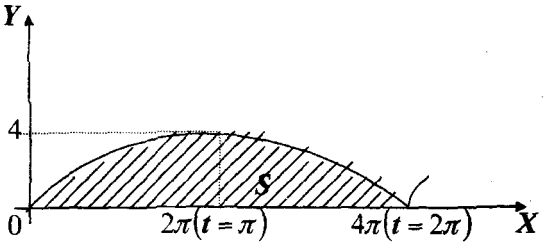


Рис.9

По формуле имеем

$$S = \int_{\alpha}^{\beta} y(t)x'(t)dt = \int_{0}^{2\pi} 2(1-\cos t)2(1-\cos t)dt = 4\int_{0}^{2\pi}(1-\cos t)^2 dt =$$

$$= 4\int_{0}^{2\pi}(1-2\cos t+\cos^2 t)dt = 4\left(t\Big|_0^{2\pi} - 2\sin t\Big|_0^{2\pi} + \frac{1}{2}\int_{0}^{2\pi}(1+\cos 2t)dt\right) =$$

$$= 4\left(2\pi + \frac{1}{2}t\Big|_0^{2\pi} + \frac{1}{4}\sin 2t\Big|_0^{2\pi}\right) = 12\pi.$$

Ответ: $S = 12\pi$ (кв.ед).

3 случай. Площадь криволинейного сектора.

Пусть в полярной системе координат имеем кривую, заданную уравнением $\rho = \rho(\varphi)$, где $\rho(\varphi)$ - непрерывная функция при $\varphi \in [\varphi_1; \varphi_2]$. Площадь криволинейного сектора, ограниченного кривой $\rho = \rho(\varphi)$ и радиус - векторами $\varphi = \varphi_1$ и $\varphi = \varphi_2$ (рис.10) вычисляем по формуле

$$S = \frac{1}{2}\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \rho^2 d\varphi.$$

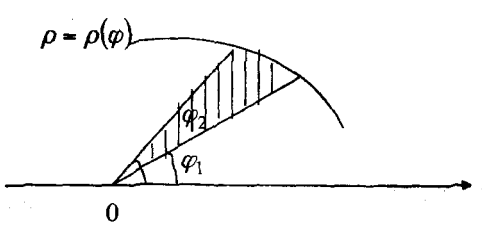


Рис.10

Пример 15. Вычислить площадь, ограниченную кардиоидой $\rho = a(1+\cos\varphi)$.

Решение. Построим кривую $\rho = a(1+\cos\varphi)$, для этого составим таблицу значений.

Таблица 2

φ	0	$\frac{1}{4}\pi$	$\frac{1}{2}\pi$	$\frac{3}{4}\pi$	π	$\frac{5}{4}\pi$	$\frac{3}{2}\pi$	$\frac{7}{4}\pi$	2π
ρ	$2a$	$1{,}7a$	a	$0{,}3a$	0	$0{,}3a$	a	$1{,}7a$	$2a$

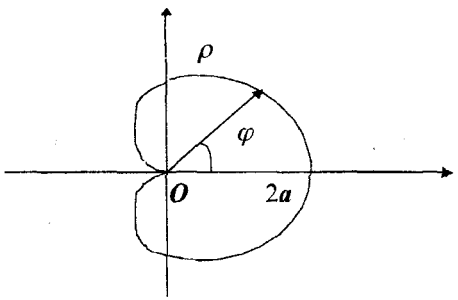


Рис.11

Кривая симметрична относительно полярной оси. Полярный угол для всей кардиоиды изменяется от 0 до 2π, для половины кардиоиды угол изменяется от 0 до π.
Тогда

$$S = \frac{1}{2}\int_{\varphi_1}^{\varphi_2}\rho^2 d\varphi = \frac{1}{2}a^2\int_0^{2\pi}(1+\cos\varphi)^2 d\varphi = \frac{1}{2}2a^2\int_0^{\pi}(1+2\cos\varphi+\cos^2\varphi)^2 d\varphi =$$

$$= a^2\left(\int_0^{\pi}d\varphi + 2\int_0^{\pi}\cos\varphi d\varphi + \frac{1}{2}\int_0^{\pi}(1+\cos 2\varphi)d\varphi\right) =$$

$$= a^2\left(\varphi\Big|_0^{\pi} + 2\sin\varphi\Big|_0^{\pi} + \frac{1}{2}\varphi\Big|_0^{\pi} + \frac{1}{4}\sin 2\varphi\Big|_0^{\pi}\right) = a^2\left(\pi + \frac{\pi}{2}\right) = \frac{3\pi a^2}{2}.$$

Ответ: $S = \dfrac{3\pi a^2}{2}$ (кв.ед).

2.9. ВЫЧИСЛЕНИЕ ДЛИНЫ ДУГИ ПЛОСКОЙ КРИВОЙ

1 случай. Пусть в прямоугольных координатах на плоскости дана кривая $y = f(x)$. Вычислим длину дуги кривой, заключенной между точками $A(a, f(a))$ и $B(b, f(b))$ (рис. 12)

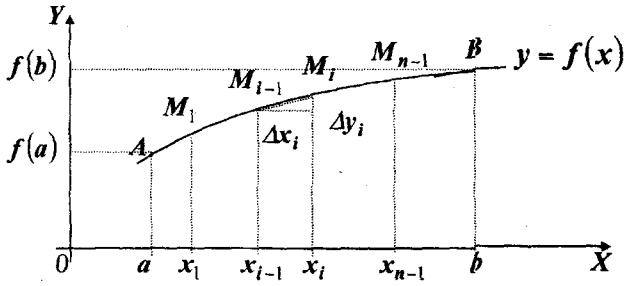


Рис.12

Возьмем на дуге AB точки $A, M_1, ..., M_i, B$ с абсциссами $x_0 = a$, $x_1, x_2, ..., x_{i-1}, x_i, ..., x_n = b$ и проведем хорды $AM_1, M_1M_2, ..., M_{n-1}B$, длины которых обозначим соответственно $\Delta L_1, \Delta L_2, ..., \Delta L_n$. Тогда получим ломаную $AM_1M_2...M_{n-1}B$, вписанную в дугу AB. Длина ломаной равна

$$L = \sum_{i=1}^{n} \Delta L_i .$$

Определение. Длиной L дуги AB называется тот предел, к которому стремится длина вписанной ломаной, когда длина ее наибольшего звена стремится к нулю:

$$L = \lim_{\max \Delta L_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} \Delta L_i .$$

Длина всей дуги AB, заключенной между точками $A(a, f(a))$ и $B(b, f(b))$, вычислим по формуле

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + (y')^2}\, dx .$$

Пример 16. Найти длину окружности $x^2 + y^2 = R^2$.

Решение. Вычислим сначала длину четверти окружности, расположенной в 1 четверти.

Из уравнения окружности $y = \sqrt{R^2 - x^2}$, $x \in [0; R]$.

Тогда $y' = -\dfrac{x}{\sqrt{R^2 - x^2}}$.

Длина всей окружности

$$L = 4 \cdot \int_0^R \sqrt{1 + \frac{x^2}{R^2 - x^2}}\, dx = 4 \cdot \int_0^R \sqrt{\frac{R^2 - x^2 + x^2}{R^2 - x^2}}\, dx = 4R \cdot \int_0^R \frac{1}{\sqrt{R^2 - x^2}}\, dx =$$

$$= 4R \cdot \arcsin\frac{x}{R}\Big|_0^R = 4R(\arcsin 1 - \arcsin 0) = 4R\frac{\pi}{2} = 2\pi R.$$

Ответ: $L = 2\pi R$ (лин.ед).

2 случай. Длина дуги кривой, заданной параметрически:

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \end{cases}$$

$$\alpha \le t \le \beta \quad \text{и} \quad x(\alpha) = a, \quad x(\beta) = b,$$

вычисляется по формуле

$$L = \int_\alpha^\beta \sqrt{x'^2 + y'^2}\,dt.$$

Пример 17. Вычислить длину окружности, заданной параметрически:

$$\begin{cases} x = R\cos t, \\ y = R\sin t. \end{cases}$$

Решение. Для всей окружности t изменяется от 0 до 2π, тогда для четверти окружности t изменяется от 0 до $\frac{\pi}{2}$.

$$L = 4\int_0^{\pi/2} \sqrt{(-R\sin t)^2 + (R\cos t)^2}\,dt = 4R\int_0^{\pi/2} dt = 4Rt\Big|_0^{\pi/2} = 4R\frac{\pi}{2} = 2\pi R.$$

Ответ: $L = 2\pi R$.

3 случай. Если кривая задана в полярных координатах $\rho = \rho(\varphi)$, то длина дуги кривой, заключенной между лучами $\varphi = \varphi_1$ и $\varphi = \varphi_2$ (рис.10), можно вычислить по формуле

$$L = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \sqrt{(\rho')^2 + \rho^2}\,d\varphi.$$

Пример 18. Вычислить длину кардиоиды $\rho = a(1 + \cos\varphi)$

Решение. Для всей кардиоиды полярный угол изменяется от 0 до 2π, для половины - от 0 до π.

Тогда

$$L = \int_0^{2\pi} \sqrt{(-a\sin\varphi)^2 + a^2(1+\cos\varphi)^2}\,d\varphi =$$

$$= 2a\int_0^{\pi} \sqrt{\sin^2\varphi + 1 + 2\cos\varphi + \cos^2\varphi}\,d\varphi =$$

$$= 2a\int_0^{\pi}\sqrt{2+2\cos\varphi}d\varphi = 2\sqrt{2}a\int_0^{\pi}\sqrt{1+\cos\varphi}d\varphi =$$

$$= 2\sqrt{2}a\int_0^{\pi}\sqrt{2\cos^2\frac{\varphi}{2}}d\varphi == 4a\int_0^{\pi}\cos\frac{\varphi}{2}d\varphi = 8a\sin\frac{\varphi}{2}\Big|_0^{\pi} = 8a.$$

Ответ: $L = 8a$ (ед.).

2.10. ВЫЧИСЛЕНИЕ ОБЪЕМА ТЕЛА

1 случай. **Метод параллельных сечений.**

Пусть для некоторого тела известна площадь S любого сечения этого тела плоскостью, перпендикулярной к оси OX (рис. 13).

Эта площадь будет зависеть от положения секущей плоскости, т.е. будет функцией от x: $S = S(x)$. Пусть $S = S(x)$ непрерывная функция. Проведем плоскости, перпендикулярные оси OX через точки деления отрезка $[a;b]$.

Эти плоскости разобьют тело на слои. На каждом частичном промежутке $[x_{i-1}; x_i]$ возьмем произвольную точку ξ_i и заменим каждый слой цилиндром с высотой Δx_i и основанием $S(\xi_i)$. Объем каждого такого цилиндра равен $V_i = S(\xi_i)\Delta x_i$. Тогда объем всего ступенчатого тела будет равен сумме объемов
V_i, $i = 1,...,n$. Так как $S = S(x)$ есть непрерывная функция, то существует конечный предел

$$V = \lim_{\max\Delta x_i \to 0}\sum_{i=1}^{n} S(\xi_i)\Delta x_i,$$

который называется объемом тела V, т.е.

$$V = \int_a^b S(x)dx.$$

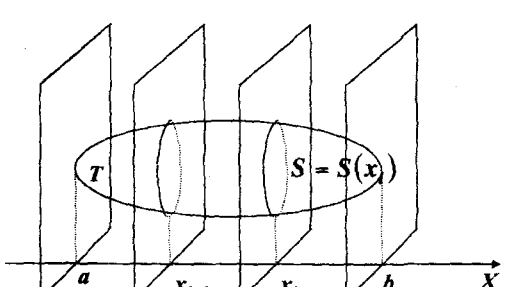


Рис.13

Пример 19.

Найти объем тела, образованного поверхностями $x = 4$, $x = y^2 + z^2$.

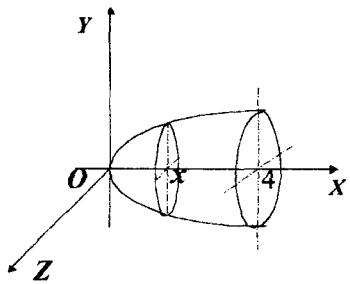


Рис.14

Решение. Построим это тело (параболоид, отсеченный плоскостью $x = 4$) (рис. 14).

Проведем сечение через произвольную точку x. Сечением будет круг радиуса $\sqrt{x}$, уравнение сечения $y^2 + z^2 = \left(\sqrt{x}\right)^2$.

Известно, что площадь круга равна $S = \pi \cdot R^2$, следовательно, площадь сечения, проведенного через произвольную точку $x \in [0,4]$, равна

$$S(x) = \pi\left(\sqrt{x}\right)^2 = \pi x.$$

Тогда

$$V = \int_0^4 \pi x dx = \pi \frac{x^2}{2}\Big|_0^4 = 8\pi.$$

Ответ: $V = 8\pi$ (куб.ед).

2 случай. **Вычисление объема тела вращения.**

Пусть криволинейная трапеция, ограниченная графиком непрерывной функции $y = f(x)$, осью OX и прямыми $x = a, x = b$, вращается вокруг оси OX (рис. 15).

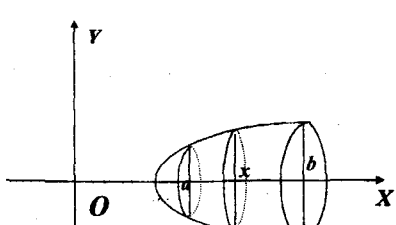


Рис.15

В этом случае произвольное сечение тела плоскостью, перпендикулярной к оси OX, есть круг радиуса $y = f(x)$, площадь которого

$$S = \pi \cdot y^2 = \pi \cdot f^2(x).$$

Тогда

$$V_x = \int_a^b S(x)dx = \pi \int_a^b f^2(x)dx = \pi \int_a^b y^2 dx.$$

Если криволинейная трапеция, ограниченная непрерывной функцией $x = \varphi(y)$, осью OY и прямыми $y = c$ и $y = d$, вращается вокруг оси OY, то объем полученного тела вращения можно вычислить

$$V_y = \int_c^d \varphi^2(y)dy = \pi \int_c^d x^2 dy.$$

Пример 20. Найти объем тела, образованного вращением вокруг оси OY параболы $y = x^2$, ограниченной прямой $y = 4$ (рис. 16).

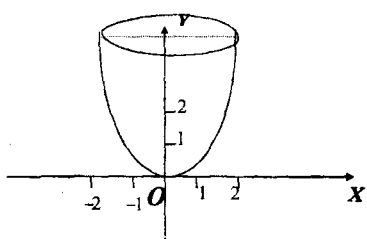


Рис.16

Решение. Объем тела вращения вокруг оси OY вычислим по формуле

$$V_y = \pi \int_c^d x^2 dy.$$

В нашем примере $x = \sqrt{y}$, $0 \le y \le 4$.

Следовательно,

$$V = \pi \int_0^4 \left(\sqrt{y}\right)^2 dy = \pi \int_0^4 y dy = \pi \frac{y^2}{2}\Big|_0^4 = 8\pi.$$

Ответ: $V = 8\pi$ (куб.ед).

2.11. ПРИБЛИЖЕНОЕ ВЫЧИСЛЕНИЕ ОПРЕДЕЛЕННОГО ИНТЕГРАЛА

Не для всякой непрерывной функции ее первообразная выражается через элементарные функции. В этих случаях вычисление определенных

интегралов по формуле Ньютона – Лейбница затруднительно и применяются различные методы вычисления определенных интегралов.

Разделим отрезок интегрирования на четное число частей $n = 2m$. Сущность метода парабол состоит в том, что площадь криволинейной трапеции, соответствующей первым двум отрезкам $[x_0; x_1]$ и $[x_1; x2]$ и ограниченной заданной кривой $y = f(x)$, заменяется площадью такой криволинейной трапецией, которая сверху ограничена параболой, проходящей через 3 точки (рис. 17): $M_0(x_0,y_0)$, $M_1(x_1,y_1)$, $M_2(x_2,y_2)$.

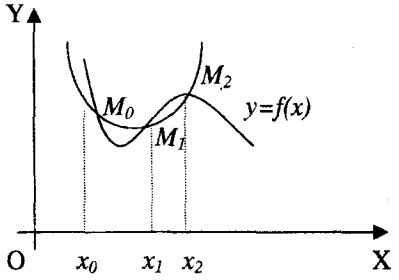


Рис. 17

Площадь параболической трапеции на отрезке $[x_0; x_2]$ будет равна

$$S = \frac{\Delta x}{3}(y_0 + 4y_1 + y_2),$$

т. е. мы имеем приближенное равенство

$$\int_{x_0}^{x_2} f(x)dx \approx \frac{\Delta x}{3}(y_0 + 4y_1 + y_2)$$

и на каждом отрезке $[x_{2i-2}; x_{2i}]$

$$\int_{x_{2i-2}}^{x_{2i}} f(x)dx \approx \frac{\Delta x}{3}(y_{2i-2} + 4y_{2i-1} + y_{2i}), \quad i = 1,2,...m$$

Просуммировав площади параболических трапеций, будем иметь

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{6 \cdot m}[y_0 + y_{2m} + 2(y_2 + y_4 + ... + y_{2m-2}) +$$

$$+ 4(y_1 + y_3 + ... + y_{2m-1})].$$

Это и есть формула Симпсона.

Пример 21. Вычислить интеграл $\int_0^1 \sqrt{1 + x^4}\,dx$.

Данный интеграл от дифференциального **бинома в дифференциальных функциях** не вычисляется.

Разделим отрезок интегрирования на 10 равных частей, длина частичного отрезка $\Delta x = \frac{b-a}{10} = 0{,}1$

Составим таблицу.

Таблица 3

k	x_k	$y_k=f(x_k)$	3	0.3	1.00404	7	0.7	1.11360
0	0	1	4	0.4	101272	8	0.8	1.18727
1	0.1	1.00005	5	0.5	1.03078	9	0.9	1.28690
2	0.2	1.00080	6	0.6	1.06283	10	1.0	1.41421

По формуле Симпсона $m = 5$ $(n = 2m, n = 10)$

$$\int_0^1 \sqrt{1+x^4}\,dx \approx \frac{b-a}{6\cdot 5}[y_0 + y_{10} + 2(y_2 + y_4 + y_6 + y_8) +$$

$$+ 4(y_1 + y_3 + y_5 + y_7 + y_9)] =$$

$$= \frac{1}{30}\left[\begin{matrix}1+1{,}41421+2(1{,}0008+1{,}01272+1{,}06283+1{,}18727)+\\ 4(1{,}00005+1{,}00404+1{,}03078++1{,}11360+1{,}28690)\end{matrix}\right] =$$

$$= \frac{1}{30}\cdot 32{,}68293 = 1{,}089431.$$

ЗАДАЧИ КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ

"Интегральное исчисление функции одной переменной"

Вариант 1

1.Найти неопределенные интегралы.

1.1. $\int \sin(3x+1)dx$

1.2. $\int \frac{dx}{9+4x^2}$

1.3. $\int \frac{tg^2 3x}{\cos^2 3x}$

1.4. $\int \frac{2x^2+3}{x+1}dx$

1.5. $\int \frac{dx}{3+\sqrt{x-3}}$

1.6. $\int x \cdot \ln(x+1)dx$

1.7. $\int \frac{dx}{x^2-5x+6}$

1.8. $\int \frac{x+4}{2x^2-6x-8}dx$

1.9. $\int \frac{3x+13}{(x-1)\cdot(x^2+2x+5)}dx$

1.10. $\int \frac{2x-13}{\sqrt{3x^2-3x-16}}dx$

1.11. $\int \cos 3x \cdot \sin 2x \cdot dx$

2.Исследовать несобственные интегралы на сходимость.

2.1. $\int_1^4 \frac{dx}{(x-3)^2}$

2.2. $\int_2^{+\infty} \frac{dx}{2x+3}$

3.Вычислить приближенное значение определенного интеграла $\int_{-2}^{8} \sqrt{x^3+16}dx$ с помощью формулы Симпсона, разбив отрезок интегрирования на 10 частей. Все вычисления производить с округлением до третьего десятичного знака.

4.Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y = x$, $y = 6 - x$, $x = 0$.

5. Вычислить длину дуги кривой $\begin{cases} x = 5(t - \sin t), \\ y = 5(1 - \cos t), \end{cases} 0 \le t \le \pi$.

6. Вычислить объем тела, образованного вращением вокруг оси OX фигуры, ограниченной графиками функций : $y = -x^2 + 5x - 6$, $y = 0$.

"Интегральное исчисление функции одной переменной"

Вариант 2

1.Найти неопределенные интегралы.

1.1. $\int e^{3x+2}dx$

1.2. $\int \frac{dx}{4+9x^2}$

1.3. $\int \frac{arcsin 3x}{\sqrt{1-9x^2}}dx$

1.4. $\int \frac{x^2+2x+5}{x-2}dx$

1.5. $\int \frac{2xdx}{\sqrt{x-2}}$

1.6. $\int (x^2-4)sin 5xdx$

1.7. $\int \frac{dx}{3x^2-8x-3}$

1.8. $\int \frac{x+5}{x^2+x-2}dx$

1.9. $\int \frac{12-6x}{(x+1)\cdot(x^2-4x+13)}dx$

1.10. $\int \frac{x-3}{\sqrt{2x^2-4x-1}}dx$

1.11. $\int cos^2 2x\, sin^3 2xdx$

2.Исследовать несобственные интегралы на сходимость.

2.1. $\int_0^3 \frac{dx}{x-2}$

2.2. $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1-4x^2}$

3.Вычислить приближенное значение определенного интеграла $\int_2^{12} \sqrt{x^3+9}dx$ с помощью формулы Симпсона, разбив отрезок интегрирования на 10 частей. Все вычисления производить с округлением до третьего десятичного знака.

4.Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y^2 = 9x, y = x + 2$.

5. Вычислить длину дуги кривой $\begin{cases} x = 10cos^3 t \\ y = 10sin^3 t, \end{cases} 0 \le t \le \frac{\pi}{2}$.

6. Вычислить объем тела, образованного вращением вокруг оси OY фигуры, ограниченной графиками функций: $y = x^2$, $x = 2$, $y = 0$.

"Интегральное исчисление функции одной переменной"

Вариант 3

1.Найти неопределенные интегралы.

1.1. $\int \cos(2x-3)dx$

1.2. $\int \frac{dx}{4x^2-9}$

1.3. $\int e^{x^2+2x} \cdot (x+1) \cdot dx$

1.4. $\int \frac{x^3+3}{x-1} dx$

1.5. $\int \frac{x^2}{\sqrt{3-x}} dx$

1.6. $\int (x+1) \cdot e^{2x} \cdot dx$

1.7. $\int \frac{dx}{-x^2+5x-6}$

1.8. $\int \frac{5x-2}{2x^2-5x+2} dx$

1.9. $\int \frac{2x^2+2x+20}{(x-1)\cdot(x^2-2x+5)} dx$

1.10. $\int \frac{2x+1}{\sqrt{1+x-3x^2}} dx$

1.11. $tg^3 2x \cdot dx$

2.Исследовать несобственные интегралы на сходимость.

2.1. $\int_{-2}^{0} \frac{dx}{(x+1)^2}$

2.2. $\int_{0}^{+\infty} x \cdot e^{-x^2} \cdot dx$

3.Вычислить приближенное значение определенного интеграла $\int_{-3}^{7} \sqrt{x^3+32} \cdot dx$ с помощью формулы Симпсона, разбив отрезок интегрирования на 10 частей. Все вычисления производить с округлением до третьего десятичного знака.

4.Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $\begin{cases} x = t - \sin t, \\ y = 1 - \cos t, \end{cases} \quad 0 \le t \le 2\pi$.

5. Вычислить длину дуги кривой $y = \ln x, \quad \sqrt{3} \le x \le \sqrt{15}$.

6. Вычислить объем тела, образованного вращением вокруг оси OY фигуры, ограниченной графиками функций : $y = 2x - x^2, \quad y = 4x - 2x^2$.

"Интегральное исчисление функции одной переменной"

Вариант 4

1.Найти неопределенные интегралы.

1.1. $\int \frac{dx}{\cos^2 4x}$

1.2. $\int \frac{dx}{\sqrt{7-4x^2}}$

1.3. $\int \frac{dx}{\arccos 2x \cdot \sqrt{1-4x^2}}$

1.4. $\int \frac{3x^2+4}{2-x} dx$

1.5. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x+3}}$

1.6. $\int x^2 \cdot \sin x \cdot dx$

1.7. $\int \frac{dx}{x^2+4x+25}$

1.8. $\int \frac{4x-1}{4x^2-4x+5} dx$

1.9. $\int \frac{36dx}{(x+2)(x^2-2x+10)}$

1.10. $\int \frac{2x-10}{\sqrt{1+x-x^2}} dx$

1.11. $\int \sin^5 3x \cdot dx$

2.Исследовать несобственные интегралы на сходимость.

2.1. $\int_{-3}^{2} \frac{dx}{(x+3)^2}$

2.2. $\int_{-1}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+x+1}$

3.Вычислить приближенное значение определенного интеграла $\int_0^{10} \sqrt{x^3+5} \cdot dx$ с помощью формулы Симпсона, разбив отрезок интегрирования на 10 частей. Все вычисления производить с округлением до третьего десятичного знака.

4.Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями

$$\begin{cases} x = t - \sin t, \\ y = 1 - \cos t, \quad 0 \le y \le 2\pi. \end{cases}$$

5. Вычислить длину дуги кривой $y = \ln x, \ \sqrt{3} \le x \le \sqrt{15}$.

6. Вычислить объем тела, образованного вращением вокруг оси OY фигуры, ограниченной графиками функций :

$$y = 3\sin x, \ \ y = sunx, \ \ 0 \le x \le \pi.$$

"Интегральное исчисление функции одной переменной"

Вариант 5

1.Найти неопределенные интегралы.

1.1. $\int \frac{dx}{\sin^2 9x}$

1.2. $\int \frac{dx}{4+9x^2}$

1.3. $\int \frac{\ln(3x+1)}{3x+1}dx$

1.4. $\int \frac{3x^2-2x+5}{1-x}dx$

1.5. $\int \frac{\sqrt{x-2}}{x+1}dx$

1.6. $\int x^2 \cos 2x dx$

1.7. $\int \frac{dx}{2x^2-3x-2}$

1.8. $\int \frac{x+1}{2x^2+x+1}dx$

1.9. $\int \frac{9x-9}{(x+1)\cdot(x^2-2x+5)}dx$

1.10. $\int \frac{3x+4}{\sqrt{x^2+6x+13}}dx$

1.11. $\int \frac{dx}{5-3\cos x}$

2.Исследовать несобственные интегралы на сходимость.

2.1. $\int_1^2 \frac{dx}{(x-1)^2}$

2.2. $\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x \ln x}$

3.Вычислить приближенное значение определенного интеграла $\int_{-1}^{9} \sqrt{x^3+2}\cdot dx$ с помощью формулы Симпсона, разбив отрезок интегрирования на 10 частей. Все вычисления производить с округлением до третьего десятичного знака.

4.Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $\begin{cases} x = 2\cos t, \\ y = 6\sin t \end{cases}$

5. Вычислить длину дуги кривой $y = \frac{e^x + e^{-x}}{2} + 3, \quad 0 \le x \le 2.$

6. Вычислить объем тела, образованного вращением вокруг оси OX фигуры, ограниченной графиками функций:

$y = x^2 + 1, \quad y = x, \quad x = 0, \quad x = 1.$

"Интегральное исчисление функции одной переменной"

Вариант 6

1.Найти неопределенные интегралы.

1.1. $\int 2^{3x-2}dx$

1.2. $\int \frac{dx}{\sqrt{4-9x^2}}$

1.3. $\int \frac{2x-3}{x^2-3x+4}dx$

1.4. $\int \frac{3x^3+4x+4}{x+2}dx$

1.5. $\int \frac{dx}{\sqrt{x}+3}$

1.6. $\int x^2 \cdot arctgx \cdot dx$

1.7. $\int \frac{dx}{2x^2-6x+1}$

1.8. $\int \frac{x+1}{3x^2-2x-3}dx$

1.9. $\int \frac{4x^2+3x+17}{(x-1)\cdot(x^2+2x+5)}$

1.10. $\int \frac{5x+2}{\sqrt{x^2+3x-4}}dx$

1.11. $\int \sin 3x \cdot \cos x \cdot dx$

2.Исследовать несобственные интегралы на сходимость.

2.1. $\int_0^3 \frac{dx}{(x-2)^2}$

2.2. $\int_0^\infty \frac{x^3dx}{1+x^4}$

3.Вычислить приближенное значение определенного интеграла $\int_2^{12} \sqrt{x^3+4} \cdot dx$ с помощью формулы Симпсона, разбив отрезок интегрирования на 10 частей. Все вычисления производить с округлением до третьего десятичного знака.

4.Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $\rho = 3(1+\cos\varphi)$.

5. Вычислить длину дуги кривой $y = -\ln\cos x,\ 0 \le x \le \frac{\pi}{6}$.

6. Вычислить объем тела, образованного вращением вокруг оси OX фигуры, ограниченной графиками функций : $y = x^2,\ x = 2,\ y = 0$.

"Интегральное исчисление функции одной переменной"

Вариант 7

1.Найти неопределенные интегралы.

1.1. $\int \frac{dx}{(3x+1)}$

1.2. $\int \frac{dx}{9x^2-4}$

1.3. $\int \frac{ctg2x}{\sin^2 2x}dx$

1.4. $\int \frac{2x^3-x+4}{3-x}dx$

1.5. $\int \frac{x+1}{\sqrt{x}(x-2)}dx$

1.6. $\int \arcsin 2x \cdot dx$

1.7. $\int \frac{dx}{x^2-6x+8}$

1.8. $\int \frac{x-3}{x^2-5x+4}dx$

1.9. $\int \frac{(x^2-5x+46)dx}{(x+2)\cdot(x^2-2x+10)}$

1.10. $\int \frac{2x-1}{\sqrt{x^2-3x+4}}dx$

1.11. $\int \cos^3 3x \sin^2 2x \cdot dx$

2.Исследовать несобственные интегралы на сходимость.

2.1. $\int_{-4}^{0} \frac{dx}{(x+3)^2}$

2.2. $\int_{1}^{\infty} \frac{\ln x}{x}dx$

3.Вычислить приближенное значение определенного интеграла $\int_{1}^{11} \sqrt{x^3+3}dx$ с помощью формулы Симпсона, разбив отрезок интегрирования на 10 частей. Все вычисления производить с округлением до третьего десятичного знака.

4.Вычислить площадь фигуры, ограниченной линией $\rho = 4\sin\varphi$.

5. Вычислить длину дуги кривой $y = -2 - e^x, \ln\sqrt{3} \le x \le \ln\sqrt{8}$.

6. Вычислить объем тела, образованного вращением вокруг оси OY фигуры, ограниченной графиками функций: $y = x^3$, $y = x^2$.

"Интегральное исчисление функции одной переменной"

Вариант 8

1.Найти неопределенные интегралы.

1.1. $\int \frac{dx}{4x-5}$

1.2. $\int \frac{dx}{3+4x^2}$

1.3. $\int (x^2+4x+5)^7 (x+2)dx$

1.4. $\int \frac{3x^2+4x-1}{x+1}dx$

1.5. $\int \frac{2}{x+\sqrt{x}}dx$

1.6. $\int x\,arctg\,2x \cdot dx$

1.7. $\int \frac{dx}{1-2x-3x^2}$

1.8. $\int \frac{2x-1}{3x^2-6x-9}dx$

1.9. $\int \frac{4x-10}{(x+2)\cdot(x^2-2x+10)}dx$

1.10. $\int \frac{3x+2}{\sqrt{4+x-x^2}}dx$

1.11. $\int \frac{dx}{3+2\sin x}$

2.Исследовать несобственные интегралы на сходимость.

2.1. $\int_{-2}^{2} \frac{dx}{x-1}$

2.2. $\int_{0}^{\infty} \frac{arctgx}{1+x^2}dx$

3.Вычислить приближенное значение определенного интеграла $\int_{-3}^{7} \sqrt{x^3+36} \cdot dx$ с помощью формулы Симпсона, разбив отрезок интегрирования на 10 частей. Все вычисления производить с округлением до третьего десятичного знака.

4.Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y = 4 - x^2$, $y = x^2 - 2x$.

5. Вычислить длину дуги кривой $\rho = 5(1-\cos\varphi), -\frac{\pi}{3} \le \varphi \le 0$.

6. Вычислить объем тела, образованного вращением вокруг оси OX фигуры, ограниченной графиками функций:

$y = 5\cos x$, $y = \cos x$, $x \ge 0$.

"Интегральное исчисление функции одной переменной"

Вариант 9

1.Найти неопределенные интегралы.

1.1. $\int \frac{dx}{\cos^2 9x}$

1.2. $\int \frac{dx}{9x^2 - 5}$

1.3. $\int 2^{3x^2+1} x dx$

1.4. $\int \frac{2x^2 - 3x + 4}{x - 3} dx$

1.5. $\int \frac{dx}{2 + \sqrt{x+3}}$

1.6. $\int (x^2 + 4) e^{2x} dx$

1.7. $\int \frac{dx}{2x^2 + 6x + 3}$

1.8. $\int \frac{2x - 1}{3 + x - 2x^2} dx$

1.9. $\int \frac{x^2 + 23}{(x+1) \cdot (x^2 + 6x + 13)} dx$

1.10. $\int \frac{2x + 4}{\sqrt{3x^2 + x - 5}} dx$

1.11. $\int \cos^3 2x dx$

2.Исследовать несобственные интегралы на сходимость.

2.1. $\int_0^1 \frac{x^2 dx}{\sqrt{1 - x^3}}$

2.2. $\int_1^\infty \frac{x^2}{1 + x^3} dx$

3.Вычислить приближенное значение определенного интеграла $\int_{-2}^{8} \sqrt{x^3 + 8} \cdot dx$ с помощью формулы Симпсона, разбив отрезок интегрирования на 10 частей. Все вычисления производить с округлением до третьего десятичного знака.

4.Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y = (x+1)^2$, $y^2 = x + 1$.

5. Вычислить длину дуги кривой $\rho = 2(1 - \cos\varphi), -\pi \le \varphi \le -\frac{\pi}{2}$.

6. Вычислить объем тела, образованного вращением вокруг оси OY фигуры, ограниченной графиками функций : $y = \ln x$, $x = 2$, $y = 0$.

"Интегральное исчисление функции одной переменной"

Вариант 10

1.Найти неопределенные интегралы.

1.1. $\int 2^{3x-1}dx$

1.2. $\int \frac{dx}{1+4x^2}$

1.3. $\int e^{\sin 3x}\cos 3x dx$

1.4. $\int \frac{3x^2+4x-3}{x+3}dx$

1.5. $\int \frac{2}{2+\sqrt{x}}dx$

1.6. $\int (x^2+1)\cos 8x dx$

1.7. $\int \frac{dx}{2x-3-4x^2}$

1.8. $\int \frac{2x-1}{3x^2-2x+6}dx$

1.9. $\int \frac{19x-x^2-34}{(x+1)\cdot(x^2-4x+13)}dx$

1.10. $\int \frac{3x+4}{\sqrt{2+3x-x^2}}dx$

1.11. $\int \cos 3x \cos 2x dx$

2.Исследовать несобственные интегралы на сходимость.

2.1. $\int_0^4 \frac{dx}{\sqrt[3]{(x-3)^2}}$

2.2. $\int_{-\infty}^0 \frac{arcgtg2x}{1+4x^2}dx$

3.Вычислить приближенное значение определенного интеграла

$\int_{-2}^{8} \sqrt{x^3+11}\cdot dx$ с помощью формулы Симпсона, разбив отрезок интегрирования на 10 частей. Все вычисления производить с округлением до третьего десятичного знака.

4.Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями

$x=(y-2)^2,\ \ x=4y-8.$

5. Вычислить длину дуги кривой $\begin{cases} x=5(t-\sin t) \\ y=5(1-\cos t), \end{cases} 0 \le t \le \pi.$

6. Вычислить объем тела, образованного вращением вокруг оси OX фигуры, ограниченной графиками функций: $y=x^2,\ \ y=-x+2,\ \ x=0$

Библиографический список

1. Бертмант А.Ф., Арамович И.Г. *Краткий курс математического анализа для вузов.*– М.: Наука, 1967. – 736с.
2. Бугров Я.С., Никольский С.М. *Дифференциальное и интегральное исчисление.* - М.: Наука, 1980. – 432с.
3. *Задачи и упражнения по математическому анализу*/ Под ред. П. Демидовича – М.: Наука, 1978. – 480с.
4. Кудрявцев А.Д. *Математический анализ.* – М.: Высшая школа, 1973. – Т.1. -614с.
5. Пискунов Н.С. *Дифференциальное и интегральное исчисление.* – М.: Наука, 1965. – Т.1. – 548с.
6. Фихтенгольц Г.М. *Курс дифференциального и интегрального исчисления.* – М.: Наука, 1970. – Т.2. – 800с.
7. Бояркина Г.П., Хоменко А.П. *Интегральное исчисление функции одного переменного. Обыкновенные дифференциальные уравнения*: Учебное пособие. Иркутск,1995. 149с.

Бояркина Галина Петровна

ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИИ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

Учебное пособие
для студентов заочного отделения
всех специальностей

Редактор Л.И. Рубанова
Компьютерная верстка Г.П. Бояркиной

Лицензия № 021231 от 23.07.97
Подписано в печать 15.09.03
Формат 60x84/16. Печать офсетная
Усл.печ.л.-4,1.Усл.-изд.л.-4,3
План 2003г.
Заказ 800 экз.

Глазковская типография, г. Иркутск, ул.Гоголя,53