Министерство транспорта Российской Федерации
Федеральное агенство железнодорожного транспорта
ГОУ ВПО «Дальневосточный государственный
университет путей сообщения»

Кафедра «Высшая математика»

А.Г. Ереклинцев

ЗАДАЧНИК-ПРАКТИКУМ ПО ЛИНЕЙНОЙ АЛГЕБРЕ

Рекомендовано
Методическим советом ДВГУПС
в качестве учебного пособия

Хабаровск
Издательство ДВГУПС
2009

УДК 512.64(075.8)
ББК В143я73
Е 700

Рецензенты:

Кафедра математики
Дальневосточного государственного гуманитарного университета
(заведующая кафедрой кандидат педагогических наук, доцент
И.В. Карпова)

Кандидат педагогических наук,
доцент кафедры «Высшая математика»
Тихоокеанского государственного университета
Т.В. Сясина

Ереклинцев, А. Г.
Е 700 Задачник-практикум по линейной алгебре : учеб. пособие / А. Г. Ереклинцев. – Хабаровск : Изд-во ДВГУПС, 2009. – 99 с.

Учебное пособие разработано в соответствии ГОС ВПО направления подготовки дипломированных специалистов всех специальностей.

Рассматриваются следующие разделы линейной алгебры: теория матриц, подстановки, определитель квадратной матрицы, системы линейных алгебраических уравнений и методы их решения.

Предназначено для студентов 1-го курса, обучающихся по направлению подготовки дипломированных специалистов, изучающих дисциплины «Алгебра», «Алгебра и геометрия», «Высшая математика».

УДК 512.64(075.8)
ББК В143я73

© ГОУ ВПО «Дальневосточный государственный
университет путей сообщения» (ДВГУПС), 2009

ВВЕДЕНИЕ

Алгебра – один из самых больших разделов математики, принадлежащих наряду с арифметикой и геометрией к числу старейших ветвей этой науки. Задачи, а также методы алгебры, отличающие её от других отраслей математики, создавались постепенно, начиная с древности, исходя из различных аспектов практической деятельности человека. Развитие алгебры, её методов и символики оказало существенное влияние на науку, подготовив серьёзный фундамент и способствуя появлению многочисленных областей математики. Наиболее важная в приложениях часть алгебры – линейная алгебра. Первым по времени возникновения вопросом, относящимся к линейной алгебре, была теория линейных уравнений, развитие которой привело к созданию теории определителей, а затем теории матриц и связанной с ней теории векторных пространств и линейных преобразований в них.

Предлагаемое учебное пособие должно оказать помощь в овладении основными понятиями, утверждениями и методами линейной алгебры, а также в умении применять их при решении различных математических задач.

Весь материал пособия разбит на разделы и подразделы, в которых приведены основные теоретические сведения (определения, утверждения и правила), примеры и задачи с подробными решениями, а также варианты для самостоятельного решения типовых задач. Такое изложение материала позволит студентам, изучающим вопросы линейной алгебры, овладеть стандартными приёмами и навыками и впоследствии творчески применять их в решении сложных задач.

Представленный в учебном пособии материал может быть использован преподавателями кафедры «Высшая математика» на лекционных и практических занятиях, консультациях и экзаменах при составлении вариантов расчётно–графических заданий, контрольных работ и экзаменационных билетов.

1. МАТРИЦЫ. ОПЕРАЦИИ С МАТРИЦАМИ

Определение 1.1. Числовой матрицей размера $m \times n$, где m – число строк, n – число столбцов, называется таблица чисел, расположенных в определённом порядке. Эти числа называются элементами матрицы. Место каждого элемента a_{ij} однозначно определяется номером строки i и номером столбца j, на пересечении которых он находится:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Иногда коротко пишут $A = [a_{ij}]_{m \times n}$, т. е. i меняется от 1 до m, j – от 1 до n.

Замечание. Матрица размерностью 1×1 состоит из одного элемента и равна этому элементу.

Далее рассмотрим **специальные виды** матриц.

Определение 1.2. Матрицей-строкой (строчечной матрицей) называется матрица A размерности $1 \times n$, состоящая из одной строки:

$$A = (a_1\ a_2 \dots a_n).$$

Определение 1.3. Матрицей-столбцом (столбцевой матрицей, числовым вектором) называется матрица A размерности $m \times 1$, состоящая из одного столбца:

$$A = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix}.$$

Определение 1.4. Квадратной матрицей порядка n называется матрица, у которой число строк и число столбцов одинаково и равно n:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Элементы матрицы, расположенные на главной диагонали матрицы, имеют одинаковые индексы строки и столбца: $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$.

Определение 1.5. Единичной матрицей E называется квадратная матрица, у которой все элементы главной диагонали равны единице, а все остальные элементы – нулю:

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 \end{pmatrix}.$$

Определение 1.6. Если в квадратной матрице $a_{ij} = a_{ji}$, то матрица называется симметричной.

Пример. $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 1 & 3 & 6 \\ 5 & 6 & 4 \end{pmatrix}$ – симметричная матрица.

Определение 1.7. Квадратная матрица вида

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & a_{22} & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

называется диагональной матрицей.

С матрицами можно выполнять следующие операции: сложение, умножение на число, умножение матриц, транспонирование.

Определение 1.8. Суммой двух матриц $A = [a_{ij}]$ и $B = [b_{ij}]$ одной размерности называется такая третья матрица $C = A + B$ той же размерности, что и матрицы–слагаемые, каждый элемент которой c_{ij} представляет собой сумму соответствующих элементов матриц A и B:

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}.$$

Определение 1.9. Произведением матрицы $A = [a_{ij}]$ на действительное число λ называется такая матрица $B = \lambda A$ той же размерности, что и матрица A, каждый элемент которой b_{ij} представляет собой произведение соответствующего элемента матрицы A на число λ:

$$b_{ij} = \lambda a_{ij}.$$

Пример. Даны матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & 3 \end{pmatrix}; \; B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 5 & 7 & 8 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix},$$

найти матрицу $2A + B$.

Пользуясь определениями 1.8 и 1.9, получим следующие матрицы:

$$2A = \begin{pmatrix} 2\cdot 1 & 2\cdot 2 & 2\cdot 3 \\ 2\cdot 2 & 2\cdot 1 & 2\cdot 4 \\ 2\cdot 3 & 2\cdot 2 & 2\cdot 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 4 & 2 & 8 \\ 6 & 4 & 6 \end{pmatrix},$$

$$2A + B = \begin{pmatrix} 2+1 & 4+3 & 6+4 \\ 4+5 & 2+7 & 8+8 \\ 6+1 & 4+2 & 6+4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 7 & 10 \\ 9 & 9 & 16 \\ 7 & 6 & 10 \end{pmatrix}.$$

Определение 1.10. Произведением матрицы $A = [a_{ij}]$ размерности $m \times k$ с матрицей $B = [b_{ij}]$ размерности $k \times n$ в указанном порядке называется такая третья матрица $C = A \cdot B$ размерности $m \times n$, каждый элемент которой c_{ij} представляет собой сумму произведений соответствующих элементов $i-$й строки матрицы A и $j-$го столбца матрицы B:

$$c_{ij} = \sum_{p=1}^{k} a_{ip} \cdot b_{pj}\,.$$

Замечание. Из определения **1.10** следует, что перемножать можно только те матрицы, у которых число столбцов первого множителя равно числу строк второго.

Определение 1.11. Матрица A^T размерности $n \times m$ называется транспонированной по отношению к матрице A размерности $m \times n$, если она получена из неё заменой строк столбцами (или, что то же, столбцов – строками):

$$A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \ldots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \ldots & a_{m2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{1n} & a_{2n} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Пример. Даны матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 4 & 1 \\ 1 & -4 & 2 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Составить матрицу $A^T B$.

Пользуясь определениями 1.10 и 1.11, получим матрицы

$$A^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & -4 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix};$$

$$A^T B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & -4 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\cdot 1 + 2\cdot 3 + 1\cdot 2 \\ 0\cdot 1 + 4\cdot 3 - 4\cdot 2 \\ 3\cdot 1 + 1\cdot 3 + 2\cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 4 \\ 10 \end{pmatrix}.$$

Пример. Найти произведение матриц

$$A = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} \text{ и } B = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

По определению 1.10, результатом перемножения матриц A и B будет матрица размерности 3×3, а при перемножении матриц B и A получится матрица размерности 1×1:

$$AB = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\cdot 2 & 1\cdot 4 & 1\cdot 1 \\ 4\cdot 2 & 4\cdot 4 & 4\cdot 1 \\ 3\cdot 2 & 3\cdot 4 & 3\cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 8 & 16 & 4 \\ 6 & 12 & 3 \end{pmatrix}.$$

$$BA = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} = 2\cdot 1 + 4\cdot 4 + 1\cdot 3 = 21.$$

Пример. Найти произведение матриц

$$A = (1\ 2) \text{ и } B = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}.$$

По определению 1.10, результатом перемножения матриц A и B будет матрица размерности 1×2:

$$(1\ 2) \cdot \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} = (1\cdot 3 + 2\cdot 5 \quad 1\cdot 4 + 2\cdot 6) = (13\ 16).$$

Пример. Дана матрица

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Записать матрицу A^3.

Воспользуемся определением 1.10 и запишем:

$$A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 & 14 \\ 7 & 18 \end{pmatrix};$$

$$A^3 = A^2 \cdot A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 11 & 14 \\ 7 & 18 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 47 & 78 \\ 39 & 86 \end{pmatrix}.$$

Теорема 1.1. Операции с матрицами обладают следующими основными свойствами:

1. $A+B=B+A$ – коммутативность сложения матриц.

2. $A+(B+C)=(A+B)+C$ – ассоциативность сложения матриц.

3. $A\cdot B\neq B\cdot A$ – произведение матриц в общем случае некоммутативно.

4. $A(BC)=(AB)C$ – ассоциативность произведения матриц.

5. $(\lambda+\mu)A=\lambda A+\mu A$ – дистрибутивность умножения матрицы на число относительно сложения действительных чисел λ, μ.

6. $\lambda(A+B)=\lambda A+\lambda B$ – дистрибутивность умножения матрицы на действительное число λ относительно сложения матриц.

7. $\left(A^T\right)^T=A$ – двойное транспонирование матрицы имеет своим результатом исходную матрицу.

8. $A\cdot E=A$, $E\cdot A=A$, если эти произведения имеют смысл.

Задания для самостоятельной работы по теме «Матрицы. Операции с матрицами»

Вариант 1

1. Даны матрицы

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & -5 & 3 \\ 12 & -3 & 7 & 8 \\ -7 & 10 & 0 & 9 \\ 12 & 13 & -2 & 7 \end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix} 2 & -3 & 11 & 2 \\ 0 & -5 & 17 & 23 \\ 17 & 5 & 12 & 11 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Записать матрицы

1) $A+B$;

2) $A-B$;

3) $2A+3B$;

4) A^T;

5) $2E+B^T$.

2. Даны матрицы

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 9 \\ 3 & 1 & 8 \end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix} -5 & 0 & 17 \\ 12 & 1 & 8 \end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix} 11 & 9 \\ 0 & 8 \\ -2 & 7 \end{pmatrix},\ D=\begin{pmatrix} 0 & 7 \\ -1 & 12 \end{pmatrix}.$$

Записать матрицы

1) $A\cdot C$;

2) $D\cdot B$;

3) $A \cdot B^T$;
4) $C \cdot (A + B)$;
5) D^3.

Вариант 2

1. Даны матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -4 & 1 \\ 10 & -1 & 6 & 0 \\ -5 & 17 & 3 & 2 \\ -4 & -1 & -2 & 12 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -8 & 15 & 7 \\ 2 & -3 & 12 & 35 \\ 14 & 2 & 10 & 10 \\ 2 & -1 & 2 & -5 \end{pmatrix}.$$

Записать матрицы
1) $A + B$;
2) $A - B$;
3) $4A - 2B$;
4) A^T;
5) $3E + 2B^T$.

2. Даны матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 8 & 7 \\ 2 & 0 & 5 \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} -7 & 2 & 10 \\ 11 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \; C = \begin{pmatrix} 15 & 8 \\ 3 & 9 \\ -1 & 6 \end{pmatrix}, \; D = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -3 & 10 \end{pmatrix}.$$

Записать матрицы
1) $A \cdot C$;
2) $D \cdot B$;
3) $A \cdot B^T$;
4) $C \cdot (A + B)$;
5) D^3.

Вариант 3

1. Даны матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 8 & 7 & -1 & 2 \\ 11 & -5 & 3 & 8 \\ -1 & 10 & 4 & 5 \\ -2 & -5 & -5 & 10 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 7 & -5 & 10 & 3 \\ 1 & -4 & 11 & 18 \\ 13 & 5 & 16 & 11 \\ 3 & -3 & 7 & -5 \end{pmatrix}.$$

Записать матрицы
1) $A + B$;

2) $A-B$;
3) $5A+B$;
4) A^T;
5) $-E-B^T$.
2. Даны матрицы

$$A=\begin{pmatrix}3 & 8 & 7\\ 2 & 0 & 5\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}-7 & 2 & 10\\ 11 & 0 & 3\end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix}15 & 8\\ 3 & 9\\ -1 & 6\end{pmatrix},\ D=\begin{pmatrix}2 & 5\\ -3 & 10\end{pmatrix}.$$

Записать матрицы
1) $A\cdot C$;
2) $D\cdot B$;
3) $A\cdot B^T$;
4) $C\cdot(A+B)$;
5) D^3.

Вариант 4

1. Даны матрицы

$$A=\begin{pmatrix}5 & 3 & -8 & 1\\ 13 & -7 & 2 & 9\\ -5 & 13 & 7 & 6\\ -1 & -6 & -4 & 12\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}9 & -3 & 16 & 9\\ 0 & -5 & 12 & 19\\ 14 & 6 & 17 & 10\\ 2 & -2 & 9 & -4\end{pmatrix}.$$

Записать матрицы
1) $A+B$;
2) $A-B$;
3) $-A+2B$;
4) A^T;
5) $12E+5B^T$.
2. Даны матрицы

$$A=\begin{pmatrix}5 & 8 & 9\\ 4 & 7 & 0\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}-1 & 8 & 14\\ 15 & 3 & 7\end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix}10 & 7\\ 6 & 4\\ -2 & 3\end{pmatrix},\ D=\begin{pmatrix}9 & 4\\ -5 & 11\end{pmatrix}.$$

Записать матрицы
1) $A\cdot C$;
2) $D\cdot B$;
3) $A\cdot B^T$;
4) $C\cdot(A+B)$;

5) D^3.

Вариант 5

1. Даны матрицы

$$A=\begin{pmatrix} 7 & 2 & -5 & 0 \\ 10 & -1 & 6 & 7 \\ -1 & 16 & 9 & 0 \\ -7 & -5 & -2 & 10 \end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} 5 & -2 & 11 & 8 \\ 7 & -3 & 10 & 18 \\ 15 & 2 & 13 & 11 \\ 0 & -1 & 0 & -5 \end{pmatrix}.$$

Записать матрицы

1) $A+B$;
2) $A-B$;
3) $-2A+2B$;
4) A^T;
5) $6E-B^T$.

2. Даны матрицы

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 7 & 5 \\ 6 & 3 & 1 \end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} -2 & 2 & 12 \\ 10 & 7 & 9 \end{pmatrix}, C=\begin{pmatrix} 11 & 9 \\ 7 & 3 \\ -5 & 1 \end{pmatrix}, D=\begin{pmatrix} 8 & 6 \\ -1 & 25 \end{pmatrix}.$$

Записать матрицы

1) $A\cdot C$;
2) $D\cdot B$;
3) $A\cdot B^T$;
4) $C\cdot(A+B)$;
5) D^3.

Вариант 6

1. Даны матрицы

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 3 & -4 & 7 \\ 23 & -7 & 7 & 6 \\ -5 & 30 & 8 & 5 \\ -5 & -9 & -1 & 32 \end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} 4 & -1 & 20 & 7 \\ 5 & -1 & 19 & 43 \\ 19 & 1 & 15 & 10 \\ 1 & -1 & 0 & -9 \end{pmatrix}.$$

Записать матрицы

1) $A+B$;
2) $A-B$;
3) $2A+3B$;
4) A^T;

5) $12E - B^T$.

2. Даны матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 9 \\ 7 & 1 & 8 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} -1 & 5 & 13 \\ 12 & 9 & 7 \end{pmatrix},\ C = \begin{pmatrix} 21 & 0 \\ 6 & 7 \\ -3 & 0 \end{pmatrix},\ D = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -6 & 17 \end{pmatrix}.$$

Записать матрицы

1) $A \cdot C$;

2) $D \cdot B$;

3) $A \cdot B^T$;

4) $C \cdot (A + B)$;

5) D^3.

Вариант 7

1. Даны матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 4 & -5 & 6 \\ 21 & -9 & 8 & 5 \\ -4 & 49 & 0 & 8 \\ -1 & -8 & -7 & 19 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 2 & -7 & 17 & 4 \\ 3 & -2 & 90 & 14 \\ 10 & 5 & 17 & 21 \\ 0 & -5 & 7 & -3 \end{pmatrix}.$$

Записать матрицы

1) $A + B$;

2) $A - B$;

3) $3A + 2B$;

4) A^T;

5) $-E + 3B^T$.

2. Даны матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 8 & 3 & 5 \\ 9 & 1 & 0 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} -5 & 7 & 10 \\ 10 & 8 & 2 \end{pmatrix},\ C = \begin{pmatrix} 19 & 5 \\ 3 & 2 \\ -5 & 1 \end{pmatrix},\ D = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -3 & 10 \end{pmatrix}.$$

Записать матрицы

1) $A \cdot C$;

2) $D \cdot B$;

3) $A \cdot B^T$;

4) $C \cdot (A + B)$;

5) D^3.

Вариант 8

1. Даны матрицы

$$A=\begin{pmatrix} 9 & 4 & -5 & 3 \\ 12 & -7 & 9 & 3 \\ -2 & 14 & 7 & 0 \\ -3 & -8 & -1 & 10 \end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix} 0 & -4 & 25 & 3 \\ 4 & -1 & 18 & 21 \\ 17 & 4 & 20 & 19 \\ 1 & -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Записать матрицы

1) $A+B$;
2) $A-B$;
3) $3A+4B$;
4) A^T;
5) $8E+B^T$.

2. Даны матрицы

$$A=\begin{pmatrix} 3 & 0 & 9 \\ 1 & 2 & 7 \end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix} -1 & 0 & 36 \\ 12 & 0 & 5 \end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix} 10 & 3 \\ 2 & 4 \\ -5 & 0 \end{pmatrix},\ D=\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -5 & 30 \end{pmatrix}.$$

Записать матрицы

1) $A\cdot C$;
2) $D\cdot B$;
3) $A\cdot B^T$;
4) $C\cdot(A+B)$;
5) D^3.

Вариант 9

1. Даны матрицы

$$A=\begin{pmatrix} 7 & 2 & -1 & 0 \\ 20 & -5 & 4 & 1 \\ -1 & 18 & 2 & 8 \\ -1 & -8 & -9 & 12 \end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix} 2 & -3 & 11 & 9 \\ 5 & -8 & 24 & 12 \\ 10 & 0 & 29 & 10 \\ 0 & -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Записать матрицы

1) $A+B$;
2) $A-B$;
3) $10A-5B$;
4) A^T;

5) $11E + 2B^T$.

2. Даны матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 5 & 5 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} -8 & 2 & 12 \\ 21 & 4 & 9 \end{pmatrix},\ C = \begin{pmatrix} 12 & 4 \\ 3 & 5 \\ -9 & 6 \end{pmatrix},\ D = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -3 & 15 \end{pmatrix}.$$

Записать матрицы

1) $A \cdot C$;

2) $D \cdot B$;

3) $A \cdot B^T$;

4) $C \cdot (A + B)$;

5) D^3.

Вариант 10

1. Даны матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 0 & -7 & 1 \\ 12 & -2 & 4 & 0 \\ -5 & 28 & 5 & 7 \\ -3 & -4 & -6 & 10 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 10 & 6 \\ 7 & -3 & 19 & 10 \\ 34 & 3 & 12 & 15 \\ 1 & -2 & 3 & -3 \end{pmatrix}.$$

Записать матрицы

1) $A + B$;

2) $A - B$;

3) $-A + 3B$;

4) A^T;

5) $19E + 2B^T$.

2. Даны матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 9 & 3 & 6 \\ 8 & 0 & 1 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} -5 & 3 & 14 \\ 18 & 0 & 11 \end{pmatrix},\ C = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 7 & 2 \\ -1 & 12 \end{pmatrix},\ D = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -1 & 9 \end{pmatrix}.$$

Записать матрицы

1) $A \cdot C$;

2) $D \cdot B$;

3) $A \cdot B^T$;

4) $C \cdot (A + B)$;

5) D^3.

Вариант 11

1. Даны матрицы

$$A=\begin{pmatrix} 3 & 5 & -8 & 0 \\ 11 & -1 & 5 & 10 \\ -1 & 5 & 8 & 13 \\ 0 & -6 & 17 & 7 \end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix} 9 & -5 & 13 & 10 \\ 0 & -1 & 6 & 6 \\ 2 & 0 & 10 & 3 \\ 8 & -1 & 4 & -8 \end{pmatrix}.$$

Записать матрицы

1) $A+B$;
2) $A-B$;
3) $2A+3B$;
4) A^T;
5) $2E+B^T$.

2. Даны матрицы

$$A=\begin{pmatrix} 12 & 9 & 0 \\ 5 & 3 & 8 \end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix} -1 & 12 & 1 \\ 1 & 8 & 17 \end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix} 10 & 9 \\ 3 & 3 \\ 0 & 14 \end{pmatrix},\ D=\begin{pmatrix} 12 & 5 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Записать матрицы

1) $A\cdot C$;
2) $D\cdot B$;
3) $A\cdot B^T$;
4) $C\cdot(A+B)$;
5) D^3.

Вариант 12

1. Даны матрицы

$$A=\begin{pmatrix} 8 & 0 & -5 & 7 \\ 20 & -6 & 0 & 13 \\ -6 & 0 & 9 & 5 \\ 1 & -1 & 10 & 0 \end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix} 7 & -3 & 11 & 21 \\ 3 & -5 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 15 & 6 \\ 9 & -2 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Записать матрицы

1) $A+B$;
2) $A-B$;
3) $3A+2B$;
4) A^T;

5) $5E-10B^T$.

2. Даны матрицы

$$A=\begin{pmatrix}13 & 0 & 5\\ 4 & 9 & 7\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}-7 & 10 & 0\\ 5 & 6 & 19\end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix}18 & 4\\ 0 & 6\\ 3 & 17\end{pmatrix},\ D=\begin{pmatrix}20 & 0\\ -3 & 4\end{pmatrix}.$$

Записать матрицы

1) $A\cdot C$;

2) $D\cdot B$;

3) $A\cdot B^T$;

4) $C\cdot(A+B)$;

5) D^3.

Вариант 13

1. Даны матрицы

$$A=\begin{pmatrix}9 & 1 & -4 & 1\\ 10 & -3 & 1 & 18\\ -5 & 1 & 3 & 4\\ 7 & 0 & 19 & 1\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}3 & -1 & 20 & 25\\ 0 & -1 & 0 & 3\\ 2 & 3 & 14 & 5\\ 0 & -1 & 7 & -9\end{pmatrix}.$$

Записать матрицы

1) $A+B$;

2) $A-B$;

3) $2A+3B$;

4) A^T;

5) $E+5B^T$.

2. Даны матрицы

$$A=\begin{pmatrix}23 & 1 & 0\\ 0 & 7 & 2\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}-3 & 20 & 9\\ 1 & 1 & 11\end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix}1 & 5\\ 0 & 7\\ 2 & 10\end{pmatrix},\ D=\begin{pmatrix}5 & 3\\ 8 & -5\end{pmatrix}.$$

Записать матрицы

1) $A\cdot C$;

2) $D\cdot B$;

3) $A\cdot B^T$;

4) $C\cdot(A+B)$;

5) D^3.

Вариант 14

1. Даны матрицы

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 & 0 \\ 12 & -5 & 0 & 37 \\ -2 & 2 & 2 & 0 \\ 6 & 4 & 11 & 9 \end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} 0 & -5 & 1 & 5 \\ 2 & -3 & 12 & 14 \\ 0 & 5 & 90 & 7 \\ 9 & -4 & 12 & 3 \end{pmatrix}.$$

Записать матрицы

1) $A+B$;
2) $A-B$;
3) $-5A+3B$;
4) A^T;
5) $2E-B^T$.

2. Даны матрицы

$$A=\begin{pmatrix} 15 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & -5 \end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} -2 & 7 & 12 \\ 0 & 3 & 6 \end{pmatrix}, C=\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 6 \\ 4 & 17 \end{pmatrix}, D=\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 10 & -3 \end{pmatrix}.$$

Записать матрицы

1) $A\cdot C$;
2) $D\cdot B$;
3) $A\cdot B^T$;
4) $C\cdot(A+B)$;
5) D^3.

Вариант 15

1. Даны матрицы

$$A=\begin{pmatrix} 8 & 3 & -1 & 9 \\ 10 & -1 & 2 & 12 \\ -1 & 0 & 3 & 4 \\ 5 & 3 & 12 & 7 \end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 & 8 \\ 0 & -2 & 12 & 15 \\ 1 & 6 & 32 & 0 \\ 1 & 31 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

Записать матрицы

1) $A+B$;
2) $A-B$;
3) $A+3B$;

4) A^T;

5) $55E + B^T$.

2. Даны матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 10 & 12 & 0 \\ 0 & 5 & -10 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix},\ C = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 5 & 12 \\ 7 & 1 \end{pmatrix},\ D = \begin{pmatrix} 5 & 17 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Записать матрицы

1) $A \cdot C$;

2) $D \cdot B$;

3) $A \cdot B^T$;

4) $C \cdot (A + B)$;

5) D^3.

Вариант 16

1. Даны матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 9 & -3 & 0 \\ 21 & -2 & 0 & 10 \\ -5 & 0 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 12 & 8 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 & 9 \\ 2 & -5 & 10 & 12 \\ 0 & 3 & 18 & 1 \\ 2 & 13 & 6 & 0 \end{pmatrix}.$$

Записать матрицы

1) $A + B$;

2) $A - B$;

3) $2A + 3B$;

4) A^T;

5) $17E + 2B^T$.

2. Даны матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 17 & 10 & 3 \\ 1 & 4 & -12 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} -5 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 6 \end{pmatrix},\ C = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 4 & 11 \\ 3 & 0 \end{pmatrix},\ D = \begin{pmatrix} 4 & 15 \\ 6 & 7 \end{pmatrix}.$$

Записать матрицы

1) $A \cdot C$;

2) $D \cdot B$;

3) $A \cdot B^T$;

4) $C \cdot (A + B)$.

5) D^3.

Вариант 17

1. Даны матрицы

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 7 & -2 & 1 \\ 10 & -5 & 2 & 0 \\ -1 & 5 & 3 & 4 \\ 2 & 0 & 1 & 17 \end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix} 3 & -7 & 0 & 4 \\ 0 & -2 & 20 & 13 \\ 1 & 4 & 10 & 5 \\ 4 & 10 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Записать матрицы

1) $A+B$;
2) $A-B$;
3) $2A+3B$;
4) A^T;
5) $2E+B^T$.

2. Даны матрицы

$$A=\begin{pmatrix} 4 & 12 & 0 \\ 5 & 1 & -1 \end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 6 & 5 \\ 0 & 7 \end{pmatrix},\ D=\begin{pmatrix} 3 & 12 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}.$$

Записать матрицы

1) $A\cdot C$;
2) $D\cdot B$;
3) $A\cdot B^T$;
4) $C\cdot(A+B)$.
5) D^3.

Вариант 18

1. Даны матрицы

$$A=\begin{pmatrix} -5 & 3 & -1 & 0 \\ 14 & -2 & 0 & 6 \\ 3 & 5 & 15 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 10 \end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix} 0 & -5 & 3 & 2 \\ 7 & -8 & 29 & 10 \\ 0 & 3 & -2 & 0 \\ 6 & 14 & 0 & -5 \end{pmatrix}.$$

Записать матрицы

1) $A+B$;
2) $A-B$;
3) $2A-3B$;

4) A^T;

5) $10E + 5B^T$.

2. Даны матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 17 & 1 \\ 3 & 0 & -5 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 8 & -5 & 4 \\ 3 & -1 & 6 \end{pmatrix},\ C = \begin{pmatrix} 9 & 2 \\ 0 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix},\ D = \begin{pmatrix} 5 & 16 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}.$$

Записать матрицы

1) $A \cdot C$;

2) $D \cdot B$;

3) $A \cdot B^T$;

4) $C \cdot (A + B)$;

5) D^3.

Вариант 19

1. Даны матрицы

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -3 & 4 \\ 21 & -7 & 3 & 0 \\ 0 & 4 & 12 & 1 \\ 2 & 3 & -4 & 5 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 & 11 \\ 8 & -9 & 0 & 10 \\ 5 & 4 & -1 & 12 \\ 0 & 10 & 3 & -7 \end{pmatrix}.$$

Записать матрицы

1) $A + B$;

2) $A - B$;

3) $7A + 3B$;

4) A^T;

5) $-E + B^T$.

2. Даны матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 14 & 5 \\ 6 & 0 & -8 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 9 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix},\ C = \begin{pmatrix} 5 & 9 \\ 6 & 9 \\ 7 & 0 \end{pmatrix},\ D = \begin{pmatrix} 1 & 12 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}.$$

Записать матрицы

1) $A \cdot C$;

2) $D \cdot B$;

3) $A \cdot B^T$;

4) $C \cdot (A + B)$;

5) D^3.

Вариант 20

1. Даны матрицы

$$A=\begin{pmatrix} -7 & 5 & -3 & 0 \\ 19 & -1 & 0 & 6 \\ 1 & 3 & 15 & 7 \\ 13 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} 2 & -5 & 1 & 18 \\ 9 & 0 & 0 & 31 \\ 0 & 7 & 11 & -1 \\ 2 & 11 & 0 & -4 \end{pmatrix}.$$

Записать матрицы

1) $A+B$;
2) $A-B$;
3) $-2A-3B$;
4) A^T;
5) $E+10B^T$.

2. Даны матрицы

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 12 & -3 \\ 4 & 5 & 4 \end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} 0 & -7 & 5 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, C=\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 5 \\ 12 & 4 \end{pmatrix}, D=\begin{pmatrix} 0 & 13 \\ 0 & -7 \end{pmatrix}.$$

Записать матрицы

1) $A\cdot C$;
2) $D\cdot B$;
3) $A\cdot B^T$;
4) $C\cdot(A+B)$.
5) D^3.

Вариант 21

1. Даны матрицы

$$A=\begin{pmatrix} -3 & 2 & -1 & 7 \\ 10 & -5 & 4 & 8 \\ 0 & 13 & 2 & 0 \\ 12 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 & 13 \\ 4 & 5 & 0 & 7 \\ 0 & 8 & 19 & -1 \\ 1 & 12 & 3 & -9 \end{pmatrix}.$$

Записать матрицы

1) $A+B$;
2) $A-B$;
3) $2A+3B$;

4) A^T;

5) $7E - 2B^T$.

2. Даны матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 11 & 3 & -2 \\ 0 & 7 & 8 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 7 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix},\ C = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 7 \\ 13 & -1 \end{pmatrix},\ D = \begin{pmatrix} 1 & 11 \\ 1 & -7 \end{pmatrix}.$$

Записать матрицы

1) $A \cdot C$;

2) $D \cdot B$;

3) $A \cdot B^T$;

4) $C \cdot (A + B)$;

5) D^3.

Вариант 22

1. Даны матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 10 & 4 & -2 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 12 & 4 & 5 \\ 25 & -2 & 0 & 6 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 & 14 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & -4 \\ 0 & 17 & 9 & -3 \end{pmatrix}.$$

Записать матрицы

1) $A + B$;

2) $A - B$;

3) $A + 5B$;

4) A^T;

5) $2E + B^T$.

2. Даны матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 13 & -5 \\ 0 & 7 & 0 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 1 & -6 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix},\ C = \begin{pmatrix} 7 & 5 \\ 9 & 3 \\ 14 & 1 \end{pmatrix},\ D = \begin{pmatrix} 21 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Записать матрицы

1) $A \cdot C$;

2) $D \cdot B$;

3) $A \cdot B^T$;

4) $C \cdot (A + B)$;

5) D^3.

Вариант 23

1. Даны матрицы

$$A=\begin{pmatrix} 15 & 3 & -5 & 7 \\ -5 & -6 & 0 & 1 \\ 3 & 14 & 5 & 6 \\ 17 & -8 & 9 & 0 \end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 13 \\ 4 & 7 & 9 & 21 \\ 0 & 3 & 0 & -5 \\ 1 & 10 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Записать матрицы

1) $A+B$;

2) $A-B$;

3) $-2A+3B$;

4) A^T;

5) $E+4B^T$.

2. Даны матрицы

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 14 & -6 \\ 1 & 8 & 12 \end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} 4 & -5 & 0 \\ 7 & 12 & 2 \end{pmatrix}, C=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, D=\begin{pmatrix} 13 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Записать матрицы

1) $A\cdot C$;

2) $D\cdot B$;

3) $A\cdot B^T$;

4) $C\cdot(A+B)$;

5) D^3.

Вариант 24

1. Даны матрицы

$$A=\begin{pmatrix} 10 & 0 & -3 & 1 \\ -7 & -8 & 1 & -2 \\ 0 & 14 & 0 & -1 \\ 35 & -7 & 0 & 9 \end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 & 17 \\ 0 & 2 & 3 & 25 \\ 7 & 4 & 12 & -6 \\ 0 & 15 & 7 & 0 \end{pmatrix}.$$

Записать матрицы

1) $A+B$;

2) $A-B$;

3) $3A-B$;

4) A^T;

5) $100E - B^T$.

2. Даны матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 13 & -1 \\ 0 & 7 & 10 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 0 & -3 & 1 \\ 9 & 10 & 1 \end{pmatrix},\ C = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 5 & 0 \\ 1 & 12 \end{pmatrix},\ D = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Записать матрицы

1) $A \cdot C$;

2) $D \cdot B$;

3) $A \cdot B^T$;

4) $C \cdot (A + B)$;

5) D^3.

Вариант 25

1. Даны матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 40 & 9 & -4 & 0 \\ -1 & -6 & 3 & -1 \\ 3 & 15 & 7 & -4 \\ 20 & -1 & 10 & 0 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 0 & -4 & 6 & 16 \\ 1 & 6 & 8 & 19 \\ 0 & 2 & 10 & -5 \\ 1 & 21 & 8 & 2 \end{pmatrix}.$$

Записать матрицы

1) $A + B$;

2) $A - B$;

3) $2A + 3B$;

4) A^T;

5) $17E + 2B^T$.

2. Даны матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 14 & -7 \\ 7 & 0 & 16 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 6 \\ 0 & 34 & 2 \end{pmatrix},\ C = \begin{pmatrix} 0 & -6 \\ 9 & 12 \\ 7 & 5 \end{pmatrix},\ D = \begin{pmatrix} 9 & 0 \\ 7 & -6 \end{pmatrix}.$$

Записать матрицы

1) $A \cdot C$;

2) $D \cdot B$;

3) $A \cdot B^T$;

4) $C \cdot (A + B)$;

5) D^3.

Вариант 26

1. Даны матрицы

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 3 & -4 & 11 \\ -1 & -2 & 3 & 4 \\ 0 & 10 & 1 & 12 \\ 1 & -2 & 17 & 1 \end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} 7 & -2 & 5 & 20 \\ 1 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 6 & 11 & -5 \\ 1 & 14 & 3 & 12 \end{pmatrix}.$$

Записать матрицы

1) $A+B$;
2) $A-B$;
3) $A+5B$;
4) A^T;
5) $-4E+B^T$.

2. Даны матрицы

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 10 & -3 \\ 1 & 7 & 14 \end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} 0 & -4 & 2 \\ 1 & 17 & 5 \end{pmatrix}, C=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 10 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}, D=\begin{pmatrix} 8 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Записать матрицы

1) $A\cdot C$;
2) $D\cdot B$;
3) $A\cdot B^T$;
4) $C\cdot(A+B)$;
5) D^3.

Вариант 27

1. Даны матрицы

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -7 & 31 \\ -7 & -8 & 0 & 2 \\ 2 & 13 & 4 & 10 \\ 0 & -5 & 21 & 5 \end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} 8 & -9 & 0 & 10 \\ 9 & 8 & 7 & -1 \\ 1 & 5 & 12 & -3 \\ 0 & 17 & 5 & 8 \end{pmatrix}.$$

Записать матрицы

1) $A+B$;
2) $A-B$;
3) $2A+3B$;

4) A^T;

5) $2E + B^T$.

2. Даны матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 14 & -2 \\ 0 & 3 & 25 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 7 & -4 & 0 \\ 0 & 20 & 3 \end{pmatrix},\ C = \begin{pmatrix} 0 & -5 \\ 0 & 7 \\ 5 & 9 \end{pmatrix},\ D = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}.$$

Записать матрицы

1) $A \cdot C$;

2) $D \cdot B$;

3) $A \cdot B^T$;

4) $C \cdot (A + B)$;

5) D^3.

Вариант 28

1. Даны матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -5 & 19 \\ -6 & -5 & 1 & 21 \\ 0 & -4 & 1 & 0 \\ 2 & -3 & 7 & 5 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 9 & -1 & 4 & 0 \\ 0 & 7 & 5 & -1 \\ 3 & 4 & 18 & 0 \\ 2 & 17 & 5 & 9 \end{pmatrix}.$$

Записать матрицы

1) $A + B$;

2) $A - B$;

3) $A + 5B$;

4) A^T;

5) $-13E + B^T$.

2. Даны матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 6 & 12 \\ 1 & 7 & 3 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 9 & -5 & 1 \\ 2 & 27 & 0 \end{pmatrix},\ C = \begin{pmatrix} 3 & -6 \\ 6 & 5 \\ 9 & 4 \end{pmatrix},\ D = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -7 \end{pmatrix}.$$

Записать матрицы

1) $A \cdot C$;

2) $D \cdot B$;

3) $A \cdot B^T$;

4) $C \cdot (A + B)$;

5) D^3.

Вариант 29

1. Даны матрицы

$$A=\begin{pmatrix} 5 & 5 & -4 & 13 \\ -1 & -8 & 0 & -1 \\ -3 & -5 & 18 & 0 \\ 12 & 3 & 4 & 9 \end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix} 0 & -4 & 5 & 0 \\ 8 & 0 & 8 & -5 \\ 2 & 9 & 13 & 1 \\ 6 & 10 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Записать матрицы

1) $A+B$;
2) $A-B$;
3) $4A-3B$;
4) A^T;
5) $2E+3B^T$.

2. Даны матрицы

$$A=\begin{pmatrix} 9 & 0 & 10 \\ -1 & 6 & 12 \end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 \\ 0 & 14 & 1 \end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix} 0 & -5 \\ 7 & 4 \\ 9 & 1 \end{pmatrix},\ D=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 4 & -5 \end{pmatrix}.$$

Записать матрицы

1) $A\cdot C$;
2) $D\cdot B$;
3) $A\cdot B^T$;
4) $C\cdot(A+B)$.
5) D^3.

Вариант 30

1. Даны матрицы

$$A=\begin{pmatrix} 3 & 0 & -2 & 19 \\ -5 & -6 & 7 & 21 \\ -7 & -2 & 10 & 0 \\ 15 & 0 & 3 & 7 \end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix} 7 & -3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 6 & -7 \\ 3 & 3 & 15 & 12 \\ 2 & 15 & 7 & 11 \end{pmatrix}.$$

Записать матрицы

1) $A+B$;
2) $A-B$;
3) $-A+3B$;

4) A^T;

5) $20E + 2B^T$.

2. Даны матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 13 \\ -5 & 0 & 10 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 7 \\ 0 & 12 & 0 \end{pmatrix},\ C = \begin{pmatrix} 5 & -5 \\ 4 & 7 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\ D = \begin{pmatrix} 0 & 7 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Записать матрицы

1) $A \cdot C$;

2) $D \cdot B$;

3) $A \cdot B^T$;

4) $C \cdot (A + B)$;

5) D^3.

2. ОПРЕДЕЛИТЕЛЬ КВАДРАТНОЙ МАТРИЦЫ

Определение 2.1. Подстановкой (перестановкой) множества $M = \{1, 2, ..., n\}$, состоящего из n первых натуральных чисел, называется взаимно–однозначное отображение множества M на себя. Число n в этом случае называется порядком подстановки.

Подстановки будем записывать в виде таблицы, состоящей из двух строк и n столбцов следующим образом:

$$\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & ... & n \\ \varphi(1) & \varphi(2) & ... & \varphi(n) \end{pmatrix}.$$

Пример. Примерами подстановок $5-$го порядка будут подстановки:

$$\varphi_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 4 & 1 & 5 & 3 \end{pmatrix},\quad \varphi_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 5 & 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Теорема 2.1. Число подстановок порядка n равно $n! = 1 \cdot 2 \cdot ... \cdot n$.

Пример. Подстановками третьего порядка будут следующие подстановки:

$$\varphi_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix},\ \varphi_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix},\ \varphi_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix},$$

$$\varphi_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix},\ \varphi_5 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix},\ \varphi_6 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Определение 2.2. Подстановка множества $M=\{1, 2, ..., n\}$, которая каждый элемент множества M отображает сам в себя, называется тождественной подстановкой:

$$\varepsilon=\begin{pmatrix}1 & 2 & ... & n\\ 1 & 2 & ... & n\end{pmatrix}.$$

Определение 2.3. Произведением (композицией) подстановок

$$\varphi=\begin{pmatrix}1 & 2 & ... & n\\ \varphi(1) & \varphi(2) & ... & \varphi(n)\end{pmatrix} \text{ и } \xi=\begin{pmatrix}1 & 2 & ... & n\\ \xi(1) & \xi(2) & ... & \xi(n)\end{pmatrix}$$

множества $M=\{1, 2, ..., n\}$ называется подстановка этого множества, состоящая в последовательном выполнении указанных подстановок:

$$\varphi\cdot\xi=\begin{pmatrix}1 & 2 & ... & n\\ \xi(\varphi(1)) & \xi(\varphi(2)) & ... & \xi(\varphi(n))\end{pmatrix}.$$

Пример. Найти произведения следующих подстановок третьего порядка:

$$\varphi_1=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 3 & 1\end{pmatrix},\quad \varphi_2=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 3 & 2 & 1\end{pmatrix}.$$

Воспользуемся определением 1.16 и запишем:

$$\varphi_1\cdot\varphi_2=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ \varphi_2(\varphi_1(1)) & \varphi_2(\varphi_1(2)) & \varphi_2(\varphi_1(3))\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ \varphi_2(2) & \varphi_2(3) & \varphi_2(1)\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 1 & 3\end{pmatrix};$$

$$\varphi_2\cdot\varphi_1=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ \varphi_1(\varphi_2(1)) & \varphi_1(\varphi_2(2)) & \varphi_1(\varphi_2(3))\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ \varphi_1(3) & \varphi_1(2) & \varphi_1(1)\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 1 & 3 & 2\end{pmatrix}.$$

Замечание. Как следует из приведённого примера, произведение подстановок некоммутативно.

Определение 2.4. Пусть φ – подстановка множества $M=\{1, 2, ..., n\}$, числа i, j являются элементами множества M. Пара чисел $\varphi(i), \varphi(j)$ называется инверсией, если $i<j$, но при этом $\varphi(i)>\varphi(j)$.

Пример. Вычислить количество инверсий подстановки седьмого порядка

$$\varphi=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7\\ 2 & 4 & 1 & 5 & 7 & 3 & 6\end{pmatrix}.$$

Для решения этой задачи воспользуемся определением 2.4 и подсчитаем количество пар $\varphi(i), \varphi(j)$, для которых $i<j$, а $\varphi(i)>\varphi(j)$.

1) $1 < 3,\ \varphi(1) = 2,\ \varphi(3) = 1,\ \varphi(1) > \varphi(3),$

2) $2 < 3,\ \varphi(2) = 4,\ \varphi(3) = 1,\ \varphi(2) > \varphi(3),$

3) $2 < 6,\ \varphi(2) = 4,\ \varphi(6) = 3,\ \varphi(2) > \varphi(6),$

4) $4 < 6,\ \varphi(4) = 5,\ \varphi(6) = 3,\ \varphi(4) > \varphi(6),$

5) $5 < 6,\ \varphi(5) = 7,\ \varphi(6) = 3,\ \varphi(5) > \varphi(6),$

6) $5 < 7,\ \varphi(5) = 7,\ \varphi(7) = 6,\ \varphi(5) > \varphi(7).$

Таким образом, данная подстановка имеет 6 инверсий.

Определение 2.5. Определителем квадратной матрицы $A = \lfloor a_{ij} \rfloor_{n\times n}$ называется число, равное алгебраической сумме $n!$ слагаемых, каждое из которых есть произведение n элементов матрицы, взятых по одному и только по одному из каждой строки и каждого столбца матрицы. Каждое произведение входит в сумму со знаком $(-1)^{\sigma}$, где $\sigma -$ это число инверсий, образованных вторыми индексами элементов произведения при условии, что первые индексы расположены в порядке возрастания. Обозначается определитель матрицы A одним из следующих символов:

$$|A|,\ \Delta_A,\ \det A.$$

Для вычисления определителя квадратной матрицы, пользуясь определением 2.5, необходимо:

1) составить всевозможные произведения элементов матрицы, при этом взять только по одному элементу из каждой строки и каждого столбца;

2) определить знак каждого произведения, подсчитав число инверсий, образованных вторыми индексами элементов произведения при условии, что первые индексы расположены в порядке возрастания.

3) вычислить сумму всех найденных произведений.

Для квадратных матриц второго и третьего порядков существуют несложные правила вычисления их определителей.

Определитель квадратной матрицы A второго порядка вычисляется по формуле:

$$|A| = \det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

Определитель квадратной матрицы A третьего порядка вычисляется по формуле:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} =$$

$$= a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31} + a_{13} \cdot a_{21} \cdot a_{32} -$$

$$- (a_{13} \cdot a_{22} \cdot a_{31} + a_{11} \cdot a_{23} \cdot a_{32} + a_{12} \cdot a_{21} \cdot a_{33}).$$

Формулу вычисления определителя матрицы третьего порядка удобно запоминать с помощью следующего мнемонического правила, которое схематично можно изобразить следующим образом (рис. 1).

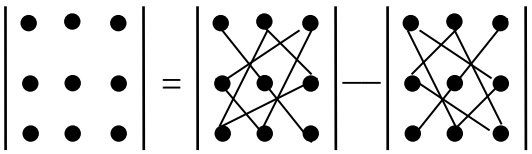

Рис. 1

В соответствии с приведённой схемой, которая называется правилом треугольников, для вычисления определителя три произведения элементов матрицы следует взять со знаком «+» и три произведения – со заком «–».

Пример. Вычислить определитель матрицы $A = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 7 & 2 \end{pmatrix}$.

По формуле вычисления определителя квадратной матрицы второго порядка запишем:

$$|A| = \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 7 & 2 \end{vmatrix} = (-1) \cdot 2 - 3 \cdot 7 = -23.$$

Пример. Вычислить определитель матрицы $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & 3 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Воспользуемся указанной формулой:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & 3 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-2) \cdot 1 + 2 \cdot 3 \cdot 3 + 1 \cdot 0 \cdot 1 - (1 \cdot (-2) \cdot 3 + 1 \cdot 3 \cdot 1 + 2 \cdot 0 \cdot 1) = 19.$$

Теорема 2.2. Определитель квадратной матрицы обладает следующими основными свойствами:

1. При транспонировании матрицы её определитель не изменяется.

2. При сложении какой-либо строки (какого-либо столбца) матрицы, умноженной на любое действительное число, с другой строкой (с другим столбцом) матрицы определитель матрицы не изменяется.

3. Определитель матрицы, все элементы какой-либо строки (какого-либо столбца) которой равны нулю, равен нулю.

4. Определитель матрицы, имеющей две одинаковые строки (два одинаковых столбца), равен нулю.

5. Определитель матрицы, имеющей строки (столбцы), соответствующие элементы которых пропорциональны, равен нулю.

6. При замене местами двух строк (столбцов) матрицы определитель изменяет знак на противоположный.

7. При сложении одной строки (столбца) матрицы с другой строкой (столбцом), умноженной на действительное число *k*, отличное от нуля, величина её определителя изменится в *k* раз.

Замечание. Как следует из теоремы 2.2, некоторые элементарные преобразования матрицы изменяют величину её определителя.

Определение 2.6. Определитель матрицы, полученной из матрицы $A = \lfloor a_{ij} \rfloor_{n\times n}$ вычёркиванием $i-$й строки и $j-$го столбца, называется минором элемента a_{ij} и обозначается символом M_{ij}.

Определение 2.7. Алгебраическим дополнением элемента a_{ij} матрицы $A = \lfloor a_{ij} \rfloor_{n\times n}$ называется число, равное произведению минора этого элемента на $(-1)^{i+j}$:

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot M_{ij}.$$

В частности, алгебраическим дополнением элемента матрицы называется его минор, взятый со своим знаком, если сумма номеров столбца и строки, в которых находится элемент, есть число чётное, и с противоположным знаком, если это число нечётное.

Пример. Вычислить миноры и алгебраические дополнения элементов матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 7 & -2 & 8 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Для решения задачи воспользуемся определениями 2.6 и 2.7.

$$M_{11} = \begin{vmatrix} -2 & 8 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -14, \qquad A_{11} = (-1)^{1+1} \cdot M_{11} = -14,$$

$$M_{12} = \begin{vmatrix} 7 & 8 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = -7, \qquad A_{12} = (-1)^{1+2} \cdot M_{12} = 7,$$

$$M_{13} = \begin{vmatrix} 7 & -2 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 14, \qquad A_{13} = (-1)^{1+3} \cdot M_{13} = 14,$$

$$M_{21} = \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 5, \qquad A_{21} = (-1)^{2+1} \cdot M_{21} = -5,$$

$$M_{22}=\begin{vmatrix}2 & -3\\ 0 & -1\end{vmatrix}=-2, \qquad A_{22}=(-1)^{2+2}\cdot M_{22}=-2,$$

$$M_{23}=\begin{vmatrix}2 & 1\\ 0 & 2\end{vmatrix}=4, \qquad A_{23}=(-1)^{2+3}\cdot M_{23}=-4,$$

$$M_{31}=\begin{vmatrix}1 & -3\\ -2 & 8\end{vmatrix}=2, \qquad A_{31}=(-1)^{3+1}\cdot M_{31}=2,$$

$$M_{32}=\begin{vmatrix}2 & -3\\ 7 & 8\end{vmatrix}=37 \qquad A_{32}=(-1)^{3+2}\cdot M_{32}=-37,$$

$$M_{33}=\begin{vmatrix}2 & 1\\ 7 & -2\end{vmatrix}=-11, \qquad A_{33}=(-1)^{3+3}\cdot M_{33}=-11.$$

Теорема 2.3 (о разложении определителя по строке или столбцу). Определитель квадратной матрицы равен сумме произведений элементов какой-либо строки (столбца) матрицы на их алгебраические дополнения:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n}\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\ a_{i1} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in}\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\ a_{n1} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{nn}\end{vmatrix} =$$

$$= a_{i1}\cdot A_{i1}+\dots+a_{ij}\cdot A_{ij}+\dots+a_{in}\cdot A_{in}=$$

$$= a_{1j}\cdot A_{1j}+\dots+a_{ij}\cdot A_{ij}+\dots+a_{nj}\cdot A_{nj}.$$

Пример. Вычислить определитель матрицы $A=\begin{pmatrix}-1 & 0 & 3 & 4\\ 2 & -1 & 1 & 2\\ 0 & 3 & 2 & 1\\ 2 & 1 & 4 & 3\end{pmatrix}$.

Для вычисления определителя матрицы A воспользуемся теоремой 2.3 и разложим определитель по элементам первой строки:

$$|A|=a_{11}\cdot A_{11}+a_{12}\cdot A_{12}+a_{13}\cdot A_{13}+a_{14}\cdot A_{14}.$$

Поскольку $a_{12}=0,$ вычислим алгебраические дополнения $A_{11},\ A_{13},\ A_{14}$.

$$M_{11}=\begin{vmatrix}-1 & 1 & 2\\ 3 & 2 & 1\\ 1 & 4 & 3\end{vmatrix}=10, \qquad A_{11}=10,$$

$$M_{13} = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 2, \qquad A_{13} = 2,$$

$$M_{14} = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 10, \qquad A_{14} = 10,$$

$$|A| = (-1)\cdot 10 + 3\cdot 2 + 4\cdot 10 = 36.$$

Задания для самостоятельной работы по теме «Определитель квадратной матрицы»

Вариант 1

1. Даны подстановки седьмого порядка

$$\varphi_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 5 & 7 & 6 & 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \varphi_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 7 & 5 & 6 & 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}.$$

Найти произведения подстановок $\varphi_1 \cdot \varphi_2$ и $\varphi_2 \cdot \varphi_1$, вычислить число их инверсий.

2. Вычислить определитель квадратных матриц

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 7 & 4 & -1 \\ 8 & 9 & 3 \\ 0 & 5 & -6 \end{pmatrix}.$$

3. Вычислить миноры и алгебраические дополнения элементов матрицы

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -5 \\ 3 & 4 & 11 \\ 8 & 0 & 37 \end{pmatrix}.$$

4. Вычислить определитель матрицы

$$D = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -6 & 0 \\ 3 & 1 & -4 & 0 \\ 5 & 2 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

разложением по четвёртому столбцу и третьей строке.

Вариант 2

1. Даны подстановки седьмого порядка

$$\varphi_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 1 & 5 & 6 & 3 & 4 & 7 & 2 \end{pmatrix}, \quad \varphi_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 7 & 5 & 2 & 6 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}.$$

Найти произведения подстановок $\varphi_1 \cdot \varphi_2$ и $\varphi_2 \cdot \varphi_1$, вычислить число их инверсий.

2. Вычислить определитель квадратных матриц

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 12 & 8 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 5 & 3 & -1 \\ 8 & 7 & 19 \\ 3 & 1 & 31 \end{pmatrix}.$$

3. Вычислить миноры и алгебраические дополнения элементов матрицы

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 13 & 8 & -6 \\ 12 & 4 & 0 \end{pmatrix}.$$

4. Вычислить определитель матрицы

$$D = \begin{pmatrix} 4 & -12 & -6 & 0 \\ 18 & 1 & -2 & -2 \\ 7 & 4 & 1 & -1 \\ -1 & 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

разложением по четвёртому столбцу и третьей строке.

Вариант 3

1. Даны подстановки седьмого порядка

$$\varphi_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 5 & 1 & 6 & 3 & 4 & 2 & 7 \end{pmatrix}, \quad \varphi_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 7 & 2 & 5 & 6 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}.$$

Найти произведения подстановок $\varphi_1 \cdot \varphi_2$ и $\varphi_2 \cdot \varphi_1$, вычислить число их инверсий.

2. Вычислить определитель квадратных матриц

$$A = \begin{pmatrix} 18 & 0 \\ -5 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 13 & 5 & 9 \\ 2 & 1 & 3 \\ 17 & 5 & -4 \end{pmatrix}.$$

3. Вычислить миноры и алгебраические дополнения элементов матрицы

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 15 & -1 \\ 0 & 3 & 12 \\ -5 & 7 & 3 \end{pmatrix}.$$

4. Вычислить определитель матрицы

$$D=\begin{pmatrix} 9 & 3 & -2 & -2 \\ 1 & 3 & 0 & 2 \\ 5 & -1 & -2 & 0 \\ 3 & 1 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

разложением по четвёртому столбцу и третьей строке.

Вариант 4

1. Даны подстановки седьмого порядка

$$\varphi_1=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 5 & 1 & 6 & 3 & 2 & 4 & 7 \end{pmatrix},\quad \varphi_2=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 7 & 2 & 5 & 3 & 1 & 4 & 6 \end{pmatrix}.$$

Найти произведения подстановок $\varphi_1\cdot\varphi_2$ и $\varphi_2\cdot\varphi_1$, вычислить число их инверсий.

2. Вычислить определитель квадратных матриц

$$A=\begin{pmatrix} 1 & -90 \\ 0 & 32 \end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix} 13 & 5 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 11 & 2 & -17 \end{pmatrix}.$$

3. Вычислить миноры и алгебраические дополнения элементов матрицы

$$C=\begin{pmatrix} 7 & -6 & 12 \\ 0 & 3 & 8 \\ 9 & 11 & 34 \end{pmatrix}.$$

4. Вычислить определитель матрицы

$$D=\begin{pmatrix} 36 & -15 & -10 & 2 \\ 12 & -7 & -4 & 2 \\ 4 & -5 & -2 & 0 \\ 4 & 9 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

разложением по четвёртому столбцу и третьей строке.

Вариант 5

1. Даны подстановки седьмого порядка

$$\varphi_1=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 5 & 7 & 6 & 3 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix},\quad \varphi_2=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 7 & 2 & 3 & 5 & 1 & 4 & 6 \end{pmatrix}.$$

Найти произведения подстановок $\varphi_1\cdot\varphi_2$ и $\varphi_2\cdot\varphi_1$, вычислить число их инверсий.

2. Вычислить определитель квадратных матриц

$$A=\begin{pmatrix}3 & -5\\ 7 & 19\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}10 & 5 & -1\\ 2 & 17 & 1\\ 21 & 2 & -1\end{pmatrix}.$$

3. Вычислить миноры и алгебраические дополнения элементов матрицы

$$C=\begin{pmatrix}2 & -3 & 25\\ 7 & 0 & 6\\ 3 & -1 & 5\end{pmatrix}.$$

4. Вычислить определитель матрицы

$$D=\begin{pmatrix}-1 & 1 & 3 & 3\\ -2 & 0 & 0 & 4\\ 0 & 2 & 1 & -1\\ 0 & 0 & -1 & -2\end{pmatrix}$$

разложением по четвёртому столбцу и третьей строке.

Вариант 6

1. Даны подстановки седьмого порядка

$$\varphi_1=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7\\ 5 & 7 & 6 & 4 & 2 & 3 & 1\end{pmatrix},\quad \varphi_2=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7\\ 7 & 2 & 3 & 5 & 1 & 4 & 6\end{pmatrix}.$$

Найти произведения подстановок $\varphi_1\cdot\varphi_2$ и $\varphi_2\cdot\varphi_1$, вычислить число их инверсий.

2. Вычислить определитель квадратных матриц

$$A=\begin{pmatrix}4 & -5\\ 12 & 10\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}2 & 3 & -10\\ 12 & 5 & 0\\ 3 & -3 & 2\end{pmatrix}.$$

3. Вычислить миноры и алгебраические дополнения элементов матрицы

$$C=\begin{pmatrix}2 & 6 & 19\\ 21 & 3 & 9\\ -9 & 0 & 5\end{pmatrix}.$$

4. Вычислить определитель матрицы

$$D=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 3\\ 2 & 4 & 2 & 2\\ 2 & 2 & 1 & -1\\ 0 & 0 & -1 & -2\end{pmatrix}$$

разложением по первому столбцу и четвёртой строке.

Вариант 7

1. Даны подстановки седьмого порядка

$$\varphi_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 1 & 7 & 6 & 4 & 2 & 3 & 5 \end{pmatrix}, \quad \varphi_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 6 & 2 & 3 & 5 & 1 & 4 & 7 \end{pmatrix}.$$

Найти произведения подстановок $\varphi_1 \cdot \varphi_2$ и $\varphi_2 \cdot \varphi_1$, вычислить число их инверсий.

2. Вычислить определитель квадратных матриц

$$A = \begin{pmatrix} 12 & -3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 21 \\ 19 & 3 & 0 \\ -6 & 7 & 8 \end{pmatrix}.$$

3. Вычислить миноры и алгебраические дополнения элементов матрицы

$$C = \begin{pmatrix} 3 & 5 & -6 \\ 0 & 12 & 9 \\ -6 & 7 & 13 \end{pmatrix}.$$

4. Вычислить определитель матрицы

$$D = \begin{pmatrix} 53 & 24 & 7 & 7 \\ 48 & 20 & 5 & -1 \\ 10 & 4 & 1 & -1 \\ -4 & -2 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

разложением по четвёртому столбцу и третьей строке.

Вариант 8

1. Даны подстановки седьмого порядка

$$\varphi_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 7 & 6 & 4 & 2 & 1 & 5 \end{pmatrix}, \quad \varphi_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 4 & 2 & 3 & 5 & 1 & 7 & 6 \end{pmatrix}.$$

Найти произведения подстановок $\varphi_1 \cdot \varphi_2$ и $\varphi_2 \cdot \varphi_1$, вычислить число их инверсий.

2. Вычислить определитель квадратных матриц

$$A = \begin{pmatrix} 17 & -5 \\ 1 & 10 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 5 & -9 & 10 \\ 8 & 0 & 13 \\ 4 & 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

3. Вычислить миноры и алгебраические дополнения элементов матрицы

$$C = \begin{pmatrix} 3 & -7 & 11 \\ 12 & 0 & 5 \\ 3 & 1 & -7 \end{pmatrix}.$$

4. Вычислить определитель матрицы

$$D=\begin{pmatrix}3 & -1 & -1 & -3\\ 4 & 0 & 1 & 0\\ 5 & 2 & 0 & 0\\ 6 & 1 & 2 & 0\end{pmatrix}$$

разложением по четвёртому столбцу и первой строке.

Вариант 9

1. Даны подстановки седьмого порядка

$$\varphi_1=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7\\ 5 & 7 & 6 & 4 & 2 & 1 & 3\end{pmatrix},\quad \varphi_2=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7\\ 4 & 7 & 3 & 5 & 1 & 2 & 6\end{pmatrix}.$$

Найти произведения подстановок $\varphi_1\cdot\varphi_2$ и $\varphi_2\cdot\varphi_1$, вычислить число их инверсий.

2. Вычислить определитель квадратных матриц

$$A=\begin{pmatrix}19 & -1\\ 4 & 5\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}3 & 4 & 11\\ 5 & -9 & 0\\ 12 & 30 & 4\end{pmatrix}.$$

3. Вычислить миноры и алгебраические дополнения элементов матрицы

$$C=\begin{pmatrix}0 & 7 & -9\\ 13 & 8 & 9\\ 2 & -6 & 5\end{pmatrix}.$$

4. Вычислить определитель матрицы

$$D=\begin{pmatrix}-1 & -1 & -5 & -1\\ 0 & 1 & -2 & -1\\ 1 & 0 & 1 & 2\\ 3 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

разложением по второму столбцу и второй строке.

Вариант 10

1. Даны подстановки седьмого порядка

$$\varphi_1=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7\\ 4 & 7 & 6 & 5 & 2 & 1 & 3\end{pmatrix},\quad \varphi_2=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7\\ 4 & 1 & 3 & 5 & 7 & 2 & 6\end{pmatrix}.$$

Найти произведения подстановок $\varphi_1\cdot\varphi_2$ и $\varphi_2\cdot\varphi_1$, вычислить число их инверсий.

2. Вычислить определитель квадратных матриц

$$A = \begin{pmatrix} 13 & -1 \\ 7 & 10 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 25 & 17 & -2 \\ 12 & 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

3. Вычислить миноры и алгебраические дополнения элементов матрицы

$$C = \begin{pmatrix} 9 & 0 & -15 \\ 30 & 2 & 2 \\ 0 & 7 & 9 \end{pmatrix}.$$

4. Вычислить определитель матрицы

$$D = \begin{pmatrix} -2 & -11 & -5 & -1 \\ 3 & 1 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

разложением по третьему столбцу и второй строке.

Вариант 11

1. Даны подстановки седьмого порядка

$$\varphi_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 7 & 6 & 5 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}, \quad \varphi_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 4 & 1 & 5 & 3 & 7 & 2 & 6 \end{pmatrix}.$$

Найти произведения подстановок $\varphi_1 \cdot \varphi_2$ и $\varphi_2 \cdot \varphi_1$, вычислить число их инверсий.

2. Вычислить определитель квадратных матриц

$$A = \begin{pmatrix} 80 & 3 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 17 & 2 \\ -6 & 5 & 1 \\ 4 & 3 & -9 \end{pmatrix}.$$

3. Вычислить миноры и алгебраические дополнения элементов матрицы

$$C = \begin{pmatrix} 9 & 11 & 0 \\ 3 & -3 & 5 \\ 12 & 0 & 7 \end{pmatrix}.$$

4. Вычислить определитель матрицы

$$D = \begin{pmatrix} -14 & -9 & -5 & 5 \\ 20 & 7 & 3 & 9 \\ 5 & 2 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

разложением по третьему столбцу и четвёртой строке.

Вариант 12

1. Даны подстановки седьмого порядка

$$\varphi_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 2 & 6 & 7 & 5 & 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}, \quad \varphi_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 2 & 1 & 3 & 5 & 7 & 4 & 6 \end{pmatrix}.$$

Найти произведения подстановок $\varphi_1 \cdot \varphi_2$ и $\varphi_2 \cdot \varphi_1$, вычислить число их инверсий.

2. Вычислить определитель квадратных матриц

$$A = \begin{pmatrix} 21 & 0 \\ -5 & 11 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & -7 & 12 \\ -5 & 0 & 1 \\ -1 & -9 & 6 \end{pmatrix}.$$

3. Вычислить миноры и алгебраические дополнения элементов матрицы

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 4 & -7 \\ 13 & 1 & 0 \\ -9 & 9 & 8 \end{pmatrix}.$$

4. Вычислить определитель матрицы

$$D = \begin{pmatrix} -2 & -3 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \\ 5 & 1 & 2 & -1 \\ -2 & 0 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

разложением по четвёртому столбцу и второй строке.

Вариант 13

1. Даны подстановки седьмого порядка

$$\varphi_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 2 & 6 & 1 & 5 & 3 & 7 & 4 \end{pmatrix}, \quad \varphi_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 2 & 1 & 6 & 5 & 7 & 4 & 3 \end{pmatrix}.$$

Найти произведения подстановок $\varphi_1 \cdot \varphi_2$ и $\varphi_2 \cdot \varphi_1$, вычислить число их инверсий.

2. Вычислить определитель квадратных матриц

$$A = \begin{pmatrix} 19 & 2 \\ -5 & 10 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 7 & -9 & 8 \\ 0 & 1 & 12 \\ 35 & 4 & -2 \end{pmatrix}.$$

3. Вычислить миноры и алгебраические дополнения элементов матрицы

$$C = \begin{pmatrix} 2 & -6 & 5 \\ 0 & 4 & 14 \\ 25 & -7 & 11 \end{pmatrix}.$$

4. Вычислить определитель матрицы

$$D = \begin{pmatrix} 19 & 15 & 7 & 0 \\ 12 & 10 & 4 & 2 \\ 0 & 5 & 2 & -1 \\ -2 & -6 & -3 & 0 \end{pmatrix}$$

разложением по четвёртому столбцу и третьей строке.

Вариант 14

1. Даны подстановки седьмого порядка

$$\varphi_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 5 & 6 & 1 & 2 & 3 & 7 & 4 \end{pmatrix}, \quad \varphi_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 1 & 2 & 6 & 5 & 7 & 4 & 3 \end{pmatrix}.$$

Найти произведения подстановок $\varphi_1 \cdot \varphi_2$ и $\varphi_2 \cdot \varphi_1$, вычислить число их инверсий.

2. Вычислить определитель квадратных матриц

$$A = \begin{pmatrix} 10 & 5 \\ -2 & 19 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 13 & 0 & 9 \\ -7 & 1 & 2 \\ 12 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

3. Вычислить миноры и алгебраические дополнения элементов матрицы

$$C = \begin{pmatrix} 3 & 15 & 0 \\ 9 & 20 & -1 \\ 4 & 8 & 8 \end{pmatrix}.$$

4. Вычислить определитель матрицы

$$D = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & -1 & -2 \\ -2 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

разложением по четвёртому столбцу и первой строке.

Вариант 15

1. Даны подстановки седьмого порядка

$$\varphi_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 4 & 5 & 1 & 2 & 3 & 7 & 6 \end{pmatrix}, \quad \varphi_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 6 & 2 & 5 & 7 & 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

Найти произведения подстановок $\varphi_1 \cdot \varphi_2$ и $\varphi_2 \cdot \varphi_1$, вычислить число их инверсий.

2. Вычислить определитель квадратных матриц

$$A = \begin{pmatrix} 10 & 7 \\ -5 & 21 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 8 & -7 & 9 \\ 13 & 0 & 25 \\ 4 & 6 & -4 \end{pmatrix}.$$

3. Вычислить миноры и алгебраические дополнения элементов матрицы

$$C = \begin{pmatrix} 45 & 2 & 0 \\ -4 & 6 & 17 \\ 3 & 0 & -6 \end{pmatrix}.$$

4. Вычислить определитель матрицы

$$D = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 \\ -4 & 5 & 1 & -4 \\ -1 & 3 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

разложением по четвёртому столбцу и второй строке.

Вариант 16

1. Даны подстановки седьмого порядка

$$\varphi_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 6 & 1 & 5 & 3 & 2 & 7 & 4 \end{pmatrix}, \quad \varphi_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 6 & 3 & 5 & 2 & 4 & 7 & 1 \end{pmatrix}.$$

Найти произведения подстановок $\varphi_1 \cdot \varphi_2$ и $\varphi_2 \cdot \varphi_1$, вычислить число их инверсий.

2. Вычислить определитель квадратных матриц

$$A = \begin{pmatrix} 11 & 9 \\ -3 & 11 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 4 & 5 \\ 0 & 17 & 27 \\ 3 & 3 & 11 \end{pmatrix}.$$

3. Вычислить миноры и алгебраические дополнения элементов матрицы

$$C = \begin{pmatrix} 21 & 0 & 19 \\ 7 & 7 & -6 \\ 5 & 8 & 13 \end{pmatrix}.$$

4. Вычислить определитель матрицы

$$D = \begin{pmatrix} -10 & 11 & 2 & -8 \\ -4 & 5 & 1 & -4 \\ -1 & 3 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 5 & 3 \end{pmatrix}$$

разложением по первому столбцу и четвёртой строке.

Вариант 17

1. Даны подстановки седьмого порядка

$$\varphi_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 2 & 1 & 5 & 3 & 6 & 7 & 4 \end{pmatrix}, \quad \varphi_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 4 & 3 & 5 & 2 & 6 & 7 & 1 \end{pmatrix}.$$

Найти произведения подстановок $\varphi_1 \cdot \varphi_2$ и $\varphi_2 \cdot \varphi_1$, вычислить число их инверсий.

2. Вычислить определитель квадратных матриц

$$A = \begin{pmatrix} 17 & 12 \\ -5 & 11 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 17 & 0 & 9 \\ -5 & 12 & 3 \\ 1 & -7 & 30 \end{pmatrix}.$$

3. Вычислить миноры и алгебраические дополнения элементов матрицы

$$C = \begin{pmatrix} 45 & 3 & 0 \\ -1 & 2 & 4 \\ 11 & 1 & 8 \end{pmatrix}.$$

4. Вычислить определитель матрицы

$$D = \begin{pmatrix} 12 & 11 & 2 & -8 \\ 6 & 5 & 1 & -4 \\ 5 & 3 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

разложением по четвёртому столбцу и четвёртой строке.

Вариант 18

1. Даны подстановки седьмого порядка

$$\varphi_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 1 & 5 & 2 & 6 & 7 & 4 \end{pmatrix}, \quad \varphi_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 7 & 3 & 5 & 2 & 6 & 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

Найти произведения подстановок $\varphi_1 \cdot \varphi_2$ и $\varphi_2 \cdot \varphi_1$, вычислить число их инверсий.

2. Вычислить определитель квадратных матриц

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 21 \\ 10 & 5 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 13 & 6 & 7 \\ -5 & 8 & 9 \\ 12 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

3. Вычислить миноры и алгебраические дополнения элементов матрицы

$$C = \begin{pmatrix} 0 & -5 & 12 \\ 30 & 4 & 7 \\ 8 & 8 & 2 \end{pmatrix}.$$

4. Вычислить определитель матрицы

$$D=\begin{pmatrix}12 & 11 & 2 & -8\\ 21 & 14 & 4 & -7\\ 5 & 3 & 1 & -1\\ 0 & 7 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

разложением по первому столбцу и четвёртой строке.

Вариант 19

1. Даны подстановки седьмого порядка

$$\varphi_1=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7\\ 3 & 5 & 2 & 1 & 6 & 7 & 4\end{pmatrix},\quad \varphi_2=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7\\ 3 & 6 & 5 & 2 & 7 & 4 & 1\end{pmatrix}.$$

Найти произведения подстановок $\varphi_1\cdot\varphi_2$ и $\varphi_2\cdot\varphi_1$, вычислить число их инверсий.

2. Вычислить определитель квадратных матриц

$$A=\begin{pmatrix}-5 & 10\\ 15 & 3\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}12 & -1 & 0\\ 50 & 2 & 2\\ 0 & -7 & 9\end{pmatrix}.$$

3. Вычислить миноры и алгебраические дополнения элементов матрицы

$$C=\begin{pmatrix}4 & 6 & -5\\ 2 & 12 & 3\\ -3 & 4 & 7\end{pmatrix}.$$

4. Вычислить определитель матрицы

$$D=\begin{pmatrix}0 & 5 & 0 & 4\\ 12 & 17 & 2 & 0\\ 5 & 6 & 1 & -1\\ 3 & 1 & 9 & 0\end{pmatrix}$$

разложением по четвёртому столбцу и первой строке.

Вариант 20

1. Даны подстановки седьмого порядка

$$\varphi_1=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7\\ 5 & 3 & 2 & 6 & 1 & 7 & 4\end{pmatrix},\quad \varphi_2=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7\\ 2 & 5 & 6 & 3 & 7 & 4 & 1\end{pmatrix}.$$

Найти произведения подстановок $\varphi_1\cdot\varphi_2$ и $\varphi_2\cdot\varphi_1$, вычислить число их инверсий.

2. Вычислить определитель квадратных матриц

$$A=\begin{pmatrix}-7 & 5\\ 49 & 7\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}1 & -9 & 27\\ 3 & -5 & 0\\ -1 & 2 & 14\end{pmatrix}.$$

3. Вычислить миноры и алгебраические дополнения элементов матрицы

$$C=\begin{pmatrix}2 & -5 & 17\\ 3 & 9 & 0\\ 6 & 11 & 4\end{pmatrix}.$$

4. Вычислить определитель матрицы

$$D=\begin{pmatrix}1 & -2 & -3 & -1\\ 13 & 11 & 0 & 5\\ 4 & 4 & 0 & 3\\ 2 & 1 & 2 & -1\end{pmatrix}$$

разложением по третьему столбцу и второй строке.

Вариант 21

1. Даны подстановки седьмого порядка

$$\varphi_1=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7\\ 7 & 3 & 2 & 6 & 1 & 5 & 4\end{pmatrix},\quad \varphi_2=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7\\ 3 & 5 & 6 & 2 & 4 & 7 & 1\end{pmatrix}.$$

Найти произведения подстановок $\varphi_1\cdot\varphi_2$ и $\varphi_2\cdot\varphi_1$, вычислить число их инверсий.

2. Вычислить определитель квадратных матриц

$$A=\begin{pmatrix}-8 & 5\\ 16 & 10\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}11 & 0 & -9\\ 3 & 25 & 4\\ -7 & 8 & 9\end{pmatrix}.$$

3. Вычислить миноры и алгебраические дополнения элементов матрицы

$$C=\begin{pmatrix}1 & 3 & -7\\ 2 & 12 & 0\\ -6 & 17 & 3\end{pmatrix}.$$

4. Вычислить определитель матрицы

$$D=\begin{pmatrix}27 & 22 & 1 & 0\\ 13 & 5 & 2 & 0\\ 0 & 7 & -8 & 3\\ 2 & 1 & 12 & 0\end{pmatrix}$$

разложением по четвёртому столбцу и четвёртой строке.

Вариант 22

1. Даны подстановки седьмого порядка

$$\varphi_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 6 & 3 & 2 & 7 & 1 & 5 & 4 \end{pmatrix}, \quad \varphi_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 2 & 6 & 5 & 4 & 7 & 1 \end{pmatrix}.$$

Найти произведения подстановок $\varphi_1 \cdot \varphi_2$ и $\varphi_2 \cdot \varphi_1$, вычислить число их инверсий.

2. Вычислить определитель квадратных матриц

$$A = \begin{pmatrix} 15 & -5 \\ 12 & 10 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 17 \\ 3 & 13 & 0 \\ 25 & 7 & -6 \end{pmatrix}.$$

3. Вычислить миноры и алгебраические дополнения элементов матрицы

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 7 & -11 \\ 0 & 4 & 13 \\ 2 & 2 & -5 \end{pmatrix}.$$

4. Вычислить определитель матрицы

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 12 & 0 & 0 \\ -5 & 7 & 12 & 0 \\ 6 & 7 & 0 & 14 \\ -1 & 2 & -6 & 8 \end{pmatrix}$$

разложением по третьему столбцу и первой строке.

Вариант 23

1. Даны подстановки седьмого порядка

$$\varphi_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 7 & 3 & 2 & 1 & 6 & 5 & 4 \end{pmatrix}, \quad \varphi_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 1 & 2 & 6 & 5 & 4 & 7 & 3 \end{pmatrix}.$$

Найти произведения подстановок $\varphi_1 \cdot \varphi_2$ и $\varphi_2 \cdot \varphi_1$, вычислить число их инверсий.

2. Вычислить определитель квадратных матриц

$$A = \begin{pmatrix} 51 & -2 \\ 15 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & -7 & 11 \\ 2 & 0 & 2 \\ 15 & -5 & 3 \end{pmatrix}.$$

3. Вычислить миноры и алгебраические дополнения элементов матрицы

$$C = \begin{pmatrix} 5 & 6 & -9 \\ 13 & 0 & 11 \\ 7 & -6 & 5 \end{pmatrix}.$$

4. Вычислить определитель матрицы

$$D=\begin{pmatrix} 50 & 10 & -3 & 2 \\ 23 & 5 & -1 & -1 \\ 11 & 3 & 0 & 0 \\ -8 & -7 & -6 & 2 \end{pmatrix}$$

разложением по третьему столбцу и третьей строке.

Вариант 24

1. Даны подстановки седьмого порядка

$$\varphi_1=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 4 & 3 & 2 & 1 & 6 & 5 & 7 \end{pmatrix},\quad \varphi_2=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 1 & 6 & 2 & 5 & 4 & 7 & 3 \end{pmatrix}.$$

Найти произведения подстановок $\varphi_1\cdot\varphi_2$ и $\varphi_2\cdot\varphi_1$, вычислить число их инверсий.

2. Вычислить определитель квадратных матриц

$$A=\begin{pmatrix} 19 & -8 \\ 10 & 1 \end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix} 15 & 0 & -7 \\ 5 & 31 & -8 \\ 0 & 14 & -1 \end{pmatrix}.$$

3. Вычислить миноры и алгебраические дополнения элементов матрицы

$$C=\begin{pmatrix} 0 & 7 & 18 \\ 45 & -8 & -1 \\ 3 & 9 & 6 \end{pmatrix}.$$

4. Вычислить определитель матрицы

$$D=\begin{pmatrix} 0 & -2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 5 & -2 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

разложением по четвёртому столбцу и четвёртой строке.

Вариант 25

1. Даны подстановки седьмого порядка

$$\varphi_1=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 5 & 3 & 2 & 6 & 1 & 4 & 7 \end{pmatrix},\quad \varphi_2=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 1 & 6 & 2 & 5 & 4 & 7 & 3 \end{pmatrix}.$$

Найти произведения подстановок $\varphi_1\cdot\varphi_2$ и $\varphi_2\cdot\varphi_1$, вычислить число их инверсий.

2. Вычислить определитель квадратных матриц

$$A=\begin{pmatrix}10 & -7\\ 25 & 1\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}30 & -2 & 2\\ -7 & 0 & 5\\ 9 & 11 & 0\end{pmatrix}.$$

3. Вычислить миноры и алгебраические дополнения элементов матрицы

$$C=\begin{pmatrix}0 & -7 & 9\\ 21 & 3 & -8\\ 7 & 6 & 2\end{pmatrix}.$$

4. Вычислить определитель матрицы

$$D=\begin{pmatrix}-2 & -4 & -1 & 0\\ 7 & -4 & 0 & 0\\ 3 & -4 & -1 & 0\\ 0 & 1 & 1 & -1\end{pmatrix}$$

разложением по третьему столбцу и второй строке.

Вариант 26

1. Даны подстановки седьмого порядка

$$\varphi_1=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7\\ 5 & 2 & 3 & 6 & 1 & 7 & 4\end{pmatrix},\quad \varphi_2=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7\\ 7 & 3 & 2 & 5 & 4 & 1 & 6\end{pmatrix}.$$

Найти произведения подстановок $\varphi_1\cdot\varphi_2$ и $\varphi_2\cdot\varphi_1$, вычислить число их инверсий.

2. Вычислить определитель квадратных матриц

$$A=\begin{pmatrix}17 & -4\\ 19 & 3\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}6 & 12 & -9\\ 0 & 4 & 15\\ 21 & 0 & -8\end{pmatrix}.$$

3. Вычислить миноры и алгебраические дополнения элементов матрицы

$$C=\begin{pmatrix}35 & 0 & -9\\ 1 & 1 & -3\\ 0 & 4 & 70\end{pmatrix}.$$

4. Вычислить определитель матрицы

$$D=\begin{pmatrix}-12 & -12 & -1 & 0\\ -1 & -4 & 0 & 0\\ -5 & -4 & -1 & 0\\ 2 & 1 & -1 & 1\end{pmatrix}$$

разложением по четвёртому столбцу и третьей строке.

Вариант 27

1. Даны подстановки седьмого порядка

$$\varphi_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 6 & 2 & 4 & 5 & 1 & 7 & 3 \end{pmatrix}, \quad \varphi_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 6 & 3 & 2 & 5 & 4 & 1 & 7 \end{pmatrix}.$$

Найти произведения подстановок $\varphi_1 \cdot \varphi_2$ и $\varphi_2 \cdot \varphi_1$, вычислить число их инверсий.

2. Вычислить определитель квадратных матриц

$$A = \begin{pmatrix} 21 & -9 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -5 & 0 & 44 \\ -3 & 1 & 2 \\ -9 & 0 & 7 \end{pmatrix}.$$

3. Вычислить миноры и алгебраические дополнения элементов матрицы

$$C = \begin{pmatrix} 7 & -7 & 21 \\ 19 & -8 & 4 \\ 3 & 0 & 10 \end{pmatrix}.$$

4. Вычислить определитель матрицы

$$D = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -8 & -3 \\ 0 & 0 & -5 & 1 \\ -2 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

разложением по четвёртому столбцу и второй строке.

Вариант 28

1. Даны подстановки седьмого порядка

$$\varphi_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 6 & 7 & 5 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}, \quad \varphi_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 7 & 2 & 3 & 5 & 4 & 6 & 1 \end{pmatrix}.$$

Найти произведения подстановок $\varphi_1 \cdot \varphi_2$ и $\varphi_2 \cdot \varphi_1$, вычислить число их инверсий.

2. Вычислить определитель квадратных матриц

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 38 & 19 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 7 & 17 & 0 \\ 2 & 0 & 55 \\ -1 & -2 & -7 \end{pmatrix}.$$

3. Вычислить миноры и алгебраические дополнения элементов матрицы

$$C = \begin{pmatrix} 0 & -7 & 9 \\ 21 & 3 & -8 \\ 7 & 6 & 2 \end{pmatrix}.$$

4. Вычислить определитель матрицы

$$D=\begin{pmatrix} -9 & -34 & -14 & -1 \\ -4 & -8 & -3 & 1 \\ -2 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 5 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

разложением по четвёртому столбцу и третьей строке.

Вариант 29

1. Даны подстановки седьмого порядка

$$\varphi_1=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 7 & 6 & 5 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix},\quad \varphi_2=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 2 & 7 & 5 & 4 & 6 & 1 \end{pmatrix}.$$

Найти произведения подстановок $\varphi_1\cdot\varphi_2$ и $\varphi_2\cdot\varphi_1$, вычислить число их инверсий.

2. Вычислить определитель квадратных матриц

$$A=\begin{pmatrix} -8 & 12 \\ 3 & 10 \end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix} -5 & 17 & 32 \\ -4 & 0 & 3 \\ -9 & 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

3. Вычислить миноры и алгебраические дополнения элементов матрицы

$$C=\begin{pmatrix} 4 & 6 & -5 \\ 2 & 12 & 3 \\ -3 & 4 & 7 \end{pmatrix}.$$

4. Вычислить определитель матрицы

$$D=\begin{pmatrix} -77 & -76 & -14 & -1 \\ -20 & -5 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 1 & 0 \\ 12 & 11 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

разложением по первому столбцу и третьей строке.

Вариант 30

1. Даны подстановки седьмого порядка

$$\varphi_1=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 7 & 3 & 6 & 5 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix},\quad \varphi_2=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 2 & 3 & 5 & 7 & 6 & 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

Найти произведения подстановок $\varphi_1\cdot\varphi_2$ и $\varphi_2\cdot\varphi_1$, вычислить число их инверсий.

2. Вычислить определитель квадратных матриц

$$A=\begin{pmatrix}-9 & 19\\ 3 & 21\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}1 & 0 & 9\\ -5 & -9 & -4\\ 13 & 19 & 5\end{pmatrix}.$$

3. Вычислить миноры и алгебраические дополнения элементов матрицы

$$C=\begin{pmatrix}0 & -5 & 12\\ 30 & 4 & 7\\ 8 & 8 & 2\end{pmatrix}.$$

4. Вычислить определитель матрицы

$$D=\begin{pmatrix}-1 & 2 & -2 & 1\\ 3 & 2 & 5 & 5\\ 0 & 0 & 1 & 2\\ 1 & 2 & -1 & 0\end{pmatrix}$$

разложением по второму столбцу и третьей строке.

3. ОБРАТНАЯ МАТРИЦА. СПОСОБЫ ОБРАЩЕНИЯ МАТРИЦЫ

Определение 3.1. Квадратная матрица называется невырожденной (вырожденной), если её определитель отличен от нуля (равен нулю).

Определение 3.2. Если существуют квадратные матрицы X и A, удовлетворяющие условию

$$A\cdot X=X\cdot A=E,$$

где E – единичная матрица того же порядка, то матрица X называется обратной к матрице A и обозначается символом A^{-1}.

Теорема 3.1. Каждая невырожденная квадратная матрица имеет обратную матрицу и притом единственную.

Определение 3.3. Матрица A^*, полученная из матрицы A заменой её элементов их алгебраическими дополнениями с последующим транспонированием, называется матрицей, присоединённой к матрице A:

$$A^*=\begin{pmatrix}A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1}\\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2}\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn}\end{pmatrix}.$$

Теорема 3.3. Если матрица A невырожденная, то её обратная матрица имеет вид:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} A^{*}.$$

Пример. Дана матрица $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$. Составить обратную матрицу.

Для решения задачи воспользуемся теоремой 3.3 и запишем: $\det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = -2 \neq 0 \Rightarrow A^{-1}$ существует. Вычислим алгебраические дополнения элементов матрицы A:

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \cdot 4 = 4; \qquad A_{12} = (-1)^{1+2} \cdot (-3) = 3;$$
$$A_{21} = (-1)^{2+1} \cdot (-2) = 2; \qquad A_{22} = (-1)^{2+2} \cdot 1 = 1.$$

Таким образом,

$$A^{-1} = \frac{1}{-2} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -3/2 & -1/2 \end{pmatrix}.$$

Определение 3.4. Элементарными преобразованиями матрицы называются следующие преобразования:

1) умножение какой-либо строки (столбца) матрицы на любое действительное число, отличное от нуля;

2) сложение какой-либо строки (столбца) матрицы с другой строкой (столбцом) матрицы, умноженной на любое действительное число;

3) перестановка строк (столбцов) матрицы местами;

4) удаление строк (столбцов) матрицы, содержащих только нули.

Определение 3.5. Матрицы, полученные в результате элементарного преобразования, называются эквивалентными.

Следующий способ обращения матриц основан на применении элементарных преобразований матрицы и состоит в реализации следующего алгоритма.

1. К матрице A справа приписывается единичная матрица того же порядка, что и матрица A. Тем самым получается матрица $(A \mid E)$.

2. С помощью элементарных преобразований (определение 3.4), осуществляемых над матрицей $(A \mid E)$, на месте матрицы A должна быть получена единичная матрица.

3. Матрица, полученная таким образом на месте единичной матрицы, и будет обратной для матрицы A.

Пример. С помощью элементарных преобразований найти матрицу, обратную данной:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 9 \\ 1 & 4 & 9 \end{pmatrix}.$$

Припишем к матрице A справа единичную матрицу того же порядка, что и данная матрица. Получим следующую матрицу:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 4 & 5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 9 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 9 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

Над полученной матрицей будем производить строчечные элементарные преобразования так, чтобы на месте данной матрицы получилась единичная, тогда на месте единичной матрицы получится матрица A^{-1}. Производимые элементарные преобразования будем сопровождать пояснениями. Сложим третью строку полученной матрицы с её первой строкой, умноженной на (-1), затем к первой строке прибавим вторую строку, умноженную на (-4); получим матрицу

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -31 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 9 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

Помножив первую строку этой матрицы на 4, сложим её с третьей строкой, умноженной на 31, а результат сложения запишем в первую строку:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 4 & 0 & 0 & -27 & -16 & 31 \\ 0 & 1 & 9 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

Вторую строку полученной матрицы, умноженную на 4, сложим с третьей строкой, умноженной на (-9); результат сложения поместим в третью строку:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 4 & 0 & 0 & -27 & -16 & 31 \\ 0 & 4 & 0 & 9 & 4 & -9 \\ 0 & 0 & 4 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

Умножая последнюю матрицу на $0{,}25$, получим

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -6{,}75 & -4 & 7{,}75 \\ 0 & 1 & 0 & 2{,}25 & 0{,}25 & -1{,}25 \\ 0 & 0 & 1 & -0{,}25 & 0 & 0{,}25 \end{array}\right),$$

Следовательно, $A^{-1} = \begin{pmatrix} -6{,}75 & -4 & 7{,}75 \\ 2{,}25 & 0{,}25 & -1{,}25 \\ -0{,}25 & 0 & 0{,}25 \end{pmatrix}$.

Теорема 3.4. Обращение матриц обладает следующими основными свойствами:

1. $\left(A^{-1}\right)^{-1} = A$;
2. $(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$;
3. $\left(A^{T}\right)^{-1} = \left(A^{-1}\right)^{T}$.

Обращение матриц часто применяется при решении так называемых матричных уравнений. Рассмотрим линейное матричное уравнение вида

$$A \cdot X - B = C,$$

где A – заданная квадратная матрица порядка n, B, C – заданные матрицы размерности $n \times m$, X – неизвестная матрица размерности $n \times m$.

Перенесём матрицу B в правую часть матричного уравнения:

$$A \cdot X = B + C.$$

Если матрица A невырожденная, то, по теореме 3.1, существует обратная матрица A^{-1}. Умножая полученное выше матричное уравнение на матрицу A^{-1} слева (порядок умножения матриц имеет значение, потому, как следует из утверждения «3» теоремы 1.1, произведение матриц некоммутативно), получим выражение

$$A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1} \cdot (B + C), \text{ или } E \cdot X = A^{-1} \cdot (B + C),$$

или

$$X = A^{-1} \cdot (B + C).$$

Выполняя действия в правой части последнего матричного уравнения, найдём неизвестную матрицу X.

Пример. Решить матричное уравнение $\begin{pmatrix} 1 & -4 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \cdot X - \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Матрица $A = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ невырожденная, поскольку её определитель $|A| = -1$ отличен от ноля. Матрицу A^{-1} найдём любым из известных способов: $A^{-1} = \begin{pmatrix} -3 & -4 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$. Искомая матрица X может быть найдена по формуле:

$$X = \begin{pmatrix} -3 & -4 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \left(\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \right).$$

Выполняя указанные действия, получим решение матричного уравнения:

$$X = \begin{pmatrix} -38 \\ -11 \end{pmatrix}.$$

Задания для самостоятельной работы по теме «Обратная матрица»

Вариант 1

1. Найти матрицу, обратную матрице

$$A=\begin{pmatrix}8 & 3 & 1\\ 5 & 5 & 7\\ 5 & 4 & 9\end{pmatrix},$$

с помощью присоединённой матрицы и с помощью элементарных преобразований.

2. Решить матричное уравнение $\begin{pmatrix}8 & 6\\ 1 & 2\end{pmatrix}\cdot X-\begin{pmatrix}41\\ 48\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}93\\ 155\end{pmatrix}$.

Вариант 2

1. Найти матрицу, обратную матрице

$$A=\begin{pmatrix}0 & 1 & 4\\ 5 & 5 & 7\\ 5 & 4 & 9\end{pmatrix},$$

с помощью присоединённой матрицы и с помощью элементарных преобразований.

2. Решить матричное уравнение $\begin{pmatrix}3 & -1\\ 1 & 2\end{pmatrix}\cdot X-\begin{pmatrix}4\\ 19\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}19\\ 15\end{pmatrix}$.

Вариант 3

1. Найти матрицу, обратную матрице

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2 & -5\\ 0 & -30 & 0\\ 1 & 20 & 5\end{pmatrix},$$

с помощью присоединённой матрицы и с помощью элементарных преобразований.

2. Решить матричное уравнение $\begin{pmatrix}2 & -4\\ 5 & 10\end{pmatrix}\cdot X-\begin{pmatrix}-5\\ 6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\ 3\end{pmatrix}$.

Вариант 4

1. Найти матрицу, обратную матрице

$$A=\begin{pmatrix}5 & -6 & 7\\ 0 & 12 & 0\\ 5 & 3 & 4\end{pmatrix},$$

с помощью присоединённой матрицы и с помощью элементарных преобразований.

2. Решить матричное уравнение $\begin{pmatrix}2 & 6\\ -3 & 1\end{pmatrix}\cdot X-\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7\\ 14\end{pmatrix}$.

Вариант 5

1. Найти матрицу, обратную матрице

$$A=\begin{pmatrix}3 & -3 & 7\\ 1 & 2 & 8\\ -1 & 4 & 1\end{pmatrix},$$

с помощью присоединённой матрицы и с помощью элементарных преобразований.

2. Решить матричное уравнение $\begin{pmatrix}-1 & 5\\ 14 & 10\end{pmatrix}\cdot X-\begin{pmatrix}2\\ -5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\ 15\end{pmatrix}$.

Вариант 6

1. Найти матрицу, обратную матрице

$$A=\begin{pmatrix}5 & 0 & -3\\ 2 & 3 & 6\\ 0 & 1 & 2\end{pmatrix},$$

с помощью присоединённой матрицы и с помощью элементарных преобразований.

2. Решить матричное уравнение $\begin{pmatrix}0 & 3\\ 8 & 15\end{pmatrix}\cdot X-\begin{pmatrix}11\\ 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}10\\ -6\end{pmatrix}$.

Вариант 7

1. Найти матрицу, обратную матрице

$$A=\begin{pmatrix}1 & 3 & -4\\ 3 & 0 & -10\\ -2 & 5 & 6\end{pmatrix},$$

с помощью присоединённой матрицы и с помощью элементарных преобразований.

2. Решить матричное уравнение $\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 12 & 5 \end{pmatrix} \cdot X - \begin{pmatrix} 12 \\ 30 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 20 \end{pmatrix}$.

Вариант 8

1. Найти матрицу, обратную матрице

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 12 & -3 \\ 1 & 2 & 0 \\ 4 & -8 & 5 \end{pmatrix},$$

с помощью присоединённой матрицы и с помощью элементарных преобразований.

2. Решить матричное уравнение $\begin{pmatrix} 10 & 0 \\ 19 & 5 \end{pmatrix} \cdot X - \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 27 \end{pmatrix}$.

Вариант 9

1. Найти матрицу, обратную матрице

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -1 \\ 1 & 5 & 1 \\ 0 & -3 & -1 \end{pmatrix},$$

с помощью присоединённой матрицы и с помощью элементарных преобразований.

2. Решить матричное уравнение $\begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot X - \begin{pmatrix} 10 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -7 \end{pmatrix}$.

Вариант 10

1. Найти матрицу, обратную матрице

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & -3 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix},$$

с помощью присоединённой матрицы и с помощью элементарных преобразований.

2. Решить матричное уравнение $\begin{pmatrix} 8 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot X - \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Вариант 11

1. Найти матрицу, обратную матрице

$$A=\begin{pmatrix}-5 & 0 & 1\\ 1 & 4 & 5\\ -6 & -7 & -8\end{pmatrix},$$

с помощью присоединённой матрицы и с помощью элементарных преобразований.

2. Решить матричное уравнение $\begin{pmatrix}15 & -5\\ 1 & 1\end{pmatrix}\cdot X-\begin{pmatrix}5\\ 8\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2\\ 3\end{pmatrix}$.

Вариант 12

1. Найти матрицу, обратную матрице

$$A=\begin{pmatrix}-5 & 1 & -6\\ 0 & 4 & -7\\ 1 & 5 & -8\end{pmatrix},$$

с помощью присоединённой матрицы и с помощью элементарных преобразований.

2. Решить матричное уравнение $\begin{pmatrix}14 & 7\\ 1 & 1\end{pmatrix}\cdot X-\begin{pmatrix}16\\ 8\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2\\ 3\end{pmatrix}$.

Вариант 13

1. Найти матрицу, обратную матрице

$$A=\begin{pmatrix}6 & 5 & 3\\ 2 & -4 & 5\\ 0 & 7 & -2\end{pmatrix},$$

с помощью присоединённой матрицы и с помощью элементарных преобразований.

2. Решить матричное уравнение $\begin{pmatrix}10 & 5\\ 5 & 2\end{pmatrix}\cdot X-\begin{pmatrix}10\\ 10\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-8\\ 5\end{pmatrix}$.

Вариант 14

1. Найти матрицу, обратную матрице

$$A=\begin{pmatrix}6 & 2 & 0\\ 5 & -4 & 7\\ 3 & 5 & -2\end{pmatrix},$$

с помощью присоединённой матрицы и с помощью элементарных преобразований.

2. Решить матричное уравнение $\begin{pmatrix} -5 & 1 \\ -8 & 2 \end{pmatrix} \cdot X - \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Вариант 15

1. Найти матрицу, обратную матрице

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & -7 \\ 1 & 5 & 0 \\ 0 & -4 & 3 \end{pmatrix},$$

с помощью присоединённой матрицы и с помощью элементарных преобразований.

2. Решить матричное уравнение $\begin{pmatrix} 21 & 1 \\ 19 & 1 \end{pmatrix} \cdot X - \begin{pmatrix} 45 \\ 18 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Вариант 16

1. Найти матрицу, обратную матрице

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & -4 \\ -7 & 0 & 3 \end{pmatrix},$$

с помощью присоединённой матрицы и с помощью элементарных преобразований.

2. Решить матричное уравнение $\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 10 & 5 \end{pmatrix} \cdot X - \begin{pmatrix} 5 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 7 \end{pmatrix}$.

Вариант 17

1. Найти матрицу, обратную матрице

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \\ 2 & -4 & 1 \end{pmatrix},$$

с помощью присоединённой матрицы и с помощью элементарных преобразований.

2. Решить матричное уравнение $\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 5 & 10 \end{pmatrix} \cdot X - \begin{pmatrix} 10 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 8 \end{pmatrix}$.

Вариант 18

1. Найти матрицу, обратную матрице

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -3 & -1 & -4 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix},$$

с помощью присоединённой матрицы и с помощью элементарных преобразований.

2. Решить матричное уравнение $\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 10 \end{pmatrix} \cdot X - \begin{pmatrix} 15 \\ 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 5 \end{pmatrix}$.

Вариант 19

1. Найти матрицу, обратную матрице

$$A=\begin{pmatrix} 3 & -3 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -9 & 9 & 1 \end{pmatrix},$$

с помощью присоединённой матрицы и с помощью элементарных преобразований.

2. Решить матричное уравнение $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} \cdot X - \begin{pmatrix} 5 \\ 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 5 \end{pmatrix}$.

Вариант 20

1. Найти матрицу, обратную матрице

$$A=\begin{pmatrix} 3 & 1 & -9 \\ -3 & 0 & 9 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

с помощью присоединённой матрицы и с помощью элементарных преобразований.

2. Решить матричное уравнение $\begin{pmatrix} 7 & 2 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} \cdot X - \begin{pmatrix} 7 \\ 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 5 \end{pmatrix}$.

Вариант 21

1. Найти матрицу, обратную матрице

$$A=\begin{pmatrix} 5 & 0 & 9 \\ -1 & 8 & 4 \\ 2 & 2 & 5 \end{pmatrix},$$

с помощью присоединённой матрицы и с помощью элементарных преобразований.

2. Решить матричное уравнение $\begin{pmatrix} 3 & 7 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot X - \begin{pmatrix} 4 \\ 15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 13 \end{pmatrix}$.

Вариант 22

1. Найти матрицу, обратную матрице

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -1 & 2 \\ 0 & 8 & 2 \\ 9 & 4 & 5 \end{pmatrix},$$

с помощью присоединённой матрицы и с помощью элементарных преобразований.

2. Решить матричное уравнение $\begin{pmatrix} 2 & 20 \\ 1 & 11 \end{pmatrix} \cdot X - \begin{pmatrix} 15 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Вариант 23

1. Найти матрицу, обратную матрице

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 2 & 0 \\ 5 & -4 & 7 \\ 3 & 5 & -2 \end{pmatrix},$$

с помощью присоединённой матрицы и с помощью элементарных преобразований.

2. Решить матричное уравнение $\begin{pmatrix} 7 & 1 \\ 13 & 2 \end{pmatrix} \cdot X - \begin{pmatrix} 10 \\ 16 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 12 \end{pmatrix}$.

Вариант 24

1. Найти матрицу, обратную матрице

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -1 \\ 1 & 5 & 1 \\ 0 & -3 & -1 \end{pmatrix},$$

с помощью присоединённой матрицы и с помощью элементарных преобразований.

2. Решить матричное уравнение $\begin{pmatrix} 8 & 1 \\ 10 & 2 \end{pmatrix} \cdot X - \begin{pmatrix} 14 \\ 20 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 \\ 12 \end{pmatrix}$.

Вариант 25

1. Найти матрицу, обратную матрице

$$A=\begin{pmatrix} 3 & -3 & 7 \\ 1 & 2 & 8 \\ -1 & 4 & 1 \end{pmatrix},$$

с помощью присоединённой матрицы и с помощью элементарных преобразований.

2. Решить матричное уравнение $\begin{pmatrix} -5 & 1 \\ 18 & 4 \end{pmatrix} \cdot X - \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix}$.

Вариант 26

1. Найти матрицу, обратную матрице

$$A=\begin{pmatrix} 3 & -3 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -9 & 9 & 1 \end{pmatrix},$$

с помощью присоединённой матрицы и с помощью элементарных преобразований.

2. Решить матричное уравнение $\begin{pmatrix} 15 & 1 \\ 10 & 4 \end{pmatrix} \cdot X - \begin{pmatrix} 25 \\ 17 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 21 \\ 7 \end{pmatrix}$.

Вариант 27

1. Найти матрицу, обратную матрице

$$A=\begin{pmatrix} -2 & 0 & -7 \\ 1 & 5 & 0 \\ 0 & -4 & 3 \end{pmatrix},$$

с помощью присоединённой матрицы и с помощью элементарных преобразований.

2. Решить матричное уравнение $\begin{pmatrix} 19 & 1 \\ 21 & 4 \end{pmatrix} \cdot X - \begin{pmatrix} 20 \\ 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Вариант 28

1. Найти матрицу, обратную матрице

$$A=\begin{pmatrix} 5 & 0 & 9 \\ -1 & 8 & 4 \\ 2 & 2 & 5 \end{pmatrix},$$

с помощью присоединённой матрицы и с помощью элементарных преобразований.

2. Решить матричное уравнение $\begin{pmatrix} 27 & 1 \\ 21 & 1 \end{pmatrix} \cdot X - \begin{pmatrix} 21 \\ 13 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 19 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Вариант 29

1. Найти матрицу, обратную матрице

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -3 & -1 & -4 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix},$$

с помощью присоединённой матрицы и с помощью элементарных преобразований.

2. Решить матричное уравнение $\begin{pmatrix} 7 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot X - \begin{pmatrix} 19 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 21 \\ 13 \end{pmatrix}$.

Вариант 30

1. Найти матрицу, обратную матрице

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -3 & -1 & -4 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix},$$

с помощью присоединённой матрицы и с помощью элементарных преобразований.

2. Решить матричное уравнение $\begin{pmatrix} -5 & -4 \\ 10 & 10 \end{pmatrix} \cdot X - \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \end{pmatrix}$.

4. РАНГ МАТРИЦЫ. СПОСОБЫ ВЫЧИСЛЕНИЯ РАНГА МАТРИЦЫ

Определение 4.1. Минором порядка s матрицы A называется определитель квадратной матрицы, образованной из элементов исходной матрицы, находящихся на пересечении каких-либо выбранных s строк и s столбцов матрицы A.

Определение 4.2. В матрице A порядка $m \times n$ минор порядка r называется базисным, если он не равен нулю, а все миноры порядка $r+1$ и выше равны нулю, или не существуют вовсе.

Определение 4.3. Порядок базисного минора матрицы A называется рангом матрицы и обозначается символом $\operatorname{rang} A$.

Замечание. Из приведённых определений следует, что ранг матрицы равен наибольшему из порядков её миноров, отличных от нуля.

Одним из способов вычисления ранга матрицы является метод окаймления миноров. Рассмотрим применение этого способа на следующем примере.

Пример. Определить ранг матрицы $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & -2 & 1 \\ 3 & 1 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}$.

Среди миноров второго порядка матрицы A существует, по крайней мере, один, отличный от нуля. Например, минор матрицы A, полученный вычёркиванием из этой матрицы третьей строки, третьего, четвёртого и пятого столбцов, отличен от нуля:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0,$$

следовательно, ранг данной матрицы не меньше двух.

Найдём миноры третьего порядка матрицы A. Все десять миноров третьего порядка равны нулю, поэтому ранг данной матрицы не может быть равен трём. Таким образом, $\operatorname{rang} A = 2$.

Другой способ вычисления ранга матрицы основан на применении элементарных преобразований матрицы и использовании следующих утверждений.

Теорема 4.1. Ранг ступенчатой матрицы равен количеству её ненулевых строк.

Теорема 4.2. Элементарные преобразования матрицы не изменяют её ранг.

Пример. Вычислим ранг матрицы из предыдущего примера. Для этого матрицу A с помощью элементарных преобразований приведём к ступенчатому виду. Найдём сумму второй строки матрицы A с первой строкой, умноженной на (-1), а также сумму третьей строки матрицы A с первой строкой, умноженной на (-3). В результате указанных элементарных преобразований получим эквивалентную матрицу

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -4 & -5 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & -5 & 0 \end{pmatrix}.$$

Третью строку полученной матрицы сложим с её первой строкой, умноженной на (-1), и получим эквивалентную матрицу

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -4 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Удалим из этой матрицы третью строку и получим ступенчатую эквивалентную матрицу, количество ненулевых строк которой равно двум:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -4 & -5 & 0 \end{pmatrix}.$$

В соответствии с теоремой 4.1, ранг полученной матрицы равен двум, а значит (теорема 4.2), $\operatorname{rang} A = 2$.

Задания для самостоятельной работы по теме «Ранг матрицы»

Вариант 1

Вычислить ранг матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -6 & 2 & 4 & 8 \\ -3 & 18 & -6 & -12 & -24 \\ 0 & 6 & 7 & 23 & 11 \end{pmatrix}$$

двумя способами: с помощью элементарных преобразований и методом окаймления миноров.

Вариант 2

Вычислить ранг матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -7 & 13 & 0 \\ 7 & 7 & -6 & 3 & 12 \\ -16 & -11 & -17 & 56 & -36 \end{pmatrix}$$

двумя способами: с помощью элементарных преобразований и методом окаймления миноров.

Вариант 3

Вычислить ранг матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 7 & -5 & 8 & 11 \\ 2 & -2 & -5 & 1 & 0 \\ 9 & 41 & -10 & 37 & 55 \end{pmatrix}$$

двумя способами: с помощью элементарных преобразований и методом окаймления миноров.

Вариант 4

Вычислить ранг матрицы

$$A=\begin{pmatrix} 3 & 15 & -9 & 20 & 7 \\ 3 & -1 & -6 & 1 & 2 \\ 6 & -18 & -9 & -17 & -1 \end{pmatrix}$$

двумя способами: с помощью элементарных преобразований и методом окаймления миноров.

Вариант 5

Вычислить ранг матрицы

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 5 & -4 & 13 & 0 \\ -2 & 0 & 4 & 1 & 2 \\ 0 & -10 & 4 & -27 & -2 \end{pmatrix}$$

двумя способами: с помощью элементарных преобразований и методом окаймления миноров.

Вариант 6

Вычислить ранг матрицы

$$A=\begin{pmatrix} -1 & 4 & -1 & 10 & -7 \\ 3 & 5 & -14 & 2 & 2 \\ 16 & 55 & -103 & 64 & -21 \end{pmatrix}$$

двумя способами: с помощью элементарных преобразований и методом окаймления миноров.

Вариант 7

Вычислить ранг матрицы

$$A=\begin{pmatrix} 3 & 2 & -9 & 8 & 16 \\ 1 & 2 & -5 & 6 & 12 \\ 5 & 6 & -19 & 20 & 40 \end{pmatrix}$$

двумя способами: с помощью элементарных преобразований и методом окаймления миноров.

Вариант 8

Вычислить ранг матрицы

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 7 & 12 & 0 & 9 \\ -2 & 4 & 6 & 11 & 8 \\ 2 & 29 & 48 & 22 & 43 \end{pmatrix}$$

двумя способами: с помощью элементарных преобразований и методом окаймления миноров.

Вариант 9

Вычислить ранг матрицы

$$A=\begin{pmatrix} 3 & -5 & 2 & 4 & 2 \\ 6 & 4 & 1 & 8 & 1 \\ 15 & -11 & 7 & 20 & 7 \end{pmatrix}$$

двумя способами: с помощью элементарных преобразований и методом окаймления миноров.

Вариант 10

Вычислить ранг матрицы

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 5 & -12 & 3 & 7 \\ 2 & 5 & 6 & -9 & 0 \\ 5 & 20 & -30 & 0 & 21 \end{pmatrix}$$

двумя способами: с помощью элементарных преобразований и методом окаймления миноров.

Вариант 11

Вычислить ранг матрицы

$$A=\begin{pmatrix} 4 & 3 & 1 & -9 & 8 \\ 2 & 3 & 6 & 7 & 1 \\ 10 & 9 & 8 & 8 & 17 \end{pmatrix}$$

двумя способами: с помощью элементарных преобразований и методом окаймления миноров.

Вариант 12

Вычислить ранг матрицы

$$A=\begin{pmatrix} -6 & 4 & 2 & 8 & 1 \\ 18 & -12 & -6 & -24 & -3 \\ 6 & 23 & 7 & 11 & 0 \end{pmatrix}$$

двумя способами: с помощью элементарных преобразований и методом окаймления миноров.

Вариант 13

Вычислить ранг матрицы

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 13 & -7 \\ 7 & 12 & 7 & 3 & -6 \\ -16 & -36 & -11 & 56 & -17 \end{pmatrix}$$

двумя способами: с помощью элементарных преобразований и методом окаймления миноров.

Вариант 14

Вычислить ранг матрицы

$$A=\begin{pmatrix} 8 & 7 & -5 & 3 & 11 \\ 1 & -2 & -5 & 2 & 0 \\ 37 & 41 & -10 & 9 & 55 \end{pmatrix}$$

двумя способами: с помощью элементарных преобразований и методом окаймления миноров.

Вариант 15

Вычислить ранг матрицы

$$A=\begin{pmatrix} 20 & 3 & 15 & -9 & 7 \\ 1 & 3 & -1 & -6 & 2 \\ -17 & 6 & -18 & -9 & -1 \end{pmatrix}$$

двумя способами: с помощью элементарных преобразований и методом окаймления миноров.

Вариант 16

Вычислить ранг матрицы

$$A=\begin{pmatrix} -4 & 1 & 5 & 13 & 0 \\ 4 & -2 & 0 & 1 & 2 \\ 4 & 0 & -10 & -27 & -2 \end{pmatrix}$$

двумя способами: с помощью элементарных преобразований и методом окаймления миноров.

Вариант 17

Вычислить ранг матрицы

$$A=\begin{pmatrix} -1 & -1 & 4 & 10 & -7 \\ -14 & 3 & 5 & 2 & 2 \\ -103 & 16 & 55 & 64 & -21 \end{pmatrix}$$

двумя способами: с помощью элементарных преобразований и методом окаймления миноров.

Вариант 18

Вычислить ранг матрицы

$$A=\begin{pmatrix} 2 & -9 & 3 & 8 & 16 \\ 2 & -5 & 1 & 6 & 12 \\ 6 & -19 & 5 & 20 & 40 \end{pmatrix}$$

двумя способами: с помощью элементарных преобразований и методом окаймления миноров.

Вариант 19

Вычислить ранг матрицы

$$A=\begin{pmatrix} 3 & -12 & 1 & 5 & 7 \\ -9 & 6 & 2 & 5 & 0 \\ 0 & -30 & 5 & 20 & 21 \end{pmatrix}$$

двумя способами: с помощью элементарных преобразований и методом окаймления миноров.

Вариант 20

Вычислить ранг матрицы

$$A=\begin{pmatrix} 2 & -6 & 4 & 8 & 1 \\ -6 & 18 & -12 & -24 & -3 \\ 7 & 6 & 23 & 11 & 0 \end{pmatrix}$$

двумя способами: с помощью элементарных преобразований и методом окаймления миноров.

Вариант 21

Вычислить ранг матрицы

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 13 & 1 & 2 & -7 \\ 12 & 3 & 7 & 7 & -6 \\ -36 & 56 & -16 & -11 & -17 \end{pmatrix}$$

двумя способами: с помощью элементарных преобразований и методом окаймления миноров.

Вариант 22

Вычислить ранг матрицы

$$A=\begin{pmatrix} 11 & 8 & 7 & -5 & 3 \\ 0 & 1 & -2 & -5 & 2 \\ 55 & 37 & 41 & -10 & 9 \end{pmatrix}$$

двумя способами: с помощью элементарных преобразований и методом окаймления миноров.

Вариант 23

Вычислить ранг матрицы

$$A=\begin{pmatrix} -9 & 20 & 3 & 15 & 7 \\ -6 & 1 & 3 & -1 & 2 \\ -9 & -17 & 6 & -18 & -1 \end{pmatrix}$$

двумя способами: с помощью элементарных преобразований и методом окаймления миноров.

Вариант 24

Вычислить ранг матрицы

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 5 & 13 & -4 & 0 \\ -2 & 0 & 1 & 4 & 2 \\ 0 & -10 & -27 & 4 & -2 \end{pmatrix}$$

двумя способами: с помощью элементарных преобразований и методом окаймления миноров.

Вариант 25

Вычислить ранг матрицы

$$A=\begin{pmatrix} 3 & 2 & -9 & 16 & 8 \\ 1 & 2 & -5 & 12 & 6 \\ 5 & 6 & -19 & 40 & 20 \end{pmatrix}$$

двумя способами: с помощью элементарных преобразований и методом окаймления миноров.

Вариант 26

Вычислить ранг матрицы

$$A=\begin{pmatrix} 10 & -1 & 4 & -1 & -7 \\ 2 & 3 & 5 & -14 & 2 \\ 64 & 16 & 55 & -103 & -21 \end{pmatrix}$$

двумя способами: с помощью элементарных преобразований и методом окаймления миноров.

Вариант 27

Вычислить ранг матрицы

$$A=\begin{pmatrix} 1 & -6 & 2 & 8 & 4 \\ -3 & 18 & -6 & -24 & -12 \\ 0 & 6 & 7 & 11 & 23 \end{pmatrix}$$

двумя способами: с помощью элементарных преобразований и методом окаймления миноров.

Вариант 28

Вычислить ранг матрицы

$$A=\begin{pmatrix} 5 & -4 & 1 & 13 & 0 \\ 0 & 4 & -2 & 1 & 2 \\ -10 & 4 & 0 & -27 & -2 \end{pmatrix}$$

двумя способами: с помощью элементарных преобразований и методом окаймления миноров.

Вариант 29

Вычислить ранг матрицы

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 9 & 2 & 7 & 12 \\ 11 & 8 & -2 & 4 & 6 \\ 22 & 43 & 2 & 29 & 48 \end{pmatrix}$$

двумя способами: с помощью элементарных преобразований и методом окаймления миноров.

Вариант 30

Вычислить ранг матрицы

$$A=\begin{pmatrix} 5 & 7 & -12 & 1 & 3 \\ 5 & 0 & 6 & 2 & -9 \\ 20 & 21 & -30 & 5 & 0 \end{pmatrix}$$

двумя способами: с помощью элементарных преобразований и методом окаймления миноров

5. СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ И МЕТОДЫ ИХ РЕШЕНИЯ

Определение 5.1. Системой *m* линейных уравнений с *n* неизвестными $x_1, x_2, \dots x_n$ называется система *S* вида

$$S:\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases},$$

где a_{ij} – коэффициенты при неизвестных, b_j – свободные члены (a_{ij}, b_j – заданные числа).

Определение 5.2. Решением системы S называется упорядоченный набор действительных чисел $\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_n$, при подстановке которых в каждое уравнение системы вместо $x_1, x_2, \dots x_n$ соответственно будут получены верные числовые равенства.

Определение 5.3. Система S называется совместной (несовместной), если она имеет хотя бы одно решение (не имеет решений).

Определение 5.4. Совместная система S линейных алгебраических уравнений называется определённой (неопределённой), если она имеет единственное решение (множество решений).

Определение 5.5. Матрица A, составленная из коэффициентов при неизвестных, называется основной матрицей системы S:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ . & . & . & . \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Матрица

$$A_b = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$$

называется расширенной матрицей этой системы.

Замечание. Система S может быть переписана в так называемом матричном виде:

$$A \cdot X = B,$$

где $B = (b_1, b_2, \dots, b_m)^T$ – вектор-столбец свободных членов системы.

Определение 5.6. Если все свободные члены системы уравнений равны нулю, то такая система называется однородной, если же хотя бы один свободный член отличен от нуля, система называется неоднородной.

Теорема 5.1. Однородная система линейных уравнений имеет ненулевое решение тогда и только тогда, когда определитель основной матрицы системы равен нулю.

Определение 5.7. Элементарными преобразованиями системы линейных уравнений называют следующие операции:

1) сложение обеих частей одного уравнения с соответствующими частями другого, умноженных на одно и то же число, не равное нулю;

2) перестановка уравнений местами;

3) удаление из системы уравнений, являющихся тождествами.

Рассмотрим основные методы решения систем линейных уравнений.

5.1. Метод Гаусса

Рассмотрим систему линейных уравнений S. Метод Гаусса решения систем линейных уравнений состоит из двух этапов, называемых прямым и обратным ходом. Прямой ход метода Гаусса заключается в том, что с помощью элементарных преобразований над расширенной матрицей система S приводится к «ступенчатому» виду.

Обратный ход метода Гаусса состоит в том, что, начиная с последнего уравнения ступенчатой системы, вычисляются неизвестные.

При реализации прямого хода метода Гаусса возможны следующие три случая.

1. В результате преобразований в системе уравнений будет получено уравнение вида $0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + \ldots + 0 \cdot x_n = b$, где $b \neq 0$. Ясно, что никакой набор действительных чисел этому уравнению удовлетворять не может, поэтому в таком случае система уравнений несовместна.

2. В результате преобразований получится ступенчатая система уравнений

$$\begin{cases} c_{11}x_1 + c_{12}x_2 + \ldots + c_{1n}x_n = d_1, \\ c_{22}x_2 + \ldots + c_{2n}x_n = d_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ c_{nn}x_n = d_n, \end{cases}$$

в которой количество уравнений совпадает с количеством неизвестных.

В этом случае система уравнений является определённой.

В результате преобразований получится система уравнений ступенчатого вида, в которой количество неизвестных больше числа уравнений системы ($m > n$)

$$\begin{cases} c_{11}x_1 + c_{12}x_2 + \ldots + c_{1n}x_n = d_1, \\ c_{22}x_2 + \ldots + c_{2n}x_n = d_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ c_{mm}x_m + \ldots + c_{mn}x_n = d_m. \end{cases}$$

В этом случае те неизвестные, которые стоят на «ступеньках», называются главными неизвестными ($x_1, x_2, \ldots, x_m$), а другие неизвестные называются свободными ($x_{m+1}, x_{m+2}, \ldots, x_n$); система уравнений будет неопределённой. Тогда обратный ход метода Гаусса состоит в том, что начиная с последнего уравнения системы, главные неизвестные выражаются через свободные и составляется общее решение системы уравнений. Для того чтобы получить какое-либо частное решение системы, свободным неизвестным придают конкретные числовые значения, вычисляя тем самым главные неизвестные.

Пример. Решить систему линейных уравнений методом Гаусса.

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 = 5, \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 = -3, \\ 7x_1 + x_2 - x_3 = 10. \end{cases}$$

Прямой ход. Приведём расширенную матрицу системы

$$A_b = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 5 \\ 1 & -2 & 3 & -3 \\ 7 & 1 & -1 & 10 \end{pmatrix}$$

с помощью элементарных преобразований к ступенчатому виду. Переставим первую и вторую строки матрицы A_b, получим матрицу

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -3 \\ 2 & 1 & -1 & 5 \\ 7 & 1 & -1 & 10 \end{pmatrix}.$$

Сложим вторую строку полученной матрицы с первой, умноженной на (-2), а её третью строку – с первой строкой, умноженной на (-7). Получим матрицу

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -3 \\ 0 & 5 & -7 & 11 \\ 0 & 15 & -22 & 31 \end{pmatrix}.$$

К третьей строке полученной матрицы прибавим вторую строку, умноженную на (-3), в результате чего получим ступенчатую матрицу

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -3 \\ 0 & 5 & -7 & 11 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, мы привели данную систему уравнений к ступенчатому виду:

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 = -3, \\ \quad 5x_2 - 7x_3 = 11, \\ \quad\quad -x_3 = -2. \end{cases},$$

Обратный ход. Начиная с последнего уравнения полученной ступенчатой системы уравнений, последовательно найдём значения неизвестных: $x_3 = 2,\ x_2 = 5,\ x_1 = 1.$

Однородная система линейных уравнений всегда совместна: она имеет хотя бы одно решение – нулевое (так называемое, тривиальное решение). Нас будут интересовать только нетривиальные решения однородной системы линейных уравнений. Рассмотрим пример решения однородной системы линейных уравнений методом Гаусса.

Пример. Решить систему линейных уравнений методом Гаусса.

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 4x_3 - 3x_4 = 0, \\ 3x_1 + 5x_2 + 6x_3 - 4x_4 = 0, \\ 4x_1 + 5x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 0, \\ 3x_1 + 8x_2 + 24x_3 - 19x_4 = 0. \end{cases}$$

Прямой ход. Поскольку данная система уравнений является однородной, выясним, имеет ли эта система нетривиальные решения. Для этого вычислим определитель основной матрицы системы

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & -3 \\ 3 & 5 & 6 & -4 \\ 4 & 5 & -2 & 3 \\ 3 & 8 & 24 & -19 \end{pmatrix}.$$

Вычисляя определитель $|A|$ разложением по строке или по столбцу, получим $|A| = 0$. В соответствии с теоремой 5.1, данная система линейных уравнений имеет нетривиальное решение. Приведём основную матрицу к ступенчатому виду с помощью элементарных преобразований. Сложим вторую и четвёртую строки матрицы A с первой строкой, умноженной на (-3), а третью строку – с первой строкой, умноженной на (-4); получим матрицу

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & -3 \\ 0 & -1 & -6 & 5 \\ 0 & -3 & -18 & 15 \\ 0 & 3 & 18 & -15 \end{pmatrix}.$$

Сложим третью строку полученной матрицы со второй, умноженной на (-3), а четвёртую строку – с третьей строкой; получим матрицу

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & -3 \\ 0 & -1 & -6 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

В этой матрице удалим нулевые строки и получим ступенчатую матрицу

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & -3 \\ 0 & -1 & -6 & 5 \end{pmatrix}.$$

Тем самым, данная система приведена к ступенчатому виду:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 4x_3 - 3x_4 = 0, \\ -x_2 - 6x_3 + 5x_4 = 0. \end{cases}$$

Неизвестные x_1 и x_2, стоящие на «ступеньках», являются главными, а неизвестные x_3 и x_4 – свободными.

Обратный ход. Выразим из второго уравнения системы главную неизвестную x_2 через свободные неизвестные x_3 и x_4: $x_2 = -6x_3 + 5x_4$. Используя полученное равенство, из первого уравнения ступенчатой системы получим следующее выражение главной неизвестной x_1: $x_1 = 8x_3 - 7x_4$. Общее решение данной системы уравнений запишем в виде: $(8x_3 - 7x_4, -6x_3 + 5x_4, x_3, x_4)$, где x_3 и x_4 – любые действительные числа. Положив, к примеру, $x_3 = -1$ и $x_4 = 5$, получим частное решение системы: $(-43,\ 31,\ -1,\ 5)$.

5.2. Матричный метод решения систем линейных уравнений

Пусть дана система n линейных уравнений с n неизвестными:

$$A \cdot X = B,$$

где

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix}.$$

Будем предполагать, что основная матрица A невырожденная. Тогда, по теореме 3.1, существует обратная матрица A^{-1}. Помножив матричное уравнение $A \cdot X = B$ на матрицу A^{-1} слева, воспользовавшись определением 3.2, а также утверждением 8) теоремы 1.1, получим формулу, на которой основан матричный метод решения систем линейных уравнений:

$$X = A^{-1} \cdot B.$$

Замечание. Отметим, что матричный метод решения систем линейных уравнений в отличие от метода Гаусса имеет ограниченное применение: этим методом могут быть решены только такие системы линейных уравнений, у которых, во-первых, число неизвестных равно числу уравнений, а во-вторых, основная матрица невырожденная.

Пример. Решить систему линейных уравнений матричным методом.

$$\begin{cases} 5x_1 - x_2 - x_3 = 0, \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 14, \\ 4x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 16. \end{cases}$$

Задана система трёх линейных уравнений с тремя неизвестными $A \cdot X = B$, где

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \end{pmatrix},\ X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 0 \\ 14 \\ 16 \end{pmatrix}.$$

Основная матрица системы уравнений невырожденная, поскольку её определитель отличен от нуля:

$$\det A = \begin{vmatrix} 5 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \end{vmatrix} = -30.$$

Обратную матрицу A^{-1} составим одним из методов, описанных в пункте 3.

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{6} & \frac{1}{30} & \frac{1}{30} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{7}{15} & \frac{8}{15} \\ \frac{1}{6} & \frac{19}{30} & -\frac{11}{30} \end{pmatrix}.$$

По формуле матричного метода решения систем линейных уравнений получим

$$X = \begin{pmatrix} 5 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{6} & \frac{1}{30} & \frac{1}{30} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{7}{15} & \frac{8}{15} \\ \frac{1}{6} & \frac{19}{30} & -\frac{11}{30} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

5.3. Метод Крамера

Данный метод так же, как и матричный, применим только для систем линейных уравнений, у которых число неизвестных совпадает с числом уравнений. Метод Крамера основан на одноимённой теореме:

Теорема 5.2. Система n линейных уравнений с n неизвестными

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n, \end{cases}$$

основная матрица которой невырожденная, имеет единственное решение, которое может быть получено по формулам

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\det A},\ x_2 = \frac{\Delta_2}{\det A}, \ldots, x_n = \frac{\Delta_n}{\det A},$$

где Δ_i – определитель матрицы, полученной из основной матрицы A системы уравнений заменой её i – го столбца столбцом свободных членов.

Пример. Найдём решение системы линейных уравнений, рассмотренной в предыдущем примере, методом Крамера. Основная матрица системы уравнений невырожденная, поскольку $\det A = -30 \neq 0$. Вычислим определители $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$.

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 14 & 2 & 3 \\ 16 & 3 & 2 \end{vmatrix} = -30, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 5 & 0 & -1 \\ 1 & 14 & 3 \\ 4 & 16 & 2 \end{vmatrix} = -60, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} 5 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 14 \\ 4 & 3 & 16 \end{vmatrix} = -90.$$

По формулам, представленным в теореме 5.2, вычислим значения неизвестных: $x_1 = 1,\ x_2 = 2,\ x_3 = 3$.

6. ИССЛЕДОВАНИЕ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ. БАЗИСНОЕ РЕШЕНИЕ

Исследовать систему линейных уравнений – означает определить, какой является эта система – совместной или несовместной, и в случае её совместности выяснить, определённая эта система или неопределённая.

Условие совместности системы линейных уравнений даёт следующая теорема

Теорема 6.1 (Кронекера–Капелли).

Система линейных уравнений совместна тогда и только тогда, когда ранг основной матрицы системы равен рангу её расширенной матрицы:

$$\operatorname{rang} A = \operatorname{rang} A_b.$$

Для совместной системы линейных уравнений вопрос о её определённости или неопределённости решается с применением следующих теорем.

Теорема 6.2. Если ранг основной матрицы совместной системы равен числу неизвестных, то система является определённой

Теорема 6.3. Если ранг основной матрицы совместной системы меньше числа неизвестных, то система является неопределённой.

Таким образом, из сформулированных теорем вытекает способ исследования систем линейных алгебраических уравнений. Пусть *n* – количество неизвестных, $\operatorname{rang} A = r,\ \operatorname{rang} A_b = \tilde{r}$. Тогда:

1) при $r \neq \tilde{r}$ система несовместна;

2) при $r = \tilde{r}$ система совместна, причём, если $r = \tilde{r} = n$, система определённая; если же $r = \tilde{r} < n$, система неопределённая.

Определение 6.1. Базисным решением неопределённой системы линейных уравнений называют такое её решение, в котором все свободные неизвестные равны нулю.

Пример. Исследовать систему линейных уравнений. В случае неопределённости системы найти её базисное решение.

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 1, \\ -3x_1 + 2x_2 + x_3 + 4x_4 = 4, \\ 2x_1 - 3x_2 + 16x_3 - 6x_4 = 9, \\ -5x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 6x_4 = 9. \end{cases}$$

Вычислим ранги основной A и расширенной матриц A_b данной системы уравнений, для чего приведём расширенную (а вместе с тем и основную) матрицу системы к ступенчатому виду:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & -2 & 1 \\ -3 & 2 & 1 & 4 & 4 \\ 2 & -3 & 16 & -6 & 9 \\ -5 & 3 & 5 & 6 & 9 \end{pmatrix}.$$

Вторую строку матрицы сложим с её первой строкой, умноженной на 3, третью строку – с первой строкой, умноженной на (-2), а четвёртую строку – с первой, умноженной на 5; получим матрицу

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & 10 & -2 & 7 \\ 0 & -1 & 10 & -2 & 7 \\ 0 & -2 & 20 & -4 & 14 \end{pmatrix}.$$

К третьей строке этой матрицы прибавим вторую строку, умноженную на (-1), а к четвёртой строке – первую, умноженную на (-2). В результате получим матрицу

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & 10 & -2 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

удаляя из которой третью и четвёртую строки получим ступенчатую матрицу

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & 10 & -2 & 7 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, $\operatorname{rang} A = 2,\ \operatorname{rang} A_b = 2$. Следовательно, данная система линейных уравнений совместна, а поскольку величина ранга меньше числа неизвестных, система является неопределённой. Полученной в результате элементарных преобразований ступенчатой матрице соответствует система уравнений

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 1, \\ -x_2 + 10x_3 - 2x_4 = 7, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -6 + 7x_3, \\ x_2 = -7 + 10x_3 - 2x_4. \end{cases}$$

Неизвестные x_1 и x_2 являются главными, а неизвестные x_3 и x_4 – свободными. Придавая свободным неизвестным нулевые значения, получим базисное решение данной системы линейных уравнений:

$$x_1 = -6,\ x_2 = -7, x_3 = 0,\ x_4 = 0.$$

Задания для самостоятельной работы по теме «Системы линейных уравнений и методы их решения»

Вариант 1

1. Решить систему линейных уравнений

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 7, \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 1, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 6 \end{cases}$$

методом Гаусса, матричным методом и методом Крамера.

2. Дана однородная система линейных уравнений

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 0, \\ x_1 + 2x_2 - 6x_3 = 0, \\ -19x_1 + 5x_2 - 15x_3 = 0. \end{cases}$$

Выяснить, имеет ли эта система уравнений нетривиальное решение. В случае утвердительного ответа найти это решение.

3. Даны системы линейных уравнений

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 = -7, \\ x_1 + 2x_2 - 6x_3 = 5, \\ 5x_1 + 5x_2 - 15x_3 = 8, \end{cases} \qquad \begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 = -7, \\ x_1 + 2x_2 - 6x_3 = -19, \\ -19x_1 + 5x_2 - 15x_3 = 8. \end{cases}$$

Исследовать системы линейных уравнений и классифицировать их. В случае неопределённости системы уравнений найти их базисные решения.

Вариант 2

1. Решить систему линейных уравнений

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 3, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = -4, \\ 4x_1 + x_2 + 4x_3 = -3 \end{cases}$$

методом Гаусса, матричным методом и методом Крамера.

2. Дана однородная система линейных уравнений

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 0, \\ x_1 + 2x_2 - 6x_3 = 0, \\ -16x_1 + 5x_2 - 15x_3 = 0. \end{cases}$$

Выяснить, имеет ли эта система уравнений нетривиальное решение. В случае утвердительного ответа найти это решение.

3. Даны системы линейных уравнений

$$\begin{cases} x_1 - 10x_2 + x_3 = -9, \\ -10x_1 + x_2 - 7x_3 = 6, \\ 4x_1 - 7x_2 + 3x_3 = -8, \end{cases} \qquad \begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 = -7, \\ x_1 + 2x_2 - 6x_3 = -16, \\ -16x_1 + 5x_2 - 15x_3 = 8. \end{cases}$$

Исследовать системы линейных уравнений и классифицировать их. В случае неопределённости системы уравнений найти общее и базисное решения.

Вариант 3

1. Решить систему линейных уравнений

$$\begin{cases} 3x_1 - x_2 + x_3 = 12, \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 6, \\ 5x_1 + x_2 + 2x_3 = 3 \end{cases}$$

методом Гаусса, матричным методом и методом Крамера.

2. Дана однородная система линейных уравнений

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 0, \\ x_1 + 2x_2 - 6x_3 = 0, \\ -13x_1 + 5x_2 - 15x_3 = 0. \end{cases}$$

Выяснить, имеет ли эта система уравнений нетривиальное решение. В случае утвердительного ответа найти это решение.

3. Даны системы линейных уравнений

$$\begin{cases} x_1 - 10x_2 + x_3 = -10, \\ -10x_1 + x_2 - 7x_3 = 1, \\ 4x_1 - 7x_2 + 3x_3 = -7, \end{cases} \qquad \begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 = -7, \\ x_1 + 2x_2 - 6x_3 = -13, \\ -13x_1 + 5x_2 - 15x_3 = 8. \end{cases}$$

Исследовать системы линейных уравнений и классифицировать их. В случае неопределённости системы уравнений найти общее и базисное решения.

Вариант 4

1. Решить систему линейных уравнений

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 = -4, \\ x_1 + 3x_2 - x_3 = 11, \\ x_1 - 2x_2 + 2x_3 = -7 \end{cases}$$

методом Гаусса, матричным методом и методом Крамера.

2. Дана однородная система линейных уравнений

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 0, \\ x_1 + 2x_2 - 6x_3 = 0, \\ -10x_1 + 5x_2 - 15x_3 = 0. \end{cases}$$

Выяснить, имеет ли эта система уравнений нетривиальное решение. В случае утвердительного ответа найти это решение.

3. Даны системы линейных уравнений

$$\begin{cases} x_1 - 10x_2 + x_3 = -7, \\ -10x_1 + x_2 - 7x_3 = 7, \\ 4x_1 - 7x_2 + 3x_3 = -7, \end{cases} \qquad \begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 = -7, \\ x_1 + 2x_2 - 6x_3 = -10, \\ -10x_1 + 5x_2 - 15x_3 = 8. \end{cases}$$

Исследовать системы линейных уравнений и классифицировать их. В случае неопределённости системы уравнений найти общее и базисное решения.

Вариант 5

1. Решить систему линейных уравнений

$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 12, \\ 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 6, \\ 2x_1 - x_2 - x_3 = -9 \end{cases}$$

методом Гаусса, матричным методом и методом Крамера.

2. Дана однородная система линейных уравнений

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 0, \\ x_1 + 2x_2 - 6x_3 = 0, \\ -18x_1 + 5x_2 - 15x_3 = 0. \end{cases}$$

Выяснить, имеет ли эта система уравнений нетривиальное решение. В случае утвердительного ответа найти это решение.

3. Даны системы линейных уравнений

$$\begin{cases} x_1 - 10x_2 + x_3 = -10, \\ -10x_1 + x_2 - 7x_3 = 4, \\ 4x_1 - 7x_2 + 3x_3 = -8, \end{cases} \qquad \begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 = -7, \\ x_1 + 2x_2 - 6x_3 = -18, \\ -18x_1 + 5x_2 - 15x_3 = 8. \end{cases}$$

Исследовать системы линейных уравнений и классифицировать их. В случае неопределённости системы уравнений найти общее и базисное решения.

Вариант 6

1. Решить систему линейных уравнений

$$\begin{cases} 8x_1 + 3x_2 - 6x_3 = -4, \\ x_1 + x_2 - x_3 = 2, \\ 4x_1 + x_2 - 3x_3 = -5 \end{cases}$$

методом Гаусса, матричным методом и методом Крамера.

2. Дана однородная система линейных уравнений

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 0, \\ x_1 + 2x_2 - 6x_3 = 0, \\ -15x_1 + 5x_2 - 15x_3 = 0. \end{cases}$$

Выяснить, имеет ли эта система уравнений нетривиальное решение. В случае утвердительного ответа найти это решение.

3. Даны системы линейных уравнений

$$\begin{cases} x_1 - 10x_2 + x_3 = -7, \\ -10x_1 + x_2 - 7x_3 = 10, \\ 4x_1 - 7x_2 + 3x_3 = -8, \end{cases} \qquad \begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 = -7, \\ x_1 + 2x_2 - 6x_3 = -15, \\ -15x_1 + 5x_2 - 15x_3 = 8. \end{cases}$$

Исследовать системы линейных уравнений и классифицировать их. В случае неопределённости системы уравнений найти общее и базисное решения.

Вариант 7

1. Решить систему линейных уравнений

$$\begin{cases} 4x_1 + x_2 - 3x_3 = 9, \\ x_1 + x_2 - x_3 = -2, \\ 8x_1 + 3x_2 - 6x_3 = 12 \end{cases}$$

методом Гаусса, матричным методом и методом Крамера.

2. Дана однородная система линейных уравнений

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 0, \\ x_1 + 2x_2 - 6x_3 = 0, \\ -12x_1 + 5x_2 - 15x_3 = 0. \end{cases}$$

Выяснить, имеет ли эта система уравнений нетривиальное решение. В случае утвердительного ответа найти это решение.

3. Даны системы линейных уравнений

$$\begin{cases} x_1 - 10x_2 + x_3 = -8, \\ -10x_1 + x_2 - 7x_3 = 5, \\ 4x_1 - 7x_2 + 3x_3 = -7, \end{cases} \qquad \begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 = -7, \\ x_1 + 2x_2 - 6x_3 = -12, \\ -12x_1 + 5x_2 - 15x_3 = 8. \end{cases}$$

Исследовать системы линейных уравнений и классифицировать их. В случае неопределённости системы уравнений найти общее и базисное решения.

Вариант 8

1. Решить систему линейных уравнений

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 33, \\ 7x_1 - 5x_2 = 24, \\ 4x_1 + 11x_3 = 39 \end{cases}$$

методом Гаусса, матричным методом и методом Крамера.

2. Дана однородная система линейных уравнений

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 0, \\ x_1 + 2x_2 - 6x_3 = 0, \\ -9x_1 + 5x_2 - 15x_3 = 0. \end{cases}$$

Выяснить, имеет ли эта система уравнений нетривиальное решение. В случае утвердительного ответа найти это решение.

3. Даны системы линейных уравнений

$$\begin{cases} x_1 - 10x_2 + x_3 = -9, \\ -10x_1 + x_2 - 7x_3 = 3, \\ 4x_1 - 7x_2 + 3x_3 = -7, \end{cases} \qquad \begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 = -7, \\ x_1 + 2x_2 - 6x_3 = -9, \\ -9x_1 + 5x_2 - 15x_3 = 8. \end{cases}$$

Исследовать системы линейных уравнений и классифицировать их. В случае неопределённости системы уравнений найти общее и базисное решения.

Вариант 9

1. Решить систему линейных уравнений

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 12, \\ 7x_1 - 5x_2 + x_3 = -33, \\ 4x_1 + x_3 = -7 \end{cases}$$

методом Гаусса, матричным методом и методом Крамера.

2. Дана однородная система линейных уравнений

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 0, \\ x_1 + 2x_2 - 6x_3 = 0, \\ -17x_1 + 5x_2 - 15x_3 = 0. \end{cases}$$

Выяснить, имеет ли эта система уравнений нетривиальное решение. В случае утвердительного ответа найти это решение.

3. Даны системы линейных уравнений

$$\begin{cases} x_1 - 10x_2 + x_3 = -6, \\ -10x_1 + x_2 - 7x_3 = 9, \\ 4x_1 - 7x_2 + 3x_3 = -7, \end{cases} \qquad \begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 = -7, \\ x_1 + 2x_2 - 6x_3 = -17, \\ -17x_1 + 5x_2 - 15x_3 = 8. \end{cases}$$

Исследовать системы линейных уравнений и классифицировать их. В случае неопределённости системы уравнений найти общее и базисное решения.

Вариант 10

1. Решить систему линейных уравнений

$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 - x_3 = 6, \\ 5x_2 + 4x_3 = -20, \\ 3x_1 - 2x_2 + 5x_3 = -22 \end{cases}$$

методом Гаусса, матричным методом и методом Крамера.

2. Дана однородная система линейных уравнений

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 0, \\ x_1 + 2x_2 - 6x_3 = 0, \\ -14x_1 + 5x_2 - 15x_3 = 0. \end{cases}$$

Выяснить, имеет ли эта система уравнений нетривиальное решение. В случае утвердительного ответа найти это решение.

3. Даны системы линейных уравнений

$$\begin{cases} x_1 - 10x_2 + x_3 = -8, \\ -10x_1 + x_2 - 7x_3 = 2, \\ 4x_1 - 7x_2 + 3x_3 = -6, \end{cases} \qquad \begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 = -7, \\ x_1 + 2x_2 - 6x_3 = -14, \\ -14x_1 + 5x_2 - 15x_3 = 8. \end{cases}$$

Исследовать системы линейных уравнений и классифицировать их. В случае неопределённости системы уравнений найти общее и базисное решения.

Вариант 11

1. Решить систему линейных уравнений

$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 21, \\ 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 9, \\ 2x_1 - x_2 - x_3 = 10 \end{cases}$$

методом Гаусса, матричным методом и методом Крамера.

2. Дана однородная система линейных уравнений

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 0, \\ x_1 + 2x_2 - 6x_3 = 0, \\ -11x_1 + 5x_2 - 15x_3 = 0. \end{cases}$$

Выяснить, имеет ли эта система уравнений нетривиальное решение. В случае утвердительного ответа найти это решение.

3. Даны системы линейных уравнений

$$\begin{cases} x_1 - 10x_2 + x_3 = -5, \\ -10x_1 + x_2 - 7x_3 = 8, \\ 4x_1 - 7x_2 + 3x_3 = -6, \end{cases} \qquad \begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 = -7, \\ x_1 + 2x_2 - 6x_3 = -11, \\ -11x_1 + 5x_2 - 15x_3 = 8. \end{cases}$$

Исследовать системы линейных уравнений и классифицировать их. В случае неопределённости системы уравнений найти общее и базисное решения.

Вариант 12

1. Решить систему линейных уравнений

$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 - 5x_3 = 5, \\ 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 = 12, \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 = -1 \end{cases}$$

методом Гаусса, матричным методом и методом Крамера.

2. Дана однородная система линейных уравнений

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 0, \\ x_1 + 2x_2 - 6x_3 = 0, \\ -8x_1 + 5x_2 - 15x_3 = 0. \end{cases}$$

Выяснить, имеет ли эта система уравнений нетривиальное решение. В случае утвердительного ответа найти это решение.

3. Даны системы линейных уравнений

$$\begin{cases} x_1 - 10x_2 + x_3 = -5, \\ -10x_1 + x_2 - 7x_3 = 5, \\ 4x_1 - 7x_2 + 3x_3 = -5, \end{cases} \qquad \begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 = -7, \\ x_1 + 2x_2 - 6x_3 = -8, \\ -8x_1 + 5x_2 - 15x_3 = 8. \end{cases}$$

Исследовать системы линейных уравнений и классифицировать их. В случае неопределённости системы уравнений найти общее и базисное решения.

Вариант 13

1. Решить систему линейных уравнений

$$\begin{cases} 4x_1 + x_2 + 4x_3 = 19, \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 11, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 8 \end{cases}$$

методом Гаусса, матричным методом и методом Крамера.

2. Дана однородная система линейных уравнений

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 0, \\ x_1 + 2x_2 - 6x_3 = 0, \\ -7x_1 + 5x_2 - 15x_3 = 0. \end{cases}$$

Выяснить, имеет ли эта система уравнений нетривиальное решение. В случае утвердительного ответа найти это решение.

3. Даны системы линейных уравнений

$$\begin{cases} x_1 - 10x_2 + x_3 = -10, \\ -10x_1 + x_2 - 7x_3 = 7, \\ 4x_1 - 7x_2 + 3x_3 = -9, \end{cases} \qquad \begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 = -7, \\ x_1 + 2x_2 - 6x_3 = -7, \\ -7x_1 + 5x_2 - 15x_3 = 8. \end{cases}$$

Исследовать системы линейных уравнений и классифицировать их. В случае неопределённости системы уравнений найти общее и базисное решения.

Вариант 14

1. Решить систему линейных уравнений

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 0, \\ 4x_1 + x_2 + 4x_3 = 6, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 4 \end{cases}$$

методом Гаусса, матричным методом и методом Крамера.

2. Дана однородная система линейных уравнений

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 0, \\ x_1 + 2x_2 - 6x_3 = 0, \\ -20x_1 + 5x_2 - 15x_3 = 0. \end{cases}$$

Выяснить, имеет ли эта система уравнений нетривиальное решение. В случае утвердительного ответа найти это решение.

3. Даны системы линейных уравнений

$$\begin{cases} x_1 - 10x_2 + x_3 = -7, \\ -10x_1 + x_2 - 7x_3 = 4, \\ 4x_1 - 7x_2 + 3x_3 = -6, \end{cases} \qquad \begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 = -7, \\ x_1 + 2x_2 - 6x_3 = -20, \\ -20x_1 + 5x_2 - 15x_3 = 8. \end{cases}$$

Исследовать системы линейных уравнений и классифицировать их. В случае неопределённости системы уравнений найти общее и базисное решения.

Вариант 15

1. Решить систему линейных уравнений

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 8, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 11, \\ 4x_1 + x_2 + 4x_3 = 22 \end{cases}$$

методом Гаусса, матричным методом и методом Крамера.

2. Дана однородная система линейных уравнений

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 0, \\ x_1 + 2x_2 - 6x_3 = 0, \\ -4x_1 + 5x_2 - 15x_3 = 0. \end{cases}$$

Выяснить, имеет ли эта система уравнений нетривиальное решение. В случае утвердительного ответа найти это решение.

3. Даны системы линейных уравнений

$$\begin{cases} x_1 - 10x_2 + x_3 = -7, \\ -10x_1 + x_2 - 7x_3 = 1, \\ 4x_1 - 7x_2 + 3x_3 = -5, \end{cases} \qquad \begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 = -7, \\ x_1 + 2x_2 - 6x_3 = -4, \\ -4x_1 + 5x_2 - 15x_3 = 8. \end{cases}$$

Исследовать системы линейных уравнений и классифицировать их. В случае неопределённости системы уравнений найти общее и базисное решения.

Вариант 16

1. Решить систему линейных уравнений

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 - 3x_3 = -9, \\ x_1 + 5x_2 + x_3 = 20, \\ 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 15 \end{cases}$$

методом Гаусса, матричным методом и методом Крамера.

2. Дана однородная система линейных уравнений

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 0, \\ x_1 + 2x_2 - 6x_3 = 0, \\ 5x_2 - 15x_3 = 0. \end{cases}$$

Выяснить, имеет ли эта система уравнений нетривиальное решение. В случае утвердительного ответа найти это решение.

3. Даны системы линейных уравнений

$$\begin{cases} x_1 - 10x_2 + x_3 = -5, \\ -10x_1 + x_2 - 7x_3 = 2, \\ 4x_1 - 7x_2 + 3x_3 = -4, \end{cases} \qquad \begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 = -7, \\ x_1 + 2x_2 - 6x_3 = 0, \\ 5x_2 - 15x_3 = 8. \end{cases}$$

Исследовать системы линейных уравнений и классифицировать их. В случае неопределённости системы уравнений найти общее и базисное решения.

Вариант 17

1. Решить систему линейных уравнений

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 - 3x_3 = 0, \\ 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 1, \\ x_1 + 5x_2 + x_3 = -3 \end{cases}$$

методом Гаусса, матричным методом и методом Крамера.

2. Дана однородная система линейных уравнений

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 0, \\ x_1 + 2x_2 - 6x_3 = 0, \\ 3x_1 - 5x_2 - 15x_3 = 0. \end{cases}$$

Выяснить, имеет ли эта система уравнений нетривиальное решение. В случае утвердительного ответа найти это решение.

3. Даны системы линейных уравнений

$$\begin{cases} x_1 - 10x_2 + x_3 = -9, \\ -10x_1 + x_2 - 7x_3 = 9, \\ 4x_1 - 7x_2 + 3x_3 = -9, \end{cases} \qquad \begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 = -7, \\ x_1 + 2x_2 - 6x_3 = 3, \\ 3x_1 + 5x_2 - 15x_3 = 8. \end{cases}$$

Исследовать системы линейных уравнений и классифицировать их. В случае неопределённости системы уравнений найти общее и базисное решения.

Вариант 18

1. Решить систему линейных уравнений

$$\begin{cases} -3x_1 + 5x_2 + 6x_3 = -8, \\ 3x_1 + x_2 + x_3 = -4, \\ x_1 - 4x_2 - 2x_3 = -9 \end{cases}$$

методом Гаусса, матричным методом и методом Крамера.

2. Дана однородная система линейных уравнений

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 0, \\ x_1 + 2x_2 - 6x_3 = 0, \\ -6x_1 - 5x_2 - 15x_3 = 0. \end{cases}$$

Выяснить, имеет ли эта система уравнений нетривиальное решение. В случае утвердительного ответа найти это решение.

3. Даны системы линейных уравнений

$$\begin{cases} x_1 - 10x_2 + x_3 = -6, \\ -10x_1 + x_2 - 7x_3 = 3, \\ 4x_1 - 7x_2 + 3x_3 = -5, \end{cases} \qquad \begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 = -7, \\ x_1 + 2x_2 - 6x_3 = -6, \\ -6x_1 + 5x_2 - 15x_3 = 8. \end{cases}$$

Исследовать системы линейных уравнений и классифицировать их. В случае неопределённости системы уравнений найти общее и базисное решения.

Вариант 19

1. Решить систему линейных уравнений

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 + x_3 = -4, \\ -3x_1 + 5x_2 + 6x_3 = 36, \\ x_1 - 4x_2 - 2x_3 = -19 \end{cases}$$

методом Гаусса, матричным методом и методом Крамера.

2. Дана однородная система линейных уравнений

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 0, \\ x_1 + 2x_2 - 6x_3 = 0, \\ -3x_1 - 5x_2 - 15x_3 = 0. \end{cases}$$

Выяснить, имеет ли эта система уравнений нетривиальное решение. В случае утвердительного ответа найти это решение.

3. Даны системы линейных уравнений

$$\begin{cases} x_1 - 10x_2 + x_3 = -10, \\ -10x_1 + x_2 - 7x_3 = 4, \\ 4x_1 - 7x_2 + 3x_3 = -8, \end{cases} \qquad \begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 = -7, \\ x_1 + 2x_2 - 6x_3 = -3, \\ -3x_1 + 5x_2 - 15x_3 = 8. \end{cases}$$

Исследовать системы линейных уравнений и классифицировать их. В случае неопределённости системы уравнений найти общее и базисное решения.

Вариант 20

1. Решить систему линейных уравнений

$$\begin{cases} 3x_1 - x_2 + x_3 = -11, \\ 5x_1 + x_2 + 2x_3 = 8, \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 16 \end{cases}$$

методом Гаусса, матричным методом и методом Крамера.

2. Дана однородная система линейных уравнений

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 0, \\ x_1 + 2x_2 - 6x_3 = 0, \\ x_1 + 5x_2 - 15x_3 = 0. \end{cases}$$

Выяснить, имеет ли эта система уравнений нетривиальное решение. В случае утвердительного ответа найти это решение.

3. Даны системы линейных уравнений

$$\begin{cases} x_1 - 10x_2 + x_3 = -10, \\ -10x_1 + x_2 - 7x_3 = 1, \\ 3x_1 - 8x_2 + x_3 = -8, \end{cases} \qquad \begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 = -7, \\ x_1 + 2x_2 - 6x_3 = 1, \\ x_1 + 5x_2 - 15x_3 = 8. \end{cases}$$

Исследовать системы линейных уравнений и классифицировать их. В случае неопределённости системы уравнений найти общее и базисное решения.

Вариант 21

1. Решить систему линейных уравнений

$$\begin{cases} 3x_1 - x_2 + x_3 = -1, \\ 5x_1 + x_2 + 2x_3 = -1, \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 7 \end{cases}$$

методом Гаусса, матричным методом и методом Крамера.

2. Дана однородная система линейных уравнений

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 0, \\ x_1 + 2x_2 - 6x_3 = 0, \\ 4x_1 + 5x_2 - 15x_3 = 0. \end{cases}$$

Выяснить, имеет ли эта система уравнений нетривиальное решение. В случае утвердительного ответа найти это решение.

3. Даны системы линейных уравнений

$$\begin{cases} x_1 - 10x_2 + x_3 = -10, \\ -10x_1 + x_2 - x_3 = 7, \\ 4x_1 - 7x_2 + x_3 = -9, \end{cases} \qquad \begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 = -7, \\ x_1 + 2x_2 - 6x_3 = 4, \\ 4x_1 + 5x_2 - 15x_3 = 8. \end{cases}$$

Исследовать системы линейных уравнений и классифицировать их. В случае неопределённости системы уравнений найти общее и базисное решения.

Вариант 22

1. Решить систему линейных уравнений

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 4, \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 0, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 1 \end{cases}$$

методом Гаусса, матричным методом и методом Крамера.

2. Дана однородная система линейных уравнений

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 0, \\ x_1 + 2x_2 - 6x_3 = 0, \\ -5x_1 + 5x_2 - 15x_3 = 0. \end{cases}$$

Выяснить, имеет ли эта система уравнений нетривиальное решение. В случае утвердительного ответа найти это решение.

3. Даны системы линейных уравнений

$$\begin{cases} x_1 - 10x_2 + x_3 = -9, \\ -10x_1 + x_2 - x_3 = 6, \\ 4x_1 - 7x_2 + x_3 = -8, \end{cases} \qquad \begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 = -7, \\ x_1 + 2x_2 - 6x_3 = -5, \\ -5x_1 + 5x_2 - 15x_3 = 8. \end{cases}$$

Исследовать системы линейных уравнений и классифицировать их. В случае неопределённости системы уравнений найти общее и базисное решения.

Вариант 23

1. Решить систему линейных уравнений

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 12, \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 16, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 8 \end{cases}$$

методом Гаусса, матричным методом и методом Крамера.

2. Дана однородная система линейных уравнений

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 0, \\ x_1 + 2x_2 - 6x_3 = 0, \\ -2x_1 + 5x_2 - 15x_3 = 0. \end{cases}$$

Выяснить, имеет ли эта система уравнений нетривиальное решение. В случае утвердительного ответа найти это решение.

3. Даны системы линейных уравнений

$$\begin{cases} x_1 - 10x_2 + x_3 = -10, \\ -10x_1 + x_2 - x_3 = 4, \\ 4x_1 - 7x_2 + x_3 = -8, \end{cases} \qquad \begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 = -7, \\ x_1 + 2x_2 - 6x_3 = -2, \\ -2x_1 + 5x_2 - 15x_3 = 8. \end{cases}$$

Исследовать системы линейных уравнений и классифицировать их. В случае неопределённости системы уравнений найти общее и базисное решения.

Вариант 24

1. Решить систему линейных уравнений

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 14, \\ 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 = -16, \\ 3x_1 - 2x_2 - 5x_3 = -8 \end{cases}$$

методом Гаусса, матричным методом и методом Крамера.

2. Дана однородная система линейных уравнений

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 0, \\ x_1 + 2x_2 - 6x_3 = 0, \\ 2x_1 + 5x_2 - 15x_3 = 0. \end{cases}$$

Выяснить, имеет ли эта система уравнений нетривиальное решение. В случае утвердительного ответа найти это решение.

3. Даны системы линейных уравнений

$$\begin{cases} x_1 - 10x_2 + x_3 = -8, \\ -10x_1 + x_2 - x_3 = 5, \\ 4x_1 - 7x_2 + x_3 = -7, \end{cases} \qquad \begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 = -7, \\ x_1 + 2x_2 - 6x_3 = 2, \\ 2x_1 + 5x_2 - 15x_3 = 8. \end{cases}$$

Исследовать системы линейных уравнений и классифицировать их. В случае неопределённости системы уравнений найти общее и базисное решения.

Вариант 25

1. Решить систему линейных уравнений

$$\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 11, \\ 2x_1 - x_2 - x_3 = 4, \\ 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 11 \end{cases}$$

методом Гаусса, матричным методом и методом Крамера.

2. Дана однородная система линейных уравнений

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 0, \\ x_1 + 2x_2 - 6x_3 = 0, \\ 6x_1 + 5x_2 - 15x_3 = 0. \end{cases}$$

Выяснить, имеет ли эта система уравнений нетривиальное решение. В случае утвердительного ответа найти это решение.

3. Даны системы линейных уравнений

$$\begin{cases} x_1 - 10x_2 + x_3 = -8, \\ -10x_1 + x_2 - x_3 = 2, \\ 4x_1 - 7x_2 + x_3 = -6, \end{cases} \qquad \begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 = -7, \\ x_1 + 2x_2 - 6x_3 = 6, \\ 6x_1 + 5x_2 - 15x_3 = 8. \end{cases}$$

Исследовать системы линейных уравнений и классифицировать их. В случае неопределённости системы уравнений найти общее и базисное решения.

Вариант 26

1. Решить систему линейных уравнений

$$\begin{cases} x_1 + 5x_2 - 6x_3 = -15, \\ 3x_1 + x_2 + 4x_3 = 13, \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 = 9 \end{cases}$$

методом Гаусса, матричным методом и методом Крамера.

2. Дана однородная система линейных уравнений

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 0, \\ x_1 + 2x_2 - 6x_3 = 0, \\ 7x_1 + 5x_2 - 15x_3 = 0. \end{cases}$$

Выяснить, имеет ли эта система уравнений нетривиальное решение. В случае утвердительного ответа найти это решение.

3. Даны системы линейных уравнений

$$\begin{cases} x_1 - 10x_2 + x_3 = -5, \\ -10x_1 + x_2 - x_3 = 8, \\ 4x_1 - 7x_2 + x_3 = -6, \end{cases} \qquad \begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 = -7, \\ x_1 + 2x_2 - 6x_3 = 7, \\ 7x_1 + 5x_2 - 15x_3 = 8. \end{cases}$$

Исследовать системы линейных уравнений и классифицировать их. В случае неопределённости системы уравнений найти общее и базисное решения.

Вариант 27

1. Решить систему линейных уравнений

$$\begin{cases} 4x_1 - x_2 = -6, \\ 3x_1 + 2x_2 + 5x_3 = -14, \\ x_1 - 3x_2 + 4x_3 = -19 \end{cases}$$

методом Гаусса, матричным методом и методом Крамера.

2. Дана однородная система линейных уравнений

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 0, \\ x_1 + 2x_2 - 6x_3 = 0, \\ 10x_1 + 5x_2 - 15x_3 = 0. \end{cases}$$

Выяснить, имеет ли эта система уравнений нетривиальное решение. В случае утвердительного ответа найти это решение.

3. Даны системы линейных уравнений

$$\begin{cases} x_1 - 10x_2 + x_3 = -7, \\ -10x_1 + x_2 - x_3 = 4, \\ 4x_1 - 7x_2 + x_3 = -6, \end{cases} \qquad \begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 = -7, \\ x_1 + 2x_2 - 6x_3 = 10, \\ 10x_1 + 5x_2 - 15x_3 = 8. \end{cases}$$

Исследовать системы линейных уравнений и классифицировать их. В случае неопределённости системы уравнений найти общее и базисное решения.

Вариант 28

1. Решить систему линейных уравнений

$$\begin{cases} 5x_1 + 2x_2 - 4x_3 = -22, \\ x_1 + 3x_3 = 1, \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 = 9 \end{cases}$$

методом Гаусса, матричным методом и методом Крамера.

2. Дана однородная система линейных уравнений

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 0, \\ x_1 + 2x_2 - 6x_3 = 0, \\ 13x_1 + 5x_2 - 15x_3 = 0. \end{cases}$$

Выяснить, имеет ли эта система уравнений нетривиальное решение. В случае утвердительного ответа найти это решение.

3. Даны системы линейных уравнений

$$\begin{cases} x_1 - 10x_2 + x_3 = -7, \\ -10x_1 + x_2 - x_3 = 1, \\ 4x_1 - 7x_2 + x_3 = -5, \end{cases} \qquad \begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 = -7, \\ x_1 + 2x_2 - 6x_3 = 13, \\ 13x_1 + 5x_2 - 15x_3 = 8. \end{cases}$$

Исследовать системы линейных уравнений и классифицировать их. В случае неопределённости системы уравнений найти общее и базисное решения.

Вариант 29

1. Решить систему линейных уравнений

$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 - x_3 = -9, \\ 4x_1 - x_2 + 5x_3 = -2, \\ 3x_2 - 7x_3 = -6 \end{cases}$$

методом Гаусса, матричным методом и методом Крамера.

2. Дана однородная система линейных уравнений

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 0, \\ x_1 + 2x_2 - 6x_3 = 0, \\ 16x_1 + 5x_2 - 15x_3 = 0. \end{cases}$$

Выяснить, имеет ли эта система уравнений нетривиальное решение. В случае утвердительного ответа найти это решение.

3. Даны системы линейных уравнений

$$\begin{cases} x_1 - 10x_2 + x_3 = -9, \\ -10x_1 + x_2 - x_3 = 3, \\ 4x_1 - 7x_2 + x_3 = -7, \end{cases} \qquad \begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 = -7, \\ x_1 + 2x_2 - 6x_3 = 16, \\ 16x_1 + 5x_2 - 15x_3 = 8. \end{cases}$$

Исследовать системы линейных уравнений и классифицировать их. В случае неопределённости системы уравнений найти общее и базисное решения.

Вариант 30

1. Решить систему линейных уравнений

$$\begin{cases} 7x_1 + 4x_2 - x_3 = 13, \\ 3x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 3, \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 = -10 \end{cases}$$

методом Гаусса, матричным методом и методом Крамера.

2. Дана однородная система линейных уравнений

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 0, \\ x_1 + 2x_2 - 6x_3 = 0, \\ 8x_1 + 5x_2 - 15x_3 = 0. \end{cases}$$

Выяснить, имеет ли эта система уравнений нетривиальное решение. В случае утвердительного ответа найти это решение.

3. Даны системы линейных уравнений

$$\begin{cases} x_1 - 10x_2 + x_3 = -6, \\ -10x_1 + x_2 - x_3 = 9, \\ 4x_1 - 7x_2 + x_3 = -7, \end{cases} \qquad \begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 = -7, \\ x_1 + 2x_2 - 6x_3 = 8, \\ 8x_1 + 5x_2 - 15x_3 = 8. \end{cases}$$

Исследовать системы линейных уравнений и классифицировать их. В случае неопределённости системы уравнений найти общее и базисное решения.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Настоящее учебное пособие включает в себя достаточный теоретический материал, а также примеры и задачи по курсу линейной алгебры, программа которого предусмотрена подготовкой дипломированных специалистов ДВГУПС, изучающих дисциплины «Алгебра», «Алгебра и геометрия», «Высшая математика».

Рассмотренные примеры и задачи призваны помочь студентам в овладении важными вопросами упомянутого раздела алгебры, а также организовать самостоятельную работу при выполнении домашних и расчётно-графических заданий, при подготовке к контрольным работам и экзаменам.

Автор надеется, что пособие будет способствовать выработке у студентов ДВГУПС прочных знаний, умений и навыков при решении задач линейной алгебры.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Босс, В. Лекции по математике: Линейная алгебра. Т. 3 / В. Босс. – М. : Едиториал УРСС, 2005. – 224 с.

2. Винберг, Э. Б. Задачи по алгебре / Э. Б. Винберг, Е. Е. Демидов, О. В. Шварцман. – М. : НМУ МК, 1997. – 54 с.

3. Винберг, Э. Б. Курс алгебры / Э. Б. Винберг. – М. : Факториал, 1999. – 527 с.

4. Дураков, Б. К. Краткий курс высшей алгебры / Б. К. Дураков. – М. : Физматлит, 2006. – 232 с.

5. Золотаревская, Д. И. Сборник задач по линейной алгебре / Д. И. Золотаревская. – М. : Едиториал УРСС, 2004. – 184 с.

6. Курош, А. Г. Курс высшей алгебры / А. Г. Курош. – М. : Лань, 2008. – 431 с.

7. Курош, А. Г. Лекции по общей алгебре / А. Г. Курош. – М. : Лань, 2005. – 560 с.

8. Ляпин, Е. С. Алгебра и теория чисел / Е. С. Ляпин, А. Е. Евсеев. – М. : Просвещение, 1974. – 384с.

9. Фаддеев, Д. К. Сборник задач по высшей алгебре / Д. К. Фаддеев, И. С. Соминский. – М. : Наука, 1971. – 308 с.

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ 3
1. МАТРИЦЫ. ОПЕРАЦИИ С МАТРИЦАМИ 4
Задания для самостоятельной работы по теме
«Матрицы. Операции с матрицами» 8
2. ОПРЕДЕЛИТЕЛЬ КВАДРАТНОЙ МАТРИЦЫ 28
Задания для самостоятельной работы по теме
«Определитель квадратной матрицы» 34
3. ОБРАТНАЯ МАТРИЦА. СПОСОБЫ ОБРАЩЕНИЯ МАТРИЦЫ 52
Задания для самостоятельной работы по теме
«Обратная матрица» 56
4. РАНГ МАТРИЦЫ. СПОСОБЫ ВЫЧИСЛЕНИЯ РАНГА МАТРИЦЫ 64
Задания для самостоятельной работы по теме «Ранг матрицы» 66
5. СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ И МЕТОДЫ ИХ РЕШЕНИЯ 72
5.1. Метод Гаусса 73
5.2. Матричный метод решения систем линейных уравнений 77
5.3. Метод Крамера 78
6. ИССЛЕДОВАНИЕ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ.
БАЗИСНОЕ РЕШЕНИЕ 79
Задания для самостоятельной работы по теме
«Системы линейных уравнений и методы их решения» 81
ЗАКЛЮЧЕНИЕ 97
БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК 98

Учебное издание

Ереклинцев Антон Германович

ЗАДАЧНИК-ПРАКТИКУМ ПО ЛИНЕЙНОЙ АЛГЕБРЕ

Учебное пособие

Отпечатано методом прямого репродуцирования

План 2009 г. Поз. 9.6. Подписано в печать 15.05.2009.
Усл. печ. л. 5,8. Зак. 182. Тираж 100 экз. Цена 41 руб.

Издательство ДВГУПС
680021, г. Хабаровск, ул. Серышева, 47.