МИНИСТЕРСТВО ТРАНСПОРТА РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНСТВО ЖЕЛЕЗНОДОРОЖНОГО ТРАНСПОРТА
ГОУ ВПО «ДАЛЬНЕВОСТОЧНЫЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
УНИВЕРСИТЕТ ПУТЕЙ СООБЩЕНИЯ»

Кафедра «Высшая математика»

А.В. Звягина, С.В. Коровина

ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА.

Сборник задач

Хабаровск
Издательство ДВГУПС
2010

УДК
ББК

Рецензенты:

Кафедра «Высшая математика»
Тихоокеанского государственного университета,
(заведующий кафедрой доктор физико-математических наук, профессор
А.Г. Подгаев)

Ученый секретарь Хабаровского отделения
института прикладной математики ДВО РАН,
кандидат физико-математических наук
М.О. Авдеева

Звягина, А.В., Коровина, С.В.
З Линейная алгебра: Сборник задач / А.В. Звягина, С.В. Коровина. – Хабаровск: Изд-во ДВГУПС, 2010. — 115 с.

Данное пособие соответствует ГОС ВПО подготовки специалистов по направлениям 280101 «Пожарная безопасность», 280104 «Безопасность жизнедеятельности в техносфере», 270102 «Промышленное и гражданское строительство», 270112 «Строительство железных дорог», 270201 «Водоснабжение и водоотведение», 270204 «Мосты и транспортные тоннели».

В пособии приведены основные методические указания к решению типовых задач по дисциплине «Высшая математика», раздел – линейная алгебра. Представлены варианты индивидуальных заданий для самостоятельной работы студентов, дополнительные задачи повышенной сложности, а также тестовые материалы для контроля усвоения знаний. В конце пособия приведены списки основных формул и обозначений, а также список литературы.

Предназначено для студентов первого курса дневной формы обучения.

УДК
ББК

Математика имеет задачей не обучение исчислению,
а обучение приемам человеческой мысли при исчислении.
Л. Толстой

Введение

Дорогие студенты! За время обучения в университете Вам предстоит приобщиться к различным предметным областям наук, в частности, и к математике, овладеть приемами усвоения научных знаний с тем, чтобы приобретенный опыт использовать для самообразования и в дальнейшей профессиональной деятельности.

Материал данного пособия разбит на 6 параграфов: матрицы и действия с ними, определители, обратная матрица, ранг матрицы, решение систем линейных алгебраических уравнений и векторная алгебра. Каждый параграф содержит список теоретических вопросов по теме и примеры задач с подробным решением. Приведенные решения помогут вам при выполнении домашних заданий и при подготовке к экзамену.

В данной работе также представлены варианты индивидуальных заданий для самостоятельного выполнения. После вариантов индивидуальных заданий Вы сможете найти дополнительные задачи повышенной трудности, которые при решении потребуют от Вас творческого подхода. Для удобства в конце сборника приводятся основные формулы и обозначения.

Рекомендации по работе с учебным пособием:

☞ Прежде чем выполнять индивидуальное задание Вам необходимо ответить на перечисленные в начале каждого параграфа теоретические вопросы. Ответы вы сможете найти в материалах лекций или в дополнительной литературе, список которой приведен в конце сборника.

☞ Далее рекомендуем внимательно ознакомиться с примерами решения задач по теме параграфа.

☞ После Вы можете перейти к решению индивидуальных заданий.

Мы надеемся, что данное пособие поможет вам в освоении материала по линейной алгебре.

Желаем успеха!

§ 1. Матрицы и действия с ними

Теоретические вопросы

1. Определение матрицы, ее обозначения и размерность.
2. Виды матриц.
3. Операции над матрицами и их свойтва.
4. Понятия согласованных матриц, перестановочные матрицы.
5. Понятие транспонированной матрицы.

Решение практических примеров

✍ **Пример 1.** Даны матрицы A и B. Найти $A+B$, $A-B$, если:

1) $A = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 3 \\ -5 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix};$

2) $A = \begin{pmatrix} -3 & 5 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}.$

Решение: ➢ 1) Операции сложения и вычитания определены для матриц только одинаковой размерности. В результате данных операций получаем матрицы, элементы которых равны сумме (разности) соответствующих элементов исходных матриц.

$$A+B = \begin{pmatrix} 4+2 & -2+(-1) & 3+2 \\ -5+1 & 1+1 & 0+3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & -3 & 5 \\ -4 & 2 & 3 \end{pmatrix},$$

$$A-B = \begin{pmatrix} 4-2 & -2-(-1) & 3-2 \\ -5-1 & 1-1 & 0-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -6 & 0 & -3 \end{pmatrix}.$$

➢ 2) Операции сложения и вычитания для данных матриц не определены, т.к. матрицы имеют различные размерности: $\underset{\mathbf{2}\times 2}{A}$; $\underset{\mathbf{3}\times 2}{B}$ (в данном случае не совпадает количество строк в матрицах).

✍ **Пример 2.** Даны матрицы A, B, C. Найти значение выражения $2A+3B^T-C$, если

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 4 & 3 & 5 \\ 0 & 7 & -4 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 5 \\ 2 & 1 & -7 \\ 3 & 4 & 4 \end{pmatrix}; \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & 1 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}.$$

Решение: Найдем значение выражения, последовательно выполняя действия.

а) При умножении матрицы на число каждый элемент матрицы умножается на это число.

$$2A = 2\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 4 & 3 & 5 \\ 0 & 7 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\cdot 2 & 2\cdot 0 & 2\cdot(-1) \\ 2\cdot 4 & 2\cdot 3 & 2\cdot 5 \\ 2\cdot 0 & 2\cdot 7 & 2\cdot(-4) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -2 \\ 8 & 6 & 10 \\ 0 & 14 & -8 \end{pmatrix}.$$

б) При транспонировании матрицы строки исходной матрицы заменяются столбцами с соответствующими номерами, а столбцы заменяются строками (например, первая строка встает на место первого столбца).

$$3B^T = 3\begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{-3} & \mathbf{5} \\ 2 & 1 & -7 \\ 3 & 4 & 4 \end{pmatrix}^T = 3\begin{pmatrix} \mathbf{1} & 2 & 3 \\ \mathbf{-3} & 1 & 4 \\ \mathbf{5} & -7 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 9 \\ -9 & 3 & 12 \\ 15 & -21 & 12 \end{pmatrix}.$$

в) Тепеть найдем значение выражения

$$2A + 3B^T - C = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -2 \\ 8 & 6 & 10 \\ 0 & 14 & -8 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 6 & 9 \\ -9 & 3 & 12 \\ 15 & -21 & 12 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & 1 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} (4+3-0) & (0+6-0) & (-2+9-0) \\ (8-9-2) & (6+3+2) & (10+12-1) \\ (0+15-3) & (14-21-4) & (-8+12-5) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 6 & 7 \\ -3 & 11 & 21 \\ 12 & -11 & -1 \end{pmatrix}.$$

✍ **Пример 3.** Даны матрицы A и B. Найти AB и BA, если:

1) $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 3 \\ 1 & 3 & -4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 2 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$;

2) $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix}$;

3) $A = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$;

4) $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$.

Решение: Произведение матрицы A на матрицу B вводится только в том случае, когда матрица A *согласована* с матрицей B, то есть количество столбцов матрицы A совпадает с количеством строк матрицы B $\left(\underset{m\times\mathbf{k}}{A}\cdot\underset{\mathbf{k}\times n}{B}\right)$. Размерность итоговой матрицы C определяется по количеству строк матрицы A и количеству столбцов матрицы B $\left(\underset{\mathbf{m}\times\mathbf{n}}{C} = \underset{\mathbf{m}\times k}{A}\cdot\underset{k\times\mathbf{n}}{B}\right)$. Элемент c_{ij} матрицы $C = A\cdot B$ равен сумме произведений элементов i-ой строки матрицы A

на соответствующие элементы j-го столбца матрицы B $\left(c_{ij}=\sum\limits_{t=1}^{k} a_{it}b_{tj}\right)$.

➢ 1) $$\underset{2\times\mathbf{3}}{A}\cdot\underset{\mathbf{3}\times 2}{B}=\begin{pmatrix} \mathbf{-1} & \mathbf{0} & \mathbf{3}\\ 1 & 3 & -4\end{pmatrix}\begin{pmatrix} \mathbf{6} & 0\\ \mathbf{2} & -2\\ \mathbf{-3} & 1\end{pmatrix}=$$
$$=\begin{pmatrix} -1\cdot 6+0\cdot 2+3\cdot(-3) & -1\cdot 0+0\cdot(-2)+3\cdot 1\\ 1\cdot 6+3\cdot 2+(-4)\cdot(-3) & 1\cdot 0+3\cdot(-2)+(-4\cdot)\,1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -15 & 3\\ 24 & -10\end{pmatrix};$$

$$\underset{3\times\mathbf{2}}{B}\cdot\underset{\mathbf{2}\times 3}{A}=\begin{pmatrix} \mathbf{6} & \mathbf{0}\\ 2 & -2\\ -3 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix} \mathbf{-1} & 0 & 3\\ \mathbf{1} & 3 & -4\end{pmatrix}=$$
$$=\begin{pmatrix} 6\cdot(-1)+0\cdot 1 & 6\cdot 0+0\cdot 3 & 6\cdot 3+0\cdot(-4)\\ 2\cdot(-1)+(-2)\cdot 1 & 2\cdot 0+(-2)\cdot 3 & 2\cdot 3+(-2)\cdot(-4)\\ (-3)\cdot(-1)+1\cdot 1 & (-3)\cdot 0+1\cdot 3 & (-3)\cdot 3+1\cdot(-4)\end{pmatrix}=$$
$$=\begin{pmatrix} -6 & 0 & 18\\ -4 & -6 & 14\\ 4 & 3 & -13\end{pmatrix}.$$

Из этого примера видно, что $AB\neq BA$.

➢ 2) $$\underset{1\times\mathbf{3}}{A}\cdot\underset{\mathbf{3}\times 1}{B}=\begin{pmatrix} 2 & -2 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4\\ 2\\ -5\end{pmatrix}=(2\cdot 4+(-2)\,2+1\,(-5))=(-1);$$
Результатом умножения матриц $A\cdot B$ является матрица размерностью 1×1.

$$\underset{3\times\mathbf{1}}{B}\cdot\underset{\mathbf{1}\times 3}{A}=\begin{pmatrix} 4\\ 2\\ -5\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -2 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 4\cdot 2 & 4\cdot(-2) & 4\cdot 1\\ 2\cdot 2 & 2\cdot(-2) & 2\cdot 1\\ -5\cdot 2 & -5\cdot(-2) & -5\cdot 1\end{pmatrix}=$$
$$=\begin{pmatrix} 8 & -8 & 4\\ 4 & -4 & 2\\ -10 & 10 & -5\end{pmatrix}.$$

$AB\neq BA$.

➢ 3)

$$\underset{2\times\mathbf{2}}{A}\cdot\underset{\mathbf{2}\times 3}{B}=\begin{pmatrix} 0 & 3\\ 1 & 5\end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & 1 & 3\\ 1 & 2 & 0\end{pmatrix}=$$
$$=\begin{pmatrix} 0\,(-2)+3\cdot 1 & 0\cdot 1+3\cdot 2 & 0\cdot 3+3\cdot 0\\ 1\,(-2)+5\cdot 1 & 1\cdot 1+5\cdot 2 & 1\cdot 3+5\cdot 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 & 6 & 0\\ 3 & 11 & 3\end{pmatrix};$$

$\underset{2\times \mathbf{3}}{B} \cdot \underset{\mathbf{2}\times 2}{A}$ - не существует, т.к. количество столбцов матрицы B не совпадает с количеством строк матрицы A.

➢ 4)

$$\underset{2\times\mathbf{2}}{A} \cdot \underset{\mathbf{2}\times 2}{B} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\cdot 3 + 2\cdot 2 & 2\cdot 4 + 2\cdot 3 \\ 1\cdot 3 + 2\cdot 2 & 1\cdot 4 + 2\cdot 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 14 \\ 7 & 10 \end{pmatrix};$$

$$\underset{2\times\mathbf{2}}{B} \cdot \underset{\mathbf{2}\times 2}{A} = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3\cdot 2 + 4\cdot 1 & 3\cdot 2 + 4\cdot 2 \\ 2\cdot 2 + 3\cdot 1 & 2\cdot 2 + 3\cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 14 \\ 7 & 10 \end{pmatrix}.$$

В данном случае $AB = BA$, такие матрицы называются перестановочными или **коммутативными**.

✍ **Пример 4.** Найти значение выражения:

1) $P(A) = A^2 - A^T + 4E$, если $A = \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$;

2) $P(A) = A(3A^T + E)$, если $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}$.

Решение: ➢ 1) Находим последовательно

$$A^2 = A\cdot A = \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 5\cdot 5 + (-3)\cdot 2 & 5\cdot(-3) + (-3)\cdot 0 \\ 2\cdot 5 + 0\cdot 2 & 2\cdot(-3) + 0\cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 19 & -15 \\ 10 & -6 \end{pmatrix};$$

$$A^T = \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ -3 & 0 \end{pmatrix};$$

$$4E = 4\cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix};$$

$$P(A) = A^2 - A^T + 4E = \begin{pmatrix} 19 & -15 \\ 10 & -6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ -3 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 19 - 5 + 4 & -15 - 2 + 0 \\ 10 - (-3) + 0 & -6 - 0 + 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18 & -17 \\ 13 & -2 \end{pmatrix}.$$

➢ 2) Так как в выражении присутствуют скобки, то первоначально выполняем действия в скобках

$$3A^T = 3\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}^T = 3\begin{pmatrix} 2 & -4 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3\cdot 2 & 3\cdot(-4) \\ 3\cdot(-1) & 3\cdot 2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 6 & -12 \\ -3 & 6 \end{pmatrix};$$

$$3A^T + E = \begin{pmatrix} 6 & -12 \\ -3 & 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & -12 \\ -3 & 7 \end{pmatrix};$$

$$P(A) = A(3A^T + E) = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -4 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 & -12 \\ -3 & 7 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 2 \cdot 7 + (-1) \cdot (-3) & 2 \cdot (-12) + (-1) \cdot 7 \\ (-4) \cdot 7 + 2 \cdot (-3) & (-4) \cdot (-12) + 2 \cdot 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17 & -31 \\ -34 & 62 \end{pmatrix}.$$

§ 2. Определители и их свойства

Теоретические вопросы

1. Понятие определителя, его порядок.
2. Свойства определителей.
3. Правило вычисления определителя второго порядка.
4. Правила вычисления определителя третьего порядка (правило Сарруса, треугольника).
5. Понятия минора и алгебраического дополнения элемента определителя.
6. Вычисление определителя разложением по строке или столбцу.
7. Вычисление определителей n – ого порядка «накоплением нулей».
8. Вычисление определителей n – ого порядка, используя свойства определителей.

Решение практических примеров

✍ **Пример 5.** Вычислить определители второго порядка:

$$1) \begin{vmatrix} -3 & 2 \\ 7 & -2 \end{vmatrix}; \qquad 2) \begin{vmatrix} \sin\alpha & \cos\alpha \\ -\cos\alpha & \sin\alpha \end{vmatrix}.$$

Решение: Воспользуемся правилом вычисления определителей второго порядка

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot \ a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}$$

➢ 1) $\begin{vmatrix} -3 & 2 \\ 7 & -2 \end{vmatrix} = (-3) \cdot (-2) - 2 \cdot 7 = 6 - 14 = -8.$

➢ 2) $\begin{vmatrix} \sin\alpha & \cos\alpha \\ -\cos\alpha & \sin\alpha \end{vmatrix} = \sin\alpha \cdot \sin\alpha - \cos\alpha \cdot (-\cos\alpha) = \sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1.$

☛ *В данном примере использовали основное тригонометрическое тождество* $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$.

✍ **Пример 6.** Вычислить определитель

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ -2 & 1 & -3 \\ 1 & 4 & -2 \end{vmatrix}$$

1) по правилу Сарруса; 2) по правилу треугольника.

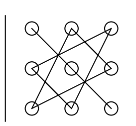
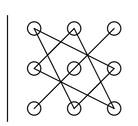
Решение: ➢ 1) Воспользуемся правилом Сарруса, для этого допишем справа от определителя два первых столбца

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ -2 & 1 & -3 \\ 1 & 4 & -2 \end{vmatrix} = \left|\begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & 3 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & -3 & -2 & 1 \\ 1 & 4 & -2 & 1 & 4 \\ - & - & - & + & + \; + \end{array}\right. = 1\cdot 1\cdot(-2) + 0\cdot(-3)\cdot 1 + 3\cdot(-2)\cdot 4 -$$

$$-\left[3\cdot 1\cdot 1 + 1\cdot(-3)\cdot 4 + 0\cdot(-2)\cdot(-2)\right] = -2 - 24 + 0 - (3 - 12 + 0) =$$
$$= -26 - (-9) = -17.$$

☛ *По правилу Сарруса можно дописывать не только два первых столбца, но и две первых строки под определителем, при этом диагонали проводить вниз параллельно главной и побочной диагоналям.*

➢ 2) Воспользуемся теперь правилом треугольника.

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ -2 & 1 & -3 \\ 1 & 4 & -2 \end{vmatrix} =$$

$-$

$$= 1\cdot 1\cdot(-2) + (-2)\cdot 4\cdot 3 + 1\cdot 0\cdot(-3) -$$

$$-\left[3\cdot 1\cdot 1 + (-3)\cdot 4\cdot 1 + (-2)\cdot 0\cdot(-2)\,\right] = -2 - 24 + 0 - (3 - 12 + 0) =$$
$$= -26 - (-9) = -17.$$

Если сравнить ответы, полученные по правилу Сарруса и по правилу треугольника, то мы увидим, что они совпадают ($-17 = -17$). Таким образом, значение определителя не зависит от выбранного метода его вычисления.

☛ *Метод Сарруса и метод треугольника используются для вычисления определителей только третьего порядка, этими методами нельзя вычислять определители более высоких порядков.*

✍ **Пример 7.** Вычислить минор и алгебраическое дополнение элемента a_{ij} следующих определителей

$$1)\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -9 & 3 \end{vmatrix}, \quad i=1, \quad j=1; \qquad 2)\begin{vmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & -5 \\ 9 & 7 & 8 \end{vmatrix}, \quad i=2, \quad j=1.$$

Решение: ➢ 1) Для того, чтобы вычислить минор элемента a_{11}, вычеркнем в исходном определителе первую строку и первый столбец, получим

$$M_{11} = 3.$$

Для вычисления алгебраического дополнения A_{11} воспользуемся формулой

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot M_{ij},$$

т. е.

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \cdot M_{11} = (-1)^2 \cdot M_{11} = 1 \cdot 3 = 3.$$

➢ 2) Для того, чтобы вычислить минор M_{21} вычеркнем в исходном определителе строку и столбец, на пересечении которых стоит элемент a_{21}, т.е. вторую строку и первый столбец. Получим определитель второго порядка:

$$M_{21} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} = 2 \cdot 8 - 1 \cdot 7 = 16 - 7 = 9;$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1} \cdot M_{21} = (-1)^3 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} = (-1) \cdot 9 = -9.$$

✍ **Пример 8.** Вычислить определитель

$$\begin{vmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 4 & -3 & 1 \\ 5 & 1 & -4 \end{vmatrix}$$

1) разложив его по элементам 1-ой строки,
2) разложив его по элементам 3-его столбца.
Результаты сравнить.

Решение: ➢ 1) Разложение определителя по элементам первой строки имеет вид:

$$\begin{vmatrix} \mathbf{-1} & \mathbf{0} & \mathbf{2} \\ 4 & -3 & 1 \\ 5 & 1 & -4 \end{vmatrix} = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} = (-1) \cdot A_{11} + 0 \cdot A_{12} + 2 \cdot A_{13}.$$

Вычислим алгебраические дополнения A_{11}, A_{13} (A_{12} вычислять нет смысла, т.к. умножение на нуль все равно даст в результате нуль):

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \cdot M_{11} = \begin{vmatrix} -3 & 1 \\ 1 & -4 \end{vmatrix} = (-3) \cdot (-4) - 1 \cdot 1 = 12 - 1 = 11,$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3} \cdot M_{13} = \begin{vmatrix} 4 & -3 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} = 4 \cdot 1 - (-3) \cdot 5 = 4 - (-15) = 19.$$

Подставим полученные значения:

$$\begin{vmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 4 & -3 & 1 \\ 5 & 1 & -4 \end{vmatrix} = (-1) \cdot 11 + 0 + 2 \cdot 19 = -11 + 38 = 27.$$

➢ 2) Разложение определителя по элементам третьего столбца имеет вид:

$$\begin{vmatrix} -1 & 0 & \mathbf{2} \\ 4 & -3 & \mathbf{1} \\ 5 & 1 & \mathbf{-4} \end{vmatrix} = a_{13}A_{13} + a_{23}A_{23} + a_{33}A_{33} = 2 \cdot A_{13} + 1 \cdot A_{23} + (-4) \cdot A_{33}.$$

Вычислим алгебраические дополнения A_{13}, A_{23} и A_{33}:

$$A_{13} = (-1)^{1+3} \cdot M_{11} = \begin{vmatrix} 4 & -3 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} = 4 \cdot 1 - (-3) \cdot 5 = 4 - (-15) = 19,$$

$$A_{23} = (-1)^{2+3} \cdot M_{23} = -\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} = -\left((-1) \cdot 1 - 0 \cdot 5\right) = -(-1 - 0) = 1,$$

$$A_{33} = (-1)^{3+3} \cdot M_{33} = \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 4 & -3 \end{vmatrix} = (-1) \cdot (-3) - 0 \cdot 4 = 3 - 0 = 3.$$

Подставим полученные значения:

$$\begin{vmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 4 & -3 & 1 \\ 5 & 1 & -4 \end{vmatrix} = 2 \cdot 19 + 1 \cdot 1 + (-4) \cdot 3 = 38 + 1 - 12 = 27.$$

Сравнивая полученные ответы, видим, что они совпадают ($27 = 27$), поэтому результат не зависит от выбранных строки или столбца.

✍ **Пример 9.** Вычислить определители, получив нули в какой-либо строке или столбце и, разложив их по элементам этой строки или столбца:

$$1) \begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 3 & 4 & 5 \\ 9 & -3 & 6 \end{vmatrix}; \qquad 2) \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 & 0 \\ -2 & 6 & 3 & 5 \\ 1 & 0 & 4 & 1 \\ 3 & 3 & 6 & -1 \end{vmatrix}; \qquad 3) \begin{vmatrix} 4 & 2 & -3 & 0 \\ -3 & 4 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & 2 & 3 \\ -3 & 3 & 5 & 2 \end{vmatrix}.$$

☛ *Для «накопления нулей» обычно выбирают строку (столбец), которая содержит нули или небольшие по модулю числа. Желательно в этой строке (столбце) наличие единицы.*

Решение: ➢ 1) В данном определителе для «накопления нулей» можно выбрать первую строку или первый, второй столбцы.

По свойству определителя, к любой строке (столбцу) можно прибавить элементы другой строки (столбца), умноженные на число отличное от нуля, при этом значение определителя не изменится. Воспользуемся этим свойством для «накопления нулей» в первой строке. Для этого прибавим ко второму столбцу первый столбец умноженный на (-1) (изменится только тот столбец, на который указывает стрелка).

$$\cdot(-1)\longrightarrow +$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 3 & 4 & 5 \\ 9 & -3 & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1+1\cdot(-1) & -2 \\ 3 & 4+3\cdot(-1) & 5 \\ 9 & -3+9\cdot(-1) & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 3 & 1 & 5 \\ 9 & -12 & 6 \end{vmatrix}.$$

Таким образом, получили один ноль в первой строке. Далее прибавим к третьему столбцу первый столбец домноженный на 2.

$$\cdot(2)\longrightarrow +$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 3 & 1 & 5 \\ 9 & -12 & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -2+1\cdot 2 \\ 3 & 1 & 5+3\cdot 2 \\ 9 & -12 & 6+9\cdot 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 11 \\ 9 & -12 & 24 \end{vmatrix}.$$

Получили в первой строке два нуля. Разложим полученный определитель по элементам первой строки.

$$\begin{vmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ 3 & 1 & 11 \\ 9 & -12 & 24 \end{vmatrix} = 1\cdot A_{11} + 0\cdot A_{12} + 0\cdot A_{13} = A_{11} = (-1)^{1+1} M_{11} =$$

$$= (-1)^2 \begin{vmatrix} 1 & 11 \\ -12 & 24 \end{vmatrix} = 1\cdot 24 - 11\cdot(-12) = 24 + 132 = 156.$$

➢ 2) В данном случае можно выбрать для «накопления нулей» второй, четвертый столбцы или первую, третью строки (т. к. в них есть нули).

Обнулим во втором столбце элементы $a_{22} = 6$ и $a_{42} = 3$. Для этого сначала прибавим ко второй строке первую строку умноженную на (-6):

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & \mathbf{1} & -1 & 0 \\ -2 & \mathbf{6} & 3 & 5 \\ 1 & \mathbf{0} & 4 & 1 \\ 3 & \mathbf{3} & 6 & -1 \end{vmatrix} \begin{matrix} \cdot(-6) \\ \hookleftarrow + \\ \\ \\ \end{matrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 & 0 \\ -2+(-12) & 6+(-6) & 3+6 & 5+0 \\ 1 & 0 & 4 & 1 \\ 3 & 3 & 6 & -1 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 & 0 \\ -14 & 0 & 9 & 5 \\ 1 & 0 & 4 & 1 \\ 3 & 3 & 6 & -1 \end{vmatrix}.$$

Теперь обнулим элемент $a_{42} = 3$, прибавив к четвертой строке первую строку умноженную на (-3):

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 & 0 \\ -14 & 0 & 9 & 5 \\ 1 & 0 & 4 & 1 \\ 3 & 3 & 6 & -1 \end{vmatrix} \begin{matrix} \cdot(-3) \\ \\ \\ \hookleftarrow + \end{matrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 & 0 \\ -14 & 0 & 9 & 5 \\ 1 & 0 & 4 & 1 \\ 3+(-6) & 3+(-3) & 6+3 & -1+0 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 2 & \mathbf{1} & -1 & 0 \\ -14 & \mathbf{0} & 9 & 5 \\ 1 & \mathbf{0} & 4 & 1 \\ -3 & \mathbf{0} & 9 & -1 \end{vmatrix}.$$

Разложим полученный определитель по второму столбцу

$$\Delta = 1 \cdot A_{12} + 0 \cdot A_{22} + 0 \cdot A_{32} + 0 \cdot A_{42} = (-1)^{1+2} \cdot M_{12} = -\begin{vmatrix} -14 & 9 & 5 \\ 1 & 4 & 1 \\ -3 & 9 & -1 \end{vmatrix} =$$

$$= -\left[(-14) \cdot 4 \cdot (-1) + 1 \cdot 9 \cdot 5 + 9 \cdot 1 \cdot (-3) - 5 \cdot 4 \cdot (-3) - 9 \cdot 1 \cdot (-14) - \right.$$
$$\left. -9 \cdot 1 \cdot (-1)\right] = -(56 + 45 - 27 + 60 + 126 + 9) = -269.$$

➢ 3) Выберем для «накопления нулей» четвертый столбец. Обнулим в этом столбце элементы $a_{24} = 5$ и $a_{34} = 3$. Для этого прибавим к третьей строке четвертую строку умноженную на $(-\frac{3}{2})$.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 4 & 2 & -3 & \mathbf{0} \\ -3 & 4 & 3 & \mathbf{5} \\ 1 & 2 & 2 & \mathbf{3} \\ -3 & 3 & 5 & \mathbf{2} \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \leftarrow{}^{+} \\ \cdot\left(-\frac{3}{2}\right) \end{matrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 4 & 2 & -3 & 0 \\ -3 & 4 & 3 & 5 \\ 1+(-3)\left(-\frac{3}{2}\right) & 2+3\left(-\frac{3}{2}\right) & 2+5\left(-\frac{3}{2}\right) & 3+2\left(-\frac{3}{2}\right) \\ -3 & 3 & 5 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 4 & 2 & -3 & 0 \\ -3 & 4 & 3 & 5 \\ \frac{11}{2} & -\frac{5}{2} & -\frac{11}{2} & 0 \\ -3 & 3 & 5 & 2 \end{vmatrix}.$$

Теперь, чтобы обнулить элемент $a_{24} = 5$, прибавим ко второй строке четвертую строку умноженную на $(-\frac{5}{2})$:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 4 & 2 & -3 & 0 \\ -3 & 4 & 3 & 5 \\ \frac{11}{2} & -\frac{5}{2} & -\frac{11}{2} & 0 \\ -3 & 3 & 5 & 2 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ \leftarrow{}^{+} \\ \\ \cdot\left(-\frac{5}{2}\right) \end{matrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 4 & 2 & -3 & 0 \\ -3+(-3)\left(-\frac{5}{2}\right) & 4+3\left(-\frac{5}{2}\right) & 3+5\left(-\frac{5}{2}\right) & 5+2\left(-\frac{5}{2}\right) \\ \frac{11}{2} & -\frac{5}{2} & -\frac{11}{2} & 0 \\ -3 & 3 & 5 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 4 & 2 & -3 & \mathbf{0} \\ \frac{9}{2} & -\frac{7}{2} & -\frac{19}{2} & \mathbf{0} \\ \frac{11}{2} & -\frac{5}{2} & -\frac{11}{2} & \mathbf{0} \\ -3 & 3 & 5 & \mathbf{2} \end{vmatrix}.$$

Разложим полученный определитель по четвертому столбцу

$$\Delta = 0 \cdot A_{14} + 0 \cdot A_{24} + 0 \cdot A_{34} + 2 \cdot A_{44} = 2 \cdot A_{44} = 2 \cdot (-1)^{4+4} \cdot M_{44}.$$

$$\Delta = 2\begin{vmatrix} 4 & 2 & -3 \\ \frac{9}{2} & -\frac{7}{2} & -\frac{19}{2} \\ \frac{11}{2} & -\frac{5}{2} & -\frac{11}{2} \end{vmatrix} = 2\left[77 + \frac{135}{4} - \frac{209}{2} - \left(\frac{231}{4} + 95 - \frac{99}{2}\right)\right] =$$
$$= 2\left(-\frac{316}{4}\right) = -158.$$

✍ **Пример 10.** Вычислить определители, используя свойства определителей

$$1)\begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 & 9 \\ 11 & 3 & 5 & 6 \\ 23 & 7 & 0 & 4 \\ 1 & -2 & 0 & 9 \end{vmatrix}; \qquad 2)\begin{vmatrix} 28 & -14 \\ -7 & 4 \end{vmatrix}.$$

Решение: ➢ 1) Заметим, что первая и четвертая строки в определителе одинаковые, поэтому по свойству определителей он равен нулю.

➢ 2) Заметим, что первая строка определителя делится на 7, поэтому множитель 7 можно вынести из первой строки за знак определителя, получим:
$\begin{vmatrix} 28 & -14 \\ -7 & 4 \end{vmatrix} = 7 \cdot \begin{vmatrix} 4 & -2 \\ -7 & 4 \end{vmatrix} = 7 \cdot (4 \cdot 4 - (-2) \cdot (-7)) = 7 \cdot (16 - 14) = 14.$

§ 3. Обратная матрица

Теоретические вопросы

1. Понятие обратной матрицы.
2. Понятия невырожденной матрицы, присоединненной матрицы.
3. Понятия минора и алгебраического дополнения элемента матрицы.
4. Алгоритм нахождения обратной матрицы.

Решение практических примеров

✍ **Пример 11.** Найти матрицы обратные к данным:

1) $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix};$

2) $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 3 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & 4 \end{pmatrix};$

3) $C = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \\ -6 & 0 & -2 \end{pmatrix}$.

Решение: ➢ 1) Проверяем, является ли матрица A невырожденной, для этого найдем ее определитель:

$$\det A = |A| = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-3) - (-2) \cdot 2 = 1 \neq 0,$$

– матрица A невырожденная, т.е. обратная матрица A^{-1} существует и при том единственная. Найдем обратную матрицу по формуле:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} A^* = \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} \\ A_{12} & A_{22} \end{pmatrix}.$$

Находим алгебраические дополнения для каждого элемента матрицы A:

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \cdot (-3) = -3; \qquad A_{21} = (-1)^{2+1} \cdot (-2) = 2;$$
$$A_{12} = (-1)^{1+2} \cdot 2 = -2; \qquad A_{22} = (-1)^{2+2} \cdot 1 = 1.$$

Составляем из найденных алгебраических дополнений присоединенную матрицу:

$$A^* = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix},$$

тогда

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} A^* = \frac{1}{1} \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Сделаем проверку.

По определению обратной матрицы $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E$;

$$A \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} 1 \cdot (-3) + (-2) \cdot (-2) & 1 \cdot 2 + (-2) \cdot 1 \\ 2 \cdot (-3) + (-3) \cdot (-2) & 2 \cdot 2 + (-3) \cdot 1 \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = E,$$

т.е. обратная матрица найдена верно.

➢ 2) Найдем определитель матрицы B, используя метод Сарруса

$$\det B = |B| = \left|\begin{array}{ccc|cc} 1 & 2 & 2 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & -1 & 3 & 2 \\ -2 & 1 & 4 & -2 & 1 \end{array}\right. = 1 \cdot 2 \cdot 4 + 2(-1)(-2) + 2 \cdot 3 \cdot 1 -$$
$$\begin{array}{cccccc} - & - & - & + & + & + \end{array}$$

$$-2 \cdot 2(-2) - 1(-1)1 - 2 \cdot 3 \cdot 4 = 8 + 4 + 6 - (-8) - (-1) - 24 = 3 \neq 0,$$

следовательно обратная матрица для B существует.
Найдем ее по формуле:

$$B^{-1} = \frac{1}{\det B} B^* = \frac{1}{\det B} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}.$$

Находим алгебраические дополнения:

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 9;$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} = -10;$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 7;$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = -6;$$

$$A_{22} = (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} = 8;$$

$$A_{23} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = -5;$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -6;$$

$$A_{32} = (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = 7;$$

$$A_{33} = (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -4.$$

Составляем присоединенную матрицу: $B^* = \begin{pmatrix} 9 & -6 & -6 \\ -10 & 8 & 7 \\ 7 & -5 & -4 \end{pmatrix}$;

$$B^{-1} = \frac{1}{\det B} B^* = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 9 & -6 & -6 \\ -10 & 8 & 7 \\ 7 & -5 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -2 \\ \frac{-10}{3} & \frac{8}{3} & \frac{7}{3} \\ \frac{7}{3} & \frac{-5}{3} & \frac{-4}{3} \end{pmatrix}.$$

Теперь сделаем проверку найденной обратной матрицы, но для удобства вычислений вынесем из матрицы B^{-1} множитель $(\frac{1}{3})$.

$$B^{-1} \cdot B = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 9 & -6 & -6 \\ -10 & 8 & 7 \\ 7 & -5 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 3 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & 4 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 9-18+12 & 18-12-6 & 18+6-24 \\ -10+24-14 & -20+16+7 & -20-8+24 \\ 7-15+8 & 14-10-4 & 14+5-16 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = E.$$

➢ 3) Найдем определитель матрицы C, разложив его по второму столбцу

$$\det C = |C| = \begin{vmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \\ -6 & 0 & -2 \end{vmatrix} = 0 \cdot A_{12} - 2 \cdot A_{22} + 0 \cdot A_{32} = -2 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -6 & -2 \end{vmatrix} =$$
$$= -2\,(-6+6) = 0.$$

В данном случае матрица C оказалась вырожденной, и поэтому обратной матрицы для нее не существует.

✍ **Пример 12.** Решить матричное уравнение

1) $A \cdot X = B$, если $A = \begin{pmatrix} 4 & -5 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$.

2) $X \cdot A = B$, если $A = \begin{pmatrix} 6 & -2 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$.

Решение: ➢ 1) Т.к. уравнение матричное, то решением данного уравнения должна стать некоторая матрица X, которая при подстановке в уравнение будет давать верное равенство. Для того, чтобы ее найти, обе части матричного уравнения умножим **слева** на A^{-1}, матрицу обратную к A:

$$\boldsymbol{A^{-1}} \cdot A \cdot X = \boldsymbol{A^{-1}} \cdot B,$$

по определению обратной матрицы $A^{-1} \cdot A = E$, тогда

$$E \cdot X = A^{-1} \cdot B,$$

$$\underline{X = A^{-1}B}.$$

Таким образом, чтобы найти неизвестную матрицу X, необходимо найти A^{-1} и умножить ее на матрицу B.

$$\det A = |A| = \begin{vmatrix} 4 & -5 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} = 4 \cdot 3 - (-5) \cdot (-2) = 12 - 10 = 2 \neq 0,$$

матрица A невырожденная, значит A^{-1} существует и при том единственная. Найдем алгебраические дополнения элементов матрицы A:

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \cdot 3 = 3; \qquad A_{21} = (-1)^{2+1} \cdot (-5) = 5;$$
$$A_{12} = (-1)^{1+2} \cdot (-2) = 2; \qquad A_{22} = (-1)^{2+2} \cdot 4 = 4.$$

Составим присоединенную матрицу: $A^* = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$.

Обратная матрица: $A^{-1} = \dfrac{1}{\det A} A^* = \dfrac{1}{2} \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & \frac{5}{2} \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Откуда

$$X = A^{-1}B = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & \frac{5}{2} \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{3}{2}(-1) + \dfrac{5}{2} \cdot 3 \\ 1(-1) + 2 \cdot 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

Сделаем проверку найденного решения, подставив его в исходное уравнение

$$AX = B,$$

$$A \cdot X = \begin{pmatrix} 4 & -5 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \cdot 6 + (-5) \cdot 5 \\ -2 \cdot 6 + 3 \cdot 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix} = B.$$

Ответ: $X = \begin{pmatrix} 6 \\ 5 \end{pmatrix}$.

➢ 2) Для решения данного уравнения умножим обе части матричного уравнения **справа** на A^{-1}:

$$X \cdot A \cdot \boldsymbol{A^{-1}} = B \cdot \boldsymbol{A^{-1}},$$

по определению обратной матрицы $A \cdot A^{-1} = E$, тогда

$$X \cdot E = B \cdot A^{-1},$$

таким образом

$$\underline{X = BA^{-1}}.$$

Найдем обратную матрицу для A

$$\det A = |A| = \begin{vmatrix} 6 & -2 \\ 5 & -1 \end{vmatrix} = 6 \cdot (-1) - (-2) \cdot 5 = -6 + 10 = 4 \neq 0.$$

матрица A невырожденная, значит A^{-1} существует и при том единственная. Находим алгебраические дополнения элементов матрицы A:

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \cdot (-1) = -1; \qquad A_{21} = (-1)^{2+1} \cdot (-2) = 2;$$
$$A_{12} = (-1)^{1+2} \cdot 5 = -5; \qquad A_{22} = (-1)^{2+2} \cdot 6 = 6.$$

Присоединенная матрица: $A^* = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -5 & 6 \end{pmatrix}$.

Обратная матрица: $A^{-1} = \dfrac{1}{\det A} A^* = \dfrac{1}{4} \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -5 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-1}{4} & \frac{1}{2} \\ \frac{-5}{4} & \frac{3}{2} \end{pmatrix}$.

Откуда

$$X = B \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{-1}{4} & \frac{1}{2} \\ \frac{-5}{4} & \frac{3}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-5}{2} & 3 \\ \frac{-1}{2} & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2,5 & 3 \\ -0,5 & 1 \end{pmatrix}.$$

Сделаем проверку найденного решения, подставив X в исходное уравнение

$$XA = B,$$

$$X \cdot A = \begin{pmatrix} -2,5 & 3 \\ -0,5 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 & -2 \\ 5 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -15+15 & 5-3 \\ -3+5 & 1-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = B.$$

Ответ: $\quad X = \begin{pmatrix} -2,5 & 3 \\ -0,5 & 1 \end{pmatrix}.$

☛ *Такие матричные уравнения имеют единственное решение только в том случае, когда матрица A имеет обратную, т.е. является невырожденной. В противном случае уравнение может иметь бесконечное множество решений или не иметь их вовсе.*

§ 4. Ранг матрицы

Теоретические вопросы

1. Определение ранга матрицы.
2. Элементарные преобразования матрицы.
3. Понятие эквивалентных матриц.
4. Ранг ступенчатой матрицы.

Решение практических примеров

✍ **Пример 13.** Найти ранг матрицы методом окаймляющих миноров

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 5 & 4 \\ 2 & -6 & 4 & 3 \\ 3 & -9 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Решение: Минор M_{k+1} порядка $k+1$, содержащий в себе минор M_k порядка k, называется окаймляющим минором M_k. Если у матрицы A существует минор $M_k \neq 0$, а все его окаймляющие миноры $M_{k+1} = 0$, то $rang(A) = k$.

Понятно, что в данной по условию задачи матрице найдется минор первого порядка отличный от нуля, это любой ненулевой элемент матрицы A. Поэтому сразу переходим к составлению миноров второго порядка

$$M_2 = \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 2 & -6 \end{vmatrix} = -6 + 6 = 0,$$

$$M_2 = \begin{vmatrix} -3 & 5 \\ -6 & 4 \end{vmatrix} = -12 + 30 = 18 \neq 0.$$

Дальнейшее вычисление миноров второго порядка не имеет смысла, так как уже ясно, что $rang(A)$ не будет меньше чем 2. Остается только проверить, существуют ли в данной матрице миноры третьего порядка, отличные от нуля. Для этого не будем перебирать все возможные миноры третьего порядка, а вычислим лишь те, которые в себе содержат найденный отличный от нуля минор второго порядка (окаймляющие его миноры).

$$M_3 = \begin{vmatrix} 1 & -3 & 5 \\ 2 & -6 & 4 \\ 3 & -9 & 3 \end{vmatrix} = -3\begin{vmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 2 & 2 & 4 \\ 3 & 3 & 3 \end{vmatrix} = \Big/ \begin{matrix} \text{1 ст. и 2 ст.} \\ \text{одинаковые} \end{matrix} \Big/ = 0,$$

и

$$M_3 = \begin{vmatrix} -3 & 5 & 4 \\ -6 & 4 & 3 \\ -9 & 3 & 2 \end{vmatrix} = -3\begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} - 5\begin{vmatrix} -6 & 3 \\ -9 & 2 \end{vmatrix} + 4\begin{vmatrix} -6 & 4 \\ -9 & 3 \end{vmatrix} =$$
$$= -3(8-9) - 5(-12+27) + 4(-18+36) = 0.$$

Поэтому $rang(A) = 2$, а указанный минор $M_2 = \begin{vmatrix} -3 & 5 \\ -6 & 4 \end{vmatrix} \neq 0$ может быть принят за базисный.

Ответ: $rang(A) = 2$.

✍ **Пример 14.** Найти ранг матрицы методом элементарных преобразований

$$1) \quad A = \begin{pmatrix} -8 & 1 & -7 & -5 & -5 \\ -2 & 1 & -3 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}; \qquad 2) \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 3 & -2 \\ -3 & -1 & -4 & 3 \\ 4 & -1 & 3 & -4 \\ 1 & 1 & 1 & -3 \end{pmatrix}.$$

Решение: ➢ 1) Ранг ступенчатой матрицы равен количеству ненулевых строк. Приведем матрицу A к ступенчатому виду, используя элементарные преобразования. Для удобства вычислений поменяем местами первую и третью строки

$$A = \begin{pmatrix} -8 & 1 & -7 & -5 & -5 \\ -2 & 1 & -3 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & -3 & -1 & -1 \\ -8 & 1 & -7 & -5 & -5 \end{pmatrix}.$$

Обнулим элементы под главной диагональю

$$A\sim\begin{pmatrix}1&1&-1&1&1\\-2&1&-3&-1&-1\\-8&1&-7&-5&-5\end{pmatrix}\begin{matrix}\cdot(2)\\ \hookleftarrow+\\ \end{matrix}\sim\begin{pmatrix}1&1&-1&1&1\\0&3&-5&1&1\\-8&1&-7&-5&-5\end{pmatrix}\begin{matrix}\cdot(8)\\ \big|\\ \hookleftarrow+\end{matrix}\sim$$

$$\sim\begin{pmatrix}1&1&-1&1&1\\0&3&-5&1&1\\0&9&-15&3&3\end{pmatrix}\begin{matrix}\\ \cdot(-3)\\ \hookleftarrow+\end{matrix}\sim\begin{pmatrix}1&1&-1&1&1\\0&3&-5&1&1\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}.$$

В итоговой матрице две ненулевые строки, это значит, что $rang(A)=2$.
В качестве базисного минора (минора наибольшего порядка, отличного от нуля) можно выбрать $M_2=\begin{vmatrix}1&1\\0&3\end{vmatrix}=1\cdot3=3\neq0$.

Ответ: $\quad rang(A)=2$.

➢ 2) Так как количество столбцов в матрице B меньше, чем количество строк, чтобы сократить вычисления, транспонируем матрицу B

$$B\sim B^T=\begin{pmatrix}1&0&1&-1\\2&1&3&-2\\-3&-1&-4&3\\4&-1&3&-4\\1&1&1&-3\end{pmatrix}^T=\begin{pmatrix}1&2&-3&4&1\\0&1&-1&-1&1\\1&3&-4&3&1\\-1&-2&3&-4&-3\end{pmatrix}.$$

Теперь методом элементарных преобразований приведем матрицу B к ступенчатому виду

$$B\sim\begin{pmatrix}1&2&-3&4&1\\0&1&-1&-1&1\\1&3&-4&3&1\\-1&-2&3&-4&-3\end{pmatrix}\begin{matrix}\cdot(-1)\\ \big|\\ \hookleftarrow+\\ \end{matrix}\sim\begin{pmatrix}1&2&-3&4&1\\0&1&-1&-1&1\\0&1&-1&-1&0\\-1&-2&3&-4&-3\end{pmatrix}\begin{matrix}\cdot(1)\\ \big|\\ \big|\\ \hookleftarrow+\end{matrix}\sim$$

$$\sim\begin{pmatrix}1&2&-3&4&1\\0&1&-1&-1&1\\0&1&-1&-1&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}\begin{matrix}\\ \cdot(-1)\\ \hookleftarrow+\\ \end{matrix}\sim\begin{pmatrix}1&2&-3&4&1\\0&1&-1&-1&1\\0&0&0&0&-1\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}.$$

По количеству ненулевых строк в итоговой матрице можно сделать вывод, что $rang(B)=3$.
В качестве базисного минора можно выбрать

$$M_3=\begin{vmatrix}1&2&1\\0&1&1\\0&0&-1\end{vmatrix}=1\cdot1\cdot(-1)=-1\neq0.$$

Ответ: $rang(B) = 3.$

§ 5. Системы линейных алгебраических уравнений

Теоретические вопросы

1. Система линейных алгебраических уравнений.
2. Главная (основная) матрица системы.
3. Расширенная матрица системы.
4. Понятие совместной системы.
5. Теорема Кронекера–Капелли.
6. Формулы Крамера.
7. Матричный способ решения систем.
8. Метод Гаусса решения систем линейных алгебраических уравнений.
9. Фундаментальная система решений.

Решение практических примеров

✍ **Пример 15.** Решить систему методом Крамера

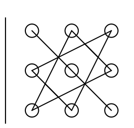
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 7, \\ 2x_1 + x_3 = -5, \\ x_1 + x_2 + x_3 = -4 \end{cases}$$

Решение: Для начала, выпишем главную (или основную) матрицу системы, составленную из коэффициентов при неизвестных:

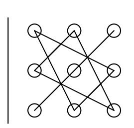
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

во второй строке матрицы элемент $a_{22} = 0$, так как во втором уравнении системы x_2 отсутствует.
Вычислим основной определитель системы Δ по правилу треугольника:

$$\Delta = detA = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} =$$



$$-$$



$$= 0 - 2 + 2 - 0 - 1 - 4 = -5.$$

$\Delta \neq 0 \Rightarrow$ система совместна и имеет единственное решение.
Теперь вычислим определитель Δx_1. Для этого в основном определителе Δ

заменим первый столбец на столбец свободных членов (элементы, стоящие после знака «равно» в системе).

$$\Delta x_1 = \begin{vmatrix} 7 & 2 & -1 \\ -5 & 0 & 1 \\ -4 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 + 5 - 8 - (0 + 7 - 10) = -3 + 3 = 0.$$

Для вычисления Δx_2 в основном определителе Δ заменим второй столбец на столбец свободных членов.

$$\Delta x_2 = \begin{vmatrix} 1 & 7 & -1 \\ 2 & -5 & 1 \\ 1 & -4 & 1 \end{vmatrix} = -5 + 8 + 7 - (5 - 4 + 14) = 10 - 15 = -5.$$

Для вычисления Δx_3 в основном определителе Δ заменим третий столбец на столбец свободных членов.

$$\Delta x_3 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 7 \\ 2 & 0 & -5 \\ 1 & 1 & -4 \end{vmatrix} == 0 + 14 - 10 - (0 - 5 - 16) = 4 + 21 = 25.$$

По формулам Крамера находим неизвестные

$$x_1 = \frac{\Delta x_1}{\Delta}, \qquad x_2 = \frac{\Delta x_2}{\Delta}, \qquad x_3 = \frac{\Delta x_3}{\Delta}.$$

$$x_1 = \frac{0}{-5} = 0, \qquad x_2 = \frac{-5}{-5} = 1, \qquad x_3 = \frac{25}{-5} = -5.$$

Сделаем проверку найденного решения, подставив значения x_1, x_2, x_3 в систему

$$\left\{ \begin{array}{rlll} 0 + 2 \cdot 1 - (-5) & = 7, & 7 = 7, & \text{верно} \\ 2 \cdot 7 - 5 & = -5, & -5 = -5, & \text{верно} \\ 0 + 1 - 5 & = -4, & -4 = -4, & \text{верно} \end{array} \right.$$

Ответ: $(0; 1; -5)$.

✍ **Пример 16.** Решить систему с помощью обратной матрицы (матричным методом)

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 + 2x_2 + 2x_3 = -1, \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 = -13, \\ -2x_1 + x_2 + 4x_3 = 10 \end{array} \right.$$

Решение: Представим систему в виде матричного уравнения

$$A \cdot X = B,$$

где

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 3 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & 4 \end{pmatrix}; \qquad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}; \qquad B = \begin{pmatrix} -1 \\ -13 \\ 10 \end{pmatrix}.$$

главная матрица системы; столбец неизвестных; столбец свободных членов

Решением такого уравнения будет

$$X = A^{-1}B$$

Обратная матрица существует ($\det A = 3 \neq 0$) и равна

$$A^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 9 & -6 & -6 \\ -10 & 8 & 7 \\ 7 & -5 & -4 \end{pmatrix}$$

(см. пример 11. стр.15). Находим

$$X = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 9 & -6 & -6 \\ -10 & 8 & 7 \\ 7 & -5 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 \\ -13 \\ 10 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 9\cdot(-1) - 6(-13) - 6\cdot 10 \\ -10\cdot(-1) + 8(-13) + 7\cdot 10 \\ 7\cdot(-1) - 5(-13) - 4\cdot 10 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 9 \\ -24 \\ 18 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -8 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

То есть

$$\underline{x_1 = 3}; \qquad \underline{x_2 = -8}; \qquad \underline{x_3 = 6}.$$

Сделаем проверку найденного решения, подставив значения x_1, x_2, x_3 в систему

$$\begin{cases} 3 + 2(-8) + 2\cdot 6 = -1, & -1 = -1, \quad \text{верно} \\ 3\cdot 3 + 2(-8) - 1\cdot 6 = -13, & -13 = -13, \quad \text{верно} \\ -2\cdot 3 - 8 + 4\cdot 6 = 10, & 10 = 10, \quad \text{верно} \end{cases}$$

Ответ: $(3; -8; 6)$.

☛ *Достоинством рассмотренных методов решения систем Крамера и матричного является их простота, однако, вычисления значительно усложняются, когда уравнений в системе больше трех. Также нужно отметить недостаток данных методов: метод Крамера и матричный метод решения систем можно применять только для таких систем, основной определитель которых Δ отличен от нуля.*

✍ **Пример 17.** Найти решения следующих систем уравнений методом Гаусса

$$1)\begin{cases} 2x_1+4x_2-3x_3=2,\\ x_1+5x_2-x_3=3,\\ 3x_1-x_2-2x_3=-9 \end{cases} \qquad 2)\begin{cases} 2x_1-3x_2+x_3=2,\\ 3x_1+x_2-3x_3=1,\\ 5x_1-2x_2-2x_3=4 \end{cases}$$

$$3)\begin{cases} 3x_1+x_2-x_3=-1,\\ 2x_1-x_2+x_3=5,\\ x_1+2x_2-2x_3=-6 \end{cases}$$

Решение: ➢ 1) Суть метода Гаусса заключается в последовательном исключении неизвестных из уравнений системы. Для этого запишем систему в более компактном виде, выписав в так называемую расширенную матрицу системы коэффициенты при неизвестных и свободные члены.

$$\tilde{A} = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x_1 & x_2 & x_3 \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & -3 & 2\\ 1 & 5 & -1 & 3\\ 3 & -1 & -2 & -9 \end{array}\right) \end{array}.$$

Каждой строке расширенной матрицы соответствует уравнение системы. Теперь необходимо привести расширенную матрицу системы к ступенчатому виду, и таким образом последовательно исключить из второго и третьего уравнений неизвестные x_1 и x_1, x_2 соответственно. Для удобства вычислений поменяем в системе первое и второе уравнения местами

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x_1 & x_2 & x_3 \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & -3 & 2\\ 1 & 5 & -1 & 3\\ 3 & -1 & -2 & -9 \end{array}\right) \end{array} \sim \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x_1 & x_2 & x_3 \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 5 & -1 & 3\\ 2 & 4 & -3 & 2\\ 3 & -1 & -2 & -9 \end{array}\right) \end{array}.$$

Теперь обнулим элементы первого столбца под главной диагональю, для этого прибавим ко второму уравнению системы первое уравнение умноженное на (-2), а к третьему уравнению прибавим первое умноженное на (-3)

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x_1 & x_2 & x_3 \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 5 & -1 & 3\\ 2 & 4 & -3 & 2\\ 3 & -1 & -2 & -9 \end{array}\right) \end{array} \begin{array}{l} \cdot(-2)\cdot(-3) \\ \leftarrow + \\ \leftarrow\quad + \end{array} \sim \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x_1 & x_2 & x_3 \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 5 & -1 & 3\\ 0 & -6 & -1 & -4\\ 0 & -16 & 1 & -18 \end{array}\right) \end{array}.$$

Теперь обнулим в третьей строке элемент (-16), таким образом из третьего уравнения исключим неизвестный x_2. Для этого домножим вторую и третью строки до наименьшего общего кратного чисел (6) и (-16), и прибавим к третьей строке вторую (изменится только третья строка)

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x_1 & x_2 & x_3 \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 5 & -1 & 3 \\ 0 & -6 & -1 & -4 \\ 0 & -16 & 1 & -18 \end{array}\right) \end{array} \begin{array}{l} \\ \cdot(-8) \\ \cdot(3) \; + \end{array} \sim \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x_1 & x_2 & x_3 \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 5 & -1 & 3 \\ 0 & -6 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & 11 & -22 \end{array}\right) \end{array}.$$

Отметим, что ранг главной (без столбца свободных членов) матрицы системы, ранг расширенной матрицы системы и количество неизвестных в системе равны между собой ($rang(A) = rang(\tilde{A}) = n = 3$). Следовательно, система совместна и имеет единственное решение.
Теперь выпишем полученную после преобразований систему уравнений

$$\begin{cases} x_1 + 5x_2 - x_3 & = 3, \\ \quad -6x_2 - x_3 & = -4, \\ \qquad\quad 11x_3 & = -22 \end{cases}$$

Из третьего уравнения получим $\underline{x_3 = -2}$.
Подставляем найденное значение x_3 во второе уравнение

$$-6x_2 - (-2) = -4,$$
$$\underline{x_2 = 1},$$

аналогично из первого уравнения находим

$$x_1 + 5 \cdot 1 - (-2) = 3,$$
$$\underline{x_1 = -4}.$$

Сделаем проверку найденного решения, для этого подставим значения x_1, x_2, x_3 в **исходную** систему уравнений

$$\begin{cases} 2(-4) + 4 \cdot 1 - 3(-2) & = 2, \qquad 2 = 2, \qquad \text{верно} \\ -4 + 5 \cdot 1 - (-2) & = 3, \qquad 3 = 3, \qquad \text{верно} \\ 3(-4) - 1 - 2(-2) & = -9, \quad -9 = -9, \quad \text{верно} \end{cases}$$

Ответ: $(-4; 1; -2)$.

➢ 2) Выпишем расширенную матрицу системы

$$\tilde{A} = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x_1 & x_2 & x_3 \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & -3 & 1 \\ 5 & -2 & -2 & 4 \end{array}\right) \end{array}.$$

Приведем матрицу $\tilde{A}$ к ступенчатому виду, постепенно обнуляя элементы под главной диагональю в первом и во втором столбцах

$$\tilde{A} = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x_1 & x_2 & x_3 \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & -3 & 1 \\ 5 & -2 & -2 & 4 \end{array}\right) \end{array} \begin{array}{l} \cdot(-3) \\ \cdot(2) \\ \end{array} \sim \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x_1 & x_2 & x_3 \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & 1 & 2 \\ 0 & 11 & -9 & -4 \\ 5 & -2 & -2 & 4 \end{array}\right) \end{array} \begin{array}{l} \cdot(-5) \\ \\ \cdot(2) \end{array} \sim$$

$$\sim \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x_1 & x_2 & x_3 \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & 1 & 2 \\ 0 & 11 & -9 & -4 \\ 0 & 11 & -9 & -6 \end{array}\right) \end{array} \begin{array}{l} \\ \cdot(-1) \\ \end{array} \sim \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x_1 & x_2 & x_3 \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & 1 & 2 \\ 0 & 11 & -9 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{array}\right) \end{array}.$$

Получили $rang(A) = 2$, $rang(\tilde{A}) = 3$, откуда $rang(A) \neq rang(\tilde{A})$, т.е. исходная система уравнений несовместна.
Действительно, если выписать полученную систему уравнений

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_3 = 2, \\ 11x_2 - 9x_3 = -4, \\ 0 \cdot x_3 = -2 \end{cases}$$

видно, что последнее уравнение не имеет решения.

Ответ: система несовместна.

➢ 3) Выпишем расширенную матрицу системы

$$\tilde{A} = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x_1 & x_2 & x_3 \end{array} \\ \left(\begin{array}{rrr|r} 3 & 1 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 & 5 \\ 1 & 2 & -2 & -6 \end{array}\right) \end{array}.$$

Поменяем в системе первое и третье уравнение местами, тем самым в расширенной матрице системы поменяются местами первая и третья строки

$$\tilde{A} = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x_1 & x_2 & x_3 \end{array} \\ \left(\begin{array}{rrr|r} 3 & 1 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 & 5 \\ 1 & 2 & -2 & -6 \end{array}\right) \end{array} \sim \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x_1 & x_2 & x_3 \end{array} \\ \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & -2 & -6 \\ 2 & -1 & 1 & 5 \\ 3 & 1 & -1 & -1 \end{array}\right) \end{array}$$

Теперь приведем расширенную матрицу системы к ступенчатому виду, обнулив элементы под главной диагональю

$$\tilde{A} = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & x_3 & \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -2 & -6 \\ 2 & -1 & 1 & 5 \\ 3 & 1 & -1 & -1 \end{array}\right) \end{array} \begin{array}{l} \cdot(-2) \\ + \\ \end{array} \sim \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & x_3 & \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -2 & -6 \\ 0 & -5 & 5 & 17 \\ 3 & 1 & -1 & -1 \end{array}\right) \end{array} \begin{array}{l} \cdot(-3) \\ \\ + \end{array} \sim$$

$$\sim \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & x_3 & \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -2 & -6 \\ 0 & -5 & 5 & 17 \\ 0 & -5 & 5 & 17 \end{array}\right) \end{array} \begin{array}{l} \\ \cdot(-1) \\ + \end{array} \sim \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & x_3 & \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -2 & -6 \\ 0 & -5 & 5 & 17 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \end{array}.$$

Из полученной ступенчатой матрицы видно, что $rang(A) = 2$ и $rang(\tilde{A}) = 2$ равны между собой, однако меньше количества неизвестных в системе $n = 3$. Это означает, что система совместна, но она будет иметь не единственное решение, а бесконечное множество.

Оставляем в левой части уранений системы переменные x_1, x_2, которые берем за базисные, т.к определитель из коэффициентов при них (базисный минор) отличен от нуля, т.е $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -5 \end{vmatrix} \neq 0$. Переменную x_3, которую берем в качестве свободной переменной, переносим в правые части уравнений. В результате получим систему

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 & = -6 + 2x_3, \\ \quad -5x_2 & = 17 - 5x_3, \end{cases}$$

откуда

$$x_2 = -\frac{17}{5} + x_3,$$

$$x_1 = -6 + 2x_3 - 2\left(-\frac{17}{5} + x_3\right) = \frac{4}{5}.$$

Задавая свободной переменной произвольные значения $x_3 = a$, найдем бесконечное множество решений системы $\left(\frac{4}{5};\ -\frac{17}{5} + a;\ a\right)$. Например, при $a = 0$ решением системы будет $\left(\frac{4}{5};\ -\frac{17}{5};\ 0\right)$, при $a = 3$ решение $\left(\frac{4}{5};\ -\frac{2}{5};\ 3\right)$ и т.д.

Ответ: $\left(\frac{4}{5};\ -\frac{17}{5} + a;\ a\right)$, где a– произвольное число.

✍ **Пример 18.** Исследовать систему уравнений и в случае совместности решить ее

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 3x_3 + 2x_4 = 1, \\ 2x_1 + x_3 - x_4 = 2, \\ 4x_1 + 2x_2 - 5x_3 + 3x_4 = 4, \\ 7x_1 + 3x_2 - 7x_3 + 4x_4 = 7 \end{cases}$$

Решение: Выпишем расширенную матрицу системы

$$\tilde{A} = \begin{array}{c} \begin{matrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & \end{matrix} \\ \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -3 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & -1 & 2 \\ 4 & 2 & -5 & 3 & 4 \\ 7 & 3 & -7 & 4 & 7 \end{array}\right) \end{array}$$

Приведем расширенную матрицу системы к ступенчатому виду, обнулив элементы под главной диагональю

$$\tilde{A} = \begin{array}{c} \begin{matrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & \end{matrix} \\ \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -3 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & -1 & 2 \\ 4 & 2 & -5 & 3 & 4 \\ 7 & 3 & -7 & 4 & 7 \end{array}\right) \end{array} \begin{matrix} \cdot(-2) \\ + \\ \\ \\ \end{matrix} \sim \begin{array}{c} \begin{matrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & \end{matrix} \\ \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -3 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & 7 & -5 & 0 \\ 4 & 2 & -5 & 3 & 4 \\ 7 & 3 & -7 & 4 & 7 \end{array}\right) \end{array} \begin{matrix} \cdot(-4) \\ \\ + \\ \\ \end{matrix} \sim$$

$$\sim \begin{array}{c} \begin{matrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & \end{matrix} \\ \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -3 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & 7 & -5 & 0 \\ 0 & -2 & 7 & -5 & 0 \\ 7 & 3 & -7 & 4 & 7 \end{array}\right) \end{array} \begin{matrix} \cdot(-7) \\ \\ \\ + \end{matrix} \sim \begin{array}{c} \begin{matrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & \end{matrix} \\ \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -3 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & 7 & -5 & 0 \\ 0 & -2 & 7 & -5 & 0 \\ 0 & -4 & 14 & -10 & 0 \end{array}\right) \end{array} \begin{matrix} \\ \cdot(-1) \\ + \\ \\ \end{matrix} \sim$$

$$\sim \begin{array}{c} \begin{matrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & \end{matrix} \\ \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -3 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & 7 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 14 & -10 & 0 \end{array}\right) \end{array} \begin{matrix} \\ \cdot(-2) \\ \\ + \end{matrix} \sim \begin{array}{c} \begin{matrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & \end{matrix} \\ \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -3 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & 7 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \end{array}.$$

Из полученной ступенчатой матрицы видно, что $rang(A) = 2$ и $rang(\tilde{A}) = 2$ равны между собой, но меньше числа неизвестных в системе $n = 4$. Система совместна, но имеет не единственное решение, а бесконечное множество.

Оставляем в левой части уранений системы переменные x_1, x_2, которые берем за базисные, т.к определитель из коэффициентов при них (базисный минор) отличен от нуля, т.е $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} \neq 0$. Переменные x_3, x_4, которые берем в качестве свободных переменных, переносим в правые части уравнений. В результате получим систему

$$\begin{cases} x_1 + x_2 &= 1 + 3x_3 - 2x_4, \\ \quad -2x_2 &= -7x_3 + 5x_4 \end{cases}$$

откуда

$$\begin{aligned} &x_2 = \frac{7}{2}x_3 - \frac{5}{2}x_4, \\ &x_1 = 1 + 3x_3 - 2x_4 - \left(\frac{7}{2}x_3 - \frac{5}{2}x_4\right) = 1 - \frac{1}{2}x_3 + \frac{1}{2}x_4. \end{aligned}$$

Задавая свободным переменным произвольные значения $x_3 = a$, $x_4 = b$, найдем бесконечное множество решений системы $\left(1 - \frac{a}{2} + \frac{b}{2};\ \frac{7a}{2} - \frac{5b}{2};\ a;\ b\right)$. Примером частного решения системы может служить решение $(0; 7; 2; 0)$ при $a = 2$, $b = 0$.

Ответ: $\left(1 - \frac{a}{2} + \frac{b}{2};\ \frac{7a}{2} - \frac{5b}{2};\ a;\ b\right)$, где a, b– произвольные числа.

§ 6. Элементы векторной алгебры

Теоретические вопросы

1. Определение вектора, нулевой вектор, единичный вектор. Способы задания векторов, обозначения.
2. Понятия коллинеарных, компланарных векторов.
3. Линейные операции над векторами.
4. Определение скалярного произведения и его свойства.
5. Приложения скалярного произведения векторов.
6. Определение векторного произведения и его свойства.
7. Приложения векторного произведения векторов.
8. Определение смешанного произведения и его свойства.
9. Приложения смешанного произведения векторов.
10. Базис. Разложение вектора по базису.

Решение практических примеров

✍ **Пример 19.** Даны три вектора $\overline{a} = -\overline{i} + 2\overline{j}$, $\overline{b} = 4\overline{i} - 2\overline{j} + 2\overline{k}$ и $\overline{c} = \overline{i} + 6\overline{j} - 3\overline{k}$.

Вычислить:

а) скалярное произведение векторов $2\overline{a}, (-3\overline{b} + \overline{c})$;

б) векторное произведение векторов $4\overline{b}$, $\overline{c}$;

в) смешанное произведение векторов $3\overline{a}, \overline{b}, 2\overline{c}$;

Проверить будут ли:

г) коллинеарны или перпендикулярны векторы $\overline{a}, \overline{b}$;

д) компланарны три вектора $-2\overline{a}, 4\overline{b}, 7\overline{c}$.

Решение: Выпишем координаты векторов:

$$\overline{a} = (-1; 2; 0)\,, \qquad \overline{b} = (4; -2; 2)\,, \qquad \overline{c} = (1; 6; -3)\,.$$

➢ а) Вычислим сначала вектор $\overline{d} = -3\overline{b} + \overline{c}$.
При умножении вектора на число каждая координата вектора умножается на это число

$$-3\overline{b} = -3\,(4; -2; 2) = (-12; 6; -6)\,.$$

При сложении (вычитании) векторов складываются (вычитаются) соответствующие координаты векторов

$$\overline{d} = (-12; 6; -6) + (1; 6; -3) = (-11; 12; -9)\,.$$

Для вычисления скалярного произведения векторов $2\overline{a}, \overline{d}$ воспользуемся сочетательным свойством скалярного произведения векторов по отношению к скалярному (числовому) множителю:

$$(\lambda\overline{a}) \cdot \overline{d} = \lambda \left(\overline{a} \cdot \overline{d}\right)\,,$$

тогда $2\overline{a} \cdot \overline{d} = 2\left(\overline{a} \cdot \overline{d}\right)$.

Вычислим скалярное произведение $\overline{a} \cdot \overline{d}$ по формуле:

$$\overline{a} \cdot \overline{d} = x_a x_d + y_a y_d + z_a z_d,$$

т.е.

$$\overline{a} \cdot \overline{d} = (-1) \cdot (-11) + 2 \cdot 12 + 0 \cdot -9 = 11 + 24 + 0 = 35,$$

откуда

$$2\overline{a} \cdot (-3\overline{b} + \overline{c}) = 2(\overline{a} \cdot \overline{d}) = 2 \cdot 35 = 70.$$

В результате скалярного произведения $2\overline{a} \cdot (-3\overline{b} + \overline{c})$ получается число.

➢ б) Для вычисления векторного произведения векторов $4\overline{b}$, $\overline{c}$ воспользуемся сочетательным свойством векторного произведения векторов по отношению к скалярному (числовому) множителю:

$$(\lambda\overline{a}) \times \overline{b} = \overline{a} \times \left(\lambda\overline{b}\right) = \lambda \cdot \left(\overline{a} \times \overline{b}\right)\,,$$

тогда $4\overline{b}\times 2\overline{c} = 4\cdot 2\left(\overline{b}\times\overline{c}\right) = 8\left(\overline{b}\times\overline{c}\right)$.

Вычислим векторное произведение $\overline{b}\times\overline{c}$ по формуле:

$$\overline{b}\times\overline{c} = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ x_b & y_b & z_b \\ x_c & y_c & z_c \end{vmatrix},$$

$$\overline{b}\times\overline{c} = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ 4 & -2 & 2 \\ 1 & 6 & -3 \end{vmatrix} = \overline{i}\begin{vmatrix} -2 & 2 \\ 6 & -3 \end{vmatrix} - \overline{j}\begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} + \overline{k}\begin{vmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 6 \end{vmatrix} = -6\overline{i}+14\overline{j}+26\overline{k},$$

откуда

$$4\overline{b}\times 2\overline{c} = 8\left(\overline{b}\times\overline{c}\right) = 8\cdot\left(-6\overline{i}+14\overline{j}+26\overline{k}\right) = -48\overline{i}+112\overline{j}+208\overline{k}.$$

В результате векторного произведения $4\overline{b}\times 2\overline{c}$ получается вектор с координатами $(-48;\ 112;\ 208)$.

➢ в) Для вычисления смешанного произведения векторов $3\overline{a}, \overline{b}, 2\overline{c}$ воспользуемся сочетательным свойством по отношению к скалярному (числовому) множителю скалярного и векторного произведений (см. пункты а) и б)):

$$3\overline{a}\,\overline{b}\,2\overline{c} = 3\cdot 2\cdot\left(\overline{a}\,\overline{b}\,\overline{c}\right) = 6\left(\overline{a}\,\overline{b}\,\overline{c}\right).$$

Вычислим смешанное произведение $\left(\overline{a}\,\overline{b}\,\overline{c}\right)$ по формуле:

$$\overline{a}\,\overline{b}\,\overline{c} = \begin{vmatrix} x_a & y_a & z_a \\ x_b & y_b & z_b \\ x_c & y_c & z_c \end{vmatrix}.$$

$$\overline{a}\,\overline{b}\,\overline{c} = \begin{vmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 4 & -2 & 2 \\ 1 & 6 & -3 \end{vmatrix} = -6+4+0-(0-12-24) = 34,$$

откуда

$$3\overline{a}\,\overline{b}\,2\overline{c} = 6\left(\overline{a}\,\overline{b}\,\overline{c}\right) = 6\cdot 34 = 204.$$

В результате смешанного произведения $3\overline{a}\,\overline{b}\,2\overline{c}$ получается число.

➢ г) Если два вектора перпендикулярны, то

$$\overline{a}\cdot\overline{b} = 0.$$

Если два вектора коллинеарны, то соответствующие координаты этих векторов пропорциональны, т.е.

$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2} = \frac{z_1}{z_2}.$$

Найдем скалярное произведение векторов $\overline{a}$ и $\overline{b}$

$$\overline{a}\cdot\overline{b}=(-1)\cdot 4+2(-2)+0\cdot 2=-8\neq 0,$$

следовательно, векторы $\overline{a}$ и $\overline{b}$ не перпендикулярны.
Проверим коллинеарность:

$$\frac{-1}{4}=\frac{2}{-2}=\frac{0}{2},$$

$$-\frac{1}{4}\neq -1\neq 0,$$

следовательно, векторы $\overline{a}$ и $\overline{b}$ не коллинеарны.

➢ д) Если три вектора компланарны (лежат в одной плоскости или параллельны ей), то

$$\overline{a}\,\overline{b}\,\overline{c}=0.$$

По свойству:

$$-2\overline{a}\,4\overline{b}\,7\overline{c}=(-2)\cdot 4\cdot 7\cdot\left(\overline{a}\,\overline{b}\,\overline{c}\right)=-56\left(\overline{a}\,\overline{b}\,\overline{c}\right).$$

Из пункта (в)

$$\overline{a}\overline{b}\overline{c}=34\neq 0,$$

следовательно, векторы не являются компланарными.

✍ **Пример 20.** Проверить, будут ли коллинеарны или перпендикулярны векторы $\overline{a},\overline{b}$, если:

1) $\overline{a}=-\overline{i}+2\overline{j}$,
$\overline{b}=4\overline{i}+2\overline{j}+\overline{k}$;

2) $\overline{a}=\overline{i}+3\overline{j}-\overline{k}$,
$\overline{b}=4\overline{i}+12\overline{j}-4\overline{k}$.

Решение: Напомним, что если

$\overline{a}\cdot\overline{b}=0$ – векторы перпендикулярны,

$\frac{x_1}{x_2}=\frac{y_1}{y_2}=\frac{z_1}{z_2}$ – векторы коллинеарны.

Проверим эти условия для каждого случая.

➢ 1) $\overline{a}=(-1;2;0)$, $\overline{b}=(4;2;1)$.

$$\overline{a}\cdot\overline{b}=(-1)\cdot 4+2\cdot 2+0\cdot 1=-4+4=0,$$

следовательно векторы перпендикулярны.

➢ 2) $\overline{a}=(1;3;-1)$, $\quad \overline{b}=(4;12;-4)$.

$$\overline{a}\cdot\overline{b}=1\cdot 4+3\cdot 12+(-1)\cdot(-4)=4+36+4=44\neq 0,$$

векторы не перпендикулярны.
Проверим условие коллинеарности:

$$\frac{1}{4}=\frac{3}{12}=\frac{-1}{-4},$$

$$\frac{1}{4}=\frac{1}{4}=\frac{1}{4},$$

следовательно векторы коллинеарны.

✍ **Пример 21.** Проверить, лежат ли точки $A(-4,-2,-3)$, $B(2,5,7)$, $C(6,3,-1)$, $D(-2,-2,-7)$ в одной плоскости.

Решение: Если четыре точки лежат в одной плоскости, то и векторы, построенные на этих точках, лежат в одной плоскости, т.е. являются компланарными.
Найдем три вектора $\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{AD}$:

$$\begin{array}{ll}
\overrightarrow{AB}=(x_B-x_A;y_B-y_A;z_B-z_A),\ \text{т.е.} & \\
\overrightarrow{AB}=(2-(-4);5-(-2);7-(-3)); & \overrightarrow{AB}=(6;7;10)\\
\overrightarrow{AC}=(x_C-x_A;y_C-y_A;z_C-z_A); & \overrightarrow{AC}=(10;5;2)\\
\overrightarrow{AD}=(x_D-x_A;y_D-y_A;z_D-z_A); & \overrightarrow{AD}=(2;0;-4)
\end{array}$$

$\overline{a}\,\overline{b}\,\overline{c}=0$ – условие компланарности трех векторов.

Найдем смешанное произведение для векторов $\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{AD}$

$$\overrightarrow{AB}\,\overrightarrow{AC}\,\overrightarrow{AD}=\begin{vmatrix}6&7&10\\10&5&2\\4&-2&-8\end{vmatrix}=-240-200+56-(200-24-560)=0,$$

т.е. векторы $\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{AD}$ компланарны, следовательно точки A, B, C, D лежат в одной плоскости.

✍ **Пример 22.** Даны четыре точки $A(-4,-2,-3)$, $B(2,5,7)$, $C(6,3,-1)$, $D(6,-4,1)$ – вершины пирамиды.

Найти:

а) наименьшее ребро грани (ABC);

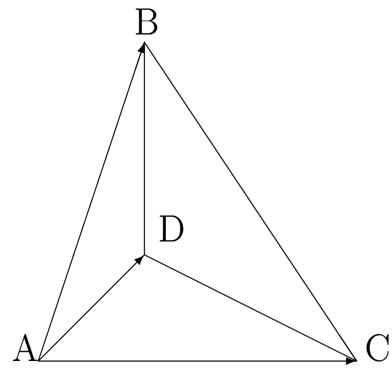
б) наибольший угол грани (ABC);

в) площадь грани (DBC);

г) объем пирамиды $ABCD$;

д) длину высоты AM пирамиды.

Решение: Сделаем схематично чертеж пирамиды.



Найдем координаты векторов

$\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A; y_B - y_A; z_B - z_A)$; $\overrightarrow{AB} = (6; 7; 10)$;

$\overrightarrow{AC} = (x_C - x_A; y_C - y_A; z_C - z_A)$; $\overrightarrow{AC} = (10; 5; 2)$;

$\overrightarrow{BC} = (x_C - x_B; y_C - y_B; z_C - z_B)$; $\overrightarrow{BC} = (4; -2; -8)$;

$\overrightarrow{AD} = (x_D - x_A; y_D - y_A; z_D - z_A)$; $\overrightarrow{AD} = (10; -2; 4)$.

➢ а) В грани (ABC) три ребра: AB, AC и BC.
Для нахождения наименьшего ребра, найдем длину каждого, воспользовавшись формулой длины вектора

$$|\,\overline{a}\,| = \sqrt{x_a^2 + y_a^2 + z_a^2}.$$

$$\left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{6^2 + 7^2 + 10^2} = \sqrt{36 + 49 + 100} = \sqrt{185} \text{ (ед.)}$$
$$\left|\overrightarrow{AC}\right| = \sqrt{10^2 + 5^2 + 2^2} = \sqrt{100 + 25 + 4} = \sqrt{129} \text{ (ед.)}$$
$$\left|\overrightarrow{BC}\right| = \sqrt{4^2 + (-2)^2 + (-8)^2} = \sqrt{16 + 4 + 64} = \sqrt{84} \text{ (ед.)}$$

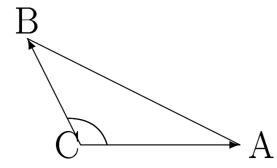
Из вычислений видно, что наименьшее ребро BC.

➢ б) Напомним, что наибольший угол в треугольнике лежит напротив наибольшей стороны. В треугольнике ABC наибольшая сторона AB, следовательно, напротив нее лежит наибольший угол $\angle ACB$. Найдем его по формуле:

$$\cos\alpha = \frac{\overline{a} \cdot \overline{b}}{|\,\overline{a}\,||\,\overline{b}\,|} = \frac{x_a x_b + y_a y_b + z_a z_b}{\sqrt{x_a^2 + y_a^2 + z_a^2}\sqrt{x_b^2 + y_b^2 + z_b^2}},$$

где $\overline{a}$, $\overline{b}$ - векторы, образующие угол α.
Угол $\angle ACB$ образуют два вектора

из вершины C: $\overrightarrow{CA}$ и $\overrightarrow{CB}$ (см. рисунок).



Тогда $\qquad \cos\angle ACB = \dfrac{\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}}{|\,\overrightarrow{CA}\,||\,\overrightarrow{CB}\,|}.$

Так как вектор $\overrightarrow{CA} = -\overrightarrow{AC}$, тогда $\overrightarrow{CA} = -(10;5;2) = (-10;-5;-2)$, аналогично $\overrightarrow{CB} = -\overrightarrow{BC}$, то есть $\overrightarrow{CB} = -(4;-2;-8) = (-4;2;8)$.

$$\cos\angle ACB = \frac{-10\,(-4) + (-5)\,2 + (-2)\,8}{\sqrt{(-10)^2 + (-5)^2 + (-2)^2}\sqrt{(-4)^2 + 2^2 + 8^2}} = \frac{40 - 10 - 16}{\sqrt{129}\cdot\sqrt{84}} =$$
$$= \frac{14}{\sqrt{129}\cdot 2\cdot\sqrt{21}} = \frac{7}{\sqrt{2709}} = \frac{7\cdot\sqrt{2709}}{2709}.$$

Откуда $\angle ACB = \arccos\dfrac{7\cdot\sqrt{2709}}{2709}$.

➢ в) Площадь треугольника находится из векторного произведения векторов по формуле
$$S_\Delta = \frac{1}{2}|\overline{a}\times\overline{b}|,$$
где $\overline{a}$, $\overline{b}$ - векторы, образующие треугольник.
Треугольник DBC образуют два вектора, например, из вершины B: $\overrightarrow{BC}$ и $\overrightarrow{BD}$. Тогда
$$S_{DBC} = \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{BC}\times\overrightarrow{BD}\right|.$$
Найдем координаты вектора $\overrightarrow{BD}$
$\overrightarrow{BD} = (x_D - x_B; y_D - y_B; z_D - z_B)$; $\;\overrightarrow{BD} = (4;-9;-6)$.
Вычислим векторное произведение векторов

$$\overrightarrow{BC}\times\overrightarrow{BD} = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ 4 & -2 & -8 \\ 4 & -9 & -6 \end{vmatrix} = \overline{i}\begin{vmatrix} -2 & -8 \\ -9 & -6 \end{vmatrix} - \overline{j}\begin{vmatrix} 4 & -8 \\ 4 & -6 \end{vmatrix} + \overline{k}\begin{vmatrix} 4 & -2 \\ 4 & -9 \end{vmatrix} =$$
$$= -60\overline{i} - 8\overline{j} - 28\overline{k};$$

$$\left|\overrightarrow{BC}\times\overrightarrow{BD}\right| = \sqrt{(-60)^2 + (-8)^2 + (-28)^2} = \sqrt{3600 + 64 + 784} = \sqrt{4448} =$$
$$= 4\sqrt{278};$$

$$S_{DBC} = \frac{1}{2}4\sqrt{278} = 2\sqrt{278} \text{ (кв. ед.).}$$

➢ г) Объем пирамиды находится из смешанного произведения векторов по формуле

$$V_{\text{пирамиды}} = \frac{1}{6}|\overline{a}\,\overline{b}\,\overline{c}|,$$

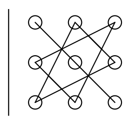
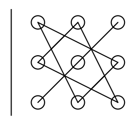
где $\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{c}$ - векторы, образующие пирамиду.

Пирамиду $ABCD$ образуют три вектора, например, из вершины A: $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AD}$.

Тогда

$$V_{ABCD} = \frac{1}{6}\left|\overrightarrow{AB}\,\overrightarrow{AC}\,\overrightarrow{AD}\right|.$$

Вычислим смешанное произведение векторов

$$\overrightarrow{AB}\,\overrightarrow{AC}\,\overrightarrow{AD} = \begin{vmatrix} 6 & 7 & 10 \\ 10 & 5 & 2 \\ 10 & -2 & 4 \end{vmatrix} =$$  $-$  $=$

$$= 120 - 200 + 140 - (500 - 24 + 280) = 60 - 756 = -694;$$

$$V_{ABCD} = \frac{1}{6}\cdot|-694| = \frac{1}{6}\cdot 694 = 173,5 \text{ (куб. ед.)}.$$

➢ д) Напомним, что

$$V_{\text{пирамиды}} = \frac{1}{3}S_{\text{осн}}\cdot h,$$

где h – высота пирамиды, опущенная на ее основание. Выберем в качестве основания пирамиды грань (DBC), тогда

$$V_{ABCD} = \frac{1}{3}S_{DBC}\cdot AM,$$

откуда

$$AM = \frac{3V_{ABCD}}{S_{DBC}}.$$

$$AM = \frac{3\cdot 173,5}{2\sqrt{278}} = \frac{520,5}{2\sqrt{278}} = \frac{\frac{1041}{2}}{2\sqrt{278}} = \frac{1041}{4\sqrt{278}} = \frac{1041\sqrt{278}}{1112} \text{ (ед.)}.$$

Ответ: а) $|\,BC\,| = \sqrt{84}$; б) $\angle ACB = \arccos\dfrac{7\cdot\sqrt{2709}}{2709}$;
в) $S_{DBC} = 2\sqrt{278}$ (кв. ед.); г) $V_{ABCD} = 173,5$ (куб. ед.);
д) $AM = \dfrac{1041\sqrt{278}}{1112}$ (ед.).

✍ **Пример 23.** Доказать, что векторы $\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{c}$ образуют базис. Найти координаты вектора $\overline{d}$ в этом базисе, если

$\overline{a} = (1; 2; 1), \qquad \overline{b} = (2; 0; 1), \qquad \overline{c} = (-1; 1; 1), \qquad \overline{d} = (7; -5; -4).$

Решение: Три вектора в пространстве образуют базис, если они некомпланарны (не лежат в одной плоскости), т. е. согласно критерию компланарности трех векторов, их смешанное произведение отлично от нуля.
Вычислим смешанное произведение векторов $\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{c}$

$$\overline{a}\,\overline{b}\,\overline{c} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -5 \neq 0.$$

Следовательно, $\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{c}$ - базис.
Обозначим через x, y, z координаты вектора $\overline{d}$ в базисе $\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{c}$, тогда

$$\overline{d} = x\overline{a} + y\overline{b} + z\overline{c}.$$

$$7\overline{i} - 5\overline{j} - 4\overline{k} = x(\overline{i} + 2\overline{j} + \overline{k}) + y(2\overline{i} + \overline{k}) + z(-\overline{i} + \overline{j} + \overline{k})$$

или

$$7\overline{i} - 5\overline{j} - 4\overline{k} = (x + 2y - z)\,\overline{i} + (2x + z)\,\overline{j} + (x + y + z)\,\overline{k}.$$

Равенство векторов в левой и правой частях возможно только в случае равенства соответствующих координат этих векторов. Отсюда получаем систему для нахождения x, y, z:

$$\begin{cases} x + 2y - z = 7, \\ 2x + z = -5, \\ x + y + z = -4 \end{cases}$$

Решая полученную систему линейных уравнений методом Крамера (см. стр.23), находим

$$\underline{x = 0}, \qquad \underline{y = 1}, \qquad \underline{z = -5}.$$

Таким образом, вектор $\overline{d}$ в базисе $\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{c}$ имеет новые координаты $\overline{d} = (0; 1; -5)$.

Ответ: векторы $\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{c}$ образуют базис; вектор $\overline{d}$ в базисе $\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{c}$ имеет координаты $\overline{d} = (0; 1; -5)$.

§ 7. Варианты индивидуальных заданий

Вариант 1

1.1. Даны матрицы A и B. Найти AB, BA, A^TB, B^TA^T, если

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 6 & 7 & 2 \\ -1 & 3 & 3 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 4 \\ -7 & 5 \end{pmatrix}$$

1.2. Найти значение выражения $P(A) = A^2 + 2A^T$, если $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

2.1. Вычислить определитель второго порядка $\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 9 & -2 \end{vmatrix}$

2.2. Вычислить определитель по правилу Сарруса (или по правилу треугольника), а также вычислить минор M_{23} и алгебраическое дополнение A_{11}.

$$\begin{vmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & -1 \\ 10 & 3 & 2 \end{vmatrix}$$

2.3. Вычислить определитель, разлагая его по элементам 1-ой строки и по элементам 3-его столбца. Результаты сравнить.

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 7 \\ 4 & -5 & 1 \\ 7 & 8 & -4 \end{vmatrix}$$

2.4. Вычислить определители, получив нули в какой-либо строке или столбце и, разложив по элементам этой строки или столбца

$$1)\begin{vmatrix} -1 & 2 & -2 \\ 3 & 3 & 5 \\ 9 & -9 & 1 \end{vmatrix}; \qquad 2)\begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 & 0 \\ 3 & 6 & -2 & 5 \\ 1 & 0 & 6 & 4 \\ 2 & 3 & 5 & -1 \end{vmatrix}$$

3.1. Решить уравнение $A \cdot X = B$, если $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 4 & -7 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$

3.2. Найти обратную матрицу и сделать проверку $\begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 \\ -1 & 3 & 1 \\ -3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

4.1. Найти ранг матрицы $\begin{pmatrix} 6 & 1 & -3 & 9 & 5 & 0 \\ 6 & 5 & -3 & 9 & 7 & 6 \\ 2 & 4 & -1 & 3 & 2 & 4 \\ 4 & 7 & -2 & 6 & 5 & 8 \end{pmatrix}$

5.1. Решить систему а) по формулам Крамера, б) матричным методом, в) методом Гаусса

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 12, \\ 7x_1 - 5x_2 + x_3 = -33, \\ 4x_1 + x_3 = -7 \end{cases}$$

5.2. Проверить совместность системы и в случае совместности решить ее методом Гаусса

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - 4x_3 = 8, \\ 2x_1 + 4x_2 - 5x_3 = 11, \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = 1 \end{cases}$$

5.3. Найти общее решение системы методом Гаусса

$$\begin{cases} x_1 - 3x_2 + 5x_3 + 4x_4 = 5, \\ 3x_1 - x_2 - x_3 = 1, \\ 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 3, \end{cases}$$

6.1. Даны три вектора $\overline{a} = 2\overline{i} - 3\overline{j} + \overline{k}, \overline{b} = \overline{i} + 4\overline{k}$ и $\overline{c} = 5\overline{i} + 2\overline{j} - 3\overline{k}$.

Вычислить:

а) скалярное произведение векторов $(\overline{b}, (-4\overline{c} + \overline{a})$;

б) векторное произведение векторов $3\overline{a}, 2\overline{c}$;

в) смешанное произведение векторов $\overline{a}, 3\overline{b}, \overline{c}$;

Проверить будут ли:

г) коллинеарны или перпендикулярны векторы $\overline{a}, \overline{c}$;

д) компланарны три вектора $\overline{a}, 2\overline{b}, 3\overline{c}$.

6.2. Даны точки $A(4, 6, 8), B(5, 5, 10), C(8, 6, 4), D(7, 10, 8)$ – вершины пирамиды.

Найти:

а) наименьшее ребро грани (ABC);

б) наибольший угол грани (ABC);

в) площадь грани (BCD);

г) объем пирамиды $ABCD$;

д) длину высоты AM пирамиды.

6.3. Доказать, что векторы $\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{c}$ образуют базис. Найти координаты вектора $\overline{d}$ в этом базисе, если $\overline{a} = (5; 3; 2)$, $\overline{b} = (2; -5; 1)$, $\overline{c} = (-7; 4; -3)$, $\overline{d} = (36; 1; 15)$.

Вариант 2

1.1. Даны матрицы A и B. Найти AB, BA, A^TB, B^TA^T, если

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 1 \\ -1 & 5 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 & 1 \\ 6 & 3 & -1 & 5 \end{pmatrix}$$

1.2. Найти значение выражения $P(A) = 2A^2 + A - A^T$, если $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

2.1. Вычислить определитель второго порядка $\begin{vmatrix} 3 & -5 \\ 4 & 6 \end{vmatrix}$

2.2. Вычислить определитель по правилу Сарруса (или по правилу треугольника), а также вычислить минор M_{21} и алгебраическое дополнение A_{13}.

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 5 & 0 & 7 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

2.3. Вычислить определитель, разлагая его по элементам 1-ой строки и по элементам 3-его столбца. Результаты сравнить.

$$\begin{vmatrix} -3 & 1 & 7 \\ 2 & -1 & 5 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

2.4. Вычислить определители, получив нули в какой-либо строке или столбце и, разложив по элементам этой строки или столбца

$$1) \begin{vmatrix} -5 & 4 & 1 \\ 7 & 0 & 1 \\ 3 & 4 & -1 \end{vmatrix}; \qquad 2) \begin{vmatrix} 1 & 3 & -4 & 0 \\ 2 & 7 & -2 & 5 \\ 7 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & -5 & 1 \end{vmatrix}$$

3.1. Решить уравнение $A \cdot X = B$, если $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 7 & -2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}$

3.2. Найти обратную матрицу и сделать проверку $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -6 & 5 & -2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

4.1. Найти ранг матрицы $\begin{pmatrix} 9 & 7 & 5 & 6 & 9 \\ 8 & 4 & 0 & 2 & 3 \\ 5 & 3 & 1 & 2 & 3 \\ 7 & 5 & 3 & 4 & 6 \end{pmatrix}$

5.1. Решить систему а) по формулам Крамера, б) матричным методом, в) методом Гаусса

$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 - x_3 = 6, \\ 5x_2 + 4x_3 = -20, \\ 3x_1 - 2x_2 + 5x_3 = -22 \end{cases}$$

5.2. Проверить совместность системы и в случае совместности решить ее методом Гаусса

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1, \\ x_1 - x_2 + 2x_3 = -5, \\ 2x_1 + 3x_3 = 2 \end{cases}$$

5.3. Найти общее решение системы методом Гаусса

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 2x_3 - 3x_4 = 5, \\ x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 = -2, \\ x_1 - 4x_2 + x_3 + x_4 = -2 \end{cases}$$

6.1. Даны три вектора $\overline{a} = 3\overline{i} + 4\overline{j} + \overline{k}, \overline{b} = \overline{i} - 2\overline{j} + 7\overline{k}$ и $\overline{c} = 3\overline{i} - 6\overline{j} + 21\overline{k}$.

Вычислить:

а) скалярное произведение векторов $(\overline{a} - 2\overline{b}), \overline{c}$;

б) векторное произведение векторов $4\overline{b}, 2\overline{c}$;

в) смешанное произведение векторов $5\overline{a}, 2\overline{b}, \overline{c}$;

Проверить будут ли:

г) коллинеарны или перпендикулярны векторы $\overline{b}, \overline{c}$;

д) компланарны три вектора $2\overline{a}, -3\overline{b}, \overline{c}$.

6.2. Даны точки $A(5, 6, 6), B(5, 9, 4), C(11, 6, 4), D(1, 9, 6)$ – вершины пирамиды.

Найти:

а) наименьшее ребро грани (BCD);

б) наибольший угол грани (BCD);

в) площадь грани (ABC);

г) объем пирамиды $ABCD$;

д) длину высоты DM пирамиды.

6.3. Доказать, что векторы $\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{c}$ образуют базис. Найти координаты вектора $\overline{d}$ в этом базисе, если $\overline{a} = (3; 5; 4)$, $\overline{b} = (-2; 7; -5)$, $\overline{c} = (6; -2; 1)$, $\overline{d} = (6; -9; 22)$.

Вариант 3

1.1. Даны матрицы A и B. Найти AB, BA, A^TB, B^TA^T, если

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 5 \\ 7 & 1 & 3 \\ -4 & 1 & 5 \\ 5 & 0 & -2 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 4 & 3 & -2 & 8 \\ 7 & 2 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$

1.2. Найти значение выражения $P(A) = A(A^T + 3A)$, если $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$

2.1. Вычислить определитель второго порядка $\begin{vmatrix} -1 & 7 \\ 9 & 0 \end{vmatrix}$

2.2. Вычислить определитель по правилу Сарруса (или по правилу треугольника), а также вычислить минор M_{22} и алгебраическое дополнение A_{31}.

$$\begin{vmatrix} 7 & 1 & -1 \\ 2 & 5 & 4 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

2.3. Вычислить определитель, разлагая его по элементам 1-ой строки и по элементам 3-его столбца. Результаты сравнить.

$$\begin{vmatrix} 10 & 11 & -2 \\ 5 & 1 & 1 \\ 6 & 0 & 3 \end{vmatrix}$$

2.4. Вычислить определители, получив нули в какой-либо строке или столбце и, разложив по элементам этой строки или столбца

$$1) \begin{vmatrix} 2 & 4 & 6 \\ -1 & 2 & 5 \\ 11 & -3 & 10 \end{vmatrix}; \qquad 2) \begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 & 6 \\ 3 & 7 & -2 & 5 \\ -2 & 0 & 5 & 1 \\ 2 & 7 & 0 & -3 \end{vmatrix}$$

3.1. Решить уравнение $A \cdot X = B$, если $A = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ -6 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 10 & 1 \\ 8 & 2 \end{pmatrix}$

3.2. Найти обратную матрицу и сделать проверку $\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -5 & 7 & 2 \\ 3 & -4 & -1 \end{pmatrix}$

4.1. Найти ранг матрицы $\begin{pmatrix} 1 & -4 & -4 & 1 & -3 & -3 \\ 1 & 7 & 6 & -2 & 6 & 2 \\ 9 & 8 & 4 & -3 & 9 & -7 \\ 7 & 5 & 2 & 2 & 6 & -6 \end{pmatrix}$

5.1. Решить систему а) по формулам Крамера, б) матричным методом, в) методом Гаусса

$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 21, \\ 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 9, \\ 2x_1 - x_2 - x_3 = 10 \end{cases}$$

5.2. Проверить совместность системы и в случае совместности решить ее методом Гаусса

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 4x_3 = 15, \\ 3x_1 - x_2 + x_3 = 8, \\ 5x_1 - 2x_2 + 5x_3 = 0 \end{cases}$$

5.3. Найти общее решение системы методом Гаусса

$$\begin{cases} 2x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 = 1, \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 1, \\ 4x_1 - 10x_2 + 5x_3 - 5x_4 = 1 \end{cases}$$

6.1. Даны три вектора $\overline{a} = 2\overline{i} - 4\overline{j} - 2\overline{k}, \overline{b} = 7\overline{i} + 3\overline{j}$ и $\overline{c} = 3\overline{i} + 5\overline{j} - 7\overline{k}$.

Вычислить:

а) скалярное произведение векторов $-2\overline{a}, (\overline{c} + \overline{b})$;

б) векторное произведение векторов $3\overline{a}, -7\overline{b}$;

в) смешанное произведение векторов $\overline{a}, 2\overline{b}, 3\overline{c}$;

Проверить будут ли:

г) коллинеарны или перпендикулярны векторы $\overline{a}, \overline{c}$;

д) компланарны три вектора $3\overline{a}, 2\overline{b}, 3\overline{c}$.

6.2. Даны точки $A(6, 6, 5), B(2, 8, 5), C(8, 9, 5), D(6, -2, -1)$ – вершины пирамиды.

Найти:

а) наименьшее ребро грани (ADB);

б) наибольший угол грани (ADB);

в) площадь грани (BCD);

г) объем пирамиды $ABCD$;

д) длину высоты AM пирамиды.

6.3. Доказать, что векторы $\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{c}$ образуют базис. Найти координаты вектора $\overline{d}$ в этом базисе, если $\overline{a} = (7; 2; 1)$, $\overline{b} = (5; 1; -2)$, $\overline{c} = (-3; 4; 5)$, $\overline{d} = (26; 11; 1)$.

Вариант 4

1.1. Даны матрицы A и B. Найти AB, BA, A^TB, B^TA^T, если

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 1 & 5 \\ 2 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 6 & 5 \\ -3 & 4 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 5 & 0 \end{pmatrix}$$

1.2. Найти значение выражения $P(A) = 4A^T - A^2$, если $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

2.1. Вычислить определитель второго порядка $\begin{vmatrix} -10 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}$

2.2. Вычислить определитель по правилу Сарруса (или по правилу треугольника), а также вычислить минор M_{13} и алгебраическое дополнение A_{21}.

$$\begin{vmatrix} 2 & -4 & 3 \\ 3 & -1 & 11 \\ 1 & 5 & -7 \end{vmatrix}$$

2.3. Вычислить определитель, разлагая его по элементам 1-ой строки и по элементам 3-его столбца. Результаты сравнить.

$$\begin{vmatrix} -3 & 5 & 1 \\ -6 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 9 \end{vmatrix}$$

2.4. Вычислить определители, получив нули в какой-либо строке или столбце и, разложив по элементам этой строки или столбца

$$1) \begin{vmatrix} 2 & -2 & 3 \\ 4 & 5 & -1 \\ -6 & 1 & 7 \end{vmatrix}; \qquad 2) \begin{vmatrix} -1 & 1 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & -2 & 5 \\ 1 & 3 & 6 & 4 \\ 2 & -1 & 5 & 1 \end{vmatrix}$$

3.1. Решить уравнение $A \cdot X = B$, если $A = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 7 & -2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 4 & -5 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$

3.2. Найти обратную матрицу и сделать проверку $\begin{pmatrix} 5 & -3 & -1 \\ -7 & 5 & 1 \\ -3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

4.1. Найти ранг матрицы $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 & 1 \\ -1 & 2 & -5 & -3 \\ 3 & -3 & 12 & 6 \\ 4 & 1 & 11 & 3 \\ -1 & 2 & -4 & -3 \\ -1 & 1 & -4 & -2 \end{pmatrix}$

5.1. Решить систему а) по формулам Крамера, б) матричным методом, в) методом Гаусса

$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + 5x_3 = 5, \\ 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 = 12, \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 = -1 \end{cases}$$

5.2. Проверить совместность системы и в случае совместности решить ее методом Гаусса

$$\begin{cases} 3x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 2, \\ 4x_1 - 5x_2 + 2x_3 = 1, \\ x_1 - 2x_2 = 5 \end{cases}$$

5.3. Найти общее решение системы методом Гаусса

$$\begin{cases} 5x_1 + 7x_2 + 4x_3 + 6x_4 = 2, \\ 9x_1 + 6x_2 + 5x_3 + 8x_4 = 9, \\ 6x_1 + 9x_2 + 3x_3 + 4x_4 = -1 \end{cases}$$

6.1. Даны три вектора $\overline{a} = -7\overline{i} + 2\overline{k}, \overline{b} = 2\overline{i} - 6\overline{j} + 4\overline{k}$ и $\overline{c} = \overline{i} - 3\overline{j} + 2\overline{k}$.

Вычислить:

а) скалярное произведение векторов $2\overline{a}, (-7\overline{c} + \overline{b})$;

б) векторное произведение векторов $4\overline{b}, 3\overline{c}$;

в) смешанное произведение векторов $\overline{a}, -2\overline{b}, -7\overline{c}$;

Проверить будут ли:

г) коллинеарны или перпендикулярны векторы $\overline{b}, \overline{c}$;

д) компланарны три вектора $2\overline{a}, 4\overline{b}, 3\overline{c}$.

6.2. Даны точки $A(5, 6, 4), B(4, 6, 6), C(10, 10, 2), D(7, 4, 5)$ – вершины пирамиды.

Найти:

а) наименьшее ребро грани (ADC);

б) наибольший угол грани (ADC);

в) площадь грани (ABC);

г) объем пирамиды $ABCD$;

д) длину высоты DM пирамиды.

6.3. Доказать, что векторы $\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{c}$ образуют базис. Найти координаты вектора $\overline{d}$ в этом базисе, если $\overline{a} = (1; 3; 6)$, $\overline{b} = (-3; 4; -5)$, $\overline{c} = (1; -7; 2)$, $\overline{d} = (-2; 17; 5)$.

Вариант 5

1.1. Даны матрицы A и B. Найти AB, BA, A^TB, B^TA^T, если

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 1 & 4 & -7 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 7 \\ 2 & 4 & 3 \\ 5 & 6 & -1 \end{pmatrix}$$

1.2. Найти значение выражения $P(A) = 3A^2 + A^T$, если $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$

2.1. Вычислить определитель второго порядка $\begin{vmatrix} -10 & 11 \\ 1 & 30 \end{vmatrix}$

2.2. Вычислить определитель по правилу Сарруса (или по правилу треугольника), а также вычислить минор M_{23} и алгебраическое дополнение A_{31}.

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 6 & 9 & 5 \\ 1 & 0 & 10 \end{vmatrix}$$

2.3. Вычислить определитель, разлагая его по элементам 1-ой строки и по элементам 3-его столбца. Результаты сравнить.

$$\begin{vmatrix} 0 & 4 & -3 \\ 2 & 7 & 8 \\ -1 & 1 & 5 \end{vmatrix}$$

2.4. Вычислить определители, получив нули в какой-либо строке или столбце и, разложив по элементам этой строки или столбца

$$1)\begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 4 & 5 & 1 \\ -1 & 2 & 7 \end{vmatrix}; \qquad 2)\begin{vmatrix} 0 & 3 & 4 & 1 \\ 2 & 7 & -2 & 5 \\ -7 & 0 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & -5 & 1 \end{vmatrix}$$

3.1. Решить уравнение $A \cdot X = B$, если $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 8 & -5 \end{pmatrix}$

3.2. Найти обратную матрицу и сделать проверку $\begin{pmatrix} -1 & -1 & -3 \\ 5 & 4 & 2 \\ -4 & -3 & -3 \end{pmatrix}$

4.1. Найти ранг матрицы $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -2 & 1 \\ 3 & 6 & 5 & -4 & 3 \\ 1 & 2 & 7 & -4 & 1 \\ 2 & 4 & 2 & -3 & 3 \end{pmatrix}$

5.1. Решить систему а) по формулам Крамера, б) матричным методом, в) методом Гаусса

$$\begin{cases} 4x_1 + x_2 + 4x_3 = 19, \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 11, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 8 \end{cases}$$

5.2. Проверить совместность системы и в случае совместности решить ее методом Гаусса

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - 4x_3 = 8, \\ 2x_1 + 4x_2 - 5x_3 = 1, \\ 5x_1 + 6x_2 - 9x_3 = 2 \end{cases}$$

5.3. Найти общее решение системы методом Гаусса

$$\begin{cases} 5x_2 - x_3 + 5x_4 = -4, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 4, \\ x_1 + x_2 + 3x_4 = 1 \end{cases}$$

6.1. Даны три вектора $\overline{a} = -4\overline{i} + 2\overline{j} - \overline{k}, \overline{b} = 3\overline{i} + 5\overline{j} - 2\overline{k}$ и $\overline{c} = \overline{j} + 5\overline{k}$.

Вычислить:

а) скалярное произведение векторов $(\overline{a} + \overline{b}), -4\overline{c}$;

б) векторное произведение векторов $2\overline{b}, \overline{a}$;

в) смешанное произведение векторов $\overline{a}, 6\overline{b}, 3\overline{c}$;

Проверить будут ли:

г) коллинеарны или перпендикулярны векторы $\overline{b}, \overline{a}$;

д) компланарны три вектора $\overline{a}, -3\overline{b}, \overline{c}$.

6.2. Даны точки $A(5, 2, 4), B(2, 6, 0), C(7, 2, 1), D(3, 0, 3)$ – вершины пирамиды.

Найти:

а) наименьшее ребро грани (ABC);

б) наибольший угол грани (ABC);

в) площадь грани (DBC);

г) объем пирамиды $ABCD$;

д) длину высоты AM пирамиды.

6.3. Доказать, что векторы $\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{c}$ образуют базис. Найти координаты вектора $\overline{d}$ в этом базисе, если $\overline{a} = (-2; 1; 3)$, $\overline{b} = (3; -6; 2)$, $\overline{c} = (-5; -3; -1)$, $\overline{d} = (31; -6; 22)$.

Вариант 6

1.1. Даны матрицы A и B. Найти AB, BA, A^TB, B^TA^T, если

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 1 \\ -1 & -3 & 3 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 2 & 0 \\ 1 & 11 & 1 & 2 \\ 7 & 5 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$

1.2. Найти значение выражения $P(A) = A^2 + 2A - A^T$, если $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

2.1. Вычислить определитель второго порядка $\begin{vmatrix} 12 & 7 \\ 3 & -2 \end{vmatrix}$

2.2. Вычислить определитель по правилу Сарруса (или по правилу треугольника), а также вычислить минор M_{31} и алгебраическое дополнение A_{22}.

$$\begin{vmatrix} -2 & 3 & 1 \\ 6 & 4 & 10 \\ -1 & 7 & 9 \end{vmatrix}$$

2.3. Вычислить определитель, разлагая его по элементам 1-ой строки и по элементам 3-его столбца. Результаты сравнить.

$$\begin{vmatrix} 7 & 9 & 1 \\ 3 & 4 & -2 \\ 1 & 0 & 5 \end{vmatrix}$$

2.4. Вычислить определители, получив нули в какой-либо строке или столбце и, разложив по элементам этой строки или столбца

$$1)\begin{vmatrix} -2 & 10 & 11 \\ -4 & 1 & 5 \\ 1 & 0 & -6 \end{vmatrix}; \qquad 2)\begin{vmatrix} 4 & -3 & 1 & 5 \\ 0 & 7 & -2 & 5 \\ 2 & 0 & 5 & -2 \\ 6 & 7 & 0 & 3 \end{vmatrix}$$

3.1. Решить уравнение $A \cdot X = B$, если $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 5 & -3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 7 & -2 \end{pmatrix}$

3.2. Найти обратную матрицу и сделать проверку $\begin{pmatrix} -10 & -9 & -7 \\ 7 & 6 & 5 \\ -6 & -5 & -4 \end{pmatrix}$

4.1. Найти ранг матрицы $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 2 & 3 \\ 7 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 4 & 6 \end{pmatrix}$

5.1. Решить систему а) по формулам Крамера, б) матричным методом, в) методом Гаусса

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 0, \\ 4x_1 + x_2 + 4x_3 = 6, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 4 \end{cases}$$

5.2. Проверить совместность системы и в случае совместности решить ее методом Гаусса

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 + 2x_3 = -3, \\ 2x_1 + 2x_2 + 5x_3 = 5, \\ 5x_1 + 32x_2 + 7x_3 = 1 \end{cases}$$

5.3. Найти общее решение системы методом Гаусса

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 4, \\ 2x_1 + 2x_2 + 4x_3 - x_4 = 6, \\ 3x_1 + 3x_2 + 5x_3 - 2x_4 = 6 \end{cases}$$

6.1. Даны три вектора $\overline{a} = 3\overline{i} - 2\overline{j} + \overline{k}, \overline{b} = 2\overline{j} - 3\overline{k}$ и $\overline{c} = -3\overline{i} + 2\overline{j} - \overline{k}$.

Вычислить:

а) скалярное произведение векторов $-2\overline{a}, (4\overline{b} - \overline{c})$;

б) векторное произведение векторов $5\overline{b}, 3\overline{c}$;

в) смешанное произведение векторов $\overline{a}, -3\overline{b}, 2\overline{c}$;

Проверить будут ли:

г) коллинеарны или перпендикулярны векторы $\overline{a}, \overline{c}$;

д) компланарны три вектора $5\overline{a}, 4\overline{b}, 3\overline{c}$.

6.2. Даны точки $A(2,1,-1), B(1,-2,3), C(1,-2,-3), D(5,-2,1)$ – вершины пирамиды.

Найти:

а) наименьшее ребро грани (DBC);

б) наибольший угол грани (DBC);

в) площадь грани (ABC);

г) объем пирамиды $ABCD$;

д) длину высоты DM пирамиды.

6.3. Доказать, что векторы $\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{c}$ образуют базис. Найти координаты вектора $\overline{d}$ в этом базисе, если $\overline{a} = (4;2;3)$, $\overline{b} = (-3;1;-8)$, $\overline{c} = (2;-4;5)$, $\overline{d} = (-12;14;-31)$.

Вариант 7

1.1. Даны матрицы A и B. Найти AB, BA, A^TB, B^TA^T, если

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 0 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

1.2. Найти значение выражения $P(A) = A^T + A^2 - 2E$, если $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$

2.1. Вычислить определитель второго порядка $\begin{vmatrix} -9 & 13 \\ 1 & -5 \end{vmatrix}$

2.2. Вычислить определитель по правилу Сарруса (или по правилу треугольника), а также вычислить минор M_{11} и алгебраическое дополнение A_{23}.

$$\begin{vmatrix} 2 & -2 & 3 \\ 9 & 1 & 7 \\ 6 & 0 & 5 \end{vmatrix}$$

2.3. Вычислить определитель, разлагая его по элементам 1-ой строки и по элементам 3-его столбца. Результаты сравнить.

$$\begin{vmatrix} -1 & 5 & 9 \\ 7 & 3 & 1 \\ 4 & 2 & -1 \end{vmatrix}$$

2.4. Вычислить определители, получив нули в какой-либо строке или столбце и, разложив по элементам этой строки или столбца

$$1) \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & 3 & 2 \end{vmatrix}; \qquad 2) \begin{vmatrix} 2 & 0 & -1 & 3 \\ 6 & 3 & -9 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 3 \\ 4 & 2 & 0 & 6 \end{vmatrix}$$

3.1. Решить уравнение $A \cdot X = B$, если $A = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 7 & 1 \\ -5 & -2 \end{pmatrix}$

3.2. Найти обратную матрицу и сделать проверку $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

4.1. Найти ранг матрицы $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 & 0 & -1 & -2 \\ 1 & -1 & 2 & -1 & 0 & 1 \\ 4 & -2 & 6 & 3 & -4 & 7 \\ 2 & -4 & -2 & 4 & -7 & 1 \end{pmatrix}$

5.1. Решить систему а) по формулам Крамера, б) матричным методом, в) методом Гаусса

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 8, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 11, \\ 4x_1 + x_2 + 4x_3 = 22 \end{cases}$$

5.2. Проверить совместность системы и в случае совместности решить ее методом Гаусса

$$\begin{cases} 4x_1 - 7x_2 - 2x_3 = 0, \\ 2x_1 - 3x_2 - 4x_3 = 6, \\ 2x_1 - 4x_2 + 2x_3 = 2 \end{cases}$$

5.3. Найти общее решение системы методом Гаусса

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 - 3x_4 = 3, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 2, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 4 \end{cases}$$

6.1. Даны три вектора $\overline{a} = 4\overline{i} - \overline{j} + 3\overline{k}, \overline{b} = 2\overline{i} + 3\overline{j} - 5\overline{k}$ и $\overline{c} = 7\overline{i} + 2\overline{j} + 4\overline{k}$.

Вычислить:

а) скалярное произведение векторов $(2\overline{b} - \overline{b}), 4\overline{c}$;

б) векторное произведение векторов $3\overline{a}, 5\overline{c}$;

в) смешанное произведение векторов $7\overline{a}, -4\overline{b}, 2\overline{c}$;

Проверить будут ли:

г) коллинеарны или перпендикулярны векторы $\overline{b}, \overline{c}$;

д) компланарны три вектора $7\overline{a}, 2\overline{b}, 5\overline{c}$.

6.2. Даны точки $A(2, -1, 3), B(-5, 1, 1), C(0, 3, -4), D(-1, -3, 4)$ – вершины пирамиды.

Найти:

а) наименьшее ребро грани (ADB);

б) наибольший угол грани (ADB);

в) площадь грани (ABC);

г) объем пирамиды $ABCD$;

д) длину высоты DM пирамиды.

6.3. Доказать, что векторы $\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{c}$ образуют базис. Найти координаты вектора $\overline{d}$ в этом базисе, если $\overline{a} = (6; 1; -3)$, $\overline{b} = (-3; 2; 1)$, $\overline{c} = (-1; -3; 4)$, $\overline{d} = (15; 6; -17)$.

Вариант 8

1.1. Даны матрицы A и B. Найти AB, BA, A^TB, B^TA^T, если

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 2 & 3 & 4 \\ -3 & 5 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 1 \\ 4 & 3 \\ 6 & 0 \end{pmatrix}$$

1.2. Найти значение выражения $P(A) = 5A^T - A^2$, если $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

2.1. Вычислить определитель второго порядка $\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 14 & -9 \end{vmatrix}$

2.2. Вычислить определитель по правилу Сарруса (или по правилу треугольника), а также вычислить минор M_{21} и алгебраическое дополнение A_{32}.

$$\begin{vmatrix} 11 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & -1 \\ 3 & -6 & -1 \end{vmatrix}$$

2.3. Вычислить определитель, разлагая его по элементам 1-ой строки и по элементам 3-его столбца. Результаты сравнить.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 4 & 5 \\ 1 & 4 & 9 \end{vmatrix}$$

2.4. Вычислить определители, получив нули в какой-либо строке или столбце и, разложив по элементам этой строки или столбца

$$1) \begin{vmatrix} 1 & 6 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \\ 7 & -1 & 1 \end{vmatrix}; \qquad 2) \begin{vmatrix} 4 & -5 & -1 & -5 \\ -3 & 2 & 8 & -2 \\ 5 & 3 & 1 & 3 \\ -2 & 4 & -6 & 8 \end{vmatrix}$$

3.1. Решить уравнение $A \cdot X = B$, если $A = \begin{pmatrix} -9 & 5 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -3 & 8 \\ -2 & 6 \end{pmatrix}$

3.2. Найти обратную матрицу и сделать проверку $\begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ -3 & -1 & 2 \\ -2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

4.1. Найти ранг матрицы $\begin{pmatrix} 5 & 6 & 1 & 10 & 7 \\ 5 & 1 & 2 & 5 & 4 \\ 4 & 3 & 1 & 7 & 5 \\ 3 & 2 & 1 & 4 & 3 \\ 8 & 6 & 2 & 14 & 10 \end{pmatrix}$

5.1. Решить систему а) по формулам Крамера, б) матричным методом, в) методом Гаусса

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 - 3x_3 = -9, \\ x_1 + 5x_2 + x_3 = 20, \\ 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 15 \end{cases}$$

5.2. Проверить совместность системы и в случае совместности решить ее методом Гаусса

$$\begin{cases} 5x_1 - 9x_2 - 4x_3 = 6, \\ x_1 - 7x_2 - 5x_3 = 1, \\ 4x_1 - 2x_2 + x_3 = 2 \end{cases}$$

5.3. Найти общее решение системы методом Гаусса

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 - x_3 - x_4 = 1, \\ x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 0, \\ 3x_1 + 3x_2 - 3x_3 - 3x_4 = 2 \end{cases}$$

6.1. Даны три вектора $\overline{a} = 4\overline{i} + 2\overline{j} - 3\overline{k}, \overline{b} = 2\overline{i} + \overline{k}$ и $\overline{c} = -12\overline{i} - 6\overline{j} + 9\overline{k}$.

Вычислить:

а) скалярное произведение векторов $(\overline{b} + 2\overline{a}), -4\overline{c}$;

б) векторное произведение векторов $4\overline{a}, 3\overline{b}$;

в) смешанное произведение векторов $2\overline{a}, 3\overline{b}, \overline{c}$;

Проверить будут ли:

г) коллинеарны или перпендикулярны векторы $\overline{a}, \overline{c}$;

д) компланарны три вектора $2\overline{a}, 3\overline{b}, -4\overline{c}$.

6.2. Даны точки $A(5,3,2), B(1,-8,8), C(4,-1,2), D(1,4,-1)$ – вершины пирамиды.

Найти:

а) наименьшее ребро грани (ADC);

б) наибольший угол грани (ADC);

в) площадь грани (ABD);

г) объем пирамиды $ABCD$;

д) длину высоты CM пирамиды.

6.3. Доказать, что векторы $\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{c}$ образуют базис. Найти координаты вектора $\overline{d}$ в этом базисе, если $\overline{a} = (3;1;-3)$, $\overline{b} = (-2;4;1)$, $\overline{c} = (-1;-2;5)$, $\overline{d} = (1;12;-20)$.

Вариант 9

1.1. Даны матрицы A и B. Найти AB, BA, A^TB, B^TA^T, если

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ -2 & -4 & 5 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 4 \\ 0 & -5 \end{pmatrix}$$

1.2. Найти значение выражения $P(A) = A^2 + 2A^T - 3E$, если $A = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$

2.1. Вычислить определитель второго порядка $\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 4 & -2 \end{vmatrix}$

2.2. Вычислить определитель по правилу Сарруса (или по правилу треугольника), а также вычислить минор M_{13} и алгебраическое дополнение A_{21}.

$$\begin{vmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & -1 \\ 1 & -3 & 2 \end{vmatrix}$$

2.3. Вычислить определитель, разлагая его по элементам 1-ой строки и по элементам 3-его столбца. Результаты сравнить.

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 7 \\ 4 & 5 & 1 \\ -2 & 2 & -4 \end{vmatrix}$$

2.4. Вычислить определители, получив нули в какой-либо строке или столбце и, разложив по элементам этой строки или столбца

$$1) \begin{vmatrix} -1 & 2 & -2 \\ 3 & -3 & 5 \\ 9 & -9 & 1 \end{vmatrix}; \qquad 2) \begin{vmatrix} 3 & 5 & 3 & 2 \\ 2 & 4 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 2 & 1 \\ 5 & 1 & -2 & 4 \end{vmatrix}$$

3.1. Решить уравнение $A \cdot X = B$, если $A = \begin{pmatrix} 6 & 10 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 4 & -6 \\ 1 & -5 \end{pmatrix}$

3.2. Найти обратную матрицу и сделать проверку $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ -4 & 3 & 6 \\ 2 & -1 & -5 \end{pmatrix}$

4.1. Найти ранг матрицы $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 6 & 1 & 9 \\ 0 & 1 & 2 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & 2 & 4 & 3 \\ 3 & 2 & 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$

5.1. Решить систему а) по формулам Крамера, б) матричным методом, в) методом Гаусса

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 7, \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 1, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 6 \end{cases}$$

5.2. Проверить совместность системы и в случае совместности решить ее методом Гаусса

$$\begin{cases} x_1 - 5x_2 + x_3 = 3, \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 = 7, \\ 4x_1 - 3x_2 = 1 \end{cases}$$

5.3. Найти общее решение системы методом Гаусса

$$\begin{cases} 13x_1 - 4x_2 - x_3 - 4x_4 = 8, \\ 11x_1 - 2x_2 + x_3 - 2x_4 = 7, \\ 5x_1 + 4x_2 + 7x_3 + 4x_4 = 4 \end{cases}$$

6.1. Даны три вектора $\overline{a} = -\overline{i} + 5\overline{k}, \overline{b} = -3\overline{i} + 2\overline{j} + 2\overline{k}$ и $\overline{c} = -2\overline{i} - 4\overline{j} + \overline{k}$.

Вычислить:

а) скалярное произведение векторов $2\overline{b}, (3\overline{a} - \overline{c})$;

б) векторное произведение векторов $7\overline{a}, -3\overline{c}$;

в) смешанное произведение векторов $3\overline{a}, -4\overline{b}, 2\overline{c}$;

Проверить будут ли:

г) коллинеарны или перпендикулярны векторы $\overline{b}, \overline{c}$;

д) компланарны три вектора $7\overline{a}, 2\overline{b}, -3\overline{c}$.

6.2. Даны точки $A(-2, 3, 4), B(4, 2, -1), C(2, -1, 4), D(-1, -1, 1)$ – вершины пирамиды.

Найти:

а) наименьшее ребро грани (ABC);

б) наибольший угол грани (ABC);

в) площадь грани (BCD);

г) объем пирамиды $ABCD$;

д) длину высоты AM пирамиды.

6.3. Доказать, что векторы $\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{c}$ образуют базис. Найти координаты вектора $\overline{d}$ в этом базисе, если $\overline{a} = (5; 3; 1)$, $\overline{b} = (-1; 2; -3)$, $\overline{c} = (3; -4; 2)$, $\overline{d} = (-9; 34; -20)$.

Вариант 10

1.1. Даны матрицы A и B. Найти AB, BA, A^TB, B^TA^T, если

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 6 & -5 & 4 & 1 \\ -4 & 3 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

1.2. Найти значение выражения $P(A) = A^2 - 3A^T + 5E$, если $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -5 & 5 \end{pmatrix}$

2.1. Вычислить определитель второго порядка $\begin{vmatrix} 9 & 7 \\ -1 & 3 \end{vmatrix}$

2.2. Вычислить определитель по правилу Сарруса (или по правилу треугольника), а также вычислить минор M_{33} и алгебраическое дополнение A_{21}.

$$\begin{vmatrix} 1 & 10 & 3 \\ 11 & 9 & 4 \\ -1 & 2 & 5 \end{vmatrix}$$

2.3. Вычислить определитель, разлагая его по элементам 1-ой строки и по элементам 3-его столбца. Результаты сравнить.

$$\begin{vmatrix} -7 & 1 & 1 \\ 8 & 4 & 6 \\ 9 & 5 & 1 \end{vmatrix}$$

2.4. Вычислить определители, получив нули в какой-либо строке или столбце и, разложив по элементам этой строки или столбца

$$1) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 1 & 2 & 1 \\ 4 & -5 & 5 \end{vmatrix}; \qquad 2) \begin{vmatrix} 0 & 4 & 1 & 1 \\ -4 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & -2 \\ 1 & 3 & 4 & -3 \end{vmatrix}$$

3.1. Решить уравнение $A \cdot X = B$, если $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & -4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & 9 \\ -8 & -3 \end{pmatrix}$

3.2. Найти обратную матрицу и сделать проверку $\begin{pmatrix} 0 & -1 & 3 \\ -2 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix}$

4.1. Найти ранг матрицы $\begin{pmatrix} 15 & 3 & 3 & 9 \\ 2 & 20 & 6 & 4 \\ 4 & 5 & 2 & 3 \\ -3 & -2 & -1 & -2 \\ 9 & 6 & 3 & 6 \end{pmatrix}$

5.1. Решить систему а) по формулам Крамера, б) матричным методом, в) методом Гаусса

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 3, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = -4, \\ 4x_1 + x_2 + 4x_3 = -3 \end{cases}$$

5.2. Проверить совместность системы и в случае совместности решить ее методом Гаусса

$$\begin{cases} 5x_1 - 5x_2 - 4x_3 = -3, \\ x_1 - x_2 + 5x_3 = 1, \\ 4x_1 - 4x_2 - 9x_3 = 0 \end{cases}$$

5.3. Найти общее решение системы методом Гаусса

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 = 0, \\ 2x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = 1, \\ 3x_1 - 2x_2 - x_3 + x_4 = -1 \end{cases}$$

6.1. Даны три вектора $\overline{a} = 6\overline{i} - 4\overline{j} + 6\overline{k}, \overline{b} = 9\overline{i} - 6\overline{j} + 9\overline{k}$ и $\overline{c} = \overline{i} - 8\overline{k}$.

Вычислить:

а) скалярное произведение векторов $(3\overline{a} + \overline{b}), -5\overline{c}$;

б) векторное произведение векторов $3\overline{b}, -9\overline{c}$;

в) смешанное произведение векторов $2\overline{a}, -4\overline{b}, 3\overline{c}$;

Проверить будут ли:

г) коллинеарны или перпендикулярны векторы $\overline{b}, \overline{a}$;

д) компланарны три вектора $3\overline{a}, -4\overline{b}, -9\overline{c}$.

6.2. Даны точки $A(4, -4, 0), B(-5, 3, 2), C(8, 0, 1), D(2, 2, 3)$ – вершины пирамиды.

Найти:

а) наименьшее ребро грани (DBC);

б) наибольший угол грани (DBC);

в) площадь грани (ABC);

г) объем пирамиды $ABCD$;

д) длину высоты DM пирамиды.

6.3. Доказать, что векторы $\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{c}$ образуют базис. Найти координаты вектора $\overline{d}$ в этом базисе, если $\overline{a} = (3; -1; 2)$, $\overline{b} = (-2; 3; 1)$, $\overline{c} = (4; -5; -3)$, $\overline{d} = (-3; 2; -3)$.

Вариант 11

1.1. Даны матрицы A и B. Найти AB, BA, A^TB, B^TA^T, если

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 5 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

1.2. Найти значение выражения $P(A) = A^T + 3A^2 - 2A$, если $A = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

2.1. Вычислить определитель второго порядка $\begin{vmatrix} 5 & -13 \\ 4 & 9 \end{vmatrix}$

2.2. Вычислить определитель по правилу Сарруса (или по правилу треугольника), а также вычислить минор M_{31} и алгебраическое дополнение A_{22}.

$$\begin{vmatrix} -1 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \\ 6 & 9 & 11 \end{vmatrix}$$

2.3. Вычислить определитель, разлагая его по элементам 1-ой строки и по элементам 3-его столбца. Результаты сравнить.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 3 & 4 & 5 \\ 1 & 4 & 9 \end{vmatrix}$$

2.4. Вычислить определители, получив нули в какой-либо строке или столбце и, разложив по элементам этой строки или столбца

$$1)\begin{vmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 3 & 5 & -1 \\ 1 & -1 & 7 \end{vmatrix} \qquad 2)\begin{vmatrix} 2 & 2 & 0 & 5 \\ 0 & 8 & -2 & 5 \\ 2 & 0 & -3 & -2 \\ 6 & 1 & 0 & 3 \end{vmatrix}$$

3.1. Решить уравнение $A \cdot X = B$, если $A = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 5 & -3 \end{pmatrix}$

3.2. Найти обратную матрицу и сделать проверку $\begin{pmatrix} 4 & 3 & 1 \\ -1 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & -3 \end{pmatrix}$

4.1. Найти ранг матрицы $\begin{pmatrix} 5 & -1 & 5 & 3 & -4 \\ -1 & 1 & 1 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & 3 & 2 & 1 \\ 3 & -2 & 1 & 0 & -7 \end{pmatrix}$

5.1. Решить систему а) по формулам Крамера, б) матричным методом, в) методом Гаусса

$$\begin{cases} x_1 + 5x_2 - 6x_3 = -12, \\ 3x_1 + x_2 + 4x_3 = 10, \\ 2x_1 + 3x_2 - 3x_3 = 5 \end{cases}$$

5.2. Проверить совместность системы и в случае совместности решить ее методом Гаусса

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 - 3x_3 = 3, \\ x_1 + 3x_2 - 5x_3 = 0, \\ 2x_1 + x_2 - 8x_3 = 4 \end{cases}$$

5.3. Найти общее решение системы методом Гаусса

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 4, \\ 3x_1 + 6x_2 + 5x_3 - 4x_4 = 5, \\ x_1 + 2x_2 + 7x_3 - 4x_4 = 11 \end{cases}$$

6.1. Даны три вектора $\overline{a} = 2\overline{i} - 7\overline{j} + 5\overline{k}, \overline{b} = -\overline{i} + 2\overline{j} - 6\overline{k}$ и $\overline{c} = 3\overline{i} + 2\overline{j} - 4\overline{k}$.

Вычислить:

а) скалярное произведение векторов $(3\overline{a} + \overline{c}), -4\overline{b}$;

б) векторное произведение векторов $5\overline{b}, 3\overline{c}$;

в) смешанное произведение векторов $-3\overline{a}, 6\overline{b}, -\overline{c}$;

Проверить будут ли:

г) коллинеарны или перпендикулярны векторы $\overline{b}, \overline{c}$;

д) компланарны три вектора $7\overline{a}, -4\overline{b}, 3\overline{c}$.

6.2. Даны точки $A(-5,-3,-4), B(1,4,6), C(3,2,-2), D(8,-2,4)$ – вершины пирамиды.

Найти:

а) наименьшее ребро грани (DBC);

б) наибольший угол грани (DBC);

в) площадь грани (ADC);

г) объем пирамиды $ABCD$;

д) длину высоты BM пирамиды.

6.3. Доказать, что векторы $\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{c}$ образуют базис. Найти координаты вектора $\overline{d}$ в этом базисе, если $\overline{a} = (9;5;3)$, $\overline{b} = (-3;2;1)$, $\overline{c} = (4;-7;4)$, $\overline{d} = (-10;-13;8)$.

Вариант 12

1.1. Даны матрицы A и B. Найти AB, BA, A^TB, B^TA^T, если

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 5 \\ -1 & 4 & 0 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -3 \\ 2 & -4 & 1 \\ -3 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

1.2. Найти значение выражения $P(A) = 4A^2 + 7A^T - E$, если $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}$

2.1. Вычислить определитель второго порядка $\begin{vmatrix} -3 & 1 \\ 2 & -9 \end{vmatrix}$

2.2. Вычислить определитель по правилу Сарруса (или по правилу треугольника), а также вычислить минор M_{12} и алгебраическое дополнение A_{23}.

$$\begin{vmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 1 & -1 & 3 \\ 8 & 3 & 2 \end{vmatrix}$$

2.3. Вычислить определитель, разлагая его по элементам 1-ой строки и по элементам 3-его столбца. Результаты сравнить.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & -2 \end{vmatrix}$$

2.4. Вычислить определители, получив нули в какой-либо строке или столбце и, разложив по элементам этой строки или столбца

$$1) \begin{vmatrix} 1 & 2 & 8 \\ 3 & 2 & 10 \\ 4 & 3 & 4 \end{vmatrix}; \qquad 2) \begin{vmatrix} 4 & 2 & -1 & 1 \\ -4 & 3 & 5 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 3 & -5 \end{vmatrix}$$

3.1. Решить уравнение $A \cdot X = B$, если $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 8 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 10 & -2 \\ -6 & 1 \end{pmatrix}$

3.2. Найти обратную матрицу и сделать проверку $\begin{pmatrix} 3 & 1 & -4 \\ -2 & -2 & 1 \\ 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$

4.1. Найти ранг матрицы $\begin{pmatrix} 5 & 7 & 4 & 6 & 6 \\ 15 & 30 & 7 & 8 & 3 \\ 9 & 6 & 5 & 8 & 9 \\ 6 & 9 & 3 & 4 & 3 \\ 15 & 15 & 8 & 12 & 12 \end{pmatrix}$

5.1. Решить систему а) по формулам Крамера, б) матричным методом, в) методом Гаусса

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + 5x_3 = -14, \\ 4x_1 - x_2 = -6, \\ x_1 - 3x_2 + 4x_3 = -19 \end{cases}$$

5.2. Проверить совместность системы и в случае совместности решить ее методом Гаусса

$$\begin{cases} x_1 - 4x_2 - 2x_3 = 0, \\ 3x_1 - 5x_2 - 6x_3 = 2, \\ 4x_1 - 9x_2 - 8x_3 = 1 \end{cases}$$

5.3. Найти общее решение системы методом Гаусса

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 + 4x_4 = -1, \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 + x_4 = 1, \\ 5x_1 - 5x_2 + 12x_3 + 11x_4 = -4 \end{cases}$$

6.1. Даны три вектора $\overline{a} = 7\overline{i} - 4\overline{j} - 5\overline{k}, \overline{b} = \overline{i} - 11\overline{j} + 3\overline{k}$ и $\overline{c} = 5\overline{i} + 5\overline{j} + 3\overline{k}$.

Вычислить:

а) скалярное произведение векторов $-4\overline{a}, (-5\overline{c} + \overline{b})$;

б) векторное произведение векторов $2\overline{b}, 6\overline{c}$;

в) смешанное произведение векторов $3\overline{a}, -7\overline{b}, 2\overline{c}$;

Проверить будут ли:

г) коллинеарны или перпендикулярны векторы $\overline{a}, \overline{c}$;

д) компланарны три вектора $-4\overline{a}, 2\overline{b}, 6\overline{c}$.

6.2. Даны точки $A(3, 4, 2), B(-2, 3, -5), C(4, -3, 6), D(6, -5, 3)$ – вершины пирамиды.

Найти:

а) наименьшее ребро грани (ADC);

б) наибольший угол грани (ADC);

в) площадь грани (ABC);

г) объем пирамиды $ABCD$;

д) длину высоты DM пирамиды.

6.3. Доказать, что векторы $\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{c}$ образуют базис. Найти координаты вектора $\overline{d}$ в этом базисе, если $\overline{a} = (7; 2; 1)$, $\overline{b} = (3; -5; 6)$, $\overline{c} = (-4; 3; -4)$, $\overline{d} = (-1; 18; -16)$.

Вариант 13

1.1. Даны матрицы A и B. Найти AB, BA, A^TB, B^TA^T, если

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -2 \\ 2 & 1 \\ 6 & -3 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 4 & -3 \\ 5 & -3 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

1.2. Найти значение выражения $P(A) = 8A^2 - 5A + 3E$, если $A = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$

2.1. Вычислить определитель второго порядка $\begin{vmatrix} 4 & 8 \\ -2 & 3 \end{vmatrix}$

2.2. Вычислить определитель по правилу Сарруса (или по правилу треугольника), а также вычислить минор M_{21} и алгебраическое дополнение A_{13}.

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 1 & -5 & -8 \\ 4 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

2.3. Вычислить определитель, разлагая его по элементам 1-ой строки и по элементам 3-его столбца. Результаты сравнить.

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 5 \\ 1 & 3 & 16 \\ 0 & -1 & 10 \end{vmatrix}$$

2.4. Вычислить определители, получив нули в какой-либо строке или столбце и, разложив по элементам этой строки или столбца

$$1) \begin{vmatrix} 3 & -3 & 4 \\ 1 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & -5 \end{vmatrix}; \qquad 2) \begin{vmatrix} 4 & 2 & -1 & 1 \\ -4 & 3 & 5 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 3 & -5 \end{vmatrix}$$

3.1. Решить уравнение $A \cdot X = B$, если $A = \begin{pmatrix} 6 & -5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -5 & -4 \end{pmatrix}$

3.2. Найти обратную матрицу и сделать проверку $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

4.1. Найти ранг матрицы $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 3 & -2 & -4 & -3 \\ 2 & 1 & 1 & 4 \\ -3 & -1 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$

5.1. Решить систему а) по формулам Крамера, б) матричным методом, в) методом Гаусса

$$\begin{cases} x_1 + 3x_3 = -6, \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 = 9, \\ 5x_1 + 2x_2 - 4x_3 = -16 \end{cases}$$

5.2. Проверить совместность системы и в случае совместности решить ее методом Гаусса

$$\begin{cases} 4x_1 + x_2 - 3x_3 = 1, \\ 3x_1 + x_2 - x_3 = 2, \\ x_1 - 2x_3 = 5 \end{cases}$$

5.3. Найти общее решение системы методом Гаусса

$$\begin{cases} 8x_1 + 4x_2 + 2x_4 = 5, \\ 5x_1 + 3x_2 + x_3 + 2x_4 = 4, \\ 7x_1 + 5x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 7 \end{cases}$$

6.1. Даны три вектора $\overline{a} = 4\overline{i} - 6\overline{j} - 2\overline{k}, \overline{b} = -2\overline{i} + 3\overline{j} + \overline{k}$ и $\overline{c} = 3\overline{i} - 5\overline{j} + 7\overline{k}$.

Вычислить:

а) скалярное произведение векторов $(-5\overline{a} + \overline{b}), 4\overline{c}$;

б) векторное произведение векторов $-7\overline{b}, 6\overline{a}$;

в) смешанное произведение векторов $6\overline{a}, 3\overline{b}, 8\overline{c}$;

Проверить будут ли:

г) коллинеарны или перпендикулярны векторы $\overline{b}, \overline{a}$;

д) компланарны три вектора $-5\overline{a}, 3\overline{b}, 4\overline{c}$.

6.2. Даны точки $A(-4, 6, 3), B(3, -5, 1), C(2, 6, -4), D(2, 4, -5)$ – вершины пирамиды.

Найти:

а) наименьшее ребро грани (ADB);

б) наибольший угол грани (ADB);

в) площадь грани (BCD);

г) объем пирамиды $ABCD$;

д) длину высоты AM пирамиды.

6.3. Доказать, что векторы $\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{c}$ образуют базис. Найти координаты вектора $\overline{d}$ в этом базисе, если $\overline{a} = (1; 2; 3)$, $\overline{b} = (-5; 3; -1)$, $\overline{c} = (-6; 4; 5)$, $\overline{d} = (-4; 11; 20)$.

Вариант 14

1.1. Даны матрицы A и B. Найти AB, BA, A^TB, B^TA^T, если

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & 0 \\ 2 & 6 & -4 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 3 \\ 4 & -1 & 5 & 2 \\ 2 & 5 & 2 & 7 \end{pmatrix}$$

1.2. Найти значение выражения $P(A) = A^2+2A^TA+5E$, если $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$

2.1. Вычислить определитель второго порядка $\begin{vmatrix} 17 & 2 \\ 1 & -6 \end{vmatrix}$

2.2. Вычислить определитель по правилу Сарруса (или по правилу треугольника), а также вычислить минор M_{23} и алгебраическое дополнение A_{12}.

$$\begin{vmatrix} -1 & 2 & 5 \\ 5 & 4 & 1 \\ 3 & -9 & 2 \end{vmatrix}$$

2.3. Вычислить определитель, разлагая его по элементам 1-ой строки и по элементам 3-его столбца. Результаты сравнить.

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 5 & 9 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix}$$

2.4. Вычислить определители, получив нули в какой-либо строке или столбце и, разложив по элементам этой строки или столбца

$$1)\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 5 & 5 & 1 \\ 3 & 4 & 9 \end{vmatrix}; \qquad 2)\begin{vmatrix} -2 & 2 & 0 & 5 \\ 0 & -8 & 1 & 5 \\ 2 & 0 & -3 & -2 \\ 6 & 1 & 4 & 0 \end{vmatrix}$$

3.1. Решить уравнение $A \cdot X = B$, если $A = \begin{pmatrix} -4 & -1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}$

3.2. Найти обратную матрицу и сделать проверку $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$

4.1. Найти ранг матрицы $\begin{pmatrix} 1 & -3 & 5 & 4 & 6 \\ 3 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 3 \\ 4 & 0 & -4 & -2 & -3 \end{pmatrix}$

5.1. Решить систему а) по формулам Крамера, б) матричным методом, в) методом Гаусса

$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 - x_3 = -9, \\ 3x_2 - 7x_3 = -6, \\ 4x_1 - x_2 + 5x_3 = -2 \end{cases}$$

5.2. Проверить совместность системы и в случае совместности решить ее методом Гаусса

$$\begin{cases} 3x_1 - 5x_2 + 3x_3 = 4, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 8, \\ 2x_1 - 7x_2 + 2x_3 = 1 \end{cases}$$

5.3. Найти общее решение системы методом Гаусса

$$\begin{cases} x_1 - 4x_2 - 4x_3 + x_4 = -3, \\ x_1 + 7x_2 + 6x_3 - 2x_4 = 2, \\ 7x_1 + 5x_2 + 2x_3 - 2x_4 = -6 \end{cases}$$

6.1. Даны три вектора $\overline{a} = 3\overline{i} - \overline{j} + 2\overline{k}, \overline{b} = -\overline{i} + 5\overline{j} - 4\overline{k}$ и $\overline{c} = 6\overline{i} - 2\overline{j} + 4\overline{k}$.

Вычислить:

а) скалярное произведение векторов $-2\overline{a}, (5\overline{b} - \overline{c})$;

б) векторное произведение векторов $6\overline{a}, -4\overline{c}$;

в) смешанное произведение векторов $4\overline{a}, -7\overline{b}, -2\overline{c}$;

Проверить будут ли:

г) коллинеарны или перпендикулярны векторы $\overline{a}, \overline{c}$;

д) компланарны три вектора $6\overline{a}, -7\overline{b}, -2\overline{c}$.

6.2. Даны точки $A(7, 5, 8), B(-4, -5, 3), C(2, -3, 5), D(5, 1, -4)$ – вершины пирамиды.

Найти:

а) наименьшее ребро грани (ABC);

б) наибольший угол грани (ABC);

в) площадь грани (ADB);

г) объем пирамиды $ABCD$;

д) длину высоты CM пирамиды.

6.3. Доказать, что векторы $\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{c}$ образуют базис. Найти координаты вектора $\overline{d}$ в этом базисе, если $\overline{a} = (-2; 5; 1)$, $\overline{b} = (3; 2; -7)$, $\overline{c} = (4; -3; 2)$, $\overline{d} = (-4; 22; -13)$.

Вариант 15

1.1. Даны матрицы A и B. Найти AB, BA, A^TB, B^TA^T, если

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 3 & -4 \\ 2 & -1 & 3 \\ -3 & 5 & -3 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 2 & 7 \\ 3 & -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

1.2. Найти значение выражения $P(A) = 2(A^2+5A)-4E$, если $A = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$

2.1. Вычислить определитель второго порядка $\begin{vmatrix} 15 & 3 \\ 4 & -2 \end{vmatrix}$

2.2. Вычислить определитель по правилу Сарруса (или по правилу треугольника), а также вычислить минор M_{13} и алгебраическое дополнение A_{32}.

$$\begin{vmatrix} 7 & 1 & 3 \\ 4 & 10 & 1 \\ 5 & 9 & 2 \end{vmatrix}$$

2.3. Вычислить определитель, разлагая его по элементам 1-ой строки и по элементам 3-его столбца. Результаты сравнить.

$$\begin{vmatrix} -7 & 1 & 3 \\ 4 & -10 & 2 \\ -5 & 1 & 9 \end{vmatrix}$$

2.4. Вычислить определители, получив нули в какой-либо строке или столбце и, разложив по элементам этой строки или столбца

$$1)\begin{vmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 0 & 2 & -1 \\ 6 & 1 & -1 \end{vmatrix}; \qquad 2)\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ -3 & 2 & 0 & 3 \\ 3 & 1 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 4 & 5 \end{vmatrix}$$

3.1. Решить уравнение $A \cdot X = B$, если $A = \begin{pmatrix} 6 & 4 \\ -5 & -4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$

3.2. Найти обратную матрицу и сделать проверку $\begin{pmatrix} -3 & 2 & 3 \\ -4 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

4.1. Найти ранг матрицы $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 & 1 \\ 1 & -3 & -7 & -4 \\ 3 & 1 & 5 & 1 \\ -3 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & -1 \end{pmatrix}$

5.1. Решить систему а) по формулам Крамера, б) матричным методом, в) методом Гаусса

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 - 3x_3 = 0, \\ 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 1, \\ x_1 + 5x_2 + x_3 = -3 \end{cases}$$

5.2. Проверить совместность системы и в случае совместности решить ее методом Гаусса

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 6, \\ 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 = 2, \\ 3x_1 + x_2 - x_3 = 5 \end{cases}$$

5.3. Найти общее решение системы методом Гаусса

$$\begin{cases} 6x_1 + x_2 - 3x_3 + 9x_4 = 0, \\ 2x_1 + 4x_2 - x_3 + 3x_4 = 4, \\ 4x_1 + 7x_2 - 2x_3 + 6x_4 = 8 \end{cases}$$

6.1. Даны три вектора $\overline{a} = -3\overline{i} - \overline{j} - 5\overline{k}, \overline{b} = 2\overline{i} - 4\overline{j} + 8\overline{k}$ и $\overline{c} = 3\overline{i} + 7\overline{j} - \overline{k}$.

Вычислить:

а) скалярное произведение векторов $5\overline{b}, (-6\overline{c} + \overline{a})$;

б) векторное произведение векторов $-9\overline{a}, 4\overline{c}$;

в) смешанное произведение векторов $2\overline{a}, -\overline{b}, 3\overline{c}$;

Проверить будут ли:

г) коллинеарны или перпендикулярны векторы $\overline{b}, \overline{c}$;

д) компланарны три вектора $2\overline{a}, 5\overline{b}, -6\overline{c}$.

6.2. Даны точки $A(3, -2, 6), B(-6, -2, 3), C(1, 1, -4), D(4, 6, -7)$ – вершины пирамиды.

Найти:

а) наименьшее ребро грани (DBC);

б) наибольший угол грани (DBC);

в) площадь грани (ABC);

г) объем пирамиды $ABCD$;

д) длину высоты DM пирамиды.

6.3. Доказать, что векторы $\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{c}$ образуют базис. Найти координаты вектора $\overline{d}$ в этом базисе, если $\overline{a} = (3; 1; 2)$, $\overline{b} = (-4; 3; -1)$, $\overline{c} = (2; 3; 4)$, $\overline{d} = (14; 14; 20)$.

Вариант 16

1.1. Даны матрицы A и B. Найти AB, BA, A^TB, B^TA^T, если

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & -1 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 8 & 6 \\ 7 & 4 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$$

1.2. Найти значение выражения $P(A) = 3A^T - A^2 + 5E$, если $A = \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

2.1. Вычислить определитель второго порядка $\begin{vmatrix} -3 & 4 \\ 9 & 10 \end{vmatrix}$

2.2. Вычислить определитель по правилу Сарруса (или по правилу треугольника), а также вычислить минор M_{21} и алгебраическое дополнение A_{31}.

$$\begin{vmatrix} -2 & 3 & 2 \\ 1 & -2 & 2 \\ 4 & 1 & -1 \end{vmatrix}$$

2.3. Вычислить определитель, разлагая его по элементам 1-ой строки и по элементам 3-его столбца. Результаты сравнить.

$$\begin{vmatrix} -1 & 2 & 3 \\ -4 & 6 & 4 \\ 1 & -3 & 2 \end{vmatrix}$$

2.4. Вычислить определители, получив нули в какой-либо строке или столбце и, разложив по элементам этой строки или столбца

$$1) \begin{vmatrix} 1 & 5 & 8 \\ -2 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}; \qquad 2) \begin{vmatrix} -3 & 2 & -4 & 1 \\ 1 & 4 & -2 & 0 \\ -7 & 0 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

3.1. Решить уравнение $A \cdot X = B$, если $A = \begin{pmatrix} -3 & 8 \\ -2 & 6 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 6 & -4 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$

3.2. Найти обратную матрицу и сделать проверку $\begin{pmatrix} 1 & 3 & -5 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & 5 & -7 \end{pmatrix}$

4.1. Найти ранг матрицы $\begin{pmatrix} 8 & -4 & 3 & 6 & 8 & 5 \\ 10 & -5 & 5 & 9 & 15 & 10 \\ 4 & -2 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 3 & 7 & 11 & 8 \end{pmatrix}$

5.1. Решить систему а) по формулам Крамера, б) матричным методом, в) методом Гаусса

$$\begin{cases} -3x_1 + 5x_2 + 6x_3 = -8, \\ 3x_1 + x_2 + x_3 = -4, \\ x_1 - 4x_2 - 2x_3 = -9 \end{cases}$$

5.2. Проверить совместность системы и в случае совместности решить ее методом Гаусса

$$\begin{cases} 5x_1 - x_2 - 2x_3 = 1, \\ 3x_1 - 4x_2 + x_3 = 7, \\ 2x_1 + 3x_2 - 3x_3 = 4 \end{cases}$$

5.3. Найти общее решение системы методом Гаусса

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = 4, \\ 2x_1 - x_2 + 7x_3 - 3x_4 = 6, \\ x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 5x_4 = 2 \end{cases}$$

6.1. Даны три вектора $\overline{a} = -3\overline{i} + 2\overline{j} + 7\overline{k}, \overline{b} = \overline{i} - 5\overline{k}$ и $\overline{c} = 6\overline{i} + 4\overline{j} - \overline{k}$.

Вычислить:

а) скалярное произведение векторов $3\overline{b}, (\overline{c} - 2\overline{a})$;

б) векторное произведение векторов $5\overline{a}, -2\overline{c}$;

в) смешанное произведение векторов $-2\overline{a}, \overline{b}, 7\overline{c}$;

Проверить будут ли:

г) коллинеарны или перпендикулярны векторы $\overline{a}, \overline{c}$;

д) компланарны три вектора $-2\overline{a}, 3\overline{b}, 7\overline{c}$.

6.2. Даны точки $A(-5, -4, -3), B(7, 3, -1), C(6, -2, 0), D(3, 2, -7)$ – вершины пирамиды.

Найти:

а) наименьшее ребро грани (ADC);

б) наибольший угол грани (ADC);

в) площадь грани (DBC);

г) объем пирамиды $ABCD$;

д) длину высоты AM пирамиды.

6.3. Доказать, что векторы $\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{c}$ образуют базис. Найти координаты вектора $\overline{d}$ в этом базисе, если $\overline{a} = (3; -1; 2)$, $\overline{b} = (-2; 4; 1)$, $\overline{c} = (4; -5; -1)$, $\overline{d} = (-5; 11; 1)$.

Вариант 17

1.1. Даны матрицы A и B. Найти AB, BA, A^TB, B^TA^T, если

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -5 \\ -3 & -4 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 6 & -5 & 4 \\ 1 & 3 & 1 \\ 3 & -4 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

1.2. Найти значение выражения $P(A) = 3A^2 + 2(A^T - 5E)$, если $A = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$

2.1. Вычислить определитель второго порядка $\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 5 & 23 \end{vmatrix}$

2.2. Вычислить определитель по правилу Сарруса (или по правилу треугольника), а также вычислить минор M_{33} и алгебраическое дополнение A_{12}.

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 5 & 1 & 8 \\ -1 & 0 & -2 \end{vmatrix}$$

2.3. Вычислить определитель, разлагая его по элементам 1-ой строки и по элементам 3-его столбца. Результаты сравнить.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 7 \\ 3 & 4 & 0 \\ -2 & 0 & 5 \end{vmatrix}$$

2.4. Вычислить определители, получив нули в какой-либо строке или столбце и, разложив по элементам этой строки или столбца

$$1) \begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 0 & 5 & 1 \\ 3 & 4 & 7 \end{vmatrix}; \qquad 2) \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 5 \\ 0 & 4 & -2 & 5 \\ 2 & 0 & -3 & 2 \\ 6 & 1 & -2 & 0 \end{vmatrix}$$

3.1. Решить уравнение $A \cdot X = B$, если $A = \begin{pmatrix} 4 & -5 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -5 & -7 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

3.2. Найти обратную матрицу и сделать проверку $\begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 \\ -3 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

4.1. Найти ранг матрицы $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 & -4 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & 3 & 5 \\ 3 & 7 & 8 & -11 & -3 \\ 2 & 3 & 5 & -4 & 1 \\ 4 & 6 & 10 & -8 & 2 \end{pmatrix}$

5.1. Решить систему а) по формулам Крамера, б) матричным методом, в) методом Гаусса

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 + x_3 = -4, \\ -3x_1 + 5x_2 + 6x_3 = 36, \\ x_1 - 4x_2 - 2x_3 = -19 \end{cases}$$

5.2. Проверить совместность системы и в случае совместности решить ее методом Гаусса

$$\begin{cases} 2x_1 + 8x_2 - 7x_3 = 0, \\ 2x_1 - 5x_2 + 6x_3 = 1, \\ 4x_1 + 3x_2 - x_3 = 7 \end{cases}$$

5.3. Найти общее решение системы методом Гаусса

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 2x_4 = 2, \\ x_1 - x_2 - 3x_3 - 4x_4 = -4, \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 - 5x_4 = 1 \end{cases}$$

6.1. Даны три вектора $\overline{a} = 3\overline{i} - \overline{j} + 5\overline{k}, \overline{b} = 2\overline{i} - 4\overline{j} + 6\overline{k}$ и $\overline{c} = \overline{i} - 2\overline{j} + 3\overline{k}$.

Вычислить:

а) скалярное произведение векторов $\overline{a}, (4\overline{c} - \overline{b})$;

б) векторное произведение векторов $6\overline{b}, 3\overline{c}$;

в) смешанное произведение векторов $-3\overline{a}, 4\overline{b}, -5\overline{c}$;

Проверить будут ли:

г) коллинеарны или перпендикулярны векторы $\overline{b}, \overline{c}$;

д) компланарны три вектора $-3\overline{a}, 4\overline{b}, -5\overline{c}$.

6.2. Даны точки $A(3, -5, -2), B(-4, 2, 3), C(1, 5, 7), D(-2, -4, 5)$ – вершины пирамиды.

Найти:

а) наименьшее ребро грани (ADB);

б) наибольший угол грани (ADB);

в) площадь грани (ABC);

г) объем пирамиды $ABCD$;

д) длину высоты DM пирамиды.

6.3. Доказать, что векторы $\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{c}$ образуют базис. Найти координаты вектора $\overline{d}$ в этом базисе, если $\overline{a} = (4; 5; 1)$, $\overline{b} = (1; 3; 1)$, $\overline{c} = (-3; -6; 7)$, $\overline{d} = (19; 33; 0)$.

Вариант 18

1.1. Даны матрицы A и B. Найти AB, BA, A^TB, B^TA^T, если

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 & 1 \\ 2 & 3 & 2 & -3 \\ 5 & -2 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} -1 & 3 & -2 & 4 \\ 5 & -2 & -3 & 1 \\ 2 & 3 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

1.2. Найти значение выражения $P(A) = A^2 - 2A^T$, если $A = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$

2.1. Вычислить определитель второго порядка $\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 6 & 5 \end{vmatrix}$

2.2. Вычислить определитель по правилу Сарруса (или по правилу треугольника), а также вычислить минор M_{22} и алгебраическое дополнение A_{13}.

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 5 & 9 \\ 4 & 8 & 0 \end{vmatrix}$$

2.3. Вычислить определитель, разлагая его по элементам 1-ой строки и по элементам 3-его столбца. Результаты сравнить.

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & -7 \\ 6 & 9 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

2.4. Вычислить определители, получив нули в какой-либо строке или столбце и, разложив по элементам этой строки или столбца

$$1) \begin{vmatrix} 4 & -1 & 1 \\ 10 & -4 & 2 \\ 20 & -10 & 3 \end{vmatrix}; \qquad 2) \begin{vmatrix} -1 & 1 & -2 & 3 \\ 1 & 2 & 2 & 3 \\ -2 & 3 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & -2 & 0 \end{vmatrix}$$

3.1. Решить уравнение $A \cdot X = B$, если $A = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ -2 & -7 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 7 & -5 \end{pmatrix}$

3.2. Найти обратную матрицу и сделать проверку $\begin{pmatrix} -1 & 4 & -1 \\ -1 & 7 & -3 \\ 2 & -8 & 3 \end{pmatrix}$

4.1. Найти ранг матрицы $\begin{pmatrix} -2 & 2 & -1 & 0 \\ 3 & -1 & 2 & -3 \\ -4 & 0 & -3 & 1 \\ 2 & -1 & -3 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$

5.1. Решить систему а) по формулам Крамера, б) матричным методом, в) методом Гаусса

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 3, \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 = -10, \\ 7x_1 + 4x_2 - x_3 = 13 \end{cases}$$

5.2. Проверить совместность системы и в случае совместности решить ее методом Гаусса

$$\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + x_3 = 2, \\ x_1 + 5x_2 - 3x_3 = 4, \\ 2x_1 - x_2 + 4x_3 = 5 \end{cases}$$

5.3. Найти общее решение системы методом Гаусса

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 = 0, \\ x_1 + 2x_2 - x_3 = 1, \\ x_1 - x_2 + 2x_3 - 3x_4 = -1 \end{cases}$$

6.1. Даны три вектора $\overline{a} = 4\overline{i} - 5\overline{j} - 4\overline{k}, \overline{b} = 5\overline{i} - \overline{j}$ и $\overline{c} = 2\overline{i} + 4\overline{j} - 3\overline{k}$.

Вычислить:

а) скалярное произведение векторов $8\overline{c}, (-3\overline{a} + \overline{b})$;

б) векторное произведение векторов $-5\overline{a}, 4\overline{b}$;

в) смешанное произведение векторов $\overline{a}, 7\overline{b}, -2\overline{c}$;

Проверить будут ли:

г) коллинеарны или перпендикулярны векторы $\overline{a}, \overline{c}$;

д) компланарны три вектора $-3\overline{a}, 4\overline{b}, 8\overline{c}$.

6.2. Даны точки $A(7, 4, 9), B(1, -2, -3), C(-5, -3, 0), D(1, -3, 4)$ – вершины пирамиды.

Найти:

а) наименьшее ребро грани (ABC);

б) наибольший угол грани (ABC);

в) площадь грани (ACD);

г) объем пирамиды $ABCD$;

д) длину высоты BM пирамиды.

6.3. Доказать, что векторы $\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{c}$ образуют базис. Найти координаты вектора $\overline{d}$ в этом базисе, если $\overline{a} = (1; -3; 1)$, $\overline{b} = (-2; -4; 3)$, $\overline{c} = (0; -2; 3)$, $\overline{d} = (-8; -10; 13)$.

Вариант 19

1.1. Даны матрицы A и B. Найти AB, BA, A^TB, B^TA^T, если

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 3 & -6 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ -7 & 3 \\ 2 & 8 \end{pmatrix}$$

1.2. Найти значение выражения $P(A) = 3A^2 - A + A^T$, если $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$

2.1. Вычислить определитель второго порядка $\begin{vmatrix} 16 & 2 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}$

2.2. Вычислить определитель по правилу Сарруса (или по правилу треугольника), а также вычислить минор M_{12} и алгебраическое дополнение A_{21}.

$$\begin{vmatrix} 6 & 2 & 4 \\ 3 & -1 & 4 \\ 5 & 7 & 0 \end{vmatrix}$$

2.3. Вычислить определитель, разлагая его по элементам 1-ой строки и по элементам 3-его столбца. Результаты сравнить.

$$\begin{vmatrix} 1 & 5 & 3 \\ 2 & 3 & 5 \\ 1 & -4 & 0 \end{vmatrix}$$

2.4. Вычислить определители, получив нули в какой-либо строке или столбце и, разложив по элементам этой строки или столбца

$$1) \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 5 & -4 \\ 6 & 3 & 2 \end{vmatrix}; \qquad 2) \begin{vmatrix} 2 & 2 & 0 & 5 \\ 0 & 8 & -2 & 5 \\ 2 & 0 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$$

3.1. Решить уравнение $A \cdot X = B$, если $A = \begin{pmatrix} 10 & -2 \\ -6 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 7 & -5 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$

3.2. Найти обратную матрицу и сделать проверку $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

4.1. Найти ранг матрицы $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 3 & -2 & 1 \\ -3 & -3 & 1 & -2 & -6 \\ 0 & -4 & -5 & -3 & -4 \\ 2 & -3 & 2 & -5 & -1 \end{pmatrix}$

5.1. Решить систему а) по формулам Крамера, б) матричным методом, в) методом Гаусса

$$\begin{cases} 3x_1 - x_2 + x_3 = -11, \\ 5x_1 + x_2 + 2x_3 = 8, \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 16 \end{cases}$$

5.2. Проверить совместность системы и в случае совместности решить ее методом Гаусса

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 5, \\ 3x_1 + 4x_2 - 7x_3 = 2, \\ 5x_1 + x_2 - 5x_3 = 9 \end{cases}$$

5.3. Найти общее решение системы методом Гаусса

$$\begin{cases} 8x_1 - 4x_2 + 3x_3 + 6x_4 = 5, \\ 4x_1 - 2x_2 + x_3 + 2x_4 = 1, \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 + 7x_4 = 8 \end{cases}$$

6.1. Даны три вектора $\overline{a} = -9\overline{i} + 4\overline{k}, \overline{b} = 2\overline{i} - 4\overline{j} + 6\overline{k}$ и $\overline{c} = 3\overline{i} - 6\overline{j} + 9\overline{k}$.

Вычислить:

а) скалярное произведение векторов $-2\overline{a}, (8\overline{c} - 2\overline{b})$;

б) векторное произведение векторов $6\overline{b}, 2\overline{c}$;

в) смешанное произведение векторов $3\overline{a}, -5\overline{b}, -4\overline{c}$;

Проверить будут ли:

г) коллинеарны или перпендикулярны векторы $\overline{b}, \overline{c}$;

д) компланарны три вектора $3\overline{a}, 6\overline{b}, -4\overline{c}$.

6.2. Даны точки $A(-4, -7, -3), B(-4, -5, 7), C(2, -3, 3), D(3, 2, 1)$ – вершины пирамиды.

Найти:

а) наименьшее ребро грани (DBC);

б) наибольший угол грани (DBC);

в) площадь грани (ABC);

г) объем пирамиды $ABCD$;

д) длину высоты DM пирамиды.

6.3. Доказать, что векторы $\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{c}$ образуют базис. Найти координаты вектора $\overline{d}$ в этом базисе, если $\overline{a} = (5; 7; -2)$, $\overline{b} = (-3; 1; 3)$, $\overline{c} = (1; -4; 6)$, $\overline{d} = (14; 9; -1)$.

Вариант 20

1.1. Даны матрицы A и B. Найти AB, BA, A^TB, B^TA^T, если

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 8 & 1 & 6 \\ 3 & 5 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 5 & -3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$$

1.2. Найти значение выражения $P(A) = A^2 + 4(A - A^T)$, если $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

2.1. Вычислить определитель второго порядка $\begin{vmatrix} 6 & 3 \\ 5 & 2 \end{vmatrix}$

2.2. Вычислить определитель по правилу Сарруса (или по правилу треугольника), а также вычислить минор M_{32} и алгебраическое дополнение A_{21}.

$$\begin{vmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 2 & -5 & 2 \\ 12 & 0 & 3 \end{vmatrix}$$

2.3. Вычислить определитель, разлагая его по элементам 1-ой строки и по элементам 3-его столбца. Результаты сравнить.

$$\begin{vmatrix} 5 & -4 & 8 \\ 0 & -2 & 4 \\ 2 & 3 & 7 \end{vmatrix}$$

2.4. Вычислить определители, получив нули в какой-либо строке или столбце и, разложив по элементам этой строки или столбца

$$1) \begin{vmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 5 & 8 & 5 \\ -4 & 0 & 2 \end{vmatrix}; \qquad 2) \begin{vmatrix} 3 & 2 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

3.1. Решить уравнение $A \cdot X = B$, если $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -5 & -4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -4 & 5 \end{pmatrix}$

3.2. Найти обратную матрицу и сделать проверку $\begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

4.1. Найти ранг матрицы $\begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 & 1 & -1 & 4 \\ 2 & -1 & 7 & -3 & 5 & 6 \\ 1 & 3 & -2 & 5 & -7 & 2 \\ 3 & -2 & 7 & -5 & 8 & 5 \end{pmatrix}$

5.1. Решить систему а) по формулам Крамера, б) матричным методом, в) методом Гаусса

$$\begin{cases} 3x_1 - x_2 + x_3 = 9, \\ 5x_1 + x_2 + 3x_3 = 4, \\ 7x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 1 \end{cases}$$

5.2. Проверить совместность системы и в случае совместности решить ее методом Гаусса

$$\begin{cases} 4x_1 - 9x_2 + 5x_3 = 1, \\ 7x_1 - 4x_2 + x_3 = 11, \\ 3x_1 + 5x_2 - 4x_3 = 5 \end{cases}$$

5.3. Найти общее решение системы методом Гаусса

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 - 4x_4 = 3, \\ x_1 - x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 8, \\ 3x_1 + 7x_2 + 8x_3 - 11x_4 = -2 \end{cases}$$

6.1. Даны три вектора $\overline{a} = 5\overline{i} - 6\overline{j} - 4\overline{k}, \overline{b} = 4\overline{i} + 8\overline{j} - 7\overline{k}$ и $\overline{c} = 3\overline{j} - 4\overline{k}$.

Вычислить:

а) скалярное произведение векторов $(7\overline{a} - \overline{b}), -2\overline{c}$;

б) векторное произведение векторов $4\overline{b}, \overline{a}$;

в) смешанное произведение векторов $5\overline{a}, 3\overline{b}, -4\overline{c}$;

Проверить будут ли:

г) коллинеарны или перпендикулярны векторы $\overline{b}, \overline{a}$;

д) компланарны три вектора $5\overline{a}, 4\overline{b}, -2\overline{c}$.

6.2. Даны точки $A(-4, -5, -3), B(3, 1, 2), C(5, 7, -6), D(6, -1, 5)$ – вершины пирамиды.

Найти:

а) наименьшее ребро грани (ADC);

б) наибольший угол грани (ADC);

в) площадь грани (DBC);

г) объем пирамиды $ABCD$;

д) длину высоты AM пирамиды.

6.3. Доказать, что векторы $\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{c}$ образуют базис. Найти координаты вектора $\overline{d}$ в этом базисе, если $\overline{a} = (-1; 4; 3)$, $\overline{b} = (3; 2; -4)$, $\overline{c} = (-2; -7; 1)$, $\overline{d} = (6; 20; -3)$.

Вариант 21

1.1. Даны матрицы A и B. Найти AB, BA, A^TB, B^TA^T, если

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 7 & 2 & 5 & 5 \\ 4 & 1 & 1 & 7 & 2 \\ 5 & 3 & -3 & -8 & 1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \\ 5 & 2 & -2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

1.2. Найти значение выражения $P(A) = 2A^T + A^2 - E$, если $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$

2.1. Вычислить определитель второго порядка $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 8 \end{vmatrix}$

2.2. Вычислить определитель по правилу Сарруса (или по правилу треугольника), а также вычислить минор M_{23} и алгебраическое дополнение A_{12}.

$$\begin{vmatrix} 7 & -1 & 4 \\ 2 & 6 & 2 \\ 3 & 5 & -1 \end{vmatrix}$$

2.3. Вычислить определитель, разлагая его по элементам 1-ой строки и по элементам 3-его столбца. Результаты сравнить.

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 9 & 5 \\ -2 & 3 & 2 \end{vmatrix}$$

2.4. Вычислить определители, получив нули в какой-либо строке или столбце и, разложив по элементам этой строки или столбца

$$1) \begin{vmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 4 & 5 & 1 \\ 3 & 2 & 9 \end{vmatrix}; \qquad 2) \begin{vmatrix} 0 & 2 & -4 & 1 \\ 1 & 5 & -2 & 0 \\ -7 & 0 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & -3 & 1 \end{vmatrix}$$

3.1. Решить уравнение $A \cdot X = B$, если $A = \begin{pmatrix} 3 & -7 \\ 1 & -5 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$

3.2. Найти обратную матрицу и сделать проверку $\begin{pmatrix} -1 & 1 & -4 \\ 2 & -4 & 1 \\ 1 & -3 & 2 \end{pmatrix}$

4.1. Найти ранг матрицы $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 4 & -2 & 6 & 3 & -4 \\ 2 & 4 & -2 & 4 & -7 \end{pmatrix}$

5.1. Решить систему а) по формулам Крамера, б) матричным методом, в) методом Гаусса

$$\begin{cases} 3x_1 - x_2 + x_3 = 12, \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 6, \\ 5x_1 + x_2 + 2x_3 = 3 \end{cases}$$

5.2. Проверить совместность системы и в случае совместности решить ее методом Гаусса

$$\begin{cases} 7x_1 - 2x_2 - x_3 = 2, \\ 6x_1 - 4x_2 - 5x_3 = 3, \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 5 \end{cases}$$

5.3. Найти общее решение системы методом Гаусса

$$\begin{cases} 6x_1 + 5x_2 + 7x_3 + 5x_4 = 6, \\ 4x_1 + 5x_2 + 8x_3 + 4x_4 = 7, \\ 8x_1 + 5x_2 + 4x_3 + 7x_4 = 2 \end{cases}$$

6.1. Даны три вектора $\overline{a} = 5\overline{i} - 3\overline{j} + 4\overline{k}, \overline{b} = 2\overline{i} - 4\overline{j} - 2\overline{k}$ и $\overline{c} = 3\overline{i} + 5\overline{j} - 7\overline{k}$.

Вычислить:

а) скалярное произведение векторов $(-3\overline{a} + \overline{b}), 6\overline{c}$;

б) векторное произведение векторов $-2\overline{b}, 4\overline{c}$;

в) смешанное произведение векторов $\overline{a}, -4\overline{b}, 2\overline{c}$;

Проверить будут ли:

г) коллинеарны или перпендикулярны векторы $\overline{b}, \overline{c}$;

д) компланарны три вектора $\overline{a}, -2\overline{b}, 6\overline{c}$.

6.2. Даны точки $A(-3, -4, 0), B(0, -1, 3), C(-6, 4, 2), D(-3, 0, 3)$ – вершины пирамиды.

Найти:

а) наименьшее ребро грани (ABD);

б) наибольший угол грани (ABD);

в) площадь грани (DBC);

г) объем пирамиды $ABCD$;

д) длину высоты CM пирамиды.

6.3. Доказать, что векторы $\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{c}$ образуют базис. Найти координаты вектора $\overline{d}$ в этом базисе, если $\overline{a} = (0; 2; -3)$, $\overline{b} = (4; -3; -2), \overline{c} = (-5; -4; 0)$, $\overline{d} = (-19; -5; -4)$.

Вариант 22

1.1. Даны матрицы A и B. Найти AB, BA, A^TB, B^TA^T, если

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 5 \\ 8 & 2 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}$$

1.2. Найти значение выражения $P(A) = A^2 - 2A + A^T$, если $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 7 \end{pmatrix}$

2.1. Вычислить определитель второго порядка $\begin{vmatrix} 2 & -15 \\ 14 & -4 \end{vmatrix}$

2.2. Вычислить определитель по правилу Сарруса (или по правилу треугольника), а также вычислить минор M_{32} и алгебраическое дополнение A_{13}.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 4 & 10 & 1 \\ 5 & 9 & 4 \end{vmatrix}$$

2.3. Вычислить определитель, разлагая его по элементам 1-ой строки и по элементам 3-его столбца. Результаты сравнить.

$$\begin{vmatrix} 8 & 9 & 10 \\ 1 & 7 & 13 \\ 2 & 5 & 6 \end{vmatrix}$$

2.4. Вычислить определители, получив нули в какой-либо строке или столбце и, разложив по элементам этой строки или столбца

$$1)\begin{vmatrix} -2 & 4 & 4 \\ 0 & -2 & -1 \\ 6 & 7 & -1 \end{vmatrix}; \qquad 2)\begin{vmatrix} 4 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 7 & -2 & 5 \\ 2 & 0 & 1 & -2 \\ 6 & -3 & 0 & 3 \end{vmatrix}$$

3.1. Решить уравнение $A \cdot X = B$, если $A = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -5 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 6 & 7 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$

3.2. Найти обратную матрицу и сделать проверку $\begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & -2 \\ 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$

4.1. Найти ранг матрицы $\begin{pmatrix} 3 & 5 & 1 & 7 \\ -1 & -3 & -3 & -5 \\ 3 & 2 & -5 & 1 \\ 2 & 3 & 0 & 4 \\ 5 & 4 & -7 & 1 \\ 6 & 7 & -4 & 6 \end{pmatrix}$

5.1. Решить систему а) по формулам Крамера, б) матричным методом, в) методом Гаусса

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 = -4, \\ x_1 + 3x_2 - x_3 = 11, \\ x_1 - 2x_2 + 2x_3 = -7 \end{cases}$$

5.2. Проверить совместность системы и в случае совместности решить ее методом Гаусса

$$\begin{cases} 4x_1 - 3x_2 + x_3 = 3, \\ x_1 + x_2 - x_3 = 4, \\ 3x_1 - 4x_2 + 2x_3 = 2 \end{cases}$$

5.3. Найти общее решение системы методом Гаусса

$$\begin{cases} -x_1 + 3x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 7, \\ 6x_1 + 2x_2 + 2x_3 - x_4 = -2, \\ -3x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 = 5 \end{cases}$$

6.1. Даны три вектора $\overline{a} = -4\overline{i} + 3\overline{j} - 7\overline{k}, \overline{b} = 4\overline{i} + 6\overline{j} - 2\overline{k}$ и $\overline{c} = 6\overline{i} + 9\overline{j} - 3\overline{k}$.

Вычислить:

а) скалярное произведение векторов $5\overline{a}, (-3\overline{b} + \overline{c})$;

б) векторное произведение векторов $4\overline{b}, 7\overline{c}$;

в) смешанное произведение векторов $-2\overline{a}, \overline{b}, -2\overline{c}$;

Проверить будут ли:

г) коллинеарны или перпендикулярны векторы $\overline{b}, \overline{c}$;

д) компланарны три вектора $-2\overline{a}, 4\overline{b}, 7\overline{c}$.

6.2. Даны точки $A(0, -6, 3), B(3, 3, -3), C(-3, -5, 2), D(-1, -4, 0)$ – вершины пирамиды.

Найти:

а) наименьшее ребро грани (ABC);

б) наибольший угол грани (ABC);

в) площадь грани (ADC);

г) объем пирамиды $ABCD$;

д) длину высоты BM пирамиды.

6.3. Доказать, что векторы $\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{c}$ образуют базис. Найти координаты вектора $\overline{d}$ в этом базисе, если $\overline{a} = (-3; 0; 1)$, $\overline{b} = (2; 7; -3)$, $\overline{c} = (-4; 3; 5)$, $\overline{d} = (-16; 33; 13)$.

Вариант 23

1.1. Даны матрицы A и B. Найти AB, BA, A^TB, B^TA^T, если

$$A = \begin{pmatrix} 6 & -3 \\ 1 & -5 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 4 & 3 & -2 & 5 \end{pmatrix}$$

1.2. Найти значение выражения $P(A) = 3A^2 - A^T$, если $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$

2.1. Вычислить определитель второго порядка $\begin{vmatrix} -2 & 4 \\ 10 & 11 \end{vmatrix}$

2.2. Вычислить определитель по правилу Сарруса (или по правилу треугольника), а также вычислить минор M_{12} и алгебраическое дополнение A_{23}.

$$\begin{vmatrix} -1 & 3 & 4 \\ 2 & -1 & 4 \\ 5 & 1 & -1 \end{vmatrix}$$

2.3. Вычислить определитель, разлагая его по элементам 1-ой строки и по элементам 3-его столбца. Результаты сравнить.

$$\begin{vmatrix} -1 & 4 & 9 \\ -5 & 7 & 3 \\ 1 & -4 & 2 \end{vmatrix}$$

2.4. Вычислить определители, получив нули в какой-либо строке или столбце и, разложив по элементам этой строки или столбца

$$1)\begin{vmatrix} 1 & 6 & 9 \\ -1 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}; \qquad 2)\begin{vmatrix} 1 & -4 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -3 & 2 & -2 \\ 1 & 3 & 4 & 0 \end{vmatrix}$$

3.1. Решить уравнение $A \cdot X = B$, если $A = \begin{pmatrix} 7 & -5 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -4 & -1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$

3.2. Найти обратную матрицу и сделать проверку $\begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 3 \\ 5 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

4.1. Найти ранг матрицы $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & -2 & 4 \\ 13 & 8 & 4 & -3 & 6 \\ 5 & 4 & 2 & -3 & 6 \\ 3 & 2 & 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

5.1. Решить систему а) по формулам Крамера, б) матричным методом, в) методом Гаусса

$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 12, \\ 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 6, \\ 2x_1 - x_2 - x_3 = -9 \end{cases}$$

5.2. Проверить совместность системы и в случае совместности решить ее методом Гаусса

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 + 2x_3 = 1, \\ 2x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 9, \\ x_1 - x_2 + x_3 = 2 \end{cases}$$

5.3. Найти общее решение системы методом Гаусса

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 - 2x_4 = 1, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 = 2, \\ 5x_1 + 4x_2 + 2x_3 - 3x_4 = 3 \end{cases}$$

6.1. Даны три вектора $\overline{a} = -5\overline{i} + 2\overline{j} - 2\overline{k}, \overline{b} = 7\overline{i} - 5\overline{k}$ и $\overline{c} = 2\overline{i} + 3\overline{j} - 2\overline{k}$.

Вычислить:

а) скалярное произведение векторов $8\overline{a}, (-6\overline{b} + 2\overline{c})$;

б) векторное произведение векторов $-3\overline{b}, 11\overline{c}$;

в) смешанное произведение векторов $2\overline{a}, 4\overline{b}, -5\overline{c}$;

Проверить будут ли:

г) коллинеарны или перпендикулярны векторы $\overline{a}, \overline{c}$;

д) компланарны три вектора $8\overline{a}, -3\overline{b}, 11\overline{c}$.

6.2. Даны точки $A(0, -6, 3), B(3, 3, -3), C(-3, -5, 2), D(-1, -4, 0)$ – вершины пирамиды.

Найти:

а) наименьшее ребро грани (DBC);

б) наибольший угол грани (DBC);

в) площадь грани (ABC);

г) объем пирамиды $ABCD$;

д) длину высоты DM пирамиды.

6.3. Доказать, что векторы $\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{c}$ образуют базис. Найти координаты вектора $\overline{d}$ в этом базисе, если $\overline{a} = (-3; 0; 1)$, $\overline{b} = (2; 7; -3)$, $\overline{c} = (-4; 3; 5)$, $\overline{d} = (-16; 33; 13)$.

Вариант 24

1.1. Даны матрицы A и B. Найти AB, BA, A^TB, B^TA^T, если

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 7 & 4 & -1 \\ 1 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

1.2. Найти значение выражения $P(A) = 4A + A^2 - 2E$, если $A = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$

2.1. Вычислить определитель второго порядка $\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 5 \end{vmatrix}$

2.2. Вычислить определитель по правилу Сарруса (или по правилу треугольника), а также вычислить минор M_{21} и алгебраическое дополнение A_{13}.

$$\begin{vmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 5 & 5 & -2 \\ 1 & 7 & 2 \end{vmatrix}$$

2.3. Вычислить определитель, разлагая его по элементам 1-ой строки и по элементам 3-его столбца. Результаты сравнить.

$$\begin{vmatrix} 0 & -5 & 4 \\ 2 & 7 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \end{vmatrix}$$

2.4. Вычислить определители, получив нули в какой-либо строке или столбце и, разложив по элементам этой строки или столбца

$$1)\begin{vmatrix} 1 & 5 & 3 \\ 4 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix}; \qquad 2)\begin{vmatrix} 4 & -2 & 4 & 3 \\ 1 & 7 & -2 & 0 \\ -7 & 0 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

3.1. Решить уравнение $A \cdot X = B$, если $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ -4 & 5 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$

3.2. Найти обратную матрицу и сделать проверку $\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 8 & -3 & -6 \\ 3 & -1 & -2 \end{pmatrix}$

4.1. Найти ранг матрицы $\begin{pmatrix} -1 & 6 & -3 & 11 \\ 3 & 2 & 1 & 3 \\ 4 & -1 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 3 \\ 5 & 0 & 3 & -1 \end{pmatrix}$

5.1. Решить систему а) по формулам Крамера, б) матричным методом, в) методом Гаусса

$$\begin{cases} 8x_1+3x_2-6x_3=-4, \\ x_1+x_2-x_3=2, \\ 4x_1+x_2-3x_3=-5 \end{cases}$$

5.2. Проверить совместность системы и в случае совместности решить ее методом Гаусса

$$\begin{cases} 6x_1+3x_2-5x_3=0, \\ 9x_1+4x_2-7x_3=3, \\ 3x_1+x_2-2x_3=5 \end{cases}$$

5.3. Найти общее решение системы методом Гаусса

$$\begin{cases} 3x_1-x_2+3x_3+2x_4=6, \\ x_1-3x_2-5x_3-7x_4=-4, \\ 5x_1-x_2+2x_3+3x_4=7 \end{cases}$$

6.1. Даны три вектора $\overline{a}=-4\overline{i}-6\overline{j}+2\overline{k}, \overline{b}=2\overline{i}+3\overline{j}-\overline{k}$ и $\overline{c}=-\overline{i}+5\overline{j}-3\overline{k}$.

Вычислить:

а) скалярное произведение векторов $3\overline{a},(-7\overline{b}+2\overline{c})$;

б) векторное произведение векторов $-4\overline{b},11\overline{c}$;

в) смешанное произведение векторов $5\overline{a},7\overline{b},2\overline{c}$;

Проверить будут ли:

г) коллинеарны или перпендикулярны векторы $\overline{b},\overline{a}$;

д) компланарны три вектора $3\overline{a},7\overline{b},-2\overline{c}$.

6.2. Даны точки $A(2,-1,-3),B(0,0,0),C(5,-1,-1),D(-1,-1,1)$ – вершины пирамиды.

Найти:

а) наименьшее ребро грани (ADC);

б) наибольший угол грани (ADC);

в) площадь грани (ABD);

г) объем пирамиды $ABCD$;

д) длину высоты CM пирамиды.

6.3. Доказать, что векторы $\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{c}$ образуют базис. Найти координаты вектора $\overline{d}$ в этом базисе, если $\overline{a}=(3;1;2)$, $\overline{b}=(-7;-2;-4)$, $\overline{c}=(-4;0;3)$, $\overline{d}=(16;6;15)$.

Вариант 25

1.1. Даны матрицы A и B. Найти AB, BA, A^TB, B^TA^T, если

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 1 \\ -1 & -3 & 2 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -4 & 5 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

1.2. Найти значение выражения $P(A) = A^2 + 5A^TA$, если $A = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ -1 & 7 \end{pmatrix}$

2.1. Вычислить определитель второго порядка $\begin{vmatrix} -5 & 3 \\ 4 & 3 \end{vmatrix}$

2.2. Вычислить определитель по правилу Сарруса (или по правилу треугольника), а также вычислить минор M_{23} и алгебраическое дополнение A_{31}.

$$\begin{vmatrix} -1 & 3 & 4 \\ 5 & 0 & 7 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix}$$

2.3. Вычислить определитель, разлагая его по элементам 1-ой строки и по элементам 3-его столбца. Результаты сравнить.

$$\begin{vmatrix} 7 & 1 & -3 \\ 5 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \end{vmatrix}$$

2.4. Вычислить определители, получив нули в какой-либо строке или столбце и, разложив по элементам этой строки или столбца

$$1) \begin{vmatrix} 4 & 1 & -5 \\ 0 & 1 & 7 \\ 4 & -1 & 2 \end{vmatrix}; \qquad 2) \begin{vmatrix} 4 & 0 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & -2 & 2 \\ -2 & 1 & -1 & 5 \\ 6 & -3 & 0 & -1 \end{vmatrix}$$

3.1. Решить уравнение $A \cdot X = B$, если $A = \begin{pmatrix} 6 & -4 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 8 \\ -2 & -7 \end{pmatrix}$

3.2. Найти обратную матрицу и сделать проверку $\begin{pmatrix} 3 & -3 & -2 \\ -4 & 5 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

4.1. Найти ранг матрицы $\begin{pmatrix} 6 & 5 & 7 & 5 & 3 \\ 14 & 5 & 3 & 9 & -1 \\ 4 & 5 & 8 & 4 & 4 \\ 8 & 5 & 4 & 7 & 2 \\ 4 & 5 & 8 & 4 & 4 \end{pmatrix}$

5.1. Решить систему а) по формулам Крамера, б) матричным методом, в) методом Гаусса

$$\begin{cases} 4x_1 + x_2 - 3x_3 = 9, \\ x_1 + x_2 - x_3 = -2, \\ 8x_1 + 3x_2 - 6x_3 = 12 \end{cases}$$

5.2. Проверить совместность системы и в случае совместности решить ее методом Гаусса

$$\begin{cases} 8x_1 - x_2 + 3x_3 = 2, \\ 4x_1 - x_2 + 6x_3 = 1, \\ 4x_1 - 2x_2 - 3x_3 = 7 \end{cases}$$

5.3. Найти общее решение системы методом Гаусса

$$\begin{cases} 3x_1 + 20x_2 + 5x_3 - 2x_4 = -8, \\ 3x_1 + 6x_2 + 2x_3 - x_4 = 1, \\ 9x_1 + 4x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 12 \end{cases}$$

6.1. Даны три вектора $\overline{a} = -4\overline{i} + 2\overline{j} - 3\overline{k}, \overline{b} = -3\overline{j} + 5\overline{k}$ и $\overline{c} = 6\overline{i} + 6\overline{j} - 4\overline{k}$.

Вычислить:

а) скалярное произведение векторов $3\overline{a}, (9\overline{b} - 3\overline{c})$;

б) векторное произведение векторов $-7\overline{a}, 4\overline{c}$;

в) смешанное произведение векторов $5\overline{a}, -\overline{b}, 3\overline{c}$;

Проверить будут ли:

г) коллинеарны или перпендикулярны векторы $\overline{a}, \overline{c}$;

д) компланарны три вектора $3\overline{a}, -9\overline{b}, 4\overline{c}$.

6.2. Даны точки $A(1, 5, 8), B(-2, 1, 4), C(3, -2, -3), D(1, -1, 0)$ – вершины пирамиды.

Найти:

а) наименьшее ребро грани (ADB);

б) наибольший угол грани (ADB);

в) площадь грани (DBC);

г) объем пирамиды $ABCD$;

д) длину высоты AM пирамиды.

6.3. Доказать, что векторы $\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{c}$ образуют базис. Найти координаты вектора $\overline{d}$ в этом базисе, если $\overline{a} = (1; -1; 1)$, $\overline{b} = (-5; -3; 1)$, $\overline{c} = (2; -1; 0)$, $\overline{d} = (-15; -10; 5)$.

Вариант 26

1.1. Даны матрицы A и B. Найти AB, BA, A^TB, B^TA^T, если

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 5 & 1 \\ 3 & 1 & -2 & 7 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & -2 \\ -1 & 3 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$$

1.2. Найти значение выражения $P(A) = 3A^2 - 2A + 5E$, если $A = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$

2.1. Вычислить определитель второго порядка $\begin{vmatrix} 7 & -2 \\ 0 & 8 \end{vmatrix}$

2.2. Вычислить определитель по правилу Сарруса (или по правилу треугольника), а также вычислить минор M_{22} и алгебраическое дополнение A_{13}.

$$\begin{vmatrix} -1 & 3 & 7 \\ 4 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix}$$

2.3. Вычислить определитель, разлагая его по элементам 1-ой строки и по элементам 3-его столбца. Результаты сравнить.

$$\begin{vmatrix} 3 & 0 & 12 \\ -1 & 1 & 5 \\ 2 & 12 & 3 \end{vmatrix}$$

2.4. Вычислить определители, получив нули в какой-либо строке или столбце и, разложив по элементам этой строки или столбца

$$1) \begin{vmatrix} 11 & 5 & 4 \\ -1 & 6 & 2 \\ 2 & 10 & -3 \end{vmatrix}; \qquad 2) \begin{vmatrix} 1 & -4 & 1 & 1 \\ 5 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -2 & 2 \\ 1 & 0 & 4 & 3 \end{vmatrix}.$$

3.1. Решить уравнение $A \cdot X = B$, если $A = \begin{pmatrix} -5 & -7 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 6 & 10 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$

3.2. Найти обратную матрицу и сделать проверку $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

4.1. Найти ранг матрицы $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 2 & -3 \\ 3 & -2 & -1 & 1 & -2 \\ 2 & -5 & 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$

5.1. Решить систему а) по формулам Крамера, б) матричным методом, в) методом Гаусса

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 33, \\ 7x_1 - 5x_2 = 24, \\ 4x_1 + 11x_3 = 39 \end{cases}$$

5.2. Проверить совместность системы и в случае совместности решить ее методом Гаусса

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 5, \\ x_1 + x_2 + 5x_3 = 6, \\ 3x_1 + 4x_2 + 9x_3 = 0 \end{cases}$$

5.3. Найти общее решение системы методом Гаусса

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 + 6x_4 = 2, \\ x_2 - 2x_3 + 2x_4 = -7, \\ 2x_1 + x_2 + 4x_3 + 2x_4 = 3 \end{cases}$$

6.1. Даны три вектора $\overline{a} = -3\overline{i} + 8\overline{j}, \overline{b} = 2\overline{i} + 3\overline{j} - 2\overline{k}$ и $\overline{c} = 8\overline{i} + 12\overline{j} - 8\overline{k}$.

Вычислить:

а) скалярное произведение векторов $3\overline{b}, (-8\overline{c} + 4\overline{a})$;

б) векторное произведение векторов $-7\overline{a}, 9\overline{c}$;

в) смешанное произведение векторов $4\overline{a}, -6\overline{b}, 5\overline{c}$;

Проверить будут ли:

г) коллинеарны или перпендикулярны векторы $\overline{b}, \overline{c}$;

д) компланарны три вектора $4\overline{a}, -6\overline{b}, 9\overline{c}$.

6.2. Даны точки $A(3, 4, 5), B(1, 2, 1), C(-2, -3, 6), D(3, -6, -3)$ – вершины пирамиды.

Найти:

а) наименьшее ребро грани (ABC);

б) наибольший угол грани (ABC);

в) площадь грани (DBC);

г) объем пирамиды $ABCD$;

д) длину высоты AM пирамиды.

6.3. Доказать, что векторы $\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{c}$ образуют базис. Найти координаты вектора $\overline{d}$ в этом базисе, если $\overline{a} = (1; 3; 4)$, $\overline{b} = (-2; 5; 0)$, $\overline{c} = (3; -2; -4)$, $\overline{d} = (13; -5; -4)$.

Вариант 27

1.1. Даны матрицы A и B. Найти AB, BA, A^TB, B^TA^T, если

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -4 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 3 \\ 4 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & -4 \end{pmatrix}$$

1.2. Найти значение выражения $P(A) = 2A^2 + 5A - 4E$, если $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}$

2.1. Вычислить определитель второго порядка $\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 4 & 11 \end{vmatrix}$

2.2. Вычислить определитель по правилу Сарруса (или по правилу треугольника), а также вычислить минор M_{32} и алгебраическое дополнение A_{11}.

$$\begin{vmatrix} 2 & -5 & 3 \\ 4 & -1 & 10 \\ 3 & 2 & -7 \end{vmatrix}$$

2.3. Вычислить определитель, разлагая его по элементам 1-ой строки и по элементам 3-его столбца. Результаты сравнить.

$$\begin{vmatrix} 1 & 5 & -3 \\ -1 & 1 & -7 \\ 9 & 3 & -2 \end{vmatrix}$$

2.4. Вычислить определители, получив нули в какой-либо строке или столбце и, разложив по элементам этой строки или столбца

$$1) \begin{vmatrix} 3 & 4 & 5 \\ -2 & 2 & 6 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}; \qquad 2) \begin{vmatrix} 0 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 5 & -2 & 0 \\ -3 & 1 & 1 & 6 \\ 3 & 1 & -8 & 1 \end{vmatrix}$$

3.1. Решить уравнение $A \cdot X = B$, если $A = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & -8 \end{pmatrix}$

3.2. Найти обратную матрицу и сделать проверку $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$

4.1. Найти ранг матрицы $\begin{pmatrix} -4 & -1 & -4 & -6 & 8 & 13 \\ -2 & 1 & -2 & -3 & 7 & 11 \\ 4 & 7 & 4 & 6 & 4 & 5 \\ 2 & 5 & 2 & 3 & 5 & 7 \end{pmatrix}$

5.1. Решить систему а) по формулам Крамера, б) матричным методом, в) методом Гаусса

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 4, \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 0, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 1 \end{cases}$$

5.2. Проверить совместность системы и в случае совместности решить ее методом Гаусса

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 - 4x_3 = 1, \\ 7x_1 - 9x_2 - x_3 = 3, \\ 5x_1 - 6x_2 + 3x_3 = 7 \end{cases}$$

5.3. Найти общее решение системы методом Гаусса

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 3x_3 - 3x_4 = 3, \\ x_1 - 3x_2 + x_3 = -2, \\ 4x_1 - 7x_2 + 5x_3 - x_4 = -1 \end{cases}$$

6.1. Даны три вектора $\overline{a} = 2\overline{i} - 4\overline{j} - 2\overline{k}, \overline{b} = -9\overline{i} + 2\overline{k}$ и $\overline{c} = 3\overline{i} + 5\overline{j} - 7\overline{k}$.

Вычислить:

а) скалярное произведение векторов $3\overline{b}, (-8\overline{c} + 2\overline{a})$;

б) векторное произведение векторов $-5\overline{b}, 4\overline{c}$;

в) смешанное произведение векторов $7\overline{a}, 5\overline{b}, -\overline{c}$;

Проверить будут ли:

г) коллинеарны или перпендикулярны векторы $\overline{a}, \overline{c}$;

д) компланарны три вектора $7\overline{a}, 5\overline{b}, -\overline{c}$.

6.2. Даны точки $A(-7, -5, 6), B(-2, 5, 10), C(8, 6, 4), D(7, 10, 8)$ – вершины пирамиды.

Найти:

а) наименьшее ребро грани (DBC);

б) наибольший угол грани (DBC);

в) площадь грани (ABD);

г) объем пирамиды $ABCD$;

д) длину высоты CM пирамиды.

6.3. Доказать, что векторы $\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{c}$ образуют базис. Найти координаты вектора $\overline{d}$ в этом базисе, если $\overline{a} = (-1; 1; 2)$, $\overline{b} = (2; -3; -5)$, $\overline{c} = (-6; 3; 1)$, $\overline{d} = (28; -19; -7)$.

Вариант 28

1.1. Даны матрицы A и B. Найти AB, BA, A^TB, B^TA^T, если

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & -1 & 4 \\ 3 & 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$$

1.2. Найти значение выражения $P(A) = 5A^T - A^2 + E$, если $A = \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

2.1. Вычислить определитель второго порядка $\begin{vmatrix} 12 & 1 \\ 30 & 2 \end{vmatrix}$

2.2. Вычислить определитель по правилу Сарруса (или по правилу треугольника), а также вычислить минор M_{12} и алгебраическое дополнение A_{21}.

$$\begin{vmatrix} 10 & -1 & 5 \\ 1 & 3 & 6 \\ 2 & 4 & -1 \end{vmatrix}$$

2.3. Вычислить определитель, разлагая его по элементам 1-ой строки и по элементам 3-его столбца. Результаты сравнить.

$$\begin{vmatrix} 2 & 4 & -1 \\ 6 & 9 & -3 \\ 7 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

2.4. Вычислить определители, получив нули в какой-либо строке или столбце и, разложив по элементам этой строки или столбца

$$1) \begin{vmatrix} 8 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 1 \\ 7 & -1 & 0 \end{vmatrix}; \qquad 2) \begin{vmatrix} 7 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 7 & -2 & 5 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -3 & 1 & 3 \end{vmatrix}$$

3.1. Решить уравнение $A \cdot X = B$, если $A = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

3.2. Найти обратную матрицу и сделать проверку $\begin{pmatrix} 1 & 3 & -5 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & 5 & -7 \end{pmatrix}$

4.1. Найти ранг матрицы $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 4 \\ 1 & -1 & 3 & 5 \\ -1 & 1 & -3 & -5 \\ -2 & 2 & -6 & -10 \\ 1 & -2 & 4 & 7 \end{pmatrix}$

5.1. Решить систему а) по формулам Крамера, б) матричным методом, в) методом Гаусса

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 12, \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 16, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 8 \end{cases}$$

5.2. Проверить совместность системы и в случае совместности решить ее методом Гаусса

$$\begin{cases} 5x_1 + 6x_2 - 2x_3 = 2, \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 9, \\ 3x_1 + 3x_2 - x_3 = 1 \end{cases}$$

5.3. Найти общее решение системы методом Гаусса

$$\begin{cases} 5x_1 + 6x_2 + x_3 + 10x_4 = 3, \\ 5x_1 + x_2 + 2x_3 + 5x_4 = 7, \\ 4x_1 + 3x_2 + x_3 + 7x_4 = 4 \end{cases}$$

6.1. Даны три вектора $\overline{a} = 9\overline{i} - 3\overline{j} + \overline{k}, \overline{b} = 3\overline{i} - 15\overline{j} + 21\overline{k}$ и $\overline{c} = \overline{i} - 5\overline{j} + 7\overline{k}$.

Вычислить:

а) скалярное произведение векторов $(7\overline{a} - \overline{c}), 5\overline{b}$;

б) векторное произведение векторов $-6\overline{a}, 4\overline{c}$;

в) смешанное произведение векторов $2\overline{a}, -7\overline{b}, 3\overline{c}$;

Проверить будут ли:

г) коллинеарны или перпендикулярны векторы $\overline{b}, \overline{c}$;

д) компланарны три вектора $2\overline{a}, -7\overline{b}, 4\overline{c}$.

6.2. Даны точки $A(4, 6, 8), B(5, 5, -3), C(3, -2, 4), D(1, 2, 2)$ – вершины пирамиды.

Найти:

а) наименьшее ребро грани (ADC);

б) наибольший угол грани (ADC);

в) площадь грани (ABC);

г) объем пирамиды $ABCD$;

д) длину высоты DM пирамиды.

6.3. Доказать, что векторы $\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{c}$ образуют базис. Найти координаты вектора $\overline{d}$ в этом базисе, если $\overline{a} = (2; -1; 4)$, $\overline{b} = (-3; 0; -2)$, $\overline{c} = (4; 5; -3)$, $\overline{d} = (0; 11; -14)$.

Вариант 29

1.1. Даны матрицы A и B. Найти AB, BA, A^TB, B^TA^T, если

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 \\ -5 & -3 & -4 & 4 \\ 5 & 1 & 4 & -3 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 7 & -3 \\ 11 & 0 \\ 5 & 4 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$$

1.2. Найти значение выражения $P(A) = 3A^2 + 2A^T - 5E$, если $A = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$

2.1. Вычислить определитель второго порядка $\begin{vmatrix} 7 & 4 \\ -2 & 3 \end{vmatrix}$

2.2. Вычислить определитель по правилу Саррюса (или по правилу треугольника), а также вычислить минор M_{23} и алгебраическое дополнение A_{12}.

$$\begin{vmatrix} -1 & 5 & 10 \\ 2 & 6 & 4 \\ -4 & 3 & 7 \end{vmatrix}$$

2.3. Вычислить определитель, разлагая его по элементам 1-ой строки и по элементам 3-его столбца. Результаты сравнить.

$$\begin{vmatrix} 8 & 0 & -1 \\ 4 & 4 & 2 \\ 1 & 9 & 2 \end{vmatrix}$$

2.4. Вычислить определители, получив нули в какой-либо строке или столбце и, разложив по элементам этой строки или столбца

$$1)\begin{vmatrix} -1 & 9 & 10 \\ 4 & 1 & 5 \\ 1 & 0 & -6 \end{vmatrix}; \qquad 2)\begin{vmatrix} 4 & 0 & 1 & 1 \\ -4 & 2 & 5 & 3 \\ 3 & 1 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 4 & -5 \end{vmatrix}$$

3.1. Решить уравнение $A \cdot X = B$, если $A = \begin{pmatrix} 4 & -5 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -9 & 5 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$

3.2. Найти обратную матрицу и сделать проверку $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 4 \end{pmatrix}$

4.1. Найти ранг матрицы $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 2 & -5 \\ -3 & 1 & 2 & -17 \\ 2 & -3 & -2 & 10 \\ 3 & 2 & 4 & -7 \end{pmatrix}$

5.1. Решить систему а) по формулам Крамера, б) матричным методом, в) методом Гаусса

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 14, \\ 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 = -16, \\ 3x_1 - 2x_2 - 5x_3 = -8 \end{cases}$$

5.2. Проверить совместность системы и в случае совместности решить ее методом Гаусса

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 - 2x_3 = 6, \\ 5x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 4, \\ -2x_1 + 5x_2 - 4x_3 = 0 \end{cases}$$

5.3. Найти общее решение системы методом Гаусса

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 3x_3 = -2, \\ x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = 1, \\ 4x_1 - 2x_2 + 6x_3 + 3x_4 = 7 \end{cases}$$

6.1. Даны три вектора $\overline{a} = -2\overline{i} + 4\overline{j} - 3\overline{k}, \overline{b} = 5\overline{i} + \overline{j} - 2\overline{k}$ и $\overline{c} = 7\overline{i} + 4\overline{j} - \overline{k}$.

Вычислить:

а) скалярное произведение векторов $(-9\overline{a} + \overline{b}), 7\overline{c}$;

б) векторное произведение векторов $-8\overline{b}, 5\overline{c}$;

в) смешанное произведение векторов $\overline{a}, -6\overline{b}, 2\overline{c}$;

Проверить будут ли:

г) коллинеарны или перпендикулярны векторы $\overline{b}, \overline{a}$;

д) компланарны три вектора $\overline{a}, -6\overline{b}, 5\overline{c}$.

6.2. Даны точки $A(1,3,1), B(-1,4,6), C(-2,-3,4), D(3,4,-4)$ – вершины пирамиды.

Найти:

а) наименьшее ребро грани (ABD);

б) наибольший угол грани (ABD);

в) площадь грани (DBC);

г) объем пирамиды $ABCD$;

д) длину высоты AM пирамиды.

6.3. Доказать, что векторы $\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{c}$ образуют базис. Найти координаты вектора $\overline{d}$ в этом базисе, если $\overline{a} = (5;4;1)$, $\overline{b} = (-3;5;2)$, $\overline{c} = (2;-1;3)$, $\overline{d} = (7;23;4)$.

Вариант 30

1.1. Даны матрицы A и B. Найти AB, BA, A^TB, B^TA^T, если

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 3 & -2 & -1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} -10 & 3 & 2 \\ 5 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

1.2. Найти значение выражения $P(A) = 2A^2 - 4A^T + 5A$, если $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$

2.1. Вычислить определитель второго порядка $\begin{vmatrix} 12 & -30 \\ 5 & 4 \end{vmatrix}$

2.2. Вычислить определитель по правилу Сарруса (или по правилу треугольника), а также вычислить минор M_{21} и алгебраическое дополнение A_{32}.

$$\begin{vmatrix} 4 & 5 & 7 \\ 6 & 7 & 1 \\ 7 & -2 & 1 \end{vmatrix}$$

2.3. Вычислить определитель, разлагая его по элементам 1-ой строки и по элементам 3-его столбца. Результаты сравнить.

$$\begin{vmatrix} 2 & 5 & 4 \\ 5 & -2 & 8 \\ 7 & 4 & 1 \end{vmatrix}$$

2.4. Вычислить определители, получив нули в какой-либо строке или столбце и, разложив по элементам этой строки или столбца

$$1)\begin{vmatrix} -2 & 3 & -1 \\ 4 & 5 & -6 \\ 7 & 1 & 1 \end{vmatrix}; \qquad 2)\begin{vmatrix} 3 & 2 & -4 & 0 \\ 1 & 4 & -2 & 0 \\ -7 & 0 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & -5 & 1 \end{vmatrix}$$

3.1. Решить уравнение $A \cdot X = B$, если $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 7 & -5 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$

3.2. Найти обратную матрицу и сделать проверку $\begin{pmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

4.1. Найти ранг матрицы $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & -2 & 3 & 4 \\ 2 & 2 & 4 & -1 & 3 & 6 \\ 3 & 3 & 5 & -2 & 3 & 6 \\ 2 & 2 & 8 & -3 & 9 & 14 \end{pmatrix}$

5.1. Решить систему а) по формулам Крамера, б) матричным методом, в) методом Гаусса

$$\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 11, \\ 2x_1 - x_2 - x_3 = 4, \\ 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 11 \end{cases}$$

5.2. Проверить совместность системы и в случае совместности решить ее методом Гаусса

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 2, \\ 5x_1 + x_2 + 3x_3 = 4, \\ 7x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 1 \end{cases}$$

5.3. Найти общее решение системы методом Гаусса

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 7x_3 + x_4 = 1, \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 0, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 = 4 \end{cases}$$

6.1. Даны три вектора $\overline{a} = -9\overline{i} + 4\overline{j} - 5\overline{k}, \overline{b} = \overline{i} - 2\overline{j} + 4\overline{k}$ и $\overline{c} = -5\overline{i} + 10\overline{j} - 20\overline{k}$.

Вычислить:

а) скалярное произведение векторов $(9\overline{a} - 2\overline{b}), 4\overline{c}$;

б) векторное произведение векторов $-6\overline{b}, 7\overline{c}$;

в) смешанное произведение векторов $-2\overline{a}, 7\overline{b}, 5\overline{c}$;

Проверить будут ли:

г) коллинеарны или перпендикулярны векторы $\overline{b}, \overline{c}$;

д) компланарны три вектора $-2\overline{a}, 7\overline{b}, 4\overline{c}$.

6.2. Даны точки $A(2, 4, 1), B(-3, -2, 4), C(3, 5, -2), D(4, 2, -3)$ – вершины пирамиды.

Найти:

а) наименьшее ребро грани (ABC);

б) наибольший угол грани (ABC);

в) площадь грани (ABD);

г) объем пирамиды $ABCD$;

д) длину высоты CM пирамиды.

6.3. Доказать, что векторы $\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{c}$ образуют базис. Найти координаты вектора $\overline{d}$ в этом базисе, если $\overline{a} = (11; 1; 2)$, $\overline{b} = (-3; 3; 4)$, $\overline{c} = (-4; -2; 7)$, $\overline{d} = (-5; 11; -15)$.

§ 8. Дополнительные задачи

1. Решить матричные уравнения

$$1)\quad 2\cdot\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 4 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} + X = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ -7 & 8 & 9 \end{pmatrix}^T;$$

$$2)\quad 3\cdot X^T + \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = 2\cdot\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & -4 \end{pmatrix};$$

$$3)\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}\cdot X\cdot\begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 & 16 \\ 9 & 10 \end{pmatrix};$$

$$4)\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 4 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}\cdot X + \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 6 \\ -1 & 2 \\ 5 & 12 \end{pmatrix}.$$

2. Вычислить:

$$1)\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}^2; \quad 2)\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^3; \quad 3)\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^n; \quad 4)\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}^n.$$

3. Найти A^{100}, где $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

4. Найти a, b, c, d, e, f, если

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 8 \\ 2 & -4 & 16 \\ -3 & 1 & -9 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} a & c & 5 \\ b & 1 & e \\ 3 & d & f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

5. Вычислить $\sqrt{\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}$.

6. Решить систему матричных уравнений: $\begin{cases} X + Y = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ 2X + 3Y = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{cases}$

7. Вычислить $P(A)$, если $P(x) = x^4 - 2x^2 + 3x - 5$ и $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

8. Доказать, что: $\begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 \\ 1 & x_2 & x_2^2 \\ 1 & x_3 & x_3^2 \end{vmatrix} = (x_2 - x_1)(x_3 - x_1)(x_3 - x_2).$

9. Доказать справедливость равенства

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ tg\alpha & tg\beta & tg\gamma \\ tg^2\alpha & tg^2\beta & tg^2\gamma \end{vmatrix} = \frac{\sin(\alpha-\beta)\sin(\beta-\gamma)\sin(\gamma-\alpha)}{\cos^2\alpha\cos^2\beta\cos^2\gamma}$$

10. Решить уравнения:

1) $\begin{vmatrix} 1 & 3 & x \\ 4 & 5 & -1 \\ 2 & -1 & 5 \end{vmatrix} = 0;$ 2) $\begin{vmatrix} 3 & x & -4 \\ 2 & -1 & 3 \\ x+10 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0.$

11. Решить неравенства:

1) $\begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 1 & x & -2 \\ -1 & 2 & -1 \end{vmatrix} < 1;$ 2) $\begin{vmatrix} 2 & x+2 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 5 & -3 & x \end{vmatrix} > 0.$

12. Вычислить определитель n-го порядка:

1) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 5 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 3 & 0 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 3 & 4 \end{vmatrix};$ 4) $\begin{vmatrix} 1 & a & 0 & ... & 0 & 0 \\ 1 & 1+a & a & ... & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1+a & ... & 0 & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... & .. \\ 0 & 0 & 0 & ... & 1+a & a \\ 0 & 0 & 0 & ... & 1 & 1+a \end{vmatrix};$

2) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 8 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 3 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 7 & 2 & 3 & 2 & 0 & 0 \\ 5 & -1 & 3 & 5 & 7 & -5 \\ 2 & 3 & 7 & 2 & 2 & -1 \end{vmatrix};$ 5) $\begin{vmatrix} x+1 & 1 & 1 & ... & 1 & 1 \\ -1 & x & 0 & ... & 0 & 0 \\ 0 & -1 & x & ... & 0 & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... & .. \\ 0 & 0 & 0 & ... & x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & ... & -1 & x \end{vmatrix};$

3) $\begin{vmatrix} a+1 & x & x & ... & x & x \\ 1 & a & x & ... & x & x \\ 1 & 0 & a & ... & x & x \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ 1 & 0 & 0 & ... & a & x \end{vmatrix};$ 6) $\begin{vmatrix} x & a & a & ... & a \\ b & x & 0 & ... & 0 \\ b & 0 & x & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ b & 0 & 0 & ... & x \end{vmatrix}.$

13. Решить данную систему уравнений при всех возможных значениях параметра t:

$$\begin{cases} 2x - y + 3z = -7, \\ x + 2y - 6z = t, \\ tx + 5y - 15z = 8 \end{cases}$$

14. При каких значениях λ однородная система уравнений

$$\begin{cases} -\lambda x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 0, \\ x_1 - \lambda x_2 + \cdots + x_n = 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots , \\ x_1 + x_2 + \cdots - \lambda x_n = 0 \end{cases}$$

имеет ненулевые решения?

15. Установить число линейно независимых уравнений в данной системе и найти ее общее решение:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 - 2x_4 - 2x_5 = 0, \\ 2x_1 + 3x_2 - 2x_3 - 5x_4 - 4x_5 = 0, \\ x_1 - x_2 - x_3 - 2x_5 = 0, \\ x_1 - 2x_2 - x_3 + x_4 - 2x_5 = 0 \end{cases}$$

16. Исследовать данную систему уравнений и найти ее общее решение в зависимости от значения параметра λ

$$\begin{cases} 5x_1 - 3x_2 + 2x_3 + x_4 = 3, \\ 4x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 7x_4 = 1, \\ 3x_1 - 6x_2 - x_3 - 5x_4 = 9, \\ 7x_1 - 3x_2 + 7x_3 + 17x_4 = \lambda \end{cases}$$

17. Указать, при каких λ данная система уравнений имеет решения или несовместна:

$$\begin{cases} \lambda x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1, \\ x_1 + \lambda x_2 + x_3 + x_4 = 1, \\ x_1 + x_2 + \lambda x_3 + x_4 = 1, \\ x_1 + x_2 + x_3 + \lambda x_4 = 1 \end{cases}$$

18. Найти решения системы при всех значениях λ :

$$\begin{cases} \lambda x_1 + x_2 + x_3 = 0, \\ x_1 + \lambda x_2 + x_3 = 0, \\ x_1 + x_2 + \lambda x_3 = 0 \end{cases}$$

19. Найти все значения a, при которых ранг матрицы

$$1)\begin{pmatrix} 1 & 3 & -4 \\ a & 0 & 1 \\ 4 & 3 & -3 \end{pmatrix} \text{равен } 2; \qquad 2)\begin{pmatrix} a & 2 & 3 \\ 0 & a-2 & 4 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix} \text{равен } 2;$$

$$3)\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 3 & a & -1 \end{pmatrix} \text{равен } 3.$$

20. В зависимости от параметра λ исследовать ранг матрицы

$$1)\begin{pmatrix} 1 & \lambda & -1 & 2 \\ 2 & -1 & \lambda & 5 \\ 1 & 10 & -6 & 1 \end{pmatrix}; \qquad 2)\begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & \lambda & 2 \\ 1 & -3 & 0 & -6 \\ -2 & 4 & 6 & 8 \end{pmatrix}.$$

21. Даны три вектора: $\overline{a} = 2\overline{i} - \overline{j} + 3\overline{k}$, $\overline{b} = \overline{i} - 3\overline{j} + 2\overline{k}$, $\overline{c} = 3\overline{i} + 2\overline{j} - 4\overline{k}$. Найти вектор $\overline{x}$, удовлетворяющий следующим условия: $\overline{x}\cdot\overline{a} = -5$, $\overline{x}\cdot\overline{b} = -11$, $\overline{x}\cdot\overline{c} = 20$.

22. Вектор $\overline{x}$, перпендикулярный к оси OZ и вектору $\overline{a} = (-8; -15; 3)$, образует острый угол с осью OX. Зная, что $|\overline{x}| = 51$, найти координаты $\overline{x}$.

23. Объем пирамиды $V = 5$, три ее вершины находятся в точках $A(2; 1; -1)$, $B(3; 0; 1)$, $C(2; -1; 3)$. Найти координаты четвертой вершины D, если известно, что она лежит на оси OY.

24. Даны два вектора $\overline{a} = (8; 4; 1)$, $\overline{b} = (2; -2; 1)$. Найти вектор $\overline{c}$, компланарный векторам $\overline{a}$ и $\overline{b}$, перпендикулярный к вектору $\overline{a}$, равный ему по длине и образующий с вектором $\overline{b}$ тупой угол.

25. Убедившись, что векторы $\overline{a} = 7\overline{i} + 6\overline{j} - 6\overline{k}$ и $\overline{b} = 6\overline{i} + 2\overline{j} + 9\overline{k}$ можно рассматривать как ребра куба, найти его третье ребро.

26. Даны разложения векторов, служащих сторонами треугольника, по двум взаимно перпендикулярным ортам: $\overrightarrow{AB} = 5\overline{a} + 2\overline{b}$, $\overrightarrow{BC} = 2\overline{a} - 4\overline{b}$, и $\overrightarrow{CA} = -7\overline{a} + 2\overline{b}$. Вычислить длины медианы $\overrightarrow{AM}$ и высоты $\overrightarrow{AD}$ треугольника ABC.

27. Доказать компланарность векторов $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}$, зная, что $\overline{a}\times\overline{b}+\overline{b}\times\overline{c}+\overline{c}\times\overline{a} = 0$

§ 9. Тестовые задания

Задание № 1 (◯ – *выберите один вариант ответа*)

Определитель $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}$ равен ...

1) -1 2) -7

3) 3 4) 7

Задание № 2 (◯ – *выберите один вариант ответа*)

Определитель $\begin{vmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}$ равен ...

1) -1 2) 1

3) 5 4) -5

Задание № 3 (✎ – *впишите ответ*)

Если определитель $\begin{vmatrix} -3 & a \\ b & 7 \end{vmatrix}$ равен $\dfrac{1}{6}$, то определитель $\begin{vmatrix} 24 & 0 & 0 \\ 23 & -3 & a \\ 22 & b & 7 \end{vmatrix}$ равен ...

✍ ________

Задание № 4 (◯ – *выберите один вариант ответа*)

Если $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 4 & -5 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, то матрица $C = 2A + B$ имеет вид ...

1) $\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 8 & -8 \end{pmatrix}$ 2) $\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}$

3) $\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 8 & -8 \end{pmatrix}$ 4) $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 8 & -8 \end{pmatrix}$

Задание № 5 ($\bigcirc$ – *выберите один вариант ответа*)

Даны матрицы $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$. Тогда решением матричного уравнения $A + X = B$ является ...

1) $\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$

2) $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

3) $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$

4) $\begin{pmatrix} -2 & -1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$

Задание № 6 ($\Leftrightarrow$ – *установите соответствие*)

Даны матрица $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$ и транспонированная матрица $B = A^T = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$. Установите соответствие между элементами транспонированной матрицы b_{ij} и элементами матрицы A

1) b_{11}

2) b_{12}

3) b_{21}

4) b_{22}

a) 2

b) 1

c) 4

d) -3

e) 3

f) -1

Задание № 7 ($\bigcirc$ – *выберите один вариант ответа*)

Даны матрицы $A = \begin{pmatrix} -3 & 4 & 2 \\ 1 & -6 & 0 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} 12 & 20 & 28 \\ -4 & 3 & 27 \end{pmatrix}$. Тогда матрица X, являющаяся решением уравнения $2A + 3X = B$, равна ...

1) $\begin{pmatrix} 18 & 12 & 24 \\ -6 & 15 & 27 \end{pmatrix}$

2) $\begin{pmatrix} 15 & 16 & 26 \\ -5 & 9 & 27 \end{pmatrix}$

3) $\begin{pmatrix} 2 & 4 & 8 \\ -2 & -3 & 9 \end{pmatrix}$

4) $\begin{pmatrix} 6 & 4 & 8 \\ -2 & 5 & 9 \end{pmatrix}$

Задание № 8 ($\square$ – *выберите несколько вариантов ответа*)

Для матриц $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 3 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$ и транспонированных к ним определены произведения ...

1) AB

2) AB^T

3) $B^T A$

4) BA

5) $B^T A^T$

Задание № 9 ($\bigcirc$ – *выберите один вариант ответа*)

Если $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, тогда матрица $C = A \cdot B$ имеет вид ...

1) $\begin{pmatrix} 8 \\ 10 \end{pmatrix}$

2) $\begin{pmatrix} 10 \\ 8 \end{pmatrix}$

3) $\begin{pmatrix} 10 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix}$

4) $\begin{pmatrix} 10 \\ 9 \end{pmatrix}$

Задание № 10 ($\bigcirc$ – *выберите один вариант ответа*)

Даны матрицы A размерности 3×5 и B размерности 5×3. Произведение AB существует и имеет размерность ...

1) 3×3

2) 3×5

3) 5×3

4) 5×5

Задание № 11 ($\bigcirc$ – *выберите один вариант ответа*)

Для матриц A и B найдено произведение AB, причем $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 5 & 1 \end{pmatrix}$.

Тогда матрицей B может быть матрица ...

1) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -4 \end{pmatrix}$

2) $\begin{pmatrix} -4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$

3) $\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}$

4) $\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$

Задание № 12 ($\Leftrightarrow$ – *установите соответствие*)

Система линейных уравнений $\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 4, \\ 4x_1 + 5x_2 = 6 \end{cases}$, решается по правилу Крамера. Установите соответствие между определителями системы и их значениями.

1) Δ

2) Δ_1

3) Δ_2

a) -4

b) 2

c) 6

d) 14

Задание № 13 ($\square$ – *выберите несколько вариантов ответа*)

Ранг матрицы A равен k. Правильными утверждениями являются ...

1) все миноры порядка $k-1$ матрицы A равны нулю

2) число строк матрицы A может быть больше k

3) любой минор матрицы A порядка $k+1$ равен нулю

4) матрица A имеет отличный от нуля минор порядка k

Задание № 14 ($\bigcirc$ – *выберите один вариант ответа*)

Если $(x_0; y_0; z_0)$ – решение системы $\begin{cases} x + y + z = -2, \\ x - y = -7, \\ 2x + 3y = 1 \end{cases}$, тогда $x_0 - y_0 + z_0$ равно ...

1) -6

2) -2

3) 6

4) -8

Задание № 15 ($\bigcirc$ – *выберите один вариант ответа*)

Расширенная матрица системы уравнений $\begin{cases} x - 2y - z = 3, \\ 4x + 5y + z = 6 \end{cases}$ имеет размерность ...

1) 2×3

2) 4×2

3) 2×4

4) 3×2

Задание № 16 (✎ – *впишите ответ*)

Разность между числом свободных и базисных переменных системы уравнений $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 7x_3 + 11x_4 - x_5 = 0, \\ \qquad x_2 - 4x_3 + x_4 + 11x_5 = 0, \\ \qquad\qquad x_3 + x_4 + 2x_5 = 0 \end{cases}$ равна ...

✍ ______

Задание № 17 (◯ – *выберите один вариант ответа*)

В системе уравнений $\begin{cases} x_1 - 3x_2 - x_3 + 2x_4 + x_5 = 0, \\ x_2 + x_3 - 2x_4 + x_5 = 0, \\ 2x_3 + x_4 - 4x_5 = 0 \end{cases}$ независимыми (свободными) переменными можно считать ...

1) x_5 **2)** $x_1,\ x_2,\ x_3$

3) $x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4,\ x_5$ **4)** $x_4,\ x_5$

Задание № 18 (⇔ – *установите соответствие*)

Установите соответствие между системой линейных уравнений и ее расширенной матрицей.

1) $\begin{cases} x_1 + x_2 = 3, \\ -x_2 + x_3 - 4 = 0, \\ -3x_1 + x_2 - x_3 = 0 \end{cases}$

2) $\begin{cases} -2x_1 + x_3 = -3, \\ 2x_2 + x_3 = 0, \\ -3x_1 + 2x_2 = 4 \end{cases}$

3) $\begin{cases} x_1 + x_3 - 3 = 0, \\ x_2 + x_3 = 4, \\ -3x_1 + x_2 + x_3 = 2 \end{cases}$

4) $\begin{cases} 3x_1 - x_2 + x_3 = 4, \\ x_1 + x_3 = 0, \\ -2x_1 + x_3 - 1 = 0 \end{cases}$

a) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 4 \\ -3 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ -3 & 2 & 0 & 4 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 1 & 4 \\ -3 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

e) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 3 \\ -1 & 1 & -4 & 0 \\ -3 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

f) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 4 \\ -3 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

Ответы

Дополнительные задачи

1. 1) $X = \begin{pmatrix} 1 & -13 \\ -2 & 0 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}$; 2) $X = \begin{pmatrix} -2 & 1/3 \\ 1/3 & -4 \end{pmatrix}$; 3) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$; 4) $\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$.
2. 1) $\begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$; 2) $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 4 & 0 & 9 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; 3) $\begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$; 4) $\begin{pmatrix} \lambda^n & n\lambda^{n-1} \\ 0 & \lambda^n \end{pmatrix}$.
3. $A^{100} = \begin{pmatrix} 1 & -20 & 100 \\ -100 & 9901 & -4950 \\ -200 & 19800 & -9899 \end{pmatrix}$. **4.** $a = -6$, $b = 9$, $c = -2/3$, $d = 1/3$, $e = -15/2$, $f = -5/2$. **5.** $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $A_2 = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.
6. $X = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, $Y = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. **7.** $\begin{pmatrix} -9 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -5 \end{pmatrix}$. **10.** 1) $x = -3$; 2) $x_1 = -10, x_2 = 2$. **11.** 1) $x > 3,5$; 2) $-6 < x < -4$. **12.** 1) 168; 2) 42; 3) $a^n + (a-x)^{n-1}$; 4) 1; 5) $(x^{n+1}-1)x - 1$; 6) $x^n - (n-1)abx^{n-2}$. **13.** при $t \neq -1$ и $t \neq 5$ система несовместна; если $t = 5$, то $x = -9/5$, $y = (15a + 17)/5$, $z = a$; если $t = -1$, то $x = -3$, $y = 3a + 1$, $z = a$, где a – произвольное число. **14.** $\lambda = n - 1$, $\lambda = -1$. **15.** $x_1 = x_3 + x_4 + 2x_5$, $x_2 = x_4$. **16.** при $\lambda \neq 0$ система несовместна; при $\lambda = 0$ система совместна и ее общее решение: $x_1 = (-5x_3 - 13x_4 - 3)/2$, $x_2 = (-7x_3 - 19x_4 - 7)/2$. **17.** если $\lambda = -3$, то система несовместна; если $\lambda \neq 1, \lambda \neq -3$, то $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 1/(\lambda + 3)$; если $\lambda = 1$, то решения определяются одним уравнением $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1$. **18.** если $(\lambda+2)(\lambda-1) \neq 0$, то $x_1 = x_2 = x_3 = 0$; если $\lambda = -2$, то $x_1 = x_2 = x_3$; если $\lambda = 1$, то решения определяются одним уравнением $x_1 + x_2 + x_3 = 0$. **19.** 1) $a = 3$; 2) $a_1 = 0$, $a_2 = 2$; 3) $a \neq 17$. **20.** 1) если $\lambda = 3$, ранг равен 2; если $\lambda \neq 3$, ранг равен 3; 2) если $\lambda = -3$, ранг равен 2; если $\lambda \neq -3$, ранг равен 3. **21.** $\overline{x} = 2\overline{i} + 3\overline{j} - 2\overline{k}$. **22.** $\overline{x} = (45; 24; 0)$. **23.** $D_1(0; 8; 0), D_2(0; -7; 0)$. **24.** $\overline{c} = (-5/\sqrt{2}; 11/\sqrt{2}; -4/\sqrt{2})$. **25.** $\pm(6\overline{i} - 9\overline{j} - 2\overline{k})$. **26.** $|\overrightarrow{AM}| = 6$, $|\overrightarrow{AD}| = 12\sqrt{5}/5$.

Тестовые задания

№1 2); **№2** 3); **№3** 4; **№4** 3); **№5** 2); **№6** 1)-e, 2)-f, 3)-a, 4)-c; **№7** 4); **№8** 1), 4), 5); **№9** 2); **№10** 1); **№11** 3); **№12** 1)-c, 2)-d, 3)-a; **№13** 2), 4); **№14** 4); **№15** 3); **№16** -1; **№17** 4); **№18** 1)-d, 2)-c, 3)-a, 4)-b.

Основные обозначения:

$A, B, C, ...$ – матрицы

$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ – матрица A

a_{ij} – элемент определителя или матрицы, стоящий в i-ой строке, j-ом столбце

E – единичная матрица

$\triangle$ – определитель

$detA$ или $\mid A \mid$ – определитель матрицы A

$\underset{m \times n}{A}$ – матрица размерностью m на n (m – кол-во строк, n – кол-во столбцов)

$A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}$ – транспонированная матрица

A_{ij} – алгебраическое дополнение элемента a_{ij} определителя или матрицы

M_{ij} – минор элемента a_{ij} определителя или матрицы

$A^* = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}$ – присоединенная матрица

$\tilde{A}$ – расширенная матрица

$rang(A)$ – ранг матрицы A

$\overline{a}, \overline{b}, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, ...$ – векторы

$\overline{a} = x_a\overline{i} + y_a\overline{j} + z_a\overline{k}$ или $\overline{a} = (x_a, y_a, z_a)$ – вектор $\overline{a}$ с координатами x_a, y_a и z_a

$|\overline{a}|$ – модуль (длина) вектора $\overline{a}$

$\overline{a} \cdot \overline{b}$ – скалярное произведение векторов

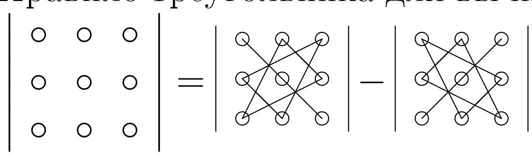
$\overline{a} \times \overline{b}$ – векторное произведение векторов

$\overline{a}\,\overline{b}\,\overline{c}$ – смешанное произведение векторов

Основные формулы:

1. Формула вычисления определителей второго порядка
$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot \ a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}$$

2. Правило Сарруса (Саррюса) для вычисления определителей третьего порядка
$$\begin{array}{|ccc|cc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{array} = \begin{array}{l} a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31} + a_{13} \cdot a_{21} \cdot a_{32} - \\ - a_{13} \cdot a_{22} \cdot a_{31} - a_{11} \cdot a_{23} \cdot a_{32} - a_{12} \cdot a_{21} \cdot a_{33}. \end{array}$$
$- \quad - \quad - \quad + \quad + \quad +$

3. Правило треугольника для вычисления определителей третьего порядка


4. Формула вычисления алгебраического дополнения
$A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot M_{ij}$

5. Разложение определителя по элементам первой строки
$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13}$$

6. Нахождение обратной матрицы A^{-1} для матрицы A
$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} A^* \text{ или } A^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}$$

7. Правило Крамера для решения системы алгебраических уравнений
$x_i = \dfrac{\Delta x_i}{\Delta}$,
где x_i - i-ая неизвестная в системе, Δ - основной определитель системы, Δx_i - вспомогательный определитель, который получается из основного заменой i-ого столбца на столбец свободных членов

8. Формула решения системы линейных уравнений с помощью обратной матрицы (матричный метод)
$X = A^{-1}B$,
где X - матрица-столбец неизвестных, A^{-1} - обратная матрица к матрице A (матрица коэффициентов при неизвестных), B - матрица-столбец свободных членов системы

9. Формула нахождения координат вектора $\overrightarrow{AB}$
   $\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A; y_B - y_A; z_B - z_A)$,
   где точка $A(x_A, y_A, z_A)$ - начало вектора, а точка $B(x_B, y_B, z_B)$ - конец вектора

10. Модуль (длина) вектора
    $|\overline{a}| = \sqrt{x_a^2 + y_a^2 + z_a^2}$ или
    $\left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$

11. Формула вычисления скалярного произведения векторов (по определению)
    $\overline{a} \cdot \overline{b} = |\overline{a}||\overline{b}|cos\alpha$,
    где α - угол между заданными векторами

12. Формула вычисления скалярного произведения векторов (при заданных координатах векторов)
    $\overline{a} \cdot \overline{b} = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2$,

13. Формула вычисления векторного произведения векторов (при заданных координатах векторов)
    $\overline{a} \times \overline{b} = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}$

14. Модуль векторного произведения векторов (по определению)
    $|\overline{a} \times \overline{b}| = |\overline{a}||\overline{b}|sin\alpha$,
    где α - угол между заданными векторами

15. Формула вычисления смешанного произведения векторов (при заданных координатах векторов)
    $\overline{a}\overline{b}\overline{c} = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}$

16. Условие перпендикулярности двух векторов
    $\overline{a} \cdot \overline{b} = 0$

17. Условие коллинеарности двух векторов
    $\frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2} = \frac{z_1}{z_2}$

18. Условие компланарности трех векторов
    $\overline{a}\,\overline{b}\,\overline{c} = 0$

19. Угол между двумя векторами
$\cos\alpha = \dfrac{\overline{a}\cdot\overline{b}}{|\overline{a}|\cdot|\overline{b}|} = \dfrac{x_a\cdot x_b + y_a\cdot y_b + z_a\cdot z_b}{\sqrt{x_a^2+y_a^2+z_a^2}\cdot\sqrt{x_b^2+y_b^2+z_b^2}}$,
где $\overline{a}$, $\overline{b}$ - векторы, образующие угол α

20. Площадь параллелограмма
$S_{\text{паралл-ма}} = |\overline{a}\times\overline{b}|$,
где $\overline{a}$, $\overline{b}$ - векторы, образующие параллелограмм

21. Площадь треугольника
$S_{\Delta} = \dfrac{1}{2}S_{\text{паралл-ма}}$

22. Объем параллелепипеда
$V_{\text{паралл-да}} = |\overline{a}\overline{b}\overline{c}|$,
где $\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{c}$ - векторы, образующие параллелепипед

23. Объем пирамиды
$V_{\text{пирамиды}} = \dfrac{1}{6}V_{\text{паралл-да}}$ или
$V_{\text{пирамиды}} = \dfrac{1}{3}S_{\text{осн}}h$.

Список литературы

1. Апатенок, Р.Ф. Элементы линейной алгебры / Р.Ф. Апатенок и др. –Мн.: Вышэйшая школа, 1977.
2. Бугров, Я.С. Элементы линейной алгебры и аналетической геометрии / Я.С. Бугров, С.М. Никольский. – М.: Наука, 1984.
3. Виноградова, П.В. Основы высшей математики. Линейная алгебра с элементами аналитической геометрии / П.В. Виноградова. – Хабаровск: Изд-во ДВГУПС, 2005.
4. Данко, П.Е. Высшая математика в упражнениях и задачах / П.Е. Данко, А.Г. Попов, Т.Я. Кожевникова. – М.: Высшая школа, 1986.
5. Кадомцев, С.Б. Аналитическая геометрия и линейная алгебра / С.Б. Кадомцев. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2003.
6. Рябушко, А.П. Сборник индивидуальных заданий по высшей математике / А.П. Рябушко, В.В. Бархатов и д.р. – Минск: Вышэйшая школа, 1990.
7. Шипачев, В.С. Высшая математика / В.С. Шипачев. – М.: Высшая школа, 1985.

Оглавление