МИНИСТЕРСТВО ПУТЕЙ СООБЩЕНИЯ РФ
ИРКУТСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ПУТЕЙ СООБЩЕНИЯ



КРАТНЫЕ, КРИВОЛИНЕЙНЫЕ И ПОВЕРХНОСТНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ. ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ПОЛЯ

Учебное пособие
для студентов заочного отделения
всех специальностей

ИРКУТСК
2003

КОМПЛЕКС МЕТОДИЧЕСКИХ ПОСОБИЙ ПО МАТЕМАТИКЕ ДЛЯ ЗАОЧНОГО ОБУЧЕНИЯ

Под редакцией доктора технических наук,
профессора А. П. Хоменко

- Комплексные числа. Основы линейной алгебры. Системы линейных уравнений
- Векторная алгебра и аналитическая геометрия
- Введение в анализ
- Дифференциальное исчисление функций одной переменной
- Дифферинциальное исчисление функций нескольких переменных
- Линейное программирование. Динамическое программирование
- Интегральное исчисление функций одной переменной
- **Кратные, криволинейные и поверхностные интегралы. Элементы теории поля**
- Обыкновенные дифференциальные уравнения
- Ряды
- Теория функций комплексной переменной. Операционное исчисление
- Вариационное исчисление. Уравнения математической физики
- Теория вероятностей
- Математическая статистика
- Марковские случайные процессы и теория игр
- Дискретная математика

МИНИСТЕРСТВО ПУТЕЙ СООБЩЕНИЯ РФ

ИРКУТСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ПУТЕЙ СООБЩЕНИЯ

КРАТНЫЕ, КРИВОЛИНЕЙНЫЕ И ПОВЕРХНОСТНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ. ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ПОЛЯ

Учебное пособие
для студентов заочного отделения
всех специальностей

Под редакцией
доктора технических наук, профессора А. П. Хоменко

ИРКУТСК

2003

ББК 22.161.1
УДК 517.373
П 30
Петрякова Е.А., Синюкович Ю.И. Кратные, криволинейные и поверхностные интегралы. Элементы теории поля: Учебное пособие. Иркутск, 2003. 59 с.

Пособие содержит достаточно полное изложение основных вопросов курса интегрального исчисления функций нескольких переменных и теории поля, соответствующих требованиям к минимуму основной обязательной программы по подготовке дипломированных специалистов. Пособие снабжено большим количеством подробно разобранных примеров и геометрических иллюстраций. В пособие включены вопросы для самоконтроля и десять вариантов контрольной работы.

Пособие предназначено для студентов всех специальностей второго курса заочной формы обучения, но может быть полезно при изучении соответствующих разделов математики на дневном отделении.

Ил. 28. Библиогр.: 7 назв.

Рецензенты: канд. физ.-мат. наук, доц. В.И. Кустова (БГУЭП);
д-р техн. наук, проф. В.Д. Бардушко (ИрГУПС)

© Иркутский государственный университет путей сообщения, 2003

1. ДВОЙНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

Двойной интеграл представляет собой обобщение понятия определенного интеграла на случай функций двух переменных.

1.1. Определение двойного интеграла. Пусть функция $f(x,y)$ определена в ограниченной замкнутой области D плоскости xOy. Разобьем область D произвольным образом на n частичных областей $D_1, D_2, ..., D_n$, имеющих площади $\Delta s_1, \Delta s_2, ..., \Delta s_n$ соответственно. В каждой из частичных областей D_i, $i = \overline{1,n}$ выберем произвольную точку $M_i(x_i, y_i)$ и умножим значение функции $f(x,y)$ в точке $M_i(x_i, y_i)$ на площадь Δs_i этой области.

Интегральной суммой для функции $f(x,y)$ по области D называется сумма вида

$$\sigma_n = \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i)\Delta s_i . \qquad (1.1)$$

Назовем *диаметром* $d(D)$ области D наибольшее расстояние между граничными точками этой области. Обозначим через λ наибольший из диаметров частичных областей D_i, то есть $\lambda = \max\limits_{1 \le i \le n} d(D_i)$.

Если интегральная сумма (1.1) при $\lambda \to 0$ имеет определенный конечный предел, равный I,

$$I = \lim_{n\to\infty} \sigma_n = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i)\Delta s_i ,$$

не зависящий от способа разбиения области D на частичные области и от способа выбора точек $M_i(x_i, y_i)$ в пределах каждой из них, то этот предел называется *двойным интегралом от функции* $f(x,y)$ *по области* D и обозначается так $\iint\limits_D f(x,y)ds$. Таким образом, по определению

$$I = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i)\Delta s_i = \iint_D f(x,y)ds . \qquad (1.2)$$

Функция $f(x,y)$ в этом случае называется *интегрируемой* по области D, D - *областью интегрирования*, x и y - *переменными интегрирования*, ds - *элементом площади*.

Если разбиение области D проводить прямыми, параллельными осям координат (в дальнейшем будем предполагать, что это всегда имеет

место), то частичные области D_i - есть прямоугольники и, **следовательно,** $\Delta s_i = \Delta x_i \cdot \Delta y_i$, $i = \overline{1,n}$. Тогда $ds = dxdy$ и

$$I = \iint\limits_D f(x,y)ds = \iint\limits_D f(x,y)dxdy.$$

Замечание 1.1. Если в (1.1) положить $f(x,y) \equiv 1$ при $(x,y) \in D$, то получим выражение площади S области D в виде двойного интеграла

$$S = \iint\limits_D dxdy.$$

Действительно, из определения двойного интеграла следует, что

$$\iint\limits_D dxdy = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} \Delta s_i = \lim_{\lambda \to 0} S = S \ .$$

#

Достаточные условия существования двойного интеграла можно сформулировать в виде следующей теоремы.

Теорема. *Всякая непрерывная в замкнутой ограниченной области* D *функция* $f(x,y)$ *интегрируема в этой области.*

Замечание 1.2. Можно указать менее жесткие условия существования двойного интеграла. Но мы ограничимся рассмотрением только непрерывных в замкнутой области функций.

#

Геометрический смысл двойного интеграла: если $f(x,y) > 0$ в области D, то двойной интеграл $\iint\limits_D f(x,y)ds$ численно равен *объему цилиндрического тела*, ограниченного сверху поверхностью $z = f(x,y)$, сбоку - цилиндрической поверхностью с образующими, параллельными оси Oz, и снизу - областью D, лежащей в плоскости xOy.

1.2. Свойства интегрируемых функций и двойных интегралов

1^0. Если функции $f_1(x,y)$ и $f_2(x,y)$ интегрируемы в области D, то интегрируемы и функции $f_1(x,y) \pm f_2(x,y)$, причем

$$\iint\limits_D (f_1(x,y) \pm f_2(x,y))ds = \iint\limits_D f_1(x,y)ds \pm \iint\limits_D f_2(x,y)ds.$$

2^0. Если функция $f(x,y)$ интегрируема в области D, то интегрируема и функция $cf(x,y)$ (c - постоянная), причем

$$\iint\limits_D cf(x,y)ds = c\iint\limits_D f(x,y)ds.$$

3^0. Если функция $f(x,y)$ интегрируема в области D и область D может быть разбита на две области D_1 и D_2, не имеющие общих внутренних точек, то

$$\iint\limits_D f(x,y)ds = \iint\limits_{D_1} f(x,y)ds + \iint\limits_{D_2} f(x,y)ds.$$

4⁰. Если для интегрируемых в области D функций $f(x,y)$ и $g(x,y)$ выполняется неравенство $f(x,y) \le g(x,y)$, то

$$\iint\limits_D f(x,y)ds \le \iint\limits_D g(x,y)ds.$$

5⁰. Если интегрируемая в области D функция удовлетворяет неравенству $m \le f(x,y) \le M$, то

$$mS \le \iint\limits_D f(x,y)ds \le MS,$$

где S площадь области D, m и M соответственно наименьшее и наибольшее значения функции $f(x,y)$ в области D.

1.3. Вычисление двойных интегралов. Двойные интегралы вычисляются путем сведения к повторным интегралам.

Пусть область интегрирования ограничена слева и справа прямыми $x = a$ и $x = b$, $a < b$ (эти прямые могут выродиться в точку), а снизу и сверху – непрерывными кривыми $y = \varphi_1(x)$ и $y = \varphi_2(x)$, $\varphi_1(x) \le \varphi_2(x)$ для $x \in [a,b]$. Причем, каждая из этих кривых пересекается прямыми, параллельными оси Oy, только в одной точке (рис. 1.1, рис. 1.2). Такая область называется *правильной в направлении оси Oy*.

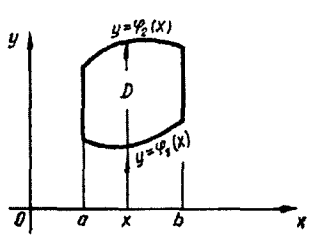


Рис. 1.1

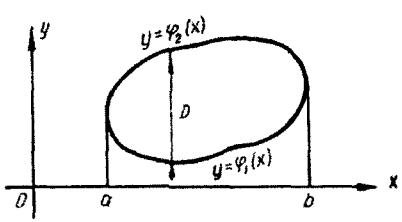


Рис. 1.2

Вычисление двойного интеграла в случае области правильной в направлении оси Oy сводится к вычислению двукратного интеграла вида

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \int\limits_a^b \left(\int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy \right) dx = \int\limits_a^b dx \int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy, \qquad (1.3)$$

который есть результат последовательного вычисления двух обыкновенных определенных интегралов. Сначала вычисляется

внутренний интеграл $\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy$ по переменной y, в котором переменная x считается постоянной, а пределы интегрирования есть функции от x, а затем вычисляется внешний интеграл по переменной x, пределы интегрирования внешнего интеграла – постоянны.

Замечание 1.3. Если окажется, что нижняя или верхняя линия границы области D состоит из нескольких участков, имеющих различные уравнения, то область D следует разбить прямыми, параллельными оси Oy, на части, в каждой из которых нижняя и верхняя линии границы определялись бы одним уравнением. Вычисляя двойной интеграл по каждой из этих областей с помощью двукратного интегрирования и складывая результаты, найдем искомый двойной интеграл по области D (см. пример 1.4).

#

Пусть область интегрирования ограничена снизу и сверху прямыми $y=c$ и $y=d$, $c<d$ (эти прямые могут выродиться в точку), а слева и справа - непрерывными кривыми $x=\psi_1(y)$ и $x=\psi_2(y), \psi_1(y)\le\psi_2(y)$ для $y\in[c,d]$. Причем, каждая из этих кривых пересекается прямыми, параллельными оси Ox, только в одной точке (рис. 1.3, рис. 1.4). Такая область называется *правильной в направлении оси* Ox.

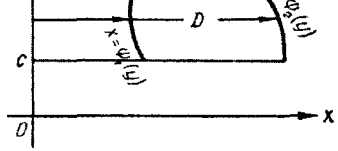


Рис. 1.3

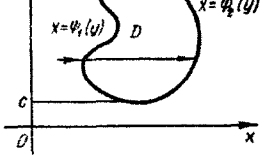


Рис. 1.4

Вычисление двойного интеграла в случае области правильной в направлении оси Ox сводится к вычислению двукратного интеграла вида

$$\iint_D f(x,y)dxdy=\int_c^d\left(\int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)dx\right)dy=\int_c^d dy\int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)dx, \quad (1.4)$$

который есть результат последовательного вычисления двух обыкновенных определенных интегралов. Сначала вычисляется внутренний интеграл $\int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)dx$ по переменной x, в котором переменная y считается постоянной, а пределы интегрирования есть функции от y, затем вычисляется внешний интеграл по переменной y пределы интегрирования внешнего интеграла - постоянны.

Замечание 1.4. Если окажется, что левая или правая линия границы области D состоит из нескольких участков, имеющих различные уравнения, то область D следует разбить прямыми, параллельными оси Ox, на части, в каждой из которых левая и правая линии границы определялись бы одним уравнением. Вычисляя двойной интеграл по каждой из этих областей с помощью двукратного интегрирования и складывая результаты, найдем искомый двойной интеграл по области D.

#

Замечание 1.5. Если граница области D пересекается лишь в двух точках как прямыми, параллельными оси Ox, так и прямыми, параллельными оси Oy, то есть область D является *правильной и в направлении оси Ox и в направлении оси Oy, то область D называется правильной.* Для вычисления двойного интеграла по такой области применимы обе формулы (1.3) и (1.4). Справедливо равенство

$$\int_a^b dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy = \int_c^d dy \int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)dx, \qquad (1.5)$$

которое означает, в случае правильной области, независимость двойного интеграла от порядка интегрирования. Однако для экономии вычислительной работы следует, если это возможно, выбрать такой порядок интегрирования, при котором нет необходимости разбивать область интегрирования на части (см. примеры 1.1, 1.2, 1.4, 1.5).

#

Пример 1.1. Вычислить $\iint\limits_D (x-y)dxdy$, по области D, ограниченной параболой $y = 2 - x^2$ и прямой $y = 2x - 1$.

Решение. Область интегрирования изображена на рис.1.5. Решая совместно уравнения прямой и параболы, найдем координаты точек их пересечения: $A(-3,-7)$, $B(1,1)$.

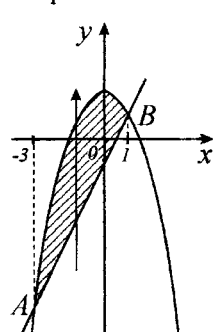


Рис. 1.5

Область интегрирования является правильной. Для вычисления интеграла по заданной области лучше воспользоваться формулой (1.3), согласно которой внутренний интеграл берется по переменной y, а внешний – по переменной x. В этом случае мы будем иметь дело с одним повторным интегралом (так как все прямые, параллельные оси Oy, входят в область D через прямую $y = 2x - 1$ и выходят из нее через параболу $y = 2 - x^2$). Обратный же порядок интегрирования (то есть применение формулы (1.4)) привел бы к сумме двух повторных интегралов, так как справа эта область ограничена разнородными линиями и часть прямых, параллельных оси Ox, выходила

бы из области через параболу $y = 2 - x^2$, а часть - через прямую $y = 2x - 1$.

Итак, для вычисления заданного двойного интеграла воспользуемся формулой (1.3), предварительно определив пределы интегрирования. Пределы внешнего интеграла по переменной x - это абсциссы самой левой $x = -3$ (нижний предел интегрирования) и самой правой $x = 1$ (верхний предел интегрирования) точек области D. Для того, чтобы определить пределы интегрирования внутреннего интеграла по переменной y, проведем через произвольную точку $x \in (-3,1)$ прямую, параллельную оси Oy. Точка входа этой прямой в область D лежит на прямой $y = 2x - 1$, а точка выхода - на параболе $y = 2 - x^2$. Уравнения этих линий и дают нам, соттветственно, нижний и верхний пределы внутреннего интеграла.

Следовательно, согласно формуле (1.3), будем иметь

$$\iint\limits_D (x-y)dxdy = \int\limits_{-3}^{1} dx \int\limits_{2x-1}^{2-x^2} (x-y)dy = \int\limits_{-3}^{1} dx \left[xy - \frac{y^2}{2} \right]\Bigg|_{2x-1}^{2-x^2} =$$

$$= \int\limits_{-3}^{1} \left(2x - x^3 - \frac{(2-x^2)^2}{2} - 2x^2 + x + 2x^2 - 2x + \frac{1}{2} \right) dx =$$

$$= \int\limits_{-3}^{1} \left(2x - x^3 - 2 + 2x^2 - \frac{x^4}{2} - 2x^2 + x + 2x^2 - 2x + \frac{1}{2} \right) dx =$$

$$= \int\limits_{-3}^{1} \left(-\frac{x^4}{2} - x^3 + 2x^2 + x - \frac{3}{2} \right) dx =$$

$$= \left[-\frac{x^5}{10} - \frac{x^4}{4} + \frac{2x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - \frac{3x}{2} \right]\Bigg|_{-3}^{1} = 4\frac{4}{15}.$$

#

Пример 1.2. Вычислить $\iint\limits_D (x+2y)dxdy$, по области D, ограниченной прямыми $y=x$, $y=2x$, $y=2$, и $y=3$.

Решение. Область интегрирования изображена на рис. 1.6. Решая совместно уравнения прямых, найдем точки их пересечения: $A(1,2)$, $B(1.5,3)$, $C(3,3)$, $E(2,2)$. Из чертежа области D видно, что вычисление двойного интеграла целесообразнее произвести по формуле (1.4), согласно

которой внутренний интеграл берется по переменной x, а внешний – по переменной y. В этом случае мы получим один повторный интеграл (все прямые, параллельные оси Ox, входят в область интегрирования через прямую $y=2x$ и выходят из области через прямую $y=x$); при другом порядке интегрирования мы получили бы сумму двух повторных интегралов.

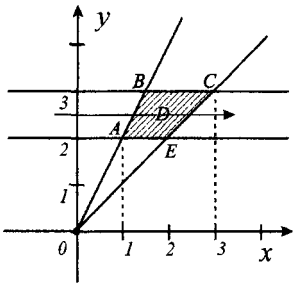


Рис. 1.6

Итак, для вычисления заданного двойного интеграла, воспользуемся формулой (1.4), предварительно определив пределы интегрирования. Пределы внешнего интеграла по переменной y - это ординаты самой нижней $y=2$ (нижний предел интегрирования) и самой верхней $y=3$ (верхний предел интегрирования) точек области D. Пределы внутреннего интеграла по переменной x находятся из уравнений прямых $y=2x$ и $y=x$, если их разрешить относительно x: $x=\frac{y}{2}$ (нижний предел интегрирования) и $x=y$ (верхний предел интегрирования).

Следовательно, согласно формуле (1.4), будем иметь

$$\iint\limits_D (x+2y)dxdy = \int\limits_2^3 dy \int\limits_{\frac{y}{2}}^{y} (x+2y)dx =$$

$$= \int\limits_2^3 dy \left(\frac{x^2}{2} + 2xy \right) \Bigg|_{\frac{y}{2}}^{y} = \int\limits_2^3 \left(\frac{y^2}{2} + 2y^2 - \frac{y^2}{8} - y^2 \right) dy =$$

$$= \frac{11}{8} \int\limits_2^3 y^2 dy = \frac{11}{8} \frac{y^3}{3} \Bigg|_2^3 = \frac{11}{24}(27-8) = \frac{19 \cdot 11}{24} = \frac{209}{24}.$$

#

Пример 1.3. Вычислить $\iint\limits_D (x^2+y^2)dxdy$, по области D, ограниченной параболой $y=x^2$ и прямыми $y=0$ и $x=1$.

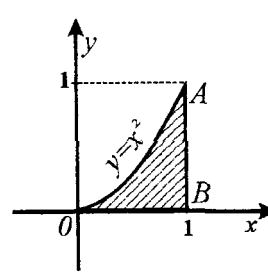


Рис. 1.7

Решение. Область интегрирования изображена на рис. 1.7. Решая совместно уравнения прямых и параболы, найдем точки их пересечения: $O(0,0)$, $A(1,1)$, $B(1,0)$. Область интегрирования является правильной, поэтому

для вычисления заданного двойного интеграла можно воспользоваться любой из формул (1.3) или (1.4).

Применяя формулу (1.3), получим

$$\iint\limits_D \left(x^2+y^2\right)dxdy = \int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{x^2} \left(x^2+y^2\right)dy = \int\limits_0^1 dx \left(x^2 y + \frac{y^3}{3} \right)\Bigg|_0^{x^2} = \int\limits_0^1 (x^4 + \frac{x^6}{3})dx =$$

$$= \left(\frac{x^2}{5} + \frac{x^7}{21} \right)\Bigg|_0^1 = \frac{1}{5} + \frac{1}{21} = \frac{26}{105}.$$

Применяя формулу (1.4), получим

$$\iint\limits_D \left(x^2+y^2\right)dxdy = \int\limits_0^1 dy \int\limits_{\sqrt{y}}^1 \left(x^2+y^2\right)dx = \int\limits_0^1 dy \left(\frac{x^3}{3} + y^2 x \right)\Bigg|_{\sqrt{y}}^1 =$$

$$= \int\limits_0^1 \left(\frac{1}{3} + y^2 - \frac{y^{\frac{3}{2}}}{3} - y^{\frac{5}{2}} \right) dy = \left(\frac{y}{3} + \frac{y^3}{3} - \frac{y^{\frac{5}{2}}}{15} - \frac{2y^{\frac{7}{2}}}{7} \right)\Bigg|_0^1 =$$

$$= \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{2}{15} - \frac{2}{7} = \frac{26}{105}.$$

#

Пример 1.4. Вычислить двумя способами $\iint\limits_D xydxdy$, по области D, ограниченной прямыми $y = 2x + 2$, $y = 2 - x$ и $y = 0$.

Решение. Область интегрирования D изображена на рис.1.8 - это треугольник ABC. Найдем координаты вершин треугольника, для чего решим три системы уравнений:

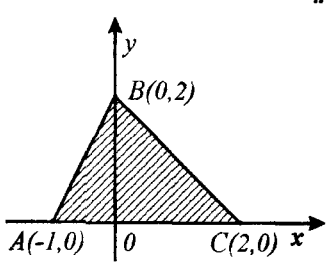


Рис. 1.8

$$\begin{cases} y = 2x+2 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow A(-1,0); \quad \begin{cases} y = 2x+2 \\ y = 2-x \end{cases} \Rightarrow B(0,2); \quad \begin{cases} y = 2-x \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow C(2,0).$$

Область D является правильной, поэтому заданный двойной интеграл может быть вычислен двумя способами (с использованием формулы (1.3) и (1.4)). Чтобы вычислить интеграл, проходя область D в направлении оси Oy (используя формулу (1.3)), необходимо разбить область D на две части (замечание 1.3): D_1 - треугольник ABO (входим

в область через прямую AO, а выходим через прямую AB), D_2 - треугольник OBC (входим в область через прямую OC, а выходим через прямую BC). Тогда имеем

$$\iint\limits_D xydxdy = \iint\limits_{D_1} xydxdy + \iint\limits_{D_2} xydxdy = \int\limits_{-1}^{0} xdx \int\limits_{0}^{2x-2} ydy + \int\limits_{0}^{2} xdx \int\limits_{0}^{2-x} ydy =$$

$$= \int\limits_{-1}^{0} xdx \frac{y^2}{2}\Big|_0^{2x+2} + \int\limits_{0}^{2} xdx \frac{y^2}{2}\Big|_0^{2-x} = \frac{1}{2}\int\limits_{-1}^{0} x(2x+2)^2 dx + \frac{1}{2}\int\limits_{0}^{2} x(2-x)^2 dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int\limits_{-1}^{0} (4x^3 + 8x^2 + 4x)dx + \frac{1}{2}\int\limits_{0}^{2} (4x - 4x^2 + x^3)dx =$$

$$= \frac{1}{2}(x^4 + \frac{8x^3}{3} + 2x^2)\Big|_{-1}^{0} + \frac{1}{2}(2x^2 - \frac{4x^3}{3} + \frac{x^4}{4})\Big|_0^{2} =$$

$$= \frac{1}{2}\left[-1 + \frac{8}{3} - 2\right] + \frac{1}{2}\left[8 - \frac{32}{3} + 4\right] = \frac{1}{2}.$$

Вычислим интеграл вторым способом, применяя формулу (1.4)

$$\iint\limits_D xydxdy = \int\limits_{0}^{2} ydy \int\limits_{\frac{y-2}{2}}^{2-y} xdx = \int\limits_{0}^{2} ydy \frac{x^2}{2}\Big|_{\frac{y-2}{2}}^{2-y} = \frac{1}{2}\int\limits_{0}^{2} y\left[(2-y)^2 - \left(\frac{y-2}{2}\right)^2\right]dy =$$

$$\frac{3}{8}\int\limits_{0}^{2} y(2-y)^2 dy = \frac{3}{8}\int\limits_{0}^{2}\left[4y - 4y^2 + y^3\right]dy = \frac{3}{8}\left[2y^2 - \frac{4y^3}{3} + \frac{y^4}{4}\right]\Big|_0^{2} =$$

$$= \frac{3}{8}(8 - \frac{32}{3} + 4) = \frac{1}{2}.$$

#

Замечание 1.6. Если область D не является правильной ни в направлении оси Ox, ни в направлении оси Oy (то есть существуют прямые, параллельные осям координат, которые, проходя через внутренние точки области, пересекают границу области более чем в двух точках), то двойной интеграл по такой области нельзя представить в виде двукратного. Если удается разбить неправильную область D на конечное число правильных областей $D_1, D_2, ..., D_n$, то вычисляя двойной интеграл по каждой из этих областей с помощью двукратного и складывая получившиеся результаты, найдем искомый интеграл по области D.

#

Замечание 1.7. Наиболее простой вид формулы (1.3) и (1.4) принимают в случае прямоугольной области D, ограниченной прямыми $x = a, x = b, y = c, y = d$

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \int\limits_a^b dx \int\limits_c^d f(x,y)dy = \int\limits_c^d dy \int\limits_a^b f(x,y)dx. \qquad (1.6)$$

#

Пример 1.5. Вычислить двойной интеграл $\iint\limits_D (xy+4)dxdy$ по области D, ограниченной прямыми $x=1$, $x=2$, $y=2$, $y=3$.

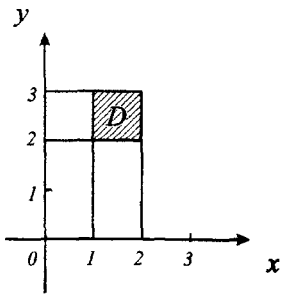


Рис. 1.9

Решение. Так как область интегрирования D есть прямоугольник (рис.1.9), то, согласно формуле (1.6), имеем

$$\iint\limits_D (xy+4)dxdy = \int\limits_1^2 dx \int\limits_2^3 (xy+4)dy =$$

$$= \int\limits_1^2 dx \left(\frac{xy^2}{2} + 4y \right) \Bigg|_2^3 = \int\limits_1^2 \left(\frac{9x}{2} + 12 - \frac{4x}{2} - 8 \right) dx = \int\limits_1^2 \left(\frac{5x}{2} + 4 \right) dx =$$

$$= \left(\frac{5x^2}{4} + 4x \right) \Bigg|_1^2 = \frac{31}{4}.$$

#

1.4. Двойной интеграл в полярных координатах. Метод замены переменной, являющийся мощным средством вычисления определенных интегралов, используется и при вычислении двойных интегралов. Рассмотрим частный случай замены переменных в двойном интеграле – преобразование к *полярным координатам*. Полярные координаты (ρ, φ) связаны с декартовыми координатами соотношениями

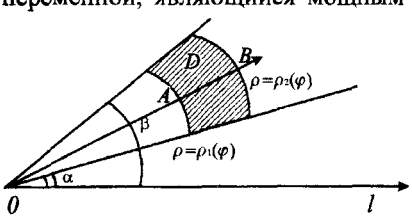


Рис. 1.10

$$x = \rho\cos\varphi,\ y = \rho\sin\varphi, \qquad (1.7)$$

а формула, выражающая правило замены переменных в двойном интеграле при переходе к полярным координатам, имеет вид

$$\iint\limits_D f(x,y,)dxdy = \iint\limits_D f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)\rho d\rho d\varphi, \qquad (1.8)$$

где $\rho d\rho d\varphi$ - *элемент площади в полярных координатах.*

Вычисление двойного интеграла в полярных координатах, как и в случае прямоугольных координат, осуществляется путем приведения его к повторному интегралу. Сначала мы определяем (рис. 1.10) крайние

значения α и β полярного угла φ, то есть определяем наименьшее и наибольшее значения угла φ для точек, принадлежащих границе области D. Найденные α и β являются, соответственно, нижним и верхним пределами интегрирования внешнего интеграла по переменной φ. Теперь определим пределы внутреннего интеграла по переменной ρ. Для этого фиксируем произвольное значение угла $\varphi \in (\alpha, \beta)$, затем из полюса O под углом φ проводим луч OB. Точка входа этого луча в область D (на чертеже - точка A) лежит на линии, уравнение которой $\rho = \rho_1(\varphi)$, а точка выхода этого луча из области D (на чертеже - точка B) лежит на линии, уравнение которой $\rho = \rho_2(\varphi)$. Уравнения этих линий и дают, соответственно, нижний $\rho = \rho_1(\varphi)$ и верхний $\rho = \rho_2(\varphi)$ пределы интегрирования внешнего интеграла по переменной ρ. Определив пределы интегрирования повторного интеграла, мы приходим к следующей формуле:

$$\iint\limits_D f(x, y,)dxdy = \int\limits_\alpha^\beta d\varphi \int\limits_{\rho_1(\varphi)}^{\rho_2(\varphi)} f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)\rho d\rho. \qquad (1.9)$$

Здесь сначала вычисляется внутренний интеграл $\int\limits_{\rho_1(\varphi)}^{\rho_2(\varphi)} f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)\rho d\rho$ по переменной ρ, в котором переменная φ считается постоянной, а затем вычисляется внешний интеграл по переменной φ, пределы интегрирования внешнего интеграла – постоянны.

Формула (1.9) соответствует тому случаю, когда полюс лежит вне области интегрирования D. Если же полюс будет расположен внутри области D и любой луч, проведенный из полюса, пересекает границу области D не более чем в одной точке (рис. 1.11), то формула (1.9) упрощается и принимает следующий вид:

$$\iint\limits_D f(x, y,)dxdy = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{\rho(\varphi)} f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)\rho d\rho \qquad (1.10)$$

где $\rho = \rho(\varphi)$ - уравнение границы области D в полярных координатах.

Замечание 1.8. При вычислении двойных интегралов переход от прямоугольных координат к полярным полезен в том случае, когда область интегрирования D есть круг или часть круга или когда подынтегральная функция содержит в себе двучлен вида $x^2 + y^2$.

#

Пример 1.6. Вычислить $\iint\limits_D \sqrt{1-x^2-y^2}\,dxdy$ по области D, ограниченной окружностью $x^2+y^2=1$.

Решение. Так как область интегрирования есть круг (рис. 1.11), а подынтегральная функция содержит выражение x^2+y^2, то для вычисления этого интеграла удобно перейти к полярным координатам (см. замечание 1.8).

В соответствии с правилом (формула 1.8) перехода к полярным координатам находим

$$\iint\limits_D \sqrt{1-x^2-y^2}\,dxdy = \iint\limits_D \sqrt{1-\rho^2}\,\rho d\rho d\varphi.$$

Переход к повторному интегралу совершим по формуле (1.10), так как полюс лежит внутри области D. Уравнение границы области D - окружность $x^2+y^2=1$ - в полярных координатах примет вид $\rho=1$ и это уравнение определяет верхний предел интегрирования *внутреннего интеграла по переменной* ρ. Поэтому

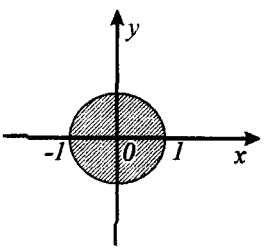


Рис. 1.11

$$\iint\limits_D \sqrt{1-\rho^2}\,\rho d\rho d\varphi = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^1 \sqrt{1-\rho^2}\,\rho d\rho =$$

$$= -\frac{1}{2}\int\limits_0^{2\pi}\left[\frac{(1-\rho^2)^{3/2}}{3/2}\right]\Bigg|_0^1 d\varphi = = \frac{1}{3}\int\limits_0^{2\pi} d\varphi = \frac{1}{3}\varphi\Big|_0^{2\pi} = \frac{2\pi}{3}.$$

#

1.5. Вычисление площади области. С помощью двойных интегралов можно вычислять геометрические характеристики (площадь плоской области, объем цилиндрического тела, площадь поверхности) и механические характеристики (массу пластины, момент инерции пластины, координаты центра масс пластины). Мы рассмотрим только одно геометрическое приложение двойного интеграла – вычисление площади плоской области. Как установлено в замечании 1.1, площадь S области D, может быть вычислена с помощью двойного интеграла по формуле

$$S = \iint\limits_D dxdy. \qquad (1.11)$$

Если область D является правильной в направлении оси Oy и ограничена линиями $x=a, x=b, y=\varphi_1(x), y=\varphi_2(x)$ и $\varphi_1(x) \le \varphi_2(x)$ для $x \in [a,b]$, то

$$S = \int_a^b dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} dy. \qquad (1.12)$$

Если область D является правильной в направлении оси Ox и ограничена линиями $y = c, y = d, x = \psi_1(y), x = \psi_2(y)$ и $\psi_1(x) \le \psi_2(x)$ для $y \in [c, d]$, то

$$S = \int_c^d dy \int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} dx. \qquad (1.13)$$

Если область D задана в полярных координатах линиями $\rho = \rho_1(\varphi)$, $\rho = \rho_2(\varphi)$ и $\rho_1(\varphi) \le \rho_2(\varphi)$ для $\varphi \in [\alpha, \beta]$, то

$$S = \int_\alpha^\beta d\varphi \int_{\rho_1(\varphi)}^{\rho_2(\varphi)} \rho d\rho. \qquad (1.14)$$

Пример 1.7. Найти площадь обдасти D, ограниченной параболой $y^2 = 4x + 4$ и прямой $y = 2 - x$.

Решение. Найдем координаты точек пересечения линий, ограничивающих область D, решая совместно уравнения параболы и прямой:

$$\begin{cases} y^2 = 4x+4 \\ y = 2-x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (2-x)^2 = 4x+4 \\ y = 2-x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (2-x)^2 = 4x+4 \\ y = 2-x \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} M_1(0,2) \\ M_2(8,-6) \end{matrix}$$

и сделаем чертеж области D (рис.1.12). Область D является правильной. При интегрировании в направлении оси Oy необходимо разбить область D на две части (замечание 1.5). Проще интегрирование вести в направлении оси Ox, поэтому, для вычисления площади области D воспользуемся формулой (1.13), определив прежде пределы интегрирования по переменной y: $y = -6$, $y = 2$ и по переменной x: $x = \frac{1}{4}(y^2 - 4), x = 2 - y$. Итак,

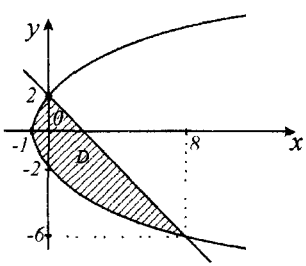


Рис. 1.12

$$S = \int_{-6}^{2} dy \int_{\frac{1}{4}(y^2-4)}^{2-y} dx = \int_{-6}^{2} dy\, x \Big|_{\frac{1}{4}(y^2-4)}^{2-y} = \int_{-6}^{2} (2 - y - \frac{y^2}{2} + 1) dy =$$

$$= (3y - \frac{y^2}{2} - \frac{y^3}{12}) \Big|_{-6}^{2} = 21\frac{1}{3} \text{ (кв. ед.).} \qquad \#$$

Пример 1.8. Найти площадь области D, ограниченной окружностями $x^2+y^2=1$ и $x^2+y^2=4$ и прямыми $x=y$ и $y=0,\ y\geq 0$.

Решение. Так как область D (рис. 1.13) есть часть круга, то площадь ее области вычислим по формуле (1.14), то есть воспользуемся полярными координатами. Пределы внешнего интеграла по переменной φ определяются прямыми: $y=0$, следовательно, $\varphi=0$ и $y=x$, следовательно, $\varphi=\frac{\pi}{4}$. Пределы внутреннего интеграла по переменной ρ определим так: фиксируем произвольное значение $\varphi\in(0,\frac{\pi}{4})$, затем из полюса O под углом φ проведем луч. Точка входа этого луча в область D лежит на дуге окружности $x^2+y^2=4$, уравнение которой в полярных координатах $\rho=2$, а точка выхода этого луча из области D лежит на дуге окружности $x^2+y^2=1$, уравнение которой в полярных координатах $\rho=1$. Значит, пределами интегрирования по ρ, соответственно, будут 1 и 2. Поэтому

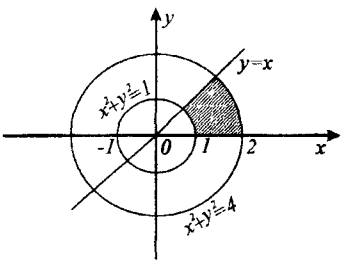


Рис. 1.13

$$S=\int_0^{\pi/4}d\varphi\int_1^2\rho d\rho=\int_0^{\pi/4}d\varphi\left(\frac{\rho^2}{2}\Big|_1^2\right)=\frac{1}{2}\int_0^{\pi/4}(4-1)d\varphi=\frac{3}{2}\varphi\Big|_0^{\pi/4}=\frac{3\pi}{8}\text{(кв. ед.)}.$$

#

2. ТРОЙНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

Тройной интеграл является аналогом двойного интеграла и вводится для функций трех переменных.

2.1. Определение тройного интеграла. Пусть функция $f(x,y,z)$ определена в ограниченной замкнутой области V. Разобьем эту область с помощью сети поверхностей на конечное число частичных областей $V_1,V_2,...V_n$, объемы которых соответственно обозначим через $\Delta v_1,\Delta v_2,...\Delta v_n$. В каждой частичной области $V_i, i=\overline{1,n}$ выберем

произвольную точку $M_i(x_i, y_i, z_i)$, $i = \overline{1,n}$ и умножим значение функции $f(x, y, z)$ в точке M_i на объем Δv_i этой области, а затем составим сумму

$$\sigma_n = \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i, z_i)\Delta v_i \ , \qquad (2.1)$$

которая называется *интегральной суммой* для функции $f(x, y, z)$ по области V.

Если существует конечный предел I интегральной суммы (2.1) при стремлении к нулю наибольшего λ из диаметров всех частичных областей $V_i, i = \overline{1,n}$, не зависящий ни от способа разбиения области V, ни от выбора точек $M_i(x_i, y_i, z_i)$, то этот предел называется *тройным интегралом функции* $f(x, y, z)$ *по области* V и обозначается так $\iiint\limits_V f(x, y, z)dv$. Таким образом, по определению

$$I = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i, z_i)\Delta v_i = \iiint\limits_V f(x, y, z)dv. \qquad (2.2)$$

Функция $f(x, y, z)$ называется в этом случае *интегрируемой по* области V, V - *областью интегрирования*, x, y, z - *переменными интегрирования*, dv - *элементом объема*, а $\lambda = \max\limits_{1 \le i \le n} d(V_i)$.

Если разбиение области V на частичные области проводить плоскостями, параллельными координатным плоскостям (в дальнейшем будем предполагать, что это всегда имеет место), то частичные области V_i - есть прямоугольные параллелепипеды и, следовательно, $\Delta v_i = \Delta x_i \cdot \Delta y_i \cdot \Delta z_i$, $i = \overline{1,n}$. Тогда $dv = dxdydz$ и

$$I = \iiint\limits_V f(x, y, z)dv = \iiint\limits_V f(x, y, z)dxdydz.$$

Замечание 2.1. Если в (2.2) положить $f(x, y, z) \equiv 1$ при $(x, y, z) \in V$, то получим выражение для объема **V** области V в виде тройного интеграла

$$\mathbf{V} = \iiint\limits_V dxdydz.$$

#

Достаточные условия существования тройного интеграла можно сформулировать в виде следующей теоремы.

Теорема. *Всякая непрерывная в замкнутой ограниченной области* V *функция* $f(x, y, z)$ *интегрируема в этой области.*

Замечание 2.2. Можно указать менее жесткие условия существования тройного интеграла. Но мы ограничимся рассмотрением только непрерывных в замкнутой области функций.

#

Тройные интегралы обладают свойствами, аналогичными свойствам двойных интегралов (см. пункт 1.2).

2.2. Вычисление тройных интегралов сводится к трехкратному интегрированию, то есть к последовательному вычислению трех обыкновенных (однократных) определенных интегралов по каждой из трех переменных координат точки трехмерного пространства.

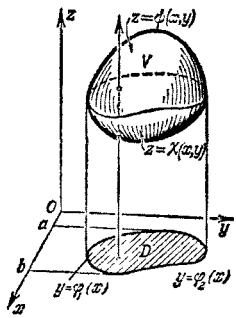


Рис. 2.1

Пусть функция $f(x,y,z)$ непрерывна в области V. Пусть поверхность S, ограничивающая тело V, пересекается не более, чем в двух точках любой прямой, параллельной одной из координатных осей[1], например, оси Oz, и проходящей через любую внутреннюю точку области (рис. 2.1), и проектируется в правильную двумерную область D плоскости xOy. Такая область V *называется правильной трехмерной областью.* Пусть нижняя часть поверхности S задана уравнением $z=\chi(x,y)$, верхняя – уравнением $z=\psi(x,y)$, где $\chi(x,y), \psi(x,y)$ - однозначные непрерывные функции, определенные в области D, являющейся проекцией тела V на плоскость xOy. Тогда

$$\iiint\limits_V f(x,y,z)dxdydz = \iint\limits_D dxdy \int\limits_{\chi(x,y)}^{\psi(x,y)} f(x,y,z)dz, \qquad (2.3)$$

причем сначала вычисляется внутренний интеграл $\int\limits_{\chi(x,y)}^{\psi(x,y)} f(x,y,z)dz$ по переменной z, в котором переменные x и y считаются постоянными, а пределы интегрирования есть функции от x и y, а затем внешний двойной интеграл по области D.

Если область D является правильной в направлении оси Oy, то интеграл по области V вычисляется по формуле

$$\iiint\limits_V f(x,y,z)dxdydz = \int\limits_a^b dx \int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} dy \int\limits_{\chi(x,y)}^{\psi(x,y)} f(x,y,z)dz, \qquad (2.4)$$

[1] Более сложные области V часто удается сводить к рассматриваемому виду путем разбиения их на конечное число областей $V_1,\ldots,V_n$, каждая из которых удовлетворяет условиям, изложенным выше.

то есть сводится к последовательному вычислению трех определенных интегралов. В (2.4) сначала вычисляется внутренний интеграл по переменной z при постоянных x и y, затем внутренний интеграл по переменной y при постоянной x и, наконец, интеграл по переменной x - пределы интегрирования внешнего интеграла постоянны.

Разумеется, порядок интегрирования, при выполнении известных условий может быть избран другим, как в двойном интеграле по области D в формуле (2.4):

$$\iiint\limits_V f(x,y,z)dxdydz = \int\limits_c^d dy \int\limits_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} dx \int\limits_{\chi(x,y)}^{\psi(x,y)} f(x,y,z)dz, \qquad (2.5)$$

также и в тройном интеграле: для этого тело V нужно проектировать на плоскость yOz или на плоскость xOz, тогда в (2.3) соответственно поменяются ролями переменные x, y, z.

Наиболее простой вид формула вычисления тройного интеграла принимает в случае, когда V есть прямоугольный параллелепипед, ограниченный плоскостями $x = a, x = b, y = c, y = d, z = e, z = h$:

$$\iiint\limits_V f(x,y,z)dxdydz = \int\limits_a^b dx \int\limits_c^d dy \int\limits_e^h f(x,y,z)dz. \qquad (2.6)$$

Пример 2.1. Вычислить $\iiint\limits_V (x+z)dxdydz$ по области V, ограниченной плоскостями $x = 0, x = 1, y = 0, y = 1, z = 0, z = 1$.

Решение. Так как область интегрирования есть прямоугольный параллелепипед, то для вычисления данного интеграла воспользуемся формулой (2.6)

$$\iiint\limits_V (x+z)dxdydz = \int\limits_0^1 dx \int\limits_0^1 dy \int\limits_0^1 (x+z)dz = \int\limits_0^1 dx \int\limits_0^1 dy \left(xz + \frac{z^2}{2}\right)\Bigg|_0^1 =$$

$$= \int\limits_0^1 dx \int\limits_0^1 \left(x + \frac{1}{2}\right)dy = \int\limits_0^1 dx \left(x + \frac{1}{2}\right)y\Bigg|_0^1 = \int\limits_0^1 \left(x + \frac{1}{2}\right)dx = \left(\frac{x^2}{2} + \frac{x}{2}\right)\Bigg|_0^1 = 1. \quad \#$$

Пример.2.2. Вычислить $\iiint\limits_V x^2 dxdydz$ по области V, ограниченной плоскостями $z = 0, \ x = 0, \ y = 0, \ x + y + z - 2 = 0$.

Решение. Область интегрирования V есть тетраэдр, расположенный в первом октанте (рис.2.2). Область V является правильной, так как прямая, проведенная через любую ее внутреннюю точку параллельно оси Oz пересекает поверхность ограничивающую пространственную область лишь в двух точках (рис.2.2), поэтому для вычисления заданного интеграла воспользуемся формулой (2.3).

Определим пределы внутреннего интеграла по переменной z. Так как прямая, параллельная оси Oz, входит в область V через плоскость, уравнение которой $z = 0$ (нижний предел интегрирования), а выходит из области через плоскость, уравнение которой $z = 2 - x - y$ (верхний предел интегрирования), то

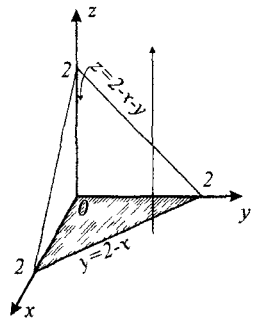


Рис. 2.2

$$\iiint_V x^2 dxdydz = \iint_D dxdy \int_0^{2-x-y} x^2 dz,$$

где D - проекция области V на плоскость xOy. D есть треугольник, образованный прямыми $x = 0$, $y = 0$ и $y = 2 - x$. Следовательно, по формуле (2.4) имеем

$$\iint_D dxdy \int_0^{2-x-y} x^2 dz = \int_0^2 x^2 dx \int_0^{2-x} dy \int_0^{2-x-y} dz = \int_0^2 x^2 dx \int_0^{2-x} dy\, z\Big|_0^{2-x-y} =$$

$$= \int_0^2 x^2 dx \int_0^{2-x} (2-x-y)dy = \int_0^2 x^2 dx \left((2-x)y - \frac{y^2}{2}\right)\Big|_0^{2-x} =$$

$$= \int_0^2 x^2 \left((2-x)^2 - \frac{(2-x)^2}{2}\right)dx = \int_0^2 \left(2x^2 - 2x^3 + \frac{x^4}{2}\right)dx =$$

$$= \left(\frac{2x^3}{3} - \frac{2x^4}{4} + \frac{x^5}{10}\right)\Big|_0^2 = \frac{16}{3} - 8 + \frac{16}{5} = \frac{8}{15}.$$

#

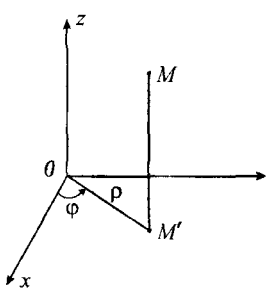


Рис. 2.3

2.3. Тройной интеграл в цилиндрических координатах. Как и в двумерном случае, для тройных интегралов имеют место формулы преобразования интеграла от прямоугольной системы координат к новым системам координат. Наиболее употребительные из них – цилиндрические и сферические координаты. Мы рассмотрим только преобразование к цилиндрическим координатам.

В цилиндрической системе координат положение точки M пространства определяется полярными координатами φ и ρ точки M' (проекции точки M на плоскость xOy) и аппликатой z самой точки M (рис. 2.3). Числа φ, ρ, z называют *цилиндрическими координатами точки* M, причем

$\rho \geq 0$, $\varphi \in [0, 2\pi]$ z - любое. Цилиндрические координаты связаны с декарторыми соотношениями:

$$x = \rho \cos\varphi,\ y = \rho \sin\varphi,\ z = z. \qquad (2.7)$$

Преобразование тройного интеграла от декартовых координат x, y, z к цилиндрическим координатам φ, ρ, z осуществляется по следующей формуле перехода

$$\iiint\limits_V f(x, y, z)dxdydz = \iiint\limits_V f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi, z)\rho d\rho d\varphi dz,$$

где $dv = \rho d\rho d\varphi dz$ - *элемент объема в цилиндрических координатах.*

Выразим уравнения нижней и верхней частей поверхности S, ограничивающей данную область V, в цилиндрических координатах - $z = z_1(\rho, \varphi)$ и $z = z_2(\rho, \varphi)$ соответственно и запишем формулу для вычисления интеграла в цилиндрических координатах, аналогичную (2.3)

$$\iiint\limits_V f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi, z)\rho d\rho d\varphi dz = \iint\limits_D \rho d\rho d\varphi \int\limits_{z_1(\rho,\varphi)}^{z_2(\rho,\varphi)} f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi, z)dz,$$

где D есть проекция области V на плоскость xOy. Воспользовавшись заданием плоской области D в полярных координатах (пункт 1.4) получим

$$\iint\limits_D \rho d\rho d\varphi \int\limits_{z_1(\rho,\varphi)}^{z_2(\rho,\varphi)} f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi, z)dz =$$

$$= \int\limits_\alpha^\beta d\varphi \int\limits_{\rho_1(\varphi)}^{\rho_2(\varphi)} \rho d\rho \int\limits_{z_1(\rho,\varphi)}^{z_2(\rho,\varphi)} f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi, z)dz. \qquad (2.8)$$

Формулу (2.8) удобно использовать, если область V проектируется в круг или часть круга.

Пример 2.3. Вычислить $\iiint\limits_V (x^2 + y^2)dxdydz$ по области, ограниченной плоскостью $z = 2$ и параболоидом $x^2 + y^2 = 2z$.

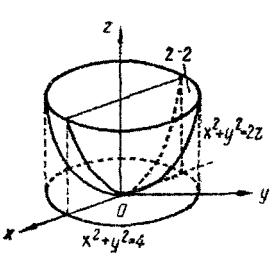


Рис. 2.4

Решение. Область V (рис. 2.4) снизу ограничена параболоидом $x^2 + y^2 = 2z$, сверху плоскостью $z = 2$. Эта область проектируется на плоскость xOy в облсть D, ограниченную окружностью $x^2 + y^2 = 4$, уравнение которой получено при исключении переменной z из уравнений параболоида $x^2 + y^2 = 2z$ и плоскости $z = 2$.

Введем цилиндрические координаты. Так как $x^2 + y^2 = \rho^2$, то

уравнение параболоида примет вид $z = \frac{\rho^2}{2}$; уравнение плоскости при переходе к цилиндрическим координатам не изменится . В области D $0 \le \varphi \le 2\pi$, а $0 \le \rho \le 2$. Тогда, следуя формуле (2.8), имеем

$$\iiint\limits_V (x^2+y^2)dxdydz = \iiint\limits_V \rho^2 \rho d\rho d\varphi dz = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^2 \rho^3 d\rho \int\limits_{\frac{\rho^2}{2}}^2 dz =$$

$$= \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^2 \rho^3 d\rho \, z\Big|_{\frac{\rho^2}{2}}^2 = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^2 (2\rho^3 - \frac{\rho^5}{2}) d\rho =$$

$$= \int\limits_0^{2\pi} d\varphi (\frac{\rho^4}{2} - \frac{\rho^6}{12})\Big|_0^2 = \int\limits_0^{2\pi} (2^3 - \frac{2^4}{3}) d\varphi = \frac{8\varphi}{3}\Big|_0^{2\pi} = \frac{16\pi}{3}.$$

#

2.4. Вычисление объемов. С помощью тройных интегралов можно вычислить объем пространственной области, массу тела, занимающего область V, а также координаты центра тяжести этого тела и моменты инерции его относительно координатных осей и начала координат. Мы рассмотрим только геометрическое приложение тройного интеграла – вычисление объема пространственной области.

Как установлено в замечании 2.1 объем $\mathbf{V}$ пространственной области V может быть вычислен с помощью тройного интеграла по формуле

$$\mathbf{V} = \iiint\limits_V dx\, dy\, dz. \qquad (2.9)$$

В цилиндрической системе координат имеем

$$\mathbf{V} = \iiint\limits_V \rho\, d\rho\, d\varphi\, dz. \qquad (2.10)$$

Пример 2.4. Вычислить объем тела, ограниченного параболоидом $z = 6 - x^2 - y^2$ и конусом $x^2 + y^2 = z^2$ $(z \ge 0)$.

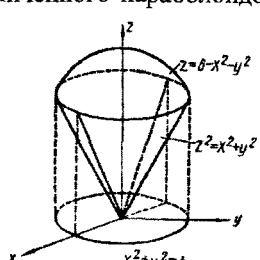


Рис. 2.5

Решение. Тело (рис.2.5), объем которого нужно найти, ограничено снизу конусом $x^2 + y^2 = z^2$, сверху – параболоидом $z = 6 - x^2 - y^2$ и проектируется на плоскость xOy в область D, ограниченную окружностью $x^2 + y^2 = 4$. Уравнение окружности получено в результате исключения z из уравнений конуса и параболоида.

Вычисление объема удобнее вести в цилиндрических координатах. Уравнение окружности, ограничивающей область D, уравнения конуса и параболоида соответственно принимают вид $\rho = 2$, $z = \rho$ и $z = 6 - \rho^2$. С учетом того, что данное тело симметрично относительно плоскостей xOz и yOz, имеем

$$\mathbf{V} = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^2 \rho d\rho \int_\rho^{6-\rho^2} dz = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^2 \rho z\Big|_\rho^{6-\rho^2} d\rho =$$

$$= 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^2 (6\rho - \rho^3 - \rho^2) d\rho =$$

$$= 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} (3\rho^2 - \frac{\rho^4}{4} - \frac{\rho^3}{3})\Big|_0^2 d\varphi = \frac{64}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi = \frac{64}{3}\varphi\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{32\pi}{3}.$$

Если не учитывать симметрию, то

$$\mathbf{V} = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^2 \rho d\rho \int_\rho^{6-\rho^2} dz = \frac{32\pi}{3}.$$

#

3. КРИВОЛИНЕЙНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

Обобщим понятие определенного интеграла на случай, когда областью интегрирования является некоторая кривая. Интегралы такого рода называются криволинейными. Различают два типа криволинейных интегралов: криволинейные интегралы по длине дуги и криволинейные интегралы по координатам.

3.1. Определение криволинейного интеграла первого типа (по длине дуги). Пусть функция $f(x, y)$ определена вдоль плоской кусочно-гладкой[1] кривой L, концами которой будут точки A и B. Разобьем кривую L произвольным образом на n частей точками $M_0 = A, M_1, .., M_n = B$. На каждой из частичных дуг $M_i M_{i+1}$ выберем произвольную точку (x_i, y_i) и вычислим значения функции $f(x, y)$ в каждой из этих точек. Сумма

[1] Кривая называется гладкой, если в каждой ее точке существует касательная, непрерывно изменяющаяся вдоль кривой. Кусочно- гладкой кривой называется кривая, состоящая из конечного числа гладких кусков.

$$\sigma_n = \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i, y_i)\Delta l_i, \qquad (3.1)$$

где Δl_i – длина частичной дуги M_iM_{i+1}, называется *интегральной суммой* для функции $f(x,y)$ по кривой L. Обозначим наибольшую из длин частичных дуг M_iM_{i+1}, $i = \overline{0,n-1}$ через λ, то есть $\lambda = \max\limits_{0\le i\le n-1} \Delta l_i$.

Если существует конечный предел I интегральной суммы (3.1) при стремлении к нулю наибольшей из длин частичных дуг M_iM_{i+1}, не зависящий ни от способа разбиения кривой L на частичные дуги, ни от выбора точек (x_i, y_i), то этот предел называется *криволинейным интегралом первого типа (криволинейным интегралом по длине дуги)* от функции $f(x,y)$ по кривой L и обозначается символом $\int\limits_L f(x,y)dl$.

Таким образом, по определению

$$I = \lim_{\lambda\to 0} \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i, y_i)\Delta l_i = \int_L f(x,y)dl. \qquad (3.2)$$

Функция $f(x,y)$ называется в этом случае *интегрируемой вдоль кривой* L, кривая $L = AB$ *- контуром интегрирования*, A *– начальной*, а B*- конечной точками интегрирования*, dl *- элементом длины дуги.*

Замечание 3.1. Если в (3.2) положить $f(x,y) \equiv 1$ для $(x,y)\in L$, то получим выражение длины дуги L в виде криволинейного интеграла первого типа

$$l = \int_L dl.$$

Действительно, из определения криволинейного интеграла следует, что

$$\int_L dl = \lim_{\lambda\to 0} \sum_{i=0}^{n-1} \Delta l_i = \lim_{\lambda\to 0} l = l.$$

#

3.2. Основные свойства криволинейного интеграла первого типа аналогичны свойствам определенного интеграла:

1°. $\int\limits_L [f_1(x,y) \pm f_2(x,y)]dl = \int\limits_L f_1(x,y)dl \pm \int\limits_L f_2(x,y)dl.$

2°. $\int\limits_L cf(x,y)dl = c\int\limits_L f(x,y)dl$, где c- константа.

3°. Если контур интегрирования L разбит на две части L_1 и L_2, не имеющие общих внутренних точек, то

$$\int_L f(x,y)dl = \int_{L_1} f(x,y)dl + \int_{L_2} f(x,y)dl.$$

4°.Отметим особо, что величина криволинейного интеграла первого типа не зависит от направления интегрирования, так как в формировании интегральной суммы (3.1) участвуют значения функции $f(x,y)$ в произвольных точках и длины частичных дуг Δl_i, которые положительны, независимо от того, какую точку кривой AB считать начальной, а какую – конечной, то есть

$$\int_{AB} f(x,y)dl = \int_{BA} f(x,y)dl\,. \qquad (3.3)$$

3.3. Вычисление криволинейного интеграла первого типа сводится к вычислению определенных интегралов.

Пусть кривая L задана параметрическими уравнениями $\begin{cases} x=x(t) \\ y=y(t) \end{cases}$.

Пусть α и β – значения параметра t, соответствующие началу (точка A) и концу (точка B) дуги L. Считаем, что на отрезке $[\alpha,\beta]$ функции $x(t), y(t)$ и их производные $x'(t), y'(t)$ - непрерывны, а $f(x,y)$ - непрерывна вдоль кривой L . Из курса дифференциального исчисления функций одной переменной известно, что

$$dl = \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}dt,$$

тогда

$$\int_L f(x,y)dl = \int_\alpha^\beta f(x(t),y(t))\sqrt{(x'(t)^2 + (y'(t))^2}dt. \qquad (3.4)$$

Пример 3.1. Вычислить $\int_L x^2 dl$, где L – часть окружности $\begin{cases} x=a\cos t \\ y=a\sin t \end{cases}, 0 \le t \le \frac{\pi}{2}$.

Решение. Так как $x'(t) = -a\sin t$, $y'(t) = a\cos t$, то

$$dl = \sqrt{(-a\sin t)^2 + (a\cos t)^2}dt = a\sqrt{\sin^2 t + \cos^2 t}dt = adt$$

и по формуле (3.4) получаем

$$\int_L x^2 dl = \int_0^{\frac{\pi}{2}} a^2\cos^2 t\, adt = a^3\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2}(1+\cos 2t)dt = \frac{a^3}{2}(t+\frac{\sin 2t}{2})\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} =$$

$$= \frac{a^3}{2}(\frac{\pi}{2} + \frac{\sin\pi}{2} - \frac{\sin 0}{2}) = \frac{\pi a^3}{4}.$$

#

Если кривая L задана уравнением $y = y(x)$, $a \le x \le b$ и $y(x)$ непрерывна вместе со своей производной $y'(x)$ при $a \le x \le b$, то

$$dl = \sqrt{1 + (y'(x))^2}\,dx$$

и формула (3.4) принимает вид

$$\int_L f(x,y)dl = \int_a^b f(x, y(x))\sqrt{1 + (y'(x))^2}\,dx. \qquad (3.5)$$

Если кривая L задана уравнением $x = x(y), c \le y \le d$ и $x(y)$ непрерывна вместе со своей производной $x'(y)$ при $c \le y \le d$, то

$$dl = \sqrt{1 + (x'(y))^2}\,dy$$

и формула (3.4) принимает вид

$$\int_L f(x,y)dl = \int_c^d f(x(y), y)\sqrt{1 + (x'(y))^2}\,dy. \qquad (3.6)$$

Пример 3.2. Вычислить $\int_L y dl$, где L – дуга параболы $y^2 = 2x$ от точки $A(0,0)$ до точки $B(2,2)$.

Решение. Вычислим интеграл двумя способами, применяя формулы (3.5) и (3.6).

1)Воспользуемся формулой (3.5). Так как

$$y = \sqrt{2x} \quad (y \ge 0), \quad y' = \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{2x}}, \quad dl = \sqrt{1 + \frac{1}{2x}}\,dx,$$

то

$$\int_L y dl = \int_0^2 \sqrt{2x}\sqrt{\frac{2x+1}{2x}}\,dx = \int_0^2 (2x+1)^{1/2}\,dx = \frac{1}{2}\frac{(2x+1)^{3/2}}{3/2}\Bigg|_0^2 = \frac{1}{3}(5^{3/2} - 1).$$

2)Воспользуемся формулой (3.6). Так как

$$x = \frac{y^2}{2}, \quad x' = y, \quad dl = \sqrt{1 + y^2}\,dy,$$

то

$$\int_L y dl = \int_0^2 y\sqrt{1 + y^2}\,dy = \frac{1}{2}\frac{(1 + y^2)^{3/2}}{3/2}\Bigg|_0^2 = \frac{1}{3}(5\sqrt{5} - 1).$$

#

Замечание 3.2. Аналогично рассмотренному, можно ввести понятие криволинейного интеграла первого типа от функции $f(x,y,z)$ по пространственной кусочно-гладкой кривой L:

$$\int_L f(x,y,z)dl = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n-1} f(x_i,y_i,z_i)\Delta l_i \ .$$

Если кривая L задана параметрическими уравнениями $\begin{cases} x=x(t) \\ y=y(t) \\ z=z(t) \end{cases}$, $\alpha \le t \le \beta$, то

$$dl = \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2}dt$$

и

$$\int_L f(x,y,z)dl =$$

$$= \int_\alpha^\beta f(x(t),y(t),z(t))\sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2}dt. \qquad (3.7)$$

#

Пример 3.3. Вычислить $\int_L (2z - \sqrt{x^2+y^2})dl$, где L – дуга кривой

$$\begin{cases} x=t\cos t \\ y=t\sin t \\ z=t \end{cases}, 0 \le t \le 2\pi.$$

Решение. Так как

$$x' = \cos t - t\sin t, \quad y' = \sin t + t\cos t, \quad z' = 1,$$

то

$$dl = \sqrt{(\cos t - t\sin t)^2 + (\sin t + t\cos t)^2 + 1}dt =$$

$$= \sqrt{\cos^2 t - 2t\sin t\cos t + t^2\sin^2 t + \sin^2 t + 2t\sin t\cos t + t^2\cos^2 t + 1}dt =$$

$$= \sqrt{2+t^2}dt.$$

Теперь по формуле (3.7) имеем

$$\int_L (2z - \sqrt{x^2+y^2})dl = \int_0^{2\pi}(2t - \sqrt{t^2\cos^2 t + t^2\sin^2 t})\sqrt{2+t^2}dt =$$

$$= \int_0^{2\pi} t\sqrt{2+t^2}dt = \frac{1}{2}\frac{(2+t^2)^{3/2}}{3/2}\Bigg|_0^{2\pi} = \frac{1}{3}\left[(2+4\pi^2)^{3/2} - 2\sqrt{2}\right] =$$

$$= \frac{2\sqrt{2}}{3}\left[(1+2\pi^{2)^{3/2}} - 1\right].$$

#

Геометрический смысл криволинейного интеграла по длине дуги: если $f(x,y) \geq 0$, то криволинейный интеграл $\int_L f(x,y)dl$ численно равен *площади цилиндрической поверхности*, которая составлена из перпендикуляров к плоскости xOy, восстановленных в точках (x,y) кривой $L = AB$ и имеющих переменную длину, равную $f(x,y)$ (рис. 3. 1).

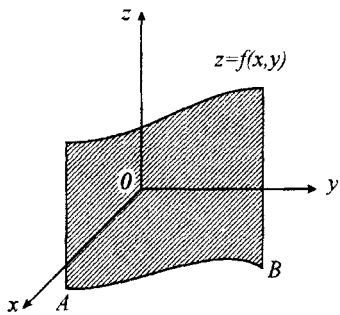


Рис. 3.1

Физический смысл криволинейного интеграла по длине дуги: криволинейный интеграл $\int_L \rho(x,y)dl$ представляет собой *массу кривой* L, имеющей переменную линейную плотность $\rho(x,y)$

$$m = \int_L \rho(x,y)dl. \qquad (3.8)$$

Пример 3.4. Найти массу дуги AB линии $\begin{cases} x=t \\ y=\dfrac{t^2}{2} \end{cases}$, $0 \leq t \leq 1$, линейная плотность которой меняется по закону $\rho(x,y) = \sqrt{2y}$.

Решение. Для вычисления массы дуги AB воспользуемся формулой (3.8). Дуга AB задана параметрически, поэтому для вычисления интеграла (3.8) применяем формулу (3.4). Так как

$$x'(t) = 1, y'(t) = t,\ dl = \sqrt{1+t^2}dt,$$

то

$$m = \int_{AB} \sqrt{2y}dl = \int_0^1 \sqrt{2 \cdot \frac{t^2}{2}}\sqrt{1+t^2}dt = \int_0^1 t\sqrt{1+t^2}dt = \frac{1}{2}\frac{(1+t^2)^{3/2}}{3/2}\Bigg|_0^1 =$$

$$= \frac{1}{3}(2^{3/2}-1) = \frac{2\sqrt{2}-1}{3}.$$

#

3.4. Определение криволинейного интеграла второго типа (по координатам). Пусть функция $f(x,y)$ определена вдоль плоской кусочно-гладкой кривой L, концами которой будут точки A и B. Опять произвольным образом разобьем кривую L на n частей точками $M_0 = A, M_1, .., M_n = B$ Так же выберем в пределах каждой частичной дуги M_iM_{i+1} произвольную точку (x_i, y_i) и вычислим значения

функции $f(x,y)$ в этих точках. Но эти значения умножим теперь на величины проекций частичных дуг M_iM_{i+1} на ось Ox, то есть на $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$, а затем составим *интегральную сумму*

$$\sigma_n = \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i, y_i)\Delta x_i. \tag{3.9}$$

Если существует конечный предел I интегральной суммы (3.9) при $\lambda \to 0$ ($\lambda = \max\limits_{0 \le i \le n-1} \Delta l_i$), не зависящий ни от способа разбиения кривой L на частичные, ни от выбора точек (x_i, y_i), то этот предел называется *криволинейным интегралом второго типа* (или *криволинейным интегралом по координате x*) от функции $f(x,y)$ по кривой L и обозначается символом $\int\limits_L f(x,y)dx$. Таким образом, по определению

$$I = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i, y_i)\Delta x_i = \int_L f(x,y)dx. \tag{3.10}$$

Аналогично, умножая значения $f(x_i, y_i)$ на проекции частичных дуг M_iM_{i+1} на ось Oy, то есть на $\Delta y_i = y_{i+1} - y_i$, составим интегральную сумму

$$\sigma_n^* = \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i, y_i)\Delta y_i, \tag{3.11}$$

в пределе которой получим *криволинейный интеграл по координате y:*

$$I^* = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i, y_i)\Delta y_i = \int_L f(x,y)dy. \tag{3.12}$$

Если вдоль кривой L определены функции $P(x,y)$ и $Q(x,y)$ и существуют интегралы

$$\int_L P(x,y)dx \qquad \text{и} \qquad \int_L Q(x,y)dy,$$

то их сумму называют *криволинейным интегралом второго типа общего вида* и полагают

$$\int_L P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int_L P(x,y)dx + \int_L Q(x,y)dy. \tag{3.13}$$

3.5. Основные свойства криволинейного интеграла второго типа как и криволинейного интеграла первого типа, аналогичны свойствам определенного интеграла (см. пункт 3.2, свойства 1^0-3^0).

В отличие от криволинейных интегралов первого типа криволинейные интегралы второго типа зависят от того, в каком направлении проходится кривая L. При изменении направления обхода

кривой криволинейный интеграл второго типа меняет знак на противоположный

$$\int\limits_{AB} P(x,y)dx = -\int\limits_{BA} P(x,y)dx, \quad \int\limits_{AB} Q(x,y)dy = -\int\limits_{BA} Q(x,y)dy.$$

Действительно, при изменении направления обхода кривой соответственно меняются знаки проекций Δx_i и Δy_i в интегральных суммах (3.9) и (3.11). Следовательно, сами интегральные суммы σ и σ^* а также их пределы I и I^* изменят знак.

3.6. Интеграл по замкнутому контуру. Если контур интегрирования L замкнут, то начальная и конечная точки кривой совпадают. За направление обхода замкнутого контура L принимаем *положительное направление*, то есть то, при котором область, ограниченная контуром L, остается слева.

Криволинейный интеграл по замкнутому контуру L, пробегаемому в положительном направлении, часто обозначают символом

$$\oint\limits_L P(x,y)dx + Q(x,y)dy.$$

Криволинейные интегралы по координатам вычисляются сведением их к определенному интегралу.

Пусть кривая интегрирования AB задана параметрическими уравнениями $\begin{cases} x=x(t) \\ y=y(t) \end{cases}$ и при перемещении из точки A в точку B параметр t меняется от α до β, тогда

$$\int\limits_{AB} P(x,y)dx + Q(x,y)dy =$$

$$= \int\limits_{\alpha}^{\beta} \left[P(x(t),y(t))x'(t) + Q(x(t),y(t))y'(t)\right]dt. \qquad (3.14)$$

Пусть кривая интегрирования AB задана уравнением $y = y(x)$ и при перемещении из точки A в точку B x меняется от a до b, тогда

$$\int\limits_{AB} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int\limits_{a}^{b} \left[P(x,y(x)) + Q(x,y(x))y'(x)\right]dx. \qquad (3.15)$$

Замечание 3.2. Аналогично определяется криволинейный интеграл по координатам от непрерывных на пространственной дуге L функций $P(x,y,z)$, $Q(x,y,z)$, $R(x,y,z)$, то есть

$$\int\limits_L P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz. \qquad (3.16)$$

Если пространственная кривая L задана параметрическими уравнениями:

$$\begin{cases} x=x(t) \\ y=y(t) \\ z=z(t) \end{cases}, \quad \alpha \le t \le \beta, \text{ то}$$

$$\int_L P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz = \int_\alpha^\beta [P(x(t),y(t),z(t))x'(t) +$$

$$+ Q(x(t),y(t),z(t))y'(t) + R(x(t),y(t),z(t))z'(t)\ ]dt. \qquad (3.17)$$

#

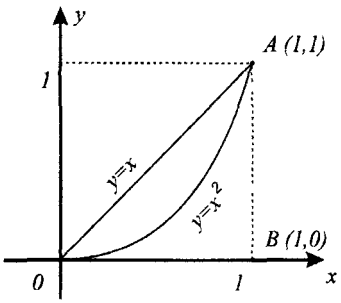


Рис. 3.2

Пример 3.5. Вычислить $\int_L xydy + (x+y)dy$, принимая за L:

а) отрезок прямой, соединяющей точки $O(0,0)$ и $A(1,1)$;

б) дугу параболы $y = x^2$, соединяющую точки O и A;

в) ломаную OBA, где $B(1,0)$.

Решение. Построим линии, по которым надо вести интегрирование (рис.3.2).

а) L: $y=x$, тогда $dy=dx$ и по формуле (3.15) имеем

$$\int_L xydx + (x+y)dy = \int_0^1 (x^2 + 2x)dx = \left(\frac{x^3}{3} + x^2\right)\Big|_0^1 = \frac{1}{3} + 1 = \frac{4}{3}.$$

б) L: $y = x^2$, тогда $dy = 2xdx$ и по формуле (3.15) имеем

$$\int_L xydx + (x+y)dy = \int_0^1 (x^3 + (x+x^2)2x)dx = \int_0^1 (2x^2 + 3x^3)dx =$$

$$= \left(\frac{2x^3}{3} + \frac{3x^4}{4}\right)\Big|_0^1 = \frac{2}{3} + \frac{3}{4} = \frac{17}{12}$$

в) $L = OBA$ разбивается на два участка OB и BA:

OB: $y = 0$, тогда $dy = 0$ и $0 \le x \le 1$;

BA: $x = 1$, тогда $dx = 0$ и $0 \le y \le 1$.

Так как OB и BA не имеют общих внутренних точек, то по формуле (3.15) имеем

$$\int_L xydx + (x+y)dy = \int_{OB} xydx + (x+y)dy + \int_{BA} xydx + (x+y)dy =$$

$$= 0 + \int_0^1 (1+y)dy = (y + \frac{y^2}{2})\Big|_0^1 = \frac{3}{2}.$$

#

Замечание 3.3. В рассмотренном примере получили три разных результата, несмотря на то, что начальная и конечная точки контуров интегрирования совпадали.

#

Пример 3.6. Вычислить $\int_L xdx + ydy + (x+y-1)dz$, где L – отрезок прямой, соединяющей точки $A(1,1,1,)$ и $B(2,3,4)$.

Решение. Уравнение прямой, проходящей через две данные точки A и B, имеет вид

$$\frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-1}{3},$$

или в параметрической форме $\begin{cases} x=t+1 \\ y=2t+1 \\ z=3t+1 \end{cases}$.

При перемещении из точки A в точку B параметр t меняется от 0 до 1. Тогда по формуле (3.17) имеем

$$\int_L xdx + ydy + (x+y-1)dz = \int_0^1 [t+1+(2t+1)2+(t+1+2t+1-1)3]dt =$$

$$= \int_0^1 (14t+6)dt = (7t^2+6t)\Big|_0^1 = 7+6 = 13.$$

#

3.7. Связь между криволинейными интегралами первого и второго типа. Обозначим через α и β углы, составленные с положительными направлениями осей координат направленной касательной к кривой AB в точке (x,y), тогда получим соотношения

$$dx = \cos\alpha dl,\ dy = \cos\beta dl.$$

Делая в криволинейных интегралах второго типа замену dx и dy согласно приведенным формулам, получим

$$\int_{AB} P(x,y)dx = \int_{AB} P(x,y)\cos\alpha dl \text{ и } \int_{AB} Q(x,y)dy = \int_{AB} Q(x,y)\cos\beta dl$$ -

эти формулы и устанавливают искомую связь.

3.8. Формула Грина устанавливает связь между криволинейным интегралом по замкнутому контуру и двойным интегралом по области, ограниченной этим контуром.

Теорема. *Если функции $P(x, y)$ и $Q(x,y)$ непрерывны вместе со своими частными производными в области D, то имеет место следующая формула:*

$$\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy = \oint_L Pdx + Qdy, \quad (3.18)$$

где L – граница области D и интегрирование ведется в положительном направлении (рис. 3.3).

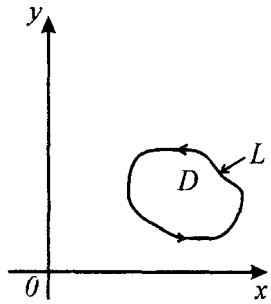


Рис. 3.3

Пример 3.7. Вычислить с помощью формулы Грина $\oint_L (x-y)dx + (x+y)dy$, где L – окружность $x^2 + y^2 = R^2$.

Решение. В рассматриваемом примере

$$P = x - y, \quad Q = x + y \text{ и } \frac{\partial P}{\partial y} = -1, \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = 1.$$

Применяя формулу Грина (3.18), получим

$$\oint_L (x-y)dx + (x+y)dy = \iint_D (1-(1))dxdy = 2\iint_D dxdy = 2\pi R^2,$$

так как область интегрирования D есть круг с площадью πR^2.

#

3.9. Условия независимости криволинейного интеграла по координатам от пути интегрирования. Пример 3.5 (замечание 3.3) говорит о существовании интегралов, зависящих от того, какой линией соединены начальная и конечная точки пути интегрирования. В связи с этим возникает вопрос, можно ли указать условия, при выполнении которых интеграл не зависит от пути интегрирования, а зависит только от начальной и конечной точек интегрирования. Формула Грина позволяет достаточно просто ответить на этот вопрос.

Теорема. *Пусть функции $P(x,y)$ и $Q(x,y)$ непрерывны вместе со своими частными производными в односвязной[1] области D. Для того чтобы криволинейный интеграл по координатам не зависел от пути интегрирования, необходимо и достаточно, чтобы во всех точках области D выполнялось условие*

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}. \quad (3.19)$$

Если интеграл не зависит от пути интегрирования, а зависит от начальной (x_1, y_1) и конечной (x_2, y_2) точек пути интегрирования, то обычно пишут так:

[1] Область называется односвязной, если она ограничена единственным замкнутым контуром.

$$\int_{(x_1,y_1)}^{(x_2,y_2)} P(x,y)dx + Q(x,y)dy. \qquad (3.20)$$

Пример 3.8. Вычислить $\int_{(0,0)}^{(1,2)} 2xydx + x^2dy.$

Решение. Данный интеграл не зависит от пути интегрирования, так как

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(2xy) = 2x, \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(x^2) = 2x,$$

то есть $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$ на всей плоскости xOy.

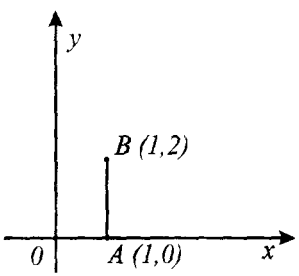


Рис. 3.4

Выберем в качестве пути интегрирования ломаную OAB, звенья которой OA и OB параллельны осям координат Ox и Oy соответственно (рис. 3.4). На участке OA:

$$y = 0, 0 \le x \le 1, dy = 0,$$

на участке AB: $x = 1, 0 \le y \le 2, dx = 0$.

Следовательно,

$$\int_{(0,0)}^{(1,2)} 2xydx + x^2dy = \int_0^1 0dx + \int_0^2 dy = 2.$$

#

Замечание 3.4. С помощью криволинейных интегралов второго типа можно вычислять площадь S плоской области, ограниченной замкнутой линией L,

$$S = \frac{1}{2}\oint_L xdy - ydx,$$

и работу, совершаемую переменной силой $\vec{F}\{P(x,y,z), \ Q(x,y,z), \ R(x,y,z)\}$ на криволинейном пути L,

$$A = \int_L Pdx + Qdy + Rdz.$$

#

4. ПОВЕРХНОСТНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

Рассмотрим интегралы от функций, заданных на поверхностях, так называемые поверхностные интегралы.Теория поверхностных интегралов во многом аналогична теории криволинейных интегралов. Различают поверхностные интегралы первого и второго типа.

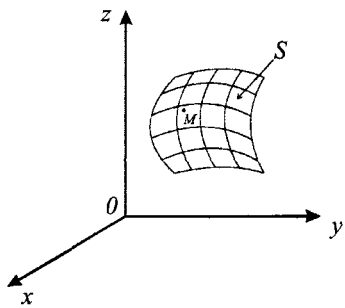


Рис. 4.1

4.1. Поверхностные интегралы первого типа. Пусть функция $f(x,y,z)$ определена на кусочно-гладкой поверхности S, ограниченной кусочно-гладким контуром (рис. 4.1). Разобьем поверхность S кривыми на n частей $S_1, S_2 ..., S_n$, площади которых равны соответственно $\Delta s_1, \Delta s_2 ..., \Delta s_n$. Взяв в пределах каждой части $S_i, i = \overline{1,n}$ произвольную точку $M_i(x_i, y_i, z_i)$, вычислим значение функции в ней и составим следующую сумму:

$$\sigma_n = \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i, z_i)\Delta s_i$$

которая называется *интегральной суммой* для функции $f(x,y,z)$ по поверхности S.

Конечный предел I этой суммы при стремлении к нулю наибольшего λ из диаметров всех частичных поверхностей $S_i\ i = \overline{1,n}$, если он существует и не зависит ни от способа разбиения поверхности на частичные, ни от выбора точек, то он называется *поверхностным интегралом первого типа (по площади поверхности)* от функции $f(x,y,z)$ по поверхности S и обозначается символом $\iint\limits_S f(x,y,z)ds$.

Значит, по определению

$$I = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i, z_i)\Delta s_i = \iint\limits_S f(x,y,z)ds. \qquad (4.1)$$

Поверхностный интеграл первого типа представляет собой обобщение двойного интеграла, поэтому условия существования двойного интеграла и его свойства легко переносятся на поверхностный интеграл первого типа.

Вычисление поверхностных интегралов первого типа сводится к вычислению двойных интегралов: исходя из уравнения поверхности S,

подынтегральное выраражение преобразуется к выражению с двумя переменными, областью изменения которых будет проекция поверхности S на соответствующую этим переменным координатную плоскость.

Пусть поверхность S задана уравнением $z = z(x, y)$ и $z(x, y)$ непрерывна вместе со своими частными производными z'_x, z'_y в замкнутой области S_{xy}, являющейся проекцией поверхности S на координатную плоскость xOy, тогда

$$\iint\limits_S f(x, y, z)ds = \iint\limits_{S_{xy}} f(x, y, z(x, y))\sqrt{1 + (z'_x)^2 + (z'_y)}dxdy. \qquad (4.2)$$

Эта формула выражает поверхностный интеграл первого типа через двойной интеграл по проекции поверхности S на координатную плоскость xOy.

Аналогично вычисляются поверхностные интегралы первого типа по поверхности S через двойные интегралы по ее проекциям на координатные плоскости xOz и yOz соответственно:

$$\iint\limits_S f(x, y, z)ds = \iint\limits_{S_{xz}} f(x, y(x, z), z)\sqrt{1 + (y'_x)^2 + (y'_z)}dxdz, \quad (4.3)$$

$$\iint\limits_S f(x, y, z)ds = \iint\limits_{S_{yz}} f(x(y, z), y, z)\sqrt{1 + (z'_x)^2 + (z'_y)}dydz. \quad (4.4)$$

С помощью поверхностных интегралов первого типа можно вычислить площадь поверхности, а также массу, статические моменты, моменты инерции и координаты центра масс для материальных поверхностей с известной поверхностной плотностью распределения масс.

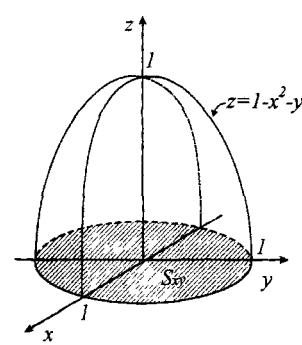


Рис. 4.2

Пример 4.1. Вычислить $\iint\limits_S \sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2}ds$, где S - часть параболоида вращения $z = 1 - x^2 - y^2$, отсеченного плоскостью $z = 0$.

Решение. Спроектируем поверхность S на плоскость xOy. Проекция S_{xy} - есть круг, ограниченный окружностью $x^2 + y^2 = 1$ (рис. 4.2).Заданный поверхностный интеграл будем вычислять по формуле (4.2), для чего найдем $z'_x = -2x, z'_y = -2y$. Тогда, совершая в двойном интеграле переход к полярным координатам, так как S_{xy} есть круг, получим

$$\iint\limits_S \sqrt{1+4x^2+4y^2}\,ds = \iint\limits_{S_{xy}} \sqrt{1+4x^2+4y^2}\sqrt{1+4x^2+4y^2}\,dxdy =$$

$$= \iint\limits_{S_{xy}} (1+4x^2+4y^2)\,dxdy =$$

$$= \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^1 (1+4\rho^2)\rho\,d\rho = \int\limits_0^{2\pi} \left(\frac{\rho^2}{2}+\rho^4\right)\Big|_0^1 d\varphi = \frac{3}{2}\int\limits_0^{2\pi} d\varphi.$$

#

4.2. Двусторонние поверхности. Поверхность S называется *двусторонней*, если обход по любому замкнутому контуру, лежащему на поверхности S и не пересекающему ее границ, при возвращении в исходную точку не меняет направление нормали к поверхности. В противном случае поверхность называется односторонней. Примеры двусторонних поверхностей: плоскость, сфера и любая поверхность, заданная уравнением $z = z(x,y)$, где $z = z(x,y)$, $z'_x(x,y)$, $z'_y(x,y)$ - непрерывны в некоторой области G. Примером односторонней поверхности является лист Мёбиуса.

4.3. Поверхностный интеграл второго типа. Пусть S - гладкая поверхность, заданная уравнением $z = z(x,y)$ и функция $f(x,y,z)$ определена в точках поверхности S.

Выберем одну из сторон поверхности, то есть одно из двух возможных направлений нормали в точках поверхности (этим мы сориентировали поверхность). Если нормали составляют *острые углы* с осью Oz, то будем говорить о *верхней стороне поверхности* (*о положительном направлении нормали*), а если нормали составляют – *тупые углы* с осью Oz, то говорим о *нижней стороне поверхности (об отрицательном направлении нормали)*.

Разобьем поверхность S произвольным образом на n частей $S_1, S_2 ..., S_n$, и через $(S_{xy})_i$ обозначим проекцию i-ой части поверхности на плоскость xOy. В пределах каждой частичной поверхности $S_i, i = \overline{1,n}$ выберем произвольную точку $M_i(x_i, y_i, z_i)$, вычислим значение функции в ней и составим сумму

$$\sigma_n = \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i, z_i)\Delta s_i,$$

где Δs_i - площадь$(S_{xy})_i$, взятая со знаком плюс, если выбрана верхняя сторона поверхности S и со знаком минус, если выбрана нижняя сторона поверхности S. Эта сумма σ_n называется *интегральной суммой* для функции $f(x,y,z)$ по поверхности S.

Конечный предел I интегральной суммы, при стремлении к нулю наибольшего λ из всех диаметров проекций $(S_{xy})_i$, если он существует и не зависит ни от способа разбиения поверхности S, ни от выбора точек $M_i(x_i, y_i, z_i)$, то этот предел называется *поверхностным интегралом второго типа от функции* $f(x, y, z)$ *по выбранной стороне поверхности по переменным* x *и* y и обозначается $\iint\limits_S f(x, y, z)dxdy$. Таким образом, по определению

$$I = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i, z_i)\Delta s_i = \iint\limits_S f(x, y, z)dxdy \ . \qquad (4.5)$$

Функция $f(x, y, z)$ называется в этом случае *интегрируемой по поверхности* S *по переменным* x *и* y.

Аналогично можно определить поверхностные интегралы второго типа по выбранной стороне поверхности S по переменным y и z, по переменным x и z:

$$\iint\limits_S f(x, y, z)dydz, \qquad \iint\limits_S f(x, y, z)dxdz.$$

Пусть $P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z)$ функции, интегрируемые по поверхности S по переменным y и z, x и z, x и y соответственно. Сумма интегралов

$$\iint\limits_S P(x, y, z)dydz, \quad \iint\limits_S Q(x, y, z)dxdz, \quad \iint\limits_S R(x, y, z)dxdy$$

называется *общим интегралом второго типа* и обозначается

$$\iint\limits_S P(x, y, z)dydz + Q(x, y, z)dxdz + R(x, y, z)dxdy \ . \qquad (4.6)$$

Так как поверхность S считаем двусторонней и интеграл распространяется на определенную ее сторону, то *при изменении стороны поверхности интегрирования поверхностный интеграл второго типа меняет знак на противоположный* – в этом его отличие от поверхностного интеграла первого типа.

Вычисление поверхностных интегралов второго типа сводится к вычислению двойных интегралов.

Пусть ориентированная (выберем верхнюю сторону) гладкая поверхность S задана уравнением $z = z(x, y)$, где $z(x, y)$ непрерывна в замкнутой области S_{xy} - проекции поверхности S на плоскость xOy; функция $f(x, y, z)$ непрерывна на S. Тогда справедлива формула

$$\iint\limits_S f(x, y, z)dxdy = \iint\limits_{S_{xy}} f(x, y, z(x, y))dxdy, \qquad (4.7)$$

выражающая поверхностный интеграл второго типа по переменным x и y через двойной. Если выбрать нижнюю сторону поверхности S, то перед интегралом в правой части появится знак минус.

Аналогично справедливы формулы:

$$\iint\limits_S f(x,y,z)dydz = \iint\limits_{S_{yz}} f(x(y,z),y,z)dydz, \tag{4.8}$$

$$\iint\limits_S f(x,y,z)dxdz = \iint\limits_{S_{xz}} f(x,y(x,z),z)dxdz, \tag{4.9}$$

где поверхность S задана соответственно уравнениями $x = x(y,z)$ и $y = y(x,z)$ а S_{yz} и S_{xz} - проекции поверхности S соответственно на плоскости yOz и xOz.

Для вычисления интеграла общего вида (4.6) используются формулы (4.7)–(4.9), если поверхность S однозначно проектируется на все координатные плоскости. В более сложных случаях поверхность S разбивают на части, обладающие указанными свойствами, а общий интеграл представляют в виде интегралов по этим частям.

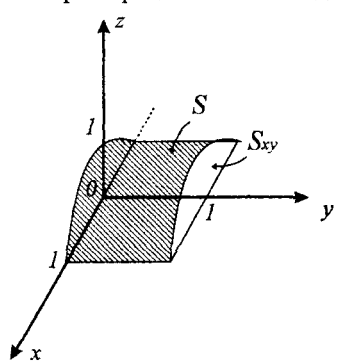


Рис. 4.3

Пример 4.2.Вычислить $\iint\limits_S (y^2+z^2)dxdy$, где S верхняя сторона поверхности $z = \sqrt{1-x^2}$, отсекаемая плоскостями $y = 0$, $y = 1$.

Решение. Уравнением $x^2 + z^2 = 1$ задается круговой цилиндр с образующей, параллельной оси Oy, а плоскости $y = 0$ и $y = 1$ параллельны координатной плоскости xOz (рис. 4.3). Проекцией поверхности S на плоскость xOy является прямоугольник S_{xy}, определяемый неравенствами $-1 \le x \le 1$, $0 \le y \le 1$. Тогда по формуле (4.7) имеем

$$\iint\limits_S (y^2+z^2)dxdy = \iint\limits_{S_{xy}} (y^2+(1-x^2))dxdy = \int\limits_{-1}^{1} dx \int\limits_{0}^{1} (y^2 - x^2 + 1)dy =$$

$$= \int\limits_{-1}^{1} dx \left(\frac{y^3}{3} + (1-x^2)y\right)\Bigg|_0^1 =$$

$$= \int_{-1}^{1} \left(\frac{4}{3} - x^2\right) dx = \left(\frac{4x}{3} - \frac{x^3}{3}\right)\Big|_{-1}^{1} = \frac{4}{3} - \frac{1}{3} + \frac{4}{3} - \frac{1}{3} = 2.$$

#

Пример 4.3. Вычислить $\iint\limits_S x dydz + ydxdz + zdxdy$, где S – верхняя сторона части плоскости $x + z - 1 = 0$ отсеченная плоскостями $y = 0, y = 4$ и расположенная в первом октанте (рис. 4.4).

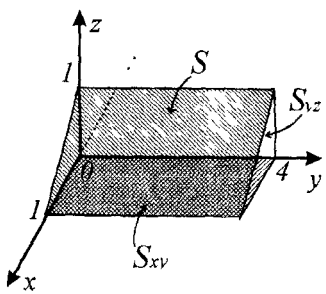


Рис. 4.4

Решение. Проекция поверхности S на плоскость xOy есть прямоугольник S_{xy}, определяемый неравенствами $0 \le x \le 1$, $0 \le y \le 4$. Проекция поверхности S на плоскость yOz есть прямоугольник S_{yz}, определяемый неравенствами $0 \le z \le 1$, $0 \le y \le 4$. Так как плоскость S перпендикулярна плоскости xOz, то $\iint\limits_S ydxdz = 0$. Тогда по формулам (4.7) и (4.9) имеем

$$\iint\limits_S x dydz + ydxdz + zdxdy = \iint\limits_{S_{yz}} (1 - z) dydz +$$

$$+ \iint\limits_{S_{xy}} (1 - x) dxdy = \int_0^4 dy \int_0^1 (1 - z) dz + \int_0^4 dy \int_0^1 (1 - x) dx =$$

$$= \int_0^4 dy \left(-\frac{(1-z)^2}{2}\Big|_0^1 \right) + \int_0^4 dy \left(-\frac{(1-x)^2}{2}\Big|_0^1 \right) = 2\int_0^4 \frac{1}{2} dy = 4.$$

#

4.4. Формула Остроградского. *Формула Остроградского устанавливает связь между поверхностным интегралом по замкнутой поверхности и тройным интегралом по пространственной области, ограниченной этой поверхностью.*

Пусть V-правильная замкнутая область, ограниченная поверхностью S, и пусть функции $P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z)$ непрерывны вместе со своими частными производными первого порядка в данной области. Тогда имеет место следующая формула:

$$\iiint\limits_V \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right) dxdydz = \iint\limits_S P dydz + Q dxdz + R dxdy, \qquad (4.10)$$

называемая *формулой Остроградского*[1].

С помощью формулы Остроградского удобно вычислять поверхностные интегралы по замкнутым поверхностям.

Пример 4.4. С помощью формулы Остроградского вычислить $\iint\limits_S xdydz + ydxdz + zdxdy$, где S – внешняя сторона пирамиды, ограниченной плоскостями $x + y + z = 1,\ x = 0,\ y = 0,\ z = 0$(рис. 4.5).

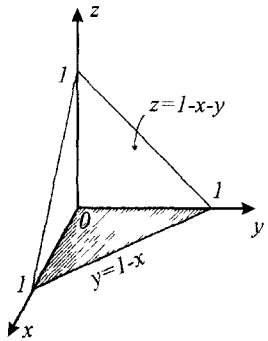


Рис. 4.5

Решение. Согласно формуле Остроградского:

$P(x,y,z) = x,\ Q(x,y,z) = y,\ R(x,y,z) = z.$

Тогда: $\dfrac{\partial P}{\partial x} + \dfrac{\partial Q}{\partial y} + \dfrac{\partial R}{\partial z} = 1 + 1 + 1 = 3$, и находим

$$\iint\limits_S xdydz + ydxdz + zdxdy = 3\iiint\limits_V dxdydz = 3\int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{1-x} dy \int\limits_0^{1-x-y} dz =$$

$$= 3\int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{1-x} dy \int\limits_0^{1-x-y} dz = 3\int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{1-x} (1-x-y)dy =$$

$$= 3\int\limits_0^1 dx(y - xy - \frac{y^2}{2})\Big|_0^{1-x} =$$

$$= 3\int\limits_0^1 (1 - x - x + x^2 - \frac{x^2 - 2x + 1}{2})dx = \frac{3}{2}\int\limits_0^1 (x-1)^2 dx = \frac{3}{2}\frac{(x-1)^3}{3}\Big|_0^1 = \frac{1}{2}.$$

#

Замечание 4.1. Связь между поверхностными интегралами первого и второго типов аналогична связи криволинейных интегралов:

$$\iint\limits_S f(x,y,z)dxdy = \iint\limits_S f(x,y,z)\cos\alpha ds,$$

$$\iint\limits_S f(x,y,z)dydz = \iint\limits_S f(x,y,z)\cos\beta ds,$$

$$\iint\limits_S f(x,y,z)dxdz = \iint\limits_S f(x,y,z)\cos\gamma ds,$$

где $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ - направляющие косинусы нормали, отвечающей выбранной стороне поверхности.

#

[1] Аргументы функций P, Q, R для сокращения записи опускаем.

4.5. Формула Стокса. *Формула Стокса устанавливает связь между поверхностными и криволинейными интегралами.*

Пусть поверхность S задана уравнением $z = z(x, y)$, где $z(x, y)$, $z'_x(x, y)$, $z'_y(x, y)$ непрерывные в области S_{xy} (проекция поверхности S на плоскость xOy); L – контур, ограничивающий поверхность S; l – проекция пространственной линии L на плоскость xOy, являющаяся конуром, ограничивающим область D. Выберем верхнюю сторону поверхности S. Если функции $P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z)$ непрерывны вместе со своими частными производными первого порядка на поверхности S, то имеет место следующая формула:

$$\oint_L P dx + Q dy + R dz =$$

$$= \iint_S \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx dy + \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right) dy dz + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right) dx dz \qquad (4.11)$$

(L – обходится в положительном направлении), называемая *формулой Стокса.*

Если в качестве поверхности S взять область D на плоскости xOy ($z = 0$), то из (4.11) получится формула Грина

$$\oint_L P dx + Q dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx dy.$$

Таким образом, формула Грина есть частный случай формулы Стокса.

Заметим, что поверхностный интеграл второго типа в формуле Стокса (4.11) может быть заменен поверхностным интегралом первого типа. Тогда эта формула примет вид

$$\oint_L P dx + Q dy + R dz =$$

$$= \iint_S \left[\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\cos\alpha + \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\cos\beta + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)\cos\gamma\right] ds,$$

где $\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$, означают направляющие косинусы нормали, отвечающей выбранной стороне поверхности.

Пример 4.5. С помощью формулы Стокса вычислить $\oint_L x^2 y^3 dx + dy + z dz$, где L окружность, заданная уравнениями $x^2 + y^2 + 1, z = 0$. Поверхностью S служит верхняя сторона полусферы $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, $z > 0$ (L обходится в положительном направлении).

Решение. Согласно формуле Стокса

$$P(x,y,z)=x^2y^3,\quad Q(x,y,z)=1, R(x,y,z)=z.$$

Тогда

$$\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}=-3x^2y^3,\quad \frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}=0,\quad \frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}=0.$$

И по формуле Стокса получаем

$$\oint_L x^2y^3dx+dy+zdz=-3\iint_S x^2y^2dxdy=-3\iint_D x^2y^2dxdy=$$

$$=-3\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^1\rho^2\cos^2\varphi\cdot\rho^2\sin^2\varphi\cdot\rho d\rho=-\frac{3}{4}\int(1-\cos^2 2\varphi)d\varphi\frac{\rho^2}{6}\Big|_0^1=$$

$$=-\frac{1}{8}\int_0^{2\pi}(1-\frac{1}{2}(1+\cos 4\varphi))d\varphi=-\frac{1}{8}(\frac{\varphi}{2}-\frac{\sin 4\varphi}{8})\Big|_0^{2\pi}=-\frac{\pi}{8}.$$

#

5. ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ПОЛЯ

5.1. Скалярные и векторные поля. Если с каждой точкой $M\ (x,\ y,\ z)$ определенной пространственной области (которая может охватывать и все пространство) связана некоторая скалярная или векторная величина, то говорят, что задано *поле* этой величины соответственно *скалярное* или *векторное.*

Примером скалярного поля может служить поле температуры или электрического потенциала. Так как положение точки M определено ее координатами, то задание поля скалярной величины U равносильно заданию числовой функции $U(x,y,z)$, которая предполагается непрерывной вместе со своими частными производными первого порядка.

Примером векторного поля может служить силовое поле или поле скоростей.

Задание поля векторной величины $\bar{a}$ может быть осуществлено путем задания ее проекций на оси координат

$$a_x(x,y,z),\ a_y(x,y,z),\ a_z(x,y,z) \qquad (5.1)$$

как функций от координат точки M, с которой величина вектора $\bar{a}$ связана. Эти функции предполагаются непрерывными вместе со своими частными производными первого порядка.

5.2. Градиент. Пусть задано скалярное поле $U(x,y,z)$. Введем вектор $\bar{g}$, с координатами

$$\frac{\partial U}{\partial x}, \frac{\partial U}{\partial y}, \frac{\partial U}{\partial z}.$$

Этот вектор называют *градиентом* величины U и обозначают

$$\bar{g} = gradU.$$

Градиент по числовому значению и по направлению характеризует наибольшую скорость изменения величины U. Причем направление градиента совпадает с направлением нормали к поверхности уровня $U(x, y, z) = c$, проходящей через данную точку.

Итак, *скалярное поле* $U(x, y, z)$ *порождает векторное поле градиента* $gradU$.

5.3. Поток векторного поля через поверхность. Формула Остроградского. Дивергенция. Пусть задано векторное поле $\bar{a}(M)$, то есть заданы три функции (5.1) и

$$\bar{a}(x, y, z) = a_x(x, y, z)\bar{i} + a_y(x, y, z)\bar{j} + a_z(x, y, z)\bar{k}. \qquad (5.2)$$

Возьмем поверхность S и, выбрав определенную ее сторону, обозначим через $\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$ направляющие косинусы соответственно направленной нормали $\bar{n}$ к поверхности S. Тогда поверхностный интеграл

$$\iint_S (a_x \cos\alpha + a_y \cos\beta + a_z \cos\gamma) ds \qquad (5.3)$$

называется *потоком векторного поля* $\bar{a}$ *через поверхность* S *в указанную сторону* и обозначается $П$.

Если вектор $\bar{a}$ определяет поле скоростей текущей жидкости, то интеграл (5.3) выражает количество жидкости, протекающей через поверхность S за единицу времени.

Используя связь между криволинейными интегралами первого и второго типа, потоку $П$ вектора $\bar{a}$ через поверхность S можно придать другое выражение

$$П = \iint_S (a_x \cos\alpha + a_y \cos\beta + a_z \cos\gamma) ds = \iint_S a_x dzdy + a_y dxdz + a_z dxdy.$$

Рассмотрим тело V, ограниченное замкнутой поверхностью S; через $\bar{n}$ обозначим внешнюю нормаль к поверхности. Тогда по формуле Остроградского (4.10), если положить в ней $P = a_x$, $Q = a_y$, $R = a_z$, можно выражение потока вектора $\bar{a}$ через поверхность S преобразовать в тройной интеграл

$$\iint_S a_x dydz + a_y dxdz + a_z dxdy = \iiint_V \left(\frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z}\right) dxdydz. \qquad (5.4)$$

Выражение, стоящее под знаком тройного интеграла, называется *дивергенцией (или расходимостью)* вектора $\bar{a}$ и обозначается

$$div\,\bar{a} = \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z}. \qquad (5.5)$$

Дивергенция есть скаляр, который можно поставить в соответствие каждому вектору $\bar{a}$. Следовательно, *векторное поле* $\bar{a}$ *порождает скалярное поле дивергенций* $div\,\bar{a}$.

Если $div\,\bar{a}\ (M_0) > 0$, то точка M_0 называется *источником*, если $div\,\bar{a}\ (M_0) < 0$, то точка M_0 называется *стоком*. Абсолютная величина $div\,\bar{a}\ (M_0)$ характеризует мощность источника или стока.

Векторное поле, во всех точках которого дивергенция равна нулю, называется *соленоидальным. Поток соленоидального поля через любую замкнутую поверхность равен нулю.*

Пример 5.1. Дано векторное поле :

$$\bar{a} = (x - 2z)\bar{i} + (3z - 4x)\bar{j} + (5x + y)\bar{k}.$$

Найти дивергенцию поля $\bar{a}$ в точке $M_0(0,\ 1,\ 2)$ и, с помощью формулы Остроградского, поток поля $\bar{a}$ через полную поверхность треугольной пирамиды, заданной плоскостями $x + y + z = 2,\ x = 0,\ y = 0,\ z = 0$(через внешнюю сторону поверхности).

Решение. Дивергенцию векторного поля $\bar{a}$ найдем по формуле (5.5)

$$div\,\bar{a} = \frac{\partial}{\partial x}(x - 2z) + \frac{\partial}{\partial y}(3z - 4x) + \frac{\partial}{\partial z}(5x + y) = 1 + 0 + 0 = 1.$$

В любой точке пространства $div\,\bar{a} = 1$. Согласно формуле Остроградского,

$$\Pi = \iiint_V div\,\bar{a} = \iiint_V dxdydz = \int_0^2 dx \int_0^{2-x} dy \int_0^{2-x-y} dz =$$

$$= \int_0^2 dx \int_0^{2-x} (2 - x - y)dy == \int_0^2 dx \left((2-x)y - \frac{y^2}{2} \right)\Bigg|_0^{2-x} =$$

$$= \int_0^2 \left((2-x)^2 - \frac{(2-x)^2}{2} \right) dx = \frac{1}{2}\int_0^1 (2-x)^2 dx =$$

$$= \frac{1}{2}\left(-\frac{(2-x)^3}{3} \right)\Bigg|_0^1 = -\frac{1}{6}\left((2-1)^3 - (2-0)^3\right) = \frac{7}{8}.$$

#

5.4. Циркуляция вектора. Формула Стокса. Вихрь. Пусть задано векторное поле $\bar{a}(M)$

$$\bar{a}(x,y,z) = a_x(x,y,z)\bar{i} + a_y(x,y,z)\bar{j} + a_z(x,y,z)\bar{k}.$$

Интеграл $\int_L a_x dx + a_y dy + a_z dz$, взятый по некоторой кривой L, называется *линейным интегралом* от вектора $\bar{a}$ вдоль кривой L. Если *поле* $\bar{a}$ *есть силовое поле, то линейный интеграл выражает работу сил поля при перемещении точки по кривой* L. *В случае замкнутой кривой этот интеграл называют циркуляцией вектора* $\bar{a}$ *вдоль кривой* L *и обозначают*

$$Ц = \oint_L a_x dx + a_y dy + a_z dz. \tag{5.6}$$

Пусть замкнутый контур L ограничивает некоторую поверхность S. Тогда по формуле Стокса (4.11) циркуляция вектора $\bar{a}$ вдоль этого контура может быть выражена поверхностным интегралом

$$Ц = \oint_L a_x dx + a_y dy + a_z dz =$$

$$= \iint_S \left(\frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z}\right)dydz + \left(\frac{\partial a_x}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial x}\right)dxdz + \left(\frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y}\right)dxdy. \tag{5.7}$$

Вектор с проекциями на оси Ox, Oy, Oz соответственно

$$\frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z}, \quad \frac{\partial a_x}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial x}, \quad \frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y}$$

называется вихрем или ротором вектора $\bar{a}$ *и обозначается* $rot\,\bar{a}$.

Формула (5.7) показывает, что циркуляция вектора вдоль замкнутого контура равна потоку вихря через поверхность, ограниченную этим контуром. При этом направление обхода контура и сторона поверхности должны соответствовать друг другу.

Заметим, что *векторное поле* $\bar{a}$ *порождает векторное же поле вихря* $rot\,\bar{a}$.

Пример 5.2. С помощью формулы Стокса найти циркуляцию векторного поля $\bar{a} = y\bar{i} - x\bar{j} + 2\bar{k}$ вдоль окружности $x^2 + y^2 = 1$, $z = 0$.

Решение. Из задания векторного поля $\bar{a}$ следует, что

$$a_x = y,\ a_y = -x,\ a_z = 2.$$

Тогда

$$\frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial a_x}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y} = -2$$

и, согласно формуле (5.7), имеем

$$Ц = \iint\limits_S (-2)dxdy = -2\iint\limits_{S_{xy}} dxdy.$$

S_{xy} – проекция поверхности S на xOy и представляет собой круг с центром в начале координат и радиусом равным 1. Перейдя в двойном интеграле к полярным координатам (см. пункт 1.4), получим

$$Ц = -2\iint\limits_{S_{xy}} dxdy = -2\int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^1 \rho d\rho = -2\int\limits_0^{2\pi} \frac{1}{2} d\varphi = -2\pi.$$

#

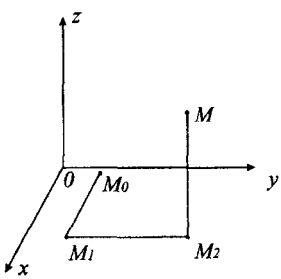


Рис. 5.1

Векторное поле, во всех точках которого вихревой вектор равен нулю, называется *потенциальным* или *безвихревым*. В потенциальном поле линейный интеграл (работа) не зависит от формы линии, соединяющей какие-либо две его точки, а циркуляция всегда равна нулю. Потенциал $U(x,y,z)$ такого поля определяется по формуле

$$U(M) = \int\limits_{M_0}^{M} a_x dx + a_y dy + a_z dz, \qquad (5.8)$$

где интеграл берется по любому пути, исходящему из некоторой фиксированной точки $M_0(x_0, y_0, z_0)$. Обычно в качестве такого пути выбирают ломаную $M_0M_1M_2M$, состоящую из отрезков прямых, параллельных осям координат (рис. 5.1). Точки ломаной $M_0M_1M_2M$ имеют следующие координаты: $M_0(x_0, y_0, z_0)$, $M_1(x, y_0, z_0)$, $M_2(x, y, z_0)$, $M(x, y, z)$ В этом случае имеем

$$U(M) = U(x,y,z) = \int\limits_{x_0}^{x} a_x(x, y_0, z_0)dx + \int\limits_{y_0}^{y} a_y(x, y, z_0)dy +$$

$$+ \int\limits_{z_0}^{z} a_z(x, y, z)dz. \qquad (5.9)$$

Векторное поле, являющееся одновременно и соленоидальным и потенциальным, называется *гармоническим*.

Пример 5.3. Проверить, является ли векторное поле

$$\bar{a} = (z + y)\bar{i} + (x + z)\bar{j} + (x + y)\bar{k}$$

соленоидальным и потенциальным. Если поле является потенциальным, то найти его потенциал.

Решение. Чтобы ответить на вопрос, является ли поле $\bar{a}$ соленоидальным, найдем дивергенцию вектора $\bar{a}$. Так как

$$a_x = z + y, a_y = x + z, a_z = x + y,$$

то по формуле (5.5) найдем дивергенцию поля

$$div\bar{a} = \frac{\partial}{\partial x}(z + y) + \frac{\partial}{\partial y}(z + x) + \frac{\partial}{\partial z}(x + y) = 0,$$

значит поле $\bar{a}$ соленоидальное.

Чтобы ответить на вопрос, является ли поле $\bar{a}$ потенциальным, найдем ротор вектора $\bar{a}$ $rot\bar{a}$:

$$rot\bar{a} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y + z & x + z & x + y \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x + z & x + y \end{vmatrix}\bar{i} + \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial x} \\ x + y & y + z \end{vmatrix}\bar{j} + \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ y + z & x + z \end{vmatrix}\bar{k} = 0.$$

Значит поле $\bar{a}$ потенциальное. Потенциал поля $\bar{a}$ найдем по формуле (5.9), приняв за точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ точку начала координат $O(0,0,0)$. Тогда

$$U(M) = U(x, y, z) = \int_0^x 0dx + \int_0^y xdy + \int_0^z (x + y)dz =$$

$$= xy\Big|_0^y + (x + y)z\Big|_0^z = xy + xz + yz$$

есть потенциал поля $\bar{a}$.

#

ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЯ

1. Что называется двойным интегралом от функции $f(x,y)$ по области D? Укажите его геометрический смысл.
2. Свойства двойного интеграла.
3. Что называется двукратным интегралом от функции $f(x,y)$ по области D? Как он вычисляется?
4. Двойной интеграл в полярных координатах.
5. Приложения двойного интеграла.
6. Что называется тройным интегралом от функции $f(x,y,z)$ по области V? Укажите его механический смысл.
7. Что называется трехкратным интегралом от функции $f(x,y,z)$ по области V? Как он вычисляется?
8. Тройной интеграл в цилиндрических координатах.
9. Приложения тройного интеграла.
10. Что называют криволинейным интегралом по длине дуги плоской кривой?
11. Что называется криволинейным интегралом по координатам?
12. Сформулируйте свойства криволинейных интегралов.
13. Вычисление криволинейных интегралов.
14. Формула Грина.
15. Условия независимости криволинейного интеграла от пути интегрирования.
16. Что называется поверхностным интегралом первого и второго типа, их свойства и вычисления ?
17. Что называется скалярным полем?
18. Что называется векторным полем?
19. Что называется циркуляцией векторного поля? Формула Стокса.
20. Что называют потоком векторного поля ? Напишите формулу для его вычисления.
21. Что называют ротором векторного поля?
22. Что называют дивергенцией векторного поля?
23. Какое поле называют потенциальным?
24. Какое поле называют соленоидальным?

ЗАДАЧИ КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ
(10 вариантов)

Задача №1. Вычислить двойной интеграл по прямоугольной области D.

Вариант 1. $\iint\limits_D (x^2 + y^2)dxdy,, D: x = 0, x = 1, y = -1, y = 0.$

Вариант 2 $\iint\limits_D (x + y^2)dxdy, D: x = 0, x = 2, y = -1, y = 0.$

Вариант 3 $\iint\limits_D 2xy^2 dxdy, D: x = 0, x = 1, y = -2, y = 0$

Вариант 4 $\iint\limits_D (3x^2 + 4y)dxdy, D: x = 0, x = 2, y = -2, y = 1$

Вариант 5 $\iint\limits_D (x + 5y)dxdy$, D: $x = 1, x = 2, y = 0, y = 1$

Вариант 6 $\iint\limits_D (\ 2x + y^2\ )dxdy, D: x = -2, x = 0, y = 0, y = 2$

Вариант 7 $\iint\limits_D 3xy^2 dxdy, D: x = -1, x = 0, y = -1, y = 0.$

Вариант 8 $\iint\limits_D (\ 2x + y\ )dxdy, D: x = 1, x = 2, y = 0, y = 1.$

Вариант 9 $\iint\limits_D (6x^2 + y)dxdy, D: x = -2, x = 1, y = 0, y = 2.$

Вариант 10 $\iint\limits_D (\ x + y\ )dxdy, D: x = -1, x = 1, y = 1, y = 2.$

Задача №2. Вычислить двумя способами двойной интеграл по области D, ограниченной линиями.

Вариант 1. $\iint\limits_D xydxdy, D: y = 2x, y = -x + 6, y = 0.$

Вариант 2. $\iint\limits_D (2x + y)dxdy, D: y = 3x^2, y = 3, x = 0.$

Вариант 3. $\iint\limits_D (x + \sqrt{y})dxdy, D: y = 2x, y = -x + 3, y = 0.$

Вариант 4. $\iint\limits_D 2xy^2 dxdy, D: y = 5x^2, y = 5, x = 0.$

Вариант 5. $\iint\limits_D \left(x+\sqrt{3y}\right)dxdy$, D: $y = x$, $y = -x + 8$, $y = 0$.

Вариант 6. $\iint\limits_D (5x+4y)dxdy$, D: $y = \frac{1}{3}x^2$, $y = 3$, $x = 0$.

Вариант 7. $\iint\limits_D 2xy\ dxdy$, D: $y = \frac{1}{2}x$, $y = -x + 6$, $y = 0$.

Вариант 8. $\iint\limits_D \left(\sqrt{x}+y\right)dxdy$, D: $y = \frac{1}{2}x^2$, $y = 8$, $x = 0$.

Вариант 9. $\iint\limits_D 3xy\ dxdy$, D: $y = x$, $y = -x + 4$, $y = 0$.

Вариант 10. $\iint\limits_D \left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)dxdy$, D: $y = 2x^2$, $y = 8$, $x = 0$.

Задача №3. С помощью двойного интеграла найти площадь области D, ограниченной линиями.

Вариант 1. а) $y = \sin x$, $x = 0$, $x = \frac{\pi}{2}$, $y = 0$,

б) $x^2 + y^2 = 1$, $x^2 + y^2 = 4$, $y = \sqrt{3}x$, $y = \frac{1}{\sqrt{3}}x$.

Вариант 2. а) $y = 4 - x^2$, $y = 0$,

б) $x^2 + y^2 = 9$, $x^2 + y^2 = 4$, $y = x$, $x = 0$.

Вариант 3. а) $y = 2x^2$, $y = 2x$,

б) $x^2 + y^2 = 9$, $x^2 + y^2 = 16$, $y = x$, $y = 0$.

Вариант 4. а) $y = 3x^2$, $y = -3x$,

б) $x^2 + y^2 = 25$, $x^2 + y^2 = 16$, $y = y = \sqrt{3}x$, $y = 0$.

Вариант 5. а) $y = \cos x$, $x = 0$, $x = \frac{\pi}{2}$, $y = 0$,

б) $x^2 + y^2 = 1$, $x^2 + y^2 = 9$, $y = \frac{1}{\sqrt{3}}x$, $x = 0$.

Вариант 6. а) $y = 2x$, $x = 0$, $x = 2$, $y = 0$,

б) $x^2 + y^2 = 25$, $x^2 + y^2 = 9$, $y = y = \sqrt{3}x$, $x = 0$.

Вариант 7. а) $y = 2x$, $x = 0$, $y = 2$,

б) $x^2 + y^2 = 4,\ x^2 + y^2 = 16,\ y = \frac{1}{\sqrt{3}}x,\ y = 0.$

Вариант 8. а) $y = -2x,\ x = 0,\ y = 0,\ x = -2,$

б) $x^2 + y^2 = 1,\ x^2 + y^2 = 16,\ y = y = \sqrt{3}x,\ x = y.$

Вариант 9. а) $y = 4x,\ x = 0,\ y = 0,\ x = 4,$

б) $x^2 + y^2 = 1,\ x^2 + y^2 = 25,\ y = \frac{1}{\sqrt{3}}x,\ y = x\ .$

Вариант 10. а) $y = 4 - x^2,\ y = x + 2,$

б) $x^2 + y^2 = 25,\ x^2 + y^2 = 4,\ y = x,\ x = 0.$

Задача №4. Вычислить тройной интеграл по области V, ограниченной плоскостями.

Вариант 1. $\iiint\limits_V (2x + y)dxdydz$, V: $x=0,\ x=2,\ y=0,\ y=2,\ z=1,\ z=3$.

Вариант 2. $\iiint\limits_V (x + y + z)dxdydz$, V: $x=1,\ x=3,\ y=0,\ y=2,\ z=1,\ z=3.$

Вариант 3. $\iiint\limits_V (3y + z)dxdydz$, V: $x=1,\ x=3,\ y=0,\ y=2,\ z=0,\ z=2.$

Вариант 4. $\iiint\limits_V (3x + 2y)dxdydz$, V: $x=0,\ x=3,\ y=0,\ y=2,\ z=1,\ z=3.$

Вариант 5. $\iiint\limits_V (3x + 2y + z)dxdydz$, V: $x=0,\ x=3,\ y=0,\ y=3,\ z=0,\ z=3.$

Вариант 6. $\iiint\limits_V (x + y + 5z)dxdydz$, V: $x=0,\ x=3,\ y=0,\ y=2,\ z=2,\ z=3.$

Вариант 7. $\iiint\limits_V (3x + 2z)dxdydz$, V: $x=1,\ x=2,\ y=0,\ y=2,\ z=1,\ z=2.$

Вариант 8. $\iiint\limits_V (x + 2y + z)dxdydz$, V: $x=2,\ x=3,\ y=0,\ y=2,\ z=1,\ z=3.$

Вариант 9. $\iiint\limits_V (3x + y + z)dxdydz$, V: $x=0,\ x=2,\ y=0,\ y=3,\ z=1,\ z=3.$

Вариант 10. $\iiint\limits_V (2x + 2y)dxdydz$, V: $x=1,\ x=3,\ y=1,\ y=3,\ z=0,\ z=3.$

Задача №5. С помощью тройного интеграла найти объем тела V, заданного ограничивающими его поверхностями.

Вариант 1. $z = x^2,\ y=2,\ z=2,\ y=0.$

Вариант 2. $x = y^2,\ z=0,\ z=3,\ x=2.$

Вариант 3. $z^2 = x^2 + y^2,\ z=2,\ z \geq 0.$

Вариант 4. $x+z=3,\ y=2,\ x=0,\ y=0,\ z=0.$

Вариант 5. $z = -x^2 - y^2,\ z = x^2 + y^2 - 8.$

Вариант 6. $z=0,\ y = x^2,\ z+y=2.$

Вариант 7. $2z = x^2 + y^2,\ z=2.$

Вариант 8. $z = 2 - x^2 - y^2,\ z^2 = x^2 + y^2,\ z \geq 0.$

Вариант 9. $z = 4 - x^2 - y^2,\ z=0.$

Вариант 10. $z = 12 - x^2 - y^2,\ x^2 + y^2 - z^2 = 0,\ z \geq 0.$

Задача №6. Найти массу дуги AB линии L, если ее линейная плотность меняется по закону $\rho(x, y)$.

Вариант 1. $L: \begin{cases} x=2(t-\sin t) \\ y=2(1-\cos t) \end{cases}, 0 \leq t \leq \pi,\ \rho(x,y) = \sqrt{y}.$

Вариант 2. $L: \begin{cases} x=\cos t \\ y=2\sin t \end{cases}, 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2},\ \rho(x,y) = y.$

Вариант 3. $L: \begin{cases} x=\cos t \\ y=\sin t \end{cases}, 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2},\ \rho(x,y) = xy - x\sqrt{1-y}.$

Вариант 4. $L: \begin{cases} x=a(t-\sin t) \\ y=a(1-\cos t) \end{cases}, 0 \leq t \leq \pi,\ \rho(x,y) = \sqrt{y}.$

Вариант 5. $L: \begin{cases} x=\frac{1}{2}\cos t \\ y=\frac{1}{2}\sin t \end{cases}, 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}, \rho(x,y) = y + x\sqrt{1-y}.$

Вариант 6. $L: \begin{cases} x=\cos t \\ y=2\sin t \end{cases}, \rho(x,y) = xy - x\sqrt{1-y},\ \rho(x,y) = x.$

Вариант 7. $L: \begin{cases} x=\cos t \\ y=\sin t \end{cases}, 0 \le t \le \frac{\pi}{2}, \rho(x,y) = x\sqrt{1-y}$.

Вариант 8. $L: \begin{cases} x=\cos t \\ y=2\sin t \end{cases}, 0 \le t \le \pi, \rho(x,y) = x$.

Вариант 9. $L: \begin{cases} x=\cos t \\ y=\sin t \end{cases}, 0 \le t \le \pi, \rho(x,y) = y\sqrt{1-x}$.

Вариант 10. $L: \begin{cases} x=2\cos t \\ y=2\sin t \end{cases}, 0 \le t \le \frac{\pi}{2}, \rho(x,y) = xy$.

Задача №7. Вычислить криволинейный интеграл вдоль линии L от точки A до B точки.

Вариант 1. $\int_L (x^2 + y)dx + (x - y^2)dy$, $L: y=2x$, $A(1, 2)$, $B(2, 4)$.

Вариант 2. $\int_L (2x + y)dx + (x^2 + y^2)dy$, $L: y = \frac{1}{2}x^2$, $A(0, 0)$, $B(2, 2)$.

Вариант 3. $\int_L 3x^2 ydx + (x + y)dy$, $L: y=2x$, $A(-1, -2)$, $B(0, 0)$.

Вариант 4. $\int_L (2x + y)dx + 4x^2 ydy$, $L: y = \frac{1}{2}x$, $A(0, 0)$, $B(2, 1)$.

Вариант 5. $\int_L (x + y)dx + (x^2 + y)dy$, $L: y = 2x^2$, $A(1, 2)$, $B(2, 8)$.

Вариант 6. $\int_L (2x + y)dx + (x^2 + y^2)dy$, $L: y = \frac{1}{2}x^2$, $A(-2, 2)$, $B(0, 0)$.

Вариант 7. $\int_L (3x^2 + 2y)dx + (x + 5y)dy$, $L: y=2x$, $A(0, 0)$, $B(2, 4)$.

Вариант 8. $\int_L (5x + 2y)dx + (x + y^2)dy$, $L: y = 2x^2$, $A(-1, 2)$, $B(0, 0)$.

Вариант 9. $\int_L (x + y)dx + (4x^2 + y)dy$, $L: y = \frac{1}{2}x$, $A(2, 1)$, $B(4, 2)$.

Вариант 10. $\int_L xydx + (3x^2 + y)dy$, $L: y = 2x^2$, $A(0, 0)$, $B(1, 2)$.

Задача №8. Дано векторное поле $\bar{a}$. Найти дивергенцию поля в точке M_0 и вычислить поток поля через полную поверхность треугольной пирамиды с помощью формулы Остроградского.

Вариант 1. $\bar{a} = (x-2y)\bar{i} + (2z+x)\bar{j} + (y-z)\bar{k}$, $M_0(1,1,1)$,
$2x+3y+z=1$, $x=0$, $y=0$, $z=0$.

Вариант 2. $\bar{a} = (2x-2y)\bar{i} + (z+3x)\bar{j} + (y+z)\bar{k}$, $M_0(1,0,1)$,
$2x+2y+2z=2$, $x=0$, $y=0$, $z=0$.

Вариант 3. $\bar{a} = (x+2y)\bar{i} - (z+x)\bar{j} + (3y+z)\bar{k}$, $M_0(1,0,2)$,
$x+2y+3z=1$, $x=0$, $y=0$, $z=0$.

Вариант 4. $\bar{a} = (x+y)\bar{i} + (z+x)\bar{j} - (3y+3z)\bar{k}$, $M_0(2,0,1)$,
$15x+5y+5z=5$, $x=0$, $y=0$, $z=0$.

Вариант 5. $\bar{a} = (x-2y)\bar{i} + (2z+3x)\bar{j} - (y+z)\bar{k}$, $M_0(1,1,0)$,
$x+4y+2z=1$, $x=0$, $y=0$, $z=0$.

Вариант 6. $\bar{a} = (2x+2y)\bar{i} + (3z-3x)\bar{j} + (y+2z)\bar{k}$, $M_0(1,0,1)$,
$3x+3y+3z=1$, $x=0$, $y=0$, $z=0$.

Вариант 7. $\bar{a} = (x-12y)\bar{i} + (8z+3x)\bar{j} + (2y+z)\bar{k}$, $M_0(3,0,1)$,
$x+y+4z=0.5$, $x=0$, $y=0$, $z=0$.

Вариант 8. $\bar{a} = (2x-2y)\bar{i} + (3z+3x)\bar{j} - (6y+z)\bar{k}$, $M_0(1,0,0)$,
$x+2y+2z=1$, $x=0$, $y=0$, $z=0$

Вариант 9. $\bar{a} = (x-y)\bar{i} + (3z+5x)\bar{j} + (6y+z)\bar{k}$, $M_0(0,1,2)$,
$2x+4y+8z=2$, $x=0$, $y=0$, $z=0$.

Вариант 10. $\bar{a} = (2x+2y)\bar{i} + (3z+3x)\bar{j} + x(6y+2z)\bar{k}$, $M_0(1,1,1)$,
$3x+2y+3z=1$, $x=0$, $y=0$, $z=0$.

Задача №9. Найти циркуляцию векторного поля $\bar{a}$ вдоль контура Г, используя формулу Стокса.

Вариант 1. $\bar{a} = (x-y)\bar{i} + x\bar{j} - z\bar{k}$ $\quad \Gamma: \begin{cases} x^2+y^2=1 \\ z=5 \end{cases}$.

Вариант 2. $\bar{a} = 2y\bar{i} + 5z\bar{j} + 3x\bar{k}$ $\quad \Gamma: \begin{cases} \frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}y^2=1 \\ z=2 \end{cases}$.

Вариант 3. $\bar{a} = (x-y)\bar{i} + x\bar{j} - z^2\bar{k}$ $\quad \Gamma: \begin{cases} x^2+y^2-4z^2=0 \\ z=\frac{1}{2} \end{cases}$.

Вариант 4. $\bar{a} = -3z\bar{i} + y^2\bar{j} + 2y\bar{k}$ $\Gamma: \begin{cases} x^2+y^2=4 \\ z=5 \end{cases}$.

Вариант 5. $\bar{a} = y\bar{i} - x\bar{j} + xy\bar{k}$ $\Gamma: \begin{cases} x^2+y^2+z^2=4 \\ z=1 \end{cases}$.

Вариант 6. $\bar{a} = (x-z)\bar{i} + z\bar{j} + 2y\bar{k}$ $\Gamma: \begin{cases} x^2+y^2-4z^2=0 \\ z=2 \end{cases}$.

Вариант 7. $\bar{a} = -3z\bar{i} + y^2\bar{j} + 2y\bar{k}$ $\Gamma: \begin{cases} x^2+y^2=1 \\ z=0 \end{cases}$.

Вариант 8. $\bar{a} = (x-3z)\bar{i} + (z-x)\bar{j} + 2y\bar{k}$ $\Gamma: \begin{cases} x^2+y^2+z^2=4 \\ z=1 \end{cases}$.

Вариант 9. $\bar{a} = (x^2-y)\bar{i} + x\bar{j} + \bar{k}$ $\Gamma: \begin{cases} x^2+y^2=1 \\ z=1 \end{cases}$.

Вариант 10. $\bar{a} = (x^2-y)\bar{i} + x\bar{j} + \bar{k}$ $\Gamma: \begin{cases} x^2+y^2-z^2=0 \\ z=2 \end{cases}$.

Задача №10. Проверить, является ли векторное поле $\bar{a}$ потенциальным и соленоидальным. Если поле является потенциальным, то найти его потенциал.

Вариант 1. $\bar{a} = y\bar{i} - x\bar{j} + z^2\bar{k}$.

Вариант 2. $\bar{a} = (y-z)\bar{i} + (z-x)\bar{j} + z^2\bar{k}$.

Вариант 3. $\bar{a} = x\bar{i} - z^2\bar{j} + y\bar{k}$.

Вариант 4. $\bar{a} = (y-z)\bar{i} + (z-x)\bar{j} + (x-y)\bar{k}$.

Вариант 5. $\bar{a} = -z\bar{i} - x\bar{j} + x^2\bar{k}$.

Вариант 6. $\bar{a} = x\bar{i} - 3z^2\bar{j} + y\bar{k}$.

Вариант 7. $\bar{a} = (2x-y)\bar{i} - (3x+z^2)\bar{j} + y\bar{k}$.

Вариант 8. $\bar{a} = 2y\bar{i} - z\bar{j} + x\bar{k}$.

Вариант 9. $\bar{a} = (y-z)\bar{i} + x^2\bar{j} + (x-y)\bar{k}$.

Вариант 10. $\bar{a} = x\bar{i} - 2z^2\bar{j} + y\bar{k}$.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Бугров Я. С., Никольский С.М. Дифференциальное и интегральное исчисление.-М.: Наука, 1988.-432с.
2. Будак Б. М., Фомин С.В. Кратные интегралы. Ряды.-М.: Наука, 1967.-608с.
3. Данко П.Е., Попов А.Г., Кожевникова Т. Я. Высшая математика в упражнениях и задачах.-М.:Высшая школа, 1999.Ч.1.-304с.; Ч.2.-416с.
4. Ильин В. А. Позняк Э. Г. Основы математического анализа.- М.:Наука, 1980. -Ч.2-323с.
5. Пискунов Н. С. Дифференциальное и интегральное исчисление.-М.: Наука, 1985.-Т.2-560с.
6. Фихтенгольц Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления.-М.: Наука, 1970. -Т.2-656с.
7. Шипачев В. С. Высшая математика.- М.:Высшая школа, 1990.-479 с.

ОГЛАВЛЕНИЕ

	с.
1. Двойные интегралы	3
1.1. Определение двойного интеграла	3
1.2. Свойства интегрируемых функций и двойных интегралов	4
1.3. Вычисление двойных интегралов	5
1.4. Двойной интеграл в полярных координатах	12
1.5. Вычисление площади плоской области	14
2. Тройные интегралы	16
2.1.Определение тройного интеграла	16
2.2.Вычисление тройных интегралов	18
2.3. Тройной интеграл в цилиндрических координатах	20
2.4. Вычисление объемов	22
3. Криволинейные интегралы	23
3.1.Определение криволинейного интеграла первого типа (по длине дуги)	23
3.2. Основные свойства криволинейного интеграла первого типа	24
3.3. Вычисление криволинейного интеграла первого типа	25
3.4. Определение криволинейного интеграла второго типа (по координатам)	28
3.5. Основные свойства криволинейного интеграла второго типа	29
3.6. Интеграл по замкнутому контуру	30
3.7. Связь между криволинейными интегралами первого и второго типа	32
3.8. Условия независимости криволинейного интеграла по координатам от пути интегрирования	33
4. Поверхностные интегралы	35
4.1. Поверхностные интегралы первого типа	35
4.2.Двусторонниеповерхности	37
4.3. Поверхностный интеграл второго типа	37
4.4. Формула Остроградского	40
4.5. Формула Стокса	42
5. Элементы теории поля	43
5.1. Скалярные и векторные поля	43
5.2. Градиент	44
5.3. Поток векторного поля через поверхность. Дивергенция	44
5.4. Циркуляция вектора. Формула Стокса. Вихрь	46
Вопросы для самоконтроля	49
Задачи контрольной работы	50
Библиографический список	57

Петрякова Елена Алексеевна

Синюкович Юлия Игоревна

Кратные, криволинейные и поверхностные интегралы. Элементы теории поля

Учебное пособие
для студентов заочного отделения
всех специальностей

Редактор Л. И. Рубанова
Компьютерная верстка Ю.И.Синюкович

Лицензия №021231 от 23.07.97 г.
Подписано в печать 04.09.2003
Формат 60×84/16. Печать офсетная
Усл. печ. л.-3,1. Уч.-изд. л.-3,3
План 2003 г.
Заказ 800 экз.

Глазковская типография, г. Иркутск, ул. Гоголя, 53