

МИНИСТЕРСТВО ПУТЕЙ СООБЩЕНИЯ РФ
ИРКУТСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ПУТЕЙ СООБЩЕНИЯ

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИИ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

Учебное пособие
для студентов заочного отделения
всех специальностей

Под редакцией
доктора технических наук,
профессора А.П. Хоменко

Иркутск 2003

МИНИСТЕРСТВО ПУТЕЙ СООБЩЕНИЯ РФ

ИРКУТСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ПУТЕЙ СООБЩЕНИЯ

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИИ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

Учебное пособие
для студентов заочного отделения
всех специальностей

Под редакцией
доктора технических наук, профессора А. П. Хоменко

ИРКУТСК

2003

ББК 22.161.1
УДК 517.373
М 9
Медведева И.П., Попова Л.Н. Дифференциальное исчисление функции нескольких переменных: Учебное пособие. Иркутск, 2003. 61 с

Пособие содержит достаточно полное изложение основных вопросов дифференциального исчисления функции нескольких переменных, соответствующих требованиям к обязательному минимуму содержания основной обязательной программы по направлению подготовки дипломированного специалиста. Пособие снабжено большим количеством подробно разобранных примеров. В пособие включены вопросы для самоконтроля и десять вариантов заданий контрольной работы.

Пособие предназначено для студентов всех специальностей первого курса заочной формы обучения, но могут быть полезны при изучении соответствующих разделов математики на дневном отделении.

Ил. 10. Библиогр.: 11 назв.

Рецензенты: канд. физ.-мат. наук, доц. О.П. Бороздин (БрГТУ),
канд. техн. наук, доц. В.В. Макаров (ИрГУПС)

© Иркутский государственный университет путей сообщения, 2003

КОМПЛЕКС МЕТОДИЧЕСКИХ ПОСОБИЙ ПО МАТЕМАТИКЕ ДЛЯ ЗАОЧНОГО ОБУЧЕНИЯ

Под редакцией доктора технических наук,
профессора А. П. Хоменко

- Комплексные числа. Основы линейной алгебры. Системы линейных уравнений
- Векторная алгебра и аналитическая геометрия
- Введение в анализ
- Дифференциальное исчисление функций одной переменной
- **Дифференциальное исчисление функций нескольких переменных**
- Линейное программирование. Динамическое программирование
- Интегральное исчисление функций одной переменной
- Кратные, криволинейные и поверхностные интегралы. Элементы теории поля
- Обыкновенные дифференциальные уравнения
- Ряды
- Теория функций комплексной переменной. Операционное исчисление
- Вариационное исчисление. Уравнения математической физики
- Теория вероятностей
- Математическая статистика
- Марковские случайные процессы и теория игр
- Дискретная математика

1. ПОНЯТИЕ ФУНКЦИИ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

В науке и технике часто приходится встречаться с одновременным, совместным изменением нескольких переменных, связанных между собой некоторыми условиями. Так площадь прямоугольника $S = ab$ изменяется с изменением длин его сторон a и b, объем цилиндра $V = \pi r^2 h$ изменяется с изменением радиуса основания r и высоты цилиндра h

1.1. Основные определения

Пусть дано некоторое множество D пар чисел (x, y)

Функцией двух переменных называется соответствие, при котором каждой паре чисел $(x, y) \in D$ соответствует единственное число $z \in E$

При этом x и y называются *независимыми переменными* (или *аргументами*), z - зависимой переменной (или *функцией*), множество D– *областью определения* функции, а E – *множеством значений* функции.

Обозначения функции двух переменных аналогичны обозначениям функции одной переменной: $z = f(x, y)$, $z = \varphi(x, y)$, $z = z(x, y)$ и т.д.

При нахождении частного значения z_0 функции $z = f(x, y)$, которое она принимает при заданных численных значениях аргументов $x = x_0$ и $y = y_0$, пишут $z_0 = z_{|x_0, y_0}$ или $z_0 = f(x_0, y_0)$ Например, если $z = f(x, y) = xy$, то $z_{x=1;\,y=2} = f(1;\,2) = 2$.

Так как каждой паре чисел (x, y) соответствует *единственная точка* $P(x; y)$ плоскости Oxy и обратно, каждой точке $P(x; y)$ соответствует единственная пара чисел (x, y), то функцию двух переменных можно рассматривать как функцию точки $P(x; y)$. Поэтому вместо записи

$f(x;y)$ пишут $f(P)$. В этом случае областью определения функции является некоторое множество G точек плоскости Oxy

В основном мы будем рассматривать функции двух переменных, однако все сказанное целиком переносится и на функции любого числа переменных, которые определяются аналогичным образом

Функцией трех переменных называют соответствие, при котором каждой тройке $(x, y, z) \subset V$ соответствует единственное число $u \in L$.

При этом x, y и z называются *независимыми переменными* (или *аргументами*), u - зависимой переменной (или *функцией*), множество V *областью определения* функции, а L - *множеством значений* функции

Функции трех переменных обозначаются так же, как и функции одной или двух переменных $u = f(x, y, z)$, $w = w(x, y, z)$ и т.д

Функцию трех переменных $u = f(x, y, z)$ можно рассматривать как функцию точки $P(x; y, z)$, имеющей координаты x, y, z в пространственной системе координат $Oxyz$.

Область определения функции $u = f(x, y, z)$ есть некоторое множество точек в пространстве

Аналогично можно ввести понятия функций четырех, пяти и вообще n переменных

Функцию n переменных $f = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ также рассматривают как функцию точки $P = P(x_1, x_2, ..., x_n)$ n - мерного пространства и пишут $f = f(P)$

Если функция задана аналитическим выражением, причем область определения функции заранее не указана, то в качестве области определения принимают совокупность всех тех точек P, для которых данное аналитическое выражение имеет конечное действительное значение

Пример 1. **Найти область** определения функции

$$z = \ln(1 - x^2 - y^2).$$

Р е ш е н и е. Областью определения этой функции является множество всех точек, для которых выражение $\ln(1 - x^2 - y^2)$ определено, т.е. множество точек, для которых $1 - x^2 - y^2 > 0$, или $x^2 + y^2 < 1$, т.е. внутренность круга с центром в начале координат и радиусом, равным 1 (рис 1) ♦

Пример 2. Найти область определения функции $z = \dfrac{x + y}{2x - y}$.

Р е ш е н и е. Областью определения этой функции является множество точек, удовлетворяющих условию $2x - y \neq 0$, или $y \neq 2x$, т.е. все точки плоскости Oxy за исключением точек прямой $y = 2x$ (рис.2). ♦

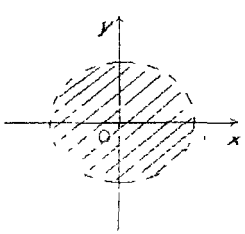


Рис. 1

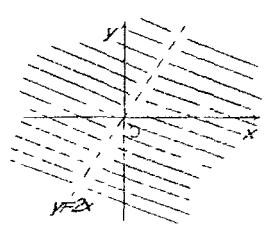


Рис 2

Пример 3. Найти область определения функции

$$u = \sqrt{4 - x^2 - y^2 - z^2}.$$

Р е ш е н и е Функция будет принимать действительные значения при условии, что $4 - x^2 - y^2 - z^2 \geq 0$, или $x^2 + y^2 + z^2 \leq 4$. То есть областью определения функции является шар радиуса 2 с центром в

начале координат. Точки граничной шаровой поверхности относятся к области определения функции ♦

Пусть функция $z = f(x, y)$ определена в некоторой области D на плоскости Oxy Тогда каждой точке $(x, y) \in D$ будет соответствовать точка $(x,\ y,\ f(x,y))$ трехмерного пространства

Множество всех таких точек $(x,\ y,\ f(x,y))$, где $(x,y) \subset D$, называется *графиком функции* $z = f(x,y)$ В общем случае графиком функции $z = f(x,y)$ является поверхность в пространстве

В аналитической геометрии уже рассматривались некоторые поверхности, которые являются графиками функций двух переменных

Например, эллиптический параболоид является графиком функции $z = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$ (см приложение к контрольной работе N2 «Векторная алгебра и аналитическая геометрия»).

Линией уровня называется множество точек на плоскости Oxy, в которых функция принимает данное постоянное значение c Эту линию можно также получить, пересекая график функции $z = f(x, y)$ плоскостью $z = c$, параллельной плоскости Oxy, и проектируя линию пересечения ортогонально на плоскость Oxy (рис 3)

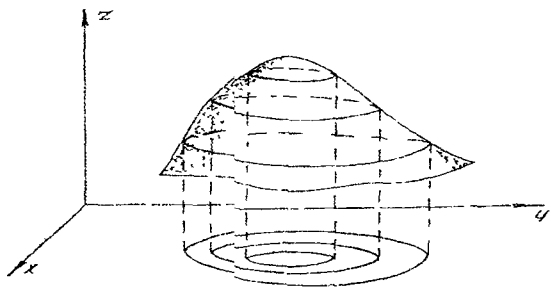


Рис 3

Система линий уровня $f(x,y)=c_m$, где $c_{m+1}-c_m=h=const$, позволяет судить о ходе изменения функции. Там, где линии уровня расположены густо, функция изменяется быстро, а где линии уровня расположены редко, функция изменяется медленно.

Пример 4. Найти линии уровня функции $z=\frac{y}{x^2}$.

Р е ш е н и е. Рассмотрим

$$\begin{cases} z=\dfrac{y}{x^2}, \\ z=C. \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \frac{y}{x^2}=C \quad \Rightarrow \quad y=Cx^2,$$

т.е. линиями уровня является семейство парабол. ♦

Для функции $u=f(x,y,z)$ трех переменных рассматривают *поверхности* уровня - множество точек $P(x;y,z)$ пространства, в которых функция $f(P)$ принимает данное постоянное значение.

1.2. Предел функции двух переменных. Непрерывность

При рассмотрении предела функции одной переменной было введено понятие окрестности точки. Под окрестностью точки x_0 понимался интервал, содержащий эту точку. При введении понятия предела функции двух переменных $z=f(x,y)=f(P)$ будем рассматривать окрестность точки в плоскости Oxy

Окрестностью точки $P_0(x_0;y_0)$ называется внутренность круга с центром в этой точке. Если радиус круга равен δ, то говорят о δ-окрестности точки $(x_0;y_0)$. Очевидно, что любая точка $P(x;y)$, принадлежащая δ– окрестности точки $P_0(x_0;y_0)$, находится от этой точки на расстоянии, меньшем δ.

Число b называется *пределом функции* двух переменных $z = f(x, y)$ при $P \to P_0$, если для любого числа $\varepsilon > 0$ найдется такая δ– окрестность точки $P_0(x_0; y_0)$, что для любой точки $P(x; y)$ этой окрестности (за исключением, быть может, точки P_0) имеет место неравенство $|f(P) - b| < \varepsilon$, или $|f(x, y) - b| < \varepsilon$.

При этом пишут $\lim\limits_{P \to P_0} f(P) = b$ или $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x, y) = b$,

так как при $P(x; y) \to P_0(x_0; y_0)$, очевидно, $x \to x_0$, $y \to y_0$.

Заметим, что если число b есть предел функции $z = f(P)$, то, как это следует из определения предела, разность $f(x, y) - b$ является бесконечно-малой, когда точка произвольным образом (по любому направлению) неограниченно приближается к точке P_0.

Пример 5. Вычислить $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} \dfrac{2 - \sqrt{xy + 4}}{xy}$.

Решение Предел функции вычисляется при $P(x;\ y) \to P_0(0;\ 0)$.

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} \frac{2 - \sqrt{xy + 4}}{xy} = \lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} \frac{(2 - \sqrt{xy + 4})(2 + \sqrt{xy + 4})}{xy(2 + \sqrt{xy + 4})} =$$

$$= \lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} \frac{4 - xy - 4}{xy(2 + \sqrt{xy + 4})} = \lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} \frac{xy}{xy(2 + \sqrt{xy + 4})} =$$

$$= \lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} \frac{1}{2 + \sqrt{xy + 4}} = \frac{1}{4}.$$

Следует обратить внимание на то, что функция $\dfrac{2 - \sqrt{xy + 4}}{xy}$ не определена в точке $P_0(0;\ 0)$, но имеет предел при $P \to P_0$. ♦

Функция двух переменных называется *бесконечно-малой* при $x \to x_0, y \to y_0$, если ее предел равен нулю, т.е. $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x, y) = 0$

Понятие **непрерывности** функции нескольких переменных устанавливается с помощью понятия предела.

Функция нескольких переменных $u = f(P)$ называется *непрерывной в точке* P_0, если $\lim\limits_{P \to P_0} f(P) = f(P_0)$.

Заметим, что функция $u = f(P)$, непрерывная в точке P_0, должна быть определена в этой точке и некоторой ее окрестности (иначе нельзя было бы осуществить переход к пределу). Точка P_0, в которой функция нескольких переменных $u = f(P)$ непрерывна, называется *точкой непрерывности функции.*

Для непрерывных в точке функций справедлива следующая теорема.

Теорема. Если функции $f_1(P)$ и $f_2(P)$ непрерывны в точке P_0, то в этой же точке непрерывны и их сумма $f_1(P) + f_2(P)$, разность $f_1(P) - f_2(P)$ и произведение $f_1(P)\ f_2(P)$; если, кроме того, $f_2(P_0) \neq 0$ то частное $\dfrac{f_1(P)}{f_2(P)}$ также есть непрерывная функция в точке P_0.

Если условие непрерывности нарушено (или функция не определена, или не существует предел, или не выполнено равенство), точка называется *точкой разрыва.* Точки разрыва могут быть изолированными или образовывать *линии разрыва*

Функция $z = f(x, y) = f(P)$ называется *непрерывной в области*, если она непрерывна в каждой точке этой области.

Теорема. Если функция $z = f(P)$ непрерывна в ограниченной замкнутой области D, то она в этой области.

1) ограничена: $\exists N > 0 \ . \ \forall (x, y) \in D \quad |f(P)| \le N;$

2) имеет наименьшее m и наибольшее M значения:

$$\exists m, M \ (m < M) \ : \ \forall (x, y) \in D \quad m \le f(x, y) \le M,$$

3) принимает хотя бы в одной точке области любое численное значение, заключенное между m и M

2. ДИФФЕРЕНЦИРУЕМОСТЬ ФУНКЦИИ

2.1. Частные и полное приращение. Частные производные

Рассмотрим функцию двух переменных $z = f(x, y)$ и ее геометрический образ (рис 4)

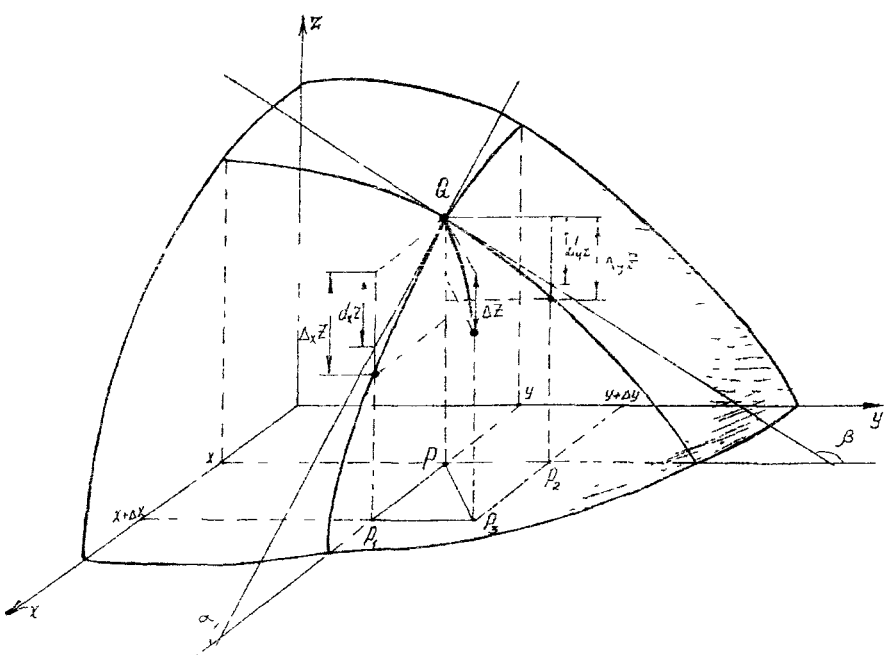


Рис. 4

Рассмотрим точку $P(x, y)$ и значение функции в этой точке $z = f(P)$

Зафиксируем значение одного из ее аргументов, например y, а переменной x зададим приращение Δx. Получим точку $P_1(x + \Delta x, y)$

Тогда функция $z = f(x, y)$, очевидно, получит приращение

$$\Delta_x z = f(P_1) - f(P) = f(x + \Delta x, y) - f(x, y) \quad \text{(см. рис 4).}$$

Если существует $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta_x z}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x}$,

то он называется *частной производной* функции $z = f(x, y)$ *по переменной* x в точке $P(x, y)$ и обозначается одним из символов

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} = f'_x(x, y) = \frac{\partial z}{\partial x} = z'_x$$

Разность $\Delta_x z = f(x + \Delta x, y) - f(x, y)$ называется *частным приращением по* x функции $z = f(x, y)$ в точке $P(x, y)$.

Учитывая обозначения, можно записать

$$f'_x(x, y) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta_x z}{\Delta x}.$$

Теперь зафиксируем значение переменной x, а y зададим приращение Δy. Получим точку $P_2(x, y + \Delta y)$ и приращение функции

$$\Delta_y z = f(P_2) - f(P) = f(x, y + \Delta y) - f(x, y) \quad \text{(см. рис 4)}$$

Если существует $\lim\limits_{\Delta y \to 0} \dfrac{\Delta_y z}{\Delta y} = \lim\limits_{\Delta y \to 0} \dfrac{f(x, y + \Delta y) - f(x, y)}{\Delta y}$,

то он называется *частной производной* функции $z = f(x, y)$ *по переменной* y в точке $P(x; y)$ и обозначается одним из символов

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = f'_y(x, y) = \frac{\partial z}{\partial y} = z'_y$$

Имеем $f'_y(x, y) = \lim\limits_{\Delta y \to 0} \dfrac{\Delta_y z}{\Delta y}$,

где $\Delta_y z = f(x, y + \Delta y) - f(x, y)$ - *частное приращение по переменной* y функции $z = f(x, y)$ в точке $P(x; y)$.

А теперь рассмотрим приращение обоих аргументов x и y: $x + \Delta x$ и $y + \Delta y$. Получим точку $P_2(x + \Delta x, y + \Delta y)$.

Тогда $\Delta z = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y)$ - называют *полным приращением* функции $z = f(x, y)$ в точке $P(x; y)$ (см рис. 4).

Значение производной в фиксированной точке обозначается тем же символом с указанием точки.

Например,

$$\left.\frac{\partial f(x, y)}{\partial x}\right|_{P_0} = \left. f'_x(x, y)\right|_{P_0} = \left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{P_0} = \left. z'_x\right|_{P_0}$$

или

$$\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x} = f'_x(x_0, y_0), \quad \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y} = f'_y(x_0, y_0).$$

Любой из этих символов следует понимать как результат подстановки координат точки в выражения для z'_x или z'_y.

Из определения *частной производной* и рис. 4 следует ее *механический смысл*, как *скорости изменения функции* при изменении соответствующего аргумента, и *геометрический смысл*, как *тангенса угла*, образованного касательной к линии

$$\begin{cases} z = f(x, y) \\ y = c \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} z = f(x, y) \\ x = c \end{cases}$$

в точке (x, y) с положительным направлением соответствующей оси

Частные производные $\frac{\partial z}{\partial x} = z'_x$ и $\frac{\partial z}{\partial y} = z'_y$ вычисляются по правилам и формулам, справедливым для функции одной переменной, при условии, что в момент дифференцирования по одной из переменных вторая переменная рассматривается как постоянная величина

Пример 6. Найти частные производные функции

$$z = x^5 - 3y^2 + 7xy + 1.$$

Решение. $\dfrac{\partial z}{\partial x} = 5x^4 - 0 + 7y + 0 = 5x^4 + 7y,$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = 0 - 6y + 7x + 0 = -6y + 7x \quad \blacklozenge$$

Пример 7. Найти частные производные функции

$$z = \ln(x^3 + y^2).$$

Решение

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{x^3 + y^2} \cdot (x^3 + y^2)'_x = \frac{1}{x^3 + y^2} \cdot 3x^2 = \frac{3x^2}{x^3 + y^2},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{x^3 + y^2} \cdot (x^3 + y^2)'_y = \frac{1}{x^3 + y^2} \cdot 2y = \frac{2y}{x^3 + y^2} \quad \blacklozenge$$

Пример 8. Найти частные производные функции

$$z = arctg(xy) \quad .$$

Решение.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{1 + (xy)^2} \cdot (xy)'_x = \frac{1}{1 + (xy)^2} \cdot y = \frac{y}{1 + x^2 y^2},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{1 + (xy)^2} \cdot (xy)'_y = \frac{1}{1 + (xy)^2} \cdot x = \frac{x}{1 + x^2 y^2} \quad \blacklozenge$$

2.2. Дифференциал функции

Рассмотрим частное приращение по переменной x:

$$\Delta_x z = f(x + \Delta x, y) - f(x, y).$$

Если существует $f'_x(x, y)$, то на основании теории функции одной переменной это приращение равно

$$\Delta_x z = f'_x(x,y)\Delta x + \alpha\,(x, y, \Delta x), \qquad \text{где } \lim_{\Delta x \to \infty} \frac{\alpha}{\Delta x} = 0.$$

Линейная относительно Δx часть этого приращения называется частным дифференциалом функции $z = f(x, y)$ по переменной x и обозначается символом $d_x z$.

Если $d_x z \neq 0$, то он будет главной частью приращения, эквивалентной самому приращению. Таким образом,

$$\Delta_x z = d_x z + \alpha, \text{ где } \qquad d_x z = \frac{\partial z}{\partial x} dx.$$

Как следует из геометрического смысла дифференциала функции одной переменной, геометрически частный дифференциал есть приращение аппликаты касательной в точке $(x; y)$ к линии $z = f(x, y)$, $y = c$, лежащей на поверхности $z = f(x, y)$ (см. рис. 4).

Аналогично определяется частное приращение и частный дифференциал по переменной y:

$$\Delta_y z = d_y z + \beta, \quad \text{где} \qquad d_y z = \frac{\partial z}{\partial y} dy \quad \text{и} \quad \lim_{\Delta y \to \infty} \frac{\beta}{\Delta y} = 0.$$

Его геометрический смысл аналогичен смыслу $d_x z$ (см. рис. 4).

Рассмотрим точки $P(x, y)$ и $P_3(x + \Delta x, y + \Delta y)$.

Разность $\qquad \Delta f(x, y) = \Delta f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y)$

называется *полным приращением* функции $z = f(x, y)$ в точке $P(x, y)$.

Более кратко будем записывать его в виде $\qquad \Delta z = f(P_3) - f(P)$.

Функция $z = f(x, y)$ называется *дифференцируемой* в точке $P(x, y)$, если ее полное приращение в этой точке может быть представлено в виде $\qquad \Delta z = A \cdot \Delta x + B \cdot \Delta y + \gamma\,(x, y, \Delta x, \Delta y),$

где A и B – некоторые выражения, не содержащие Δx и Δy, т. е. постоянные относительно Δx и Δy, а γ является бесконечно малой более высокого порядка, чем

$$\rho = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}, \qquad \text{т. е.} \quad \lim_{\rho \to \infty} \frac{\gamma}{\rho} = 0.$$

Здесь ρ – расстояние между точками P_3 и P.

Линейная относительно Δx и Δy часть полного приращения дифференцируемой в точке $P(x, y)$ функции $z = f(x, y)$ называется *полным дифференциалом* этой функции в точке $P(x, y)$ и обозначается символом dz.

Таким образом, если функция дифференцируема в точке $P(x, y)$, то

$$\Delta z = dz + \gamma,$$

причем $dz = A \cdot \Delta x + B \cdot \Delta y$ и $\lim_{\rho \to \infty} \frac{\gamma}{\rho} = 0.$

2.3. Свойства дифференцируемой функции

2.3.1. Непрерывность дифференцируемой функции

Теорема 1. Всякая функция $z = f(P)$, дифференцируемая в точке P, непрерывна в этой точке

2.3.2. Существование частных производных

Теорема 2. Если функция $z = f(x, y)$ в точке $P(x, y)$ дифференцируема (т.е. имеет дифференциал $dz = A \cdot \Delta x + B \cdot \Delta y$), то она имеет в этой точке и частные производные $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$, причем

$$\frac{\partial z}{\partial x} = A, \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = B.$$

Доказательство. По условию $\Delta z = A\cdot\Delta x + B\cdot\Delta y + \gamma$,

где $\lim\limits_{\rho\to\infty}\dfrac{\gamma}{\rho} = 0$ Полагая $\Delta y = 0$, получим $\rho = |x|$ и

$\Delta_x z = A\cdot\Delta x + \gamma$, откуда $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta_x z}{\Delta x} = A + \lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\gamma}{\Delta x}$, т.е. $\dfrac{\partial z}{\partial x} = A$.

Аналогично $\dfrac{\partial z}{\partial y} = B$.

Как и в случае одной переменной, приращение аргумента равно его дифференциалу, т.е $\Delta x = dx$, $\Delta y = dy$. Поэтому полный дифференциал имеет вид

$$dz = Adx + Bdy = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy$$

или $$dz = d_x z + d_y z$$

Сформулированные теоремы выражают только необходимый признак дифференцируемости функции и ни одна из них не содержит достаточного признака дифференцируемости.

Так, из существования частных производных не всегда следует дифференцируемость функции. Более того, даже наличие в точке производной по любому направлению еще не влечет дифференцируемости функции в этой точке

2.3.3. Достаточный признак дифференцируемости

Оказывается, чтобы из существования частных производных следовала дифференцируемость функции в данной точке, достаточно потребовать их непрерывности в этой точке

Теорема 3 Если функция $z = f(x, y)$ имеет частные производные в некоторой окрестности точки $P(x, y)$, непрерывные в самой точке P, то она дифференцируема в этой точке

Все сказанное легко распространяется на функции трех и большего числа переменных. Так, например, для дифференцируемой функции трех переменных $u = f(x, y, z)$ полное приращение выражается формулой

$$\Delta u = \frac{\partial u}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial u}{\partial y}\Delta y + \frac{\partial u}{\partial z}\Delta z + \varpi(\Delta x, \Delta y, \Delta z)$$

при условии $\lim\limits_{\rho \to 0} \frac{\varpi}{\rho} = 0 \quad (\rho = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2})$,

а ее полный дифференциал имеет вид

$$du = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy + \frac{\partial u}{\partial z}dz.$$

2.4. Приложение полного дифференциала

Ограничиваясь дифференциалом функции как главной части приращения, получим приближенное равенство $\Delta z \approx dz$, полезное в приближенных вычислениях. В развернутой форме оно будет:

$$f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y) \approx f'_x(x, y)dx + f'_y(x, y)dy$$

или $$f(x + \Delta x, y + \Delta y) \approx f(x, y) + f'_x(x, y)dx + f'_y(x, y)dy$$

Для вычисления значения функции в некоторой точке $(x_1; y_1)$ записывают x_1, y_1 в виде суммы $x_1 = x + \Delta x$, $y_1 = y + \Delta y$, стараясь подобрать Δx и Δy возможно меньшими, но так, чтобы в полученной точке $(x; y)$ легко вычислялись значения функции и ее производных.

Пример 9. Дана функция $z = 3x^2 + 2xy - 2x$ и две точки $A(2; 3)$, $B(1{,}98;\ 1{,}04)$.

Требуется 1) Вычислить значения z_1 в точке B;

2) Вычислить приближенное значение $\tilde{z}_1$ функции в точке B, исходя

из значения z_0 функции в точке A, заменяя приращение функции при переходе от точки A к точке B дифференциалом,

3) Оценить в процентах относительную погрешность, получающуюся при замене приращения функции её дифференциалом

Р е ш е н и е

По условию $A(2;3)$, $B(1{,}98\ ;\ 1{,}04)$, следовательно

$x_0=2;\quad y_0=3;\qquad x = x_0 + \Delta x=1{,}98;\quad \Delta x = -\ 0{,}02;$

$y - y_0+ \Delta y=3{,}04;\quad \Delta y = +\ 0{,}04.$

Тогда 1) $z_1(B) = 3\cdot(1{,}98)^2 + 2\cdot 1{,}98\cdot 3{,}04 - 1{,}98=31{,}3656.$

2) $\tilde{z}_1(B) = f(x_0, y_0) + dz(x_0, y_0),$

$$dz = f'_x(x_0,\ y_0)\,\Delta x + f'_y(x_0,\ y_0)\,\Delta y,$$

$$z(A) = f(2,3) = 3\cdot 2^3 - 2\cdot 2\cdot 3 - 2\cdot 2\ - 32,$$

$$f_x'(x,y) = 9x + 2y - 2, \qquad f_x'(2,3) = 40,$$

$$f_y'(x,\ y) = 2x, \qquad f_y'(2,3) = 4.$$

Тогда

$$\tilde{z}_1(B) = f(x_0,y_0) + dz(x_0,y_0) = 32 + 40(-0{,}02) + 4\cdot 0{,}004 = 31{,}36.$$

3) Относительная погрешность вычисляется по формуле

$$\delta = \left|\frac{\tilde{z}_1 - z_1}{\tilde{z}_1}\right|\cdot 100\% = \frac{|31.36 - 31.3656|}{31.36}\cdot 100\% \approx 0.014\%. \ \blacklozenge$$

2.5. Производная сложной функции

Пусть $z = f(u, v)$, причем $u = u(x, y)$, $v = v(x, y)$,

т.е z зависит от x и y через посредство двух других функций u и v

В этом случае функция $z = f(u, v)$ называется *сложной функцией* переменных x и y Подставляя значения u и v в выражение для z, получим непосредственную зависимость z от переменных x и y

$$z = f[u(x, y), v(x, y)] \tag{1}$$

Однако и в теории, и в приложениях важно уметь находить частные производные $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$, не пользуясь равенством (1)

Теорема. Если функции $u = u(x, y)$ и $v = v(x, y)$ дифференцируемы в точке $(x; y)$, а функция $z=f(u, v)$ дифференцируема в соответствующей точке $(u; v)$, то сложная функция $z = f[u(x, y), v(x, y)]$ дифференцируема в точке $(x; y)$, причем

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial x} &= f'_u \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + f'_v \cdot \frac{\partial v}{\partial x} \\ \frac{\partial z}{\partial y} &= f'_u \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + f'_v \frac{\partial v}{\partial y} \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

Формулы (2) обобщаются на случай любого числа независимых переменных. В частности, если $u = u(x)$ и $v = v(x)$, то функция $z = f(u(x), v(x))$ будет сложной функцией одной переменной x и ее полная производная по этой переменной будет

$$\frac{dz}{dx} = f'_u \cdot \frac{du}{dx} + f'_v \cdot \frac{dv}{dx} \tag{3}$$

Если здесь положить $u = x$, т.е $z = f[x, v(x)]$, то получим

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot \frac{dv}{dx} \tag{4}$$

Пример 10.

1. $z = u^2 + u \cdot v$, $u = y \sin x$, $v = x \cos y$ Найти $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$

По формуле (2) имеем $\frac{\partial z}{\partial x} = (2u + v)\, y \cos x + u \cos y$,

$$\frac{\partial z}{\partial y} = (2u + v) \sin x - u \sin y. \ \blacklozenge$$

2. $z = f(x y^2, x^2 + y)$. Найти $\dfrac{\partial z}{\partial x}$

Пусть $u = xy^2$, $v = x^2 + y$. Тогда $z = f(u, v)$.

По формуле (2) имеем

$$\frac{\partial z}{\partial x} = f'_u \cdot y^2 + f'_v \cdot 2x \quad \blacklozenge$$

3. $z = x^2 y \quad y^2 x, \quad x = u \cos v, \quad y = u \sin v.$ Найти $\dfrac{\partial z}{\partial v}$.

По формуле (2) имеем

$$\frac{\partial z}{\partial v} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial v} = \left(y^2 - 2xy\right) \cdot u \sin v +$$

$$+ (x^2 - 2xy)\, u \cos v = u^3 (\sin v + \cos v)(1 - 3 \sin v \cos v). \quad \blacklozenge$$

4. $u = y^2 + yz + z^2, \quad y = \sin x, \quad z = -x^2.$ Найти $\dfrac{du}{dx}$.

По формуле (3) имеем

$$\frac{du}{dx} = (2y + z) \cos x - (y + 2z) \cdot 2x = \sin 2x - x^2 \cos x - 2x \sin x + 4x^3.$$

5. $z = f(x^3, \cos x^2)$ Найти $\dfrac{dz}{dx}$

$$\frac{dz}{dx} = f'_u \cdot 3x^2 - f'_v \cdot \sin x^2 \cdot 2x, \text{ где } u = x^3, \quad v = \cos x^2 \quad \blacklozenge$$

6. $z = \operatorname{arctg}(xy) - \ln(1 + x^2 y^2), \quad y = x^n.$ Найти $\dfrac{dz}{dx}$

По формуле (4) имеем

$$\frac{dz}{dx} = \frac{y(1 - 2xy)}{1 + x^2 y^2} + \frac{x(1 - 2xy)}{1 + x^2 y^2} \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{(1 - 2xy)}{1 + x^2 y^2}\left(x^n + nx^n\right) =$$

$$= \frac{(n+1)x^n\left(1 - 2x^{n+1}\right)}{1 + x^{2(n+1)}}. \quad \blacklozenge$$

2.6. Производная функции, заданной неявно

Будем говорить, что функция $z = z(x, y)$ задана неявно, если она определяется некоторым уравнением вида $F(x, y, z) = 0$, т е уравнением. не разрешенным относительно z.

Обе части уравнения $F(x, y, z) = 0$ продифференцируем по переменной x, получим

$$\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x} = 0, \tag{5}$$

откуда

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\partial F}{\partial x} : \frac{\partial F}{\partial z} = -\frac{F'_x}{F'_z}. \tag{6}$$

Аналогично

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\partial F}{\partial y} : \frac{\partial F}{\partial z} = -\frac{F'_y}{F'_z} \tag{7}$$

В частности, если дана неявная функция одной переменной уравнением $F(x, y) = 0$, то из тождества $F(x, y(x)) \equiv 0$ получим

$$\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{dy}{dx} = 0,$$

откуда

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\partial F}{\partial x} : \frac{\partial F}{\partial y} = -\frac{F'_x}{F'_y}. \tag{8}$$

Аналогично находятся частные производные от неявной функции любого числа переменных

Пример 11.

$$F(x, y, z) = z^2 - 3xyz + 1 = 0$$

$$F'_x = -3yz, \qquad F'_y = -3xz, \qquad F'_z = 3z^2 - 3xy,$$

откуда $\dfrac{\partial z}{\partial x} = \dfrac{yz}{xy - z^2}$ и $\dfrac{\partial z}{\partial y} = \dfrac{xz}{xy - z^2}$. ♦

2.7. Инвариантность формы первого дифференциала

В том случае, когда x и y являются независимыми аргументами функции $z = f(x, y)$, была установлена следующая форма ее дифференциала:

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy. \qquad (9)$$

В случае, если z зависит от x и y сложным образом, т. е. через посредство некоторых функций $u = u(x, y)$ и $v = v(x, y)$ или $z = f[u(x, y), v(x, y)]$, то частные производные, входящие в выражение (9), будут выражаться по формулам (2):

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}.$$

При этом оказывается, что форма дифференциала (9) не изменится, если мы его выразим только через u и v и их дифференциалы, т. к. имеет место теорема об инвариантности формы первого дифференциала функции многих переменных.

Теорема. Дифференциал функции $z = f(u, v)$ сохраняет один и тот же вид независимо от того, являются ли ее аргументы u и v независимыми переменными или функциями от независимых переменных.

Доказательство. В случае независимых переменных u и v по теореме 2 п. 2.3:

$$dz = \frac{\partial z}{\partial u}du + \frac{\partial z}{\partial v}dv.$$

Если же $u = u(x, y)$ и $v = v(x, y)$, то, подставляя $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$ из (2) в (9) после группировки выражений, содержащих $\frac{\partial z}{\partial u}$ и $\frac{\partial z}{\partial v}$, получим

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy = (\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x})dx + (\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y})dy =$$

$$= \frac{\partial z}{\partial u}\left(\frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy\right) + \frac{\partial z}{\partial v}\left(\frac{\partial v}{\partial x}dx + \frac{\partial v}{\partial y}dy\right),$$

и так как здесь в скобках стоят полные дифференциалы от u и v, то окончательно получим

$$dz = \frac{\partial z}{\partial u}du + \frac{\partial z}{\partial v}dv.$$

Замечание. Как и в случае функции одной переменной, для дифференциалов более высокого порядка, о которых речь будет ниже, эта теорема не верна – их величина и форма в случае независимых переменных u и v отлична от величины и формы в случае, если u и v будут функциями других независимых переменных

2.8. Частные производные высших порядков

Если функция $z = f(u, v)$ имеет непрерывные частные производные

$$\frac{\partial z}{\partial x} = f'(x, y), \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = f'_1(x, y),$$

то они снова являются функциями переменных x и y, и если эти функции дифференцируемы в точке $(x; y)$, то от каждой из них можно снова находить частные производные по x и y. В результате получим вторые частные производные, которые обозначаются так.

$$\frac{\partial z}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = z''_{x^2} = f''_{x^2}(x, y);$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = z''_{xy} = f''_{xy}(x, y);$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}=z''_{yx}=f''_{yx}(x,y);$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=z''_{y^2}=f''_{y^2}(x,y).$$

Производные $f''_{xy}(x,y)$ и $f''_{yx}(x,y)$ называются *смешанными* – они получаются последовательным дифференцированием функции $f(x, y)$ сначала по x, затем по y или наоборот.

Производные второго порядка можно снова дифференцировать, получим частные производные третьего порядка. Их будет уже восемь:

$$\frac{\partial^3 z}{\partial x^3};\quad \frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y};\quad \frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y \partial x};\quad \frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2};$$

$$\frac{\partial^3 z}{\partial y \partial x^2};\quad \frac{\partial^3 z}{\partial y \partial x \partial y};\quad \frac{\partial^3 z}{\partial y^2 \partial x};\quad \frac{\partial^3 z}{\partial y^3}.$$

Вообще, частное производной n-ого порядка называется частная производная от какой-либо частной производной $(n-1)$-ого порядка.

Например, $\dfrac{\partial^n z}{\partial x^p \partial y^{n-p}}$ есть производная n-ого порядка

Здесь $z(x,y)$ дифференцируется сначала p раз по x, потом $(n-p)$ – по y. Для функций большего числа переменных частные производные высших порядков определяются аналогично.

Пример 12. $z=x^3y^2+xy^3+1.$

Решение

$$\frac{\partial z}{\partial x}=3x^2y^2+y^3,\quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=6xy^2,\quad \underline{\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}=6x^2y+3y^2},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=2x^3y+3xy^2,\quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=2x^3+6xy,\quad \underline{\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}=6x^2y+3y^2},$$

$$\frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y} = 12xy; \qquad \frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y \partial x} = 12xy; \qquad \frac{\partial^3 z}{\partial y \partial x^2} = 12xy;$$

$$\frac{\partial^3 z}{\partial y^2 \partial x} = 6x^2 + 6y, \qquad \frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2} = 6x^2 + 6y, \qquad \frac{\partial^3 z}{\partial y \partial x \partial y} = 6x^2 + 6y.$$

Замечаем, что результат дифференцирования в подчеркнутых производных не зависит от порядка, в котором происходило это дифференцирование. И это не случайно, о чем говорит следующая теорема.

Теорема. Если функция $z = f(x, y)$ и ее частные производные f'_x, f'_y, f''_{xy} и f''_{yx} определены и непрерывны в точке $P(x, y)$ и в некоторой ее окрестности, то в этой точке вторые смешанные производные равны между собой, т. е.

$$f''_{xy} = f''_{yx}. \tag{10}$$

Следствие. При непрерывности соответствующих частных производных результат повторного дифференцирования функции двух независимых переменных не зависит от порядка дифференцирования.

Например, $\dfrac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y} = \dfrac{\partial^3 z}{\partial y \partial x^2}$.

Пример 13. Дана функция $z = 3x^2 - 5x^2y - y^2$.

Найти частные производные первого и второго порядка. Убедиться, что смешанные производные равны.

Решение

$\dfrac{\partial z}{\partial x} = 9x^2 - 10xy$ - производная по x найдена в предположении, что y - постоянная величина в момент дифференцирования.

$\dfrac{\partial z}{\partial y} = 5x^2 - 2y$ - производная по y найдена в предположении, что x – постоянная величина.

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=18x-10y; \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=-10x;$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)=-10x. \quad \text{Действительно,} \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}.$$

Пример 14. Проверить, что функция $\omega = x+\dfrac{x-y}{y-z}$

удовлетворяет уравнению $\dfrac{\partial\omega}{\partial x}+\dfrac{\partial\omega}{\partial y}+\dfrac{\partial\omega}{\partial z}=1.$

Решение

$$\frac{\partial\omega}{\partial x}=1+\frac{1}{y-z} \quad (y,\ z-\text{постоянные}),$$

$$\frac{\partial\omega}{\partial y}=\frac{(-1)(y-z)-1(x-y)}{(y-z)^2}=\frac{z-x}{(y-z)^2} \quad (x,\ z\text{ - постоянные}),$$

$$\frac{\partial\omega}{\partial z}=-(x-y)\frac{1}{(y-z)^2}(-1)=\frac{x-y}{(y-z)^2} \quad (x, z\text{ - постоянные}).$$

Суммируем найденные производные

$$1+\frac{1}{y-z}+\frac{(z-x)}{(y-z)^2}+\frac{(x-y)}{(y-z)^2}=\frac{(y-z)^2+y-z+z-x+x-y}{(y-z)^2}=1,$$

что и требовалось доказать.

2.9. Дифференциалы высших порядков

Дифференциалом n-ого порядка $d^n z$ функции $z = f(x, y)$ называется дифференциал от дифференциала $(n - 1)$-ого порядка, как от функции независимых переменных x и y

Таким образом, dx и dy рассматриваются при этом как величины, не зависящие от x и y.

Поэтому $d^2z = d(dz) = \frac{\partial}{\partial x}(dz)dz + \frac{\partial}{\partial y}(dz)dy =$

$$= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy\right)dx + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy\right)dy =$$

$$= \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}dx^2 + \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}dydx + \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}dxdy + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}dy^2$$

или, при условии непрерывности смешанных производных:

$$d^2z = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}dx^2 + 2\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}dydx + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}dy^2$$

Аналогично

$$d^3z = \frac{\partial^3 z}{\partial x^3}dx^3 + 3\frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y}dx^2dy + 3\frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2}dxdy^2 + \frac{\partial^3 z}{\partial y^3}dy^3$$

Рассмотрим сложную функцию $z = f(u, v)$,

где $u = u(x, y), \quad v = v(x, y).$

Тогда на основании теоремы об инвариантности формы первого дифференциала получим

$$d^2z = d(dz) = d\left(\frac{\partial z}{\partial u}du + \frac{\partial z}{\partial v}dv\right) =$$

$$= d\left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)du + \frac{\partial z}{\partial u}d^2u + d\left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)dv + \frac{\partial z}{\partial v}d^2v =$$

$$= \left(\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}du + \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v}dv\right)du + \frac{\partial z}{\partial u}d^2u +$$

$$+ \left(\frac{\partial^2 z}{\partial v \partial u}du + \frac{\partial^2 z}{\partial v^2}dv\right)dv + \frac{\partial z}{\partial v}d^2v =$$

$$= \frac{\partial^2 z}{\partial u^2}du^2 + 2\frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v}dudv + \frac{\partial^2 z}{\partial v^2}dv^2 + \frac{\partial z}{\partial u}d^2u + \frac{\partial z}{\partial u}d^2v.$$

Таким образом, в случае, если аргументы u и v являются функциями независимых переменных, форма второго дифференциала изменяется на величину $\frac{\partial z}{\partial u} d^2 u + \frac{\partial z}{\partial v} d^2 v$

Это объясняется тем, что теперь, вообще говоря, $d^2 u$ и $d^2 v$ отличны от нуля Если же u и v будут независимыми переменными, то du и du не будут зависеть от u и v, поэтому

$$d^2 u = \frac{\partial (du)}{\partial u} du + \frac{\partial (dv)}{\partial v} dv = 0$$

Аналогично, $d^2 v = 0$, и мы получим уже известную форму второго дифференциала

3. СКАЛЯРНОЕ ПОЛЕ

Если в каждой точке $P \in D$ определено значение **скалярной величины** u, то говорят, что в области D задано *скалярное поле*.

Обозначают $u = u(P)$ для $\forall P \in D$

Например, неоднородное тело, каждой точке которого соответствует определенное значение плотности, можно рассматривать как скалярное поле.

Если в пространстве ввести систему координат $Oxyz$, то точка P в этой системе координат будет иметь определенные координаты x, y и z, и скалярная величина u станет функцией этих координат

$$u = f(P) - f(x, y, z)$$

Обратно, всякая функция трех переменных $u = f(x, y, z)$ задает некоторое скалярное поле Наряду со скалярными полями в пространстве рассматриваются также плоские скалярные поля Функция плоского скалярного поля зависит от двух переменных. $z = f(x, y)$

3.1. Производная по направлению

Пусть отрезок PP_3 длины $\rho = |PP_3|$ направлен по вектору

$$\bar{l} = \cos\alpha \cdot \bar{i} + \cos\beta \cdot j + \cos\gamma \cdot \bar{k}, \quad |\bar{l}| = 1,$$

тогда его проекции на оси координат будут:

$$\Delta x = \rho \cdot \cos\alpha, \quad \Delta y = \rho \cdot \cos\beta, \quad \Delta z = \rho \cdot \cos\gamma.$$

Если существует предел отношения $\lim\limits_{P_3 \to P} \dfrac{f(P_3) - f(P)}{|P_3 P|}$,

то он называется *производной* функции $f(P)$ в точке P *по направлению* $\bar{l}$ и обозначается символом $\dfrac{\partial f}{\partial l}$, т.е.

$$\frac{\partial f}{\partial l} = \lim_{P_3 \to P} \frac{f(P_3) - f(P)}{|P_3 P|} \quad \text{или} \quad \frac{\partial f}{\partial l} = \lim_{\rho \to 0} \frac{\Delta f}{\rho}.$$

Теорема. Если функция $u = f(x, y, z)$ дифференцируема в точке P, то она имеет в этой точке производную по любому направлению $\bar{l}$, причем

$$\frac{\partial f}{\partial l} = \frac{\partial f}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial f}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial f}{\partial z}\cos\gamma.$$

Доказательство. Функция $f(x, y, z)$ дифференцируема, поэтому

$$\frac{\partial f}{\partial l} = \lim_{\rho \to 0} \frac{\Delta f}{\rho} = \lim_{\rho \to 0} \frac{\dfrac{\partial f}{\partial x}\Delta x + \dfrac{\partial f}{\partial y}\Delta y + \dfrac{\partial f}{\partial z}\Delta z + \bar{\gamma}}{\rho} =$$

$$= \lim_{\rho \to 0} \frac{\dfrac{\partial f}{\partial x}\rho\cos\alpha + \dfrac{\partial f}{\partial y}\rho\cos\beta + \dfrac{\partial f}{\partial z}\rho\cos\gamma + \bar{\gamma}}{\rho} =$$

$$= \frac{\partial f}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial f}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial f}{\partial z}\cos\gamma$$

(т.к. $\Delta x = \rho \cdot \cos\alpha$, $\Delta y = \rho \cdot \cos\beta$, $\Delta z = \rho \cdot \cos\gamma$ и $\lim\limits_{\rho \to 0} \frac{\bar{\gamma}}{\rho} = 0$). #

В частности, если $\alpha = 0$, то $\beta = \gamma = \frac{\pi}{2}$ и $\frac{\partial f}{\partial l} = \frac{\partial f}{\partial x}$

Аналогично $\frac{\partial f}{\partial l} = \frac{\partial f}{\partial y}$ при $\beta = 0$, и $\frac{\partial f}{\partial l} = \frac{\partial f}{\partial z}$ при $\gamma = 0$.

В случае функции двух переменных $z = f(x, y)$ вектор $\bar{l}$ будет лежать в плоскости $0xy$, поэтому формула для производной по направлению $\bar{l}$ будет иметь следующий вид:

$$\frac{\partial z}{\partial l} = \frac{\partial z}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial z}{\partial y}\cos\beta.$$

Так как в плоскости $0xy$ $\gamma = \frac{\pi}{2}$, $\beta = \frac{\pi}{2} - \alpha$, то справедлива также формула

$$\frac{\partial f}{\partial l} = \frac{\partial f}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial f}{\partial y}\sin\alpha.$$

Если частные производные $\frac{\partial f}{\partial x}$ и $\frac{\partial f}{\partial y}$ представляют собой скорость изменения функции вдоль соответствующей оси координат, то *производная по направлению* выражает *скорость изменения функции* по отношению к величине перемещения точки *в направлении вектора* l.

В частности, если $z = f(x, y)$, то плоскость, проходящая через точку P и вектор $\bar{l}$ параллельно оси Oz, пересечет поверхность $z = f(x, y)$ по некоторой кривой L. В этом случае скорость изменения функции в направлении вектора l будет численно равна тангенсу угла φ, образованного касательной к кривой L в точке Q, соответствующей точке P, и вектором $\bar{l}$. При $\frac{\partial f}{\partial l} > 0$ она будет выражать крутизну

возрастания функции в направлении вектора $\bar{l}$, а при $\frac{\partial f}{\partial l} < 0$ – кругизну убывания.

Таким образом, производная по направлению оказывается весьма полезной при исследовании поведения функции в окрестности заданной точки.

Пример 15. Найти производную функции $z = x^2 - 3xy + y^3$ в точке $P_1(1, 3)$ по направлению от точки P_1 к точке $P_2(4; 7)$.

Р е ш е н и е. Найдем вектор $\overline{P_1P_2} = \{4-1;\ 7-3\} = \{3;\ 4\}$ и соответствующий ему единичный вектор $\bar{l}$:

$$\bar{l} = \frac{\overline{P_1P_2}}{|\overline{P_1P_2}|} = \frac{3\bar{i} + 4\bar{j}}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{3\bar{i} + 4\bar{j}}{\sqrt{25}} = \left\{\frac{3}{5};\ \frac{4}{5}\right\}.$$

Таким образом, вектор $\bar{l}$ имеет следующие направляющие косинусы $\cos\alpha = \frac{3}{5}$, $\cos\beta = \frac{4}{5}$.

Теперь найдем частные производные функции $z = x^2 - 3xy + y^3$:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = (x^2 - 3xy + y^3)'_x = 2x - 3y,$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = (x^2 - 3xy + y^3)'_y = -3x + 3y^2,$$

и их значения в точке $P_1(1; 3)$.

$$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{P_1} = (2x - 3y)\Big|_{P_1} = 2\cdot 1 - 3\cdot 3 = -7,$$

$$\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{P_1} = (-3x + 3y^2)\Big|_{P_1} = -3\cdot 1 + 3\cdot 9 = 24.$$

Подставляя в формулу $\frac{\partial z}{\partial l} = \frac{\partial z}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial z}{\partial y}\cos\beta$ найденные значения частных производных и направляющих косинусов, получим искомую производную функции $z = x^2 - 3xy + y^3$ по направлению вектора l.

$$\frac{\partial z}{\partial l} = \frac{\partial z}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial z}{\partial y}\cos\beta = -7\cdot\frac{3}{5} + 24\cdot\frac{4}{5} = \frac{21}{5} + \frac{96}{5} = \frac{75}{5} = 15. \ \blacklozenge$$

3.2. Градиент функции

При изучении скалярных полей наряду с функцией $u = f(x, y, z)$ рассматривается некоторый вектор, тесно связанный с этой функцией, - градиент скалярного поля

Градиентом в точке $P(x; y; z)$ скалярного поля, заданного дифференцируемой функцией $u = f(x, y, z)$, называется вектор, равный

$$grad\ u = \frac{\partial u}{\partial x}\ \bar{i}\ +\ \frac{\partial u}{\partial y}\ j\ +\ \frac{\partial u}{\partial z}\ \bar{k}.$$

Таким образом, каждой точке $P(x; y; z)$ скалярного поля, заданного дифференцируемой функцией $u = f(x, y, z)$, соответствует не только значение этой функции, но и вполне определенный вектор $grad\ f(P)$

Между градиентом функции в данной точке и производной по направлению в той же точке имеется связь, которая устанавливается следующей теоремой.

Теорема. Проекция вектора $grad\ u$ на единичный вектор $\bar{l} = (\cos\alpha; \cos\beta; \cos\gamma)$ равна производной функции u по направлению l

$$np_l grad\ u = \frac{\partial u}{\partial l}$$

Доказательство Пусть $u = f(x, y, z)$. Из векторной алгебры известно, что проекция какого-либо вектора на другой вектор равна скалярному произведению этих векторов.

Так как $grad\ u = \left(\frac{\partial u}{\partial x}; \frac{\partial u}{\partial y}; \frac{\partial u}{\partial z} \right)$. $\bar{l} = (\cos\alpha; \cos\beta; \cos\gamma)$, то

$$np_l grad\ u = grad\ u \cdot \bar{l} = \frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma = \frac{\partial u}{\partial l}. \ \#$$

Учитывая, что производная по направлению $\frac{\partial u}{\partial l}$ выражает скорость изменения скалярного поля $u = f(x, y, z)$ в этом направлении, можно сказать, что проекция $grad\ u$ на вектор l равна скорости изменения поля $u = f(x, y, z)$ в направлении вектора l.

Обозначим через φ угол между единичным вектором l и $grad\ u$. Тогда $np_l grad\ u = | grad\ u | \cdot \cos\varphi$.

Поэтому $\frac{\partial u}{\partial l} = | grad\ u | \cos\varphi$.

Если направления векторов l и $grad\ u$ совпадают (φ=0), то производная по направлению $\frac{\partial u}{\partial l}$ имеет, очевидно, наибольшее значение, равное $| grad\ u |$

Таким образом, $grad\ u$ есть вектор, указывающий *направление наибольшего возрастания* поля в данной точке и имеющий *модуль, равный скорости этого возрастания*

Рассмотрим кривую L, лежащую на поверхности уровня $u = f(x, y, z) = c$ и проходящую через точку P. Градиент функции u в точке P обладает следующим свойством: $grad\ u(P)$ перпендикулярен к вектору τ, направленному по касательной к кривой L в точке P

В случае плоского скалярного поля, заданного дифференцируемой функцией двух переменных $z = f(x, y)$, градиент определяется формулой

$$grad\ z = \frac{\partial z}{\partial x}\ \bar{i}\ +\ \frac{\partial z}{\partial y}\ \bar{j}$$

Его связь с производной по направлению $\dfrac{\partial z}{\partial l}$ выражается равенством

$$\frac{\partial z}{\partial l} = |\ grad\ z\ | \cdot \cos\varphi,$$

где φ – угол между единичным вектором $\bar{l}$ и $grad\ z$ Вектор $grad\ z(P)$ перпендикулярен к касательной, проведенной к линии уровня в точке P.

Пример 16. Найти наибольшую скорость возрастания функции

$$z = x^2 y - 5y^3 \quad \text{в точке} \quad P_0(2;\ 1).$$

Р е ш е н и е. Наибольшая скорость возрастания функции равна модулю градиента этой функции. Найдем градиент функции z

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2xy, \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = x^2 - 15y^2 \ \Rightarrow$$

$$grad\ z = 2xy \cdot \bar{i}\ +\ (x^2 - 15y^2)\bar{j} = (2xy;\ x^2 - 15y^2)$$

В точке $P_0(2;\ 1)$ имеем $grad\ z = (4;\ -11)$

Тогда наибольшая скорость возрастания функции равна

$$|\ grad\ u\ | = \sqrt{4^2 + (-11)^2} = \sqrt{137}.\ \blacklozenge$$

Пример 17. Найти скорость изменения скалярного поля, определяемого функцией $z = ln(x^2+y^2)$ в точке $M_0(1;\ 3)$ в направлении

касательной, проведенной к параболе $y = 3\sqrt{x}$ в этой точке в сторону возрастания координаты x, и наибольшую скорость изменения поля в этой точке

Р е ш е н и е Скорость изменения скалярного поля в заданном направлении есть производная скалярного поля $z = f(x, y)$ по направлению вектора $\bar{l}$, задающего направление

$$\frac{\partial z}{\partial l} = f'_x(x_0, y_0)\cos\alpha + f'_y(x_0, y_0)\cos\beta,$$

где $\cos\alpha = \frac{l_x}{|\bar{l}|}$; $\cos\beta = \frac{l_y}{|\bar{l}|}$ - направляющие косинусы вектора $\bar{l}$,

$|\bar{l}| = \sqrt{l_x^2 + l_y^2}$. Вектор $\bar{l} = \overline{M_0 M_1}$ возьмем на касательной к параболе $y = 3\sqrt{x}$ в $M_0(1; 3)$, для чего составим уравнение касательной

$$y = y_0 + f'(x_0)(x - x_0),$$

$$f'(x) = \frac{3}{2\sqrt{x}}, \quad f'(x_0) = f'(1) = \frac{3}{2} \quad \Rightarrow$$

$$y = 3 + \frac{3}{2}(x - 1) \quad \Rightarrow \quad y = \frac{3}{2}x + \frac{3}{2} \text{ - уравнение касательной}$$

На найденной касательной возьмем точку M_1 с любой координатой $x_1 > 1$ $(x_1 > x_0)$, например $M_1(3; 6)$. Тогда

$$\bar{l} = \overline{M_0 M_1} = (2; 3) \quad \Rightarrow \quad |\bar{l}| = \frac{\sqrt{13}}{2} \quad \Rightarrow \quad \cos\alpha = \frac{4}{\sqrt{13}}, \quad \cos\beta = \frac{6}{\sqrt{13}}.$$

Найдем значение производной по направлению в точке $M_0(1; 3)$:

$$f'_x(x, y) = \frac{2x}{x^2 + y^2} \quad \Rightarrow \quad f'_x(1; 3) = \frac{2}{10},$$

$$f'_y(x, y) = \frac{2y}{x^2 + y^2} \quad \Rightarrow \quad f'_y(1; 3) = \frac{6}{10}$$

Тогда $\dfrac{\partial z}{\partial l} = 0{,}2 \cdot \dfrac{4}{\sqrt{13}} + 0{,}6 \dfrac{6}{\sqrt{13}} \approx 1{,}2.$

Наибольшая скорость изменения поля в точке $M_0(x_0, y_0)$ есть $grad\ z\big|_{M_0}$.

Так как $grad\ z = f'_x(x,y)\ \vec{i} + f'_y(x,y) \cdot \vec{j}$, то

$$grad\ z\big|_{M_0} = 0{,}2\ \vec{i} + 0{,}6 \cdot \vec{j}.$$

Величина наибольшей скорости

$$\left| grad\ z\big|_{M_0} \right| = \sqrt{0{,}2^2 + 0{,}6^2} = \sqrt{0{,}4} \approx 0{,}632. \blacklozenge$$

3.3. Касательная плоскость и нормаль к поверхности

Пусть поверхность задана уравнением

$$F(x, y, z) = 0,$$

левая часть которого является функцией, дифференцируемой в некоторой области.

Все касательные, проведенные в точке $P_0(x_0; y_0; z_0)$ к линиям, лежащим на поверхности и проходящим через точку P_0, расположены в одной плоскости, которую называют *касательной плоскостью* к поверхности $F(x, y, z) = 0$ в точке P_0

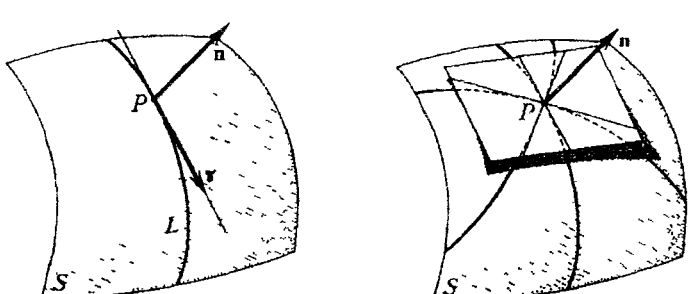


Рис. 5

Прямая, проходящая через точку P_0 перпендикулярно касательной плоскости, называется *нормалью* к поверхности $F(x,y,z)=0$ в точке P_0 (рис.5)

Так как касательная плоскость перпендикулярна $grad\ F(P)$ (см п. 3 2), то вектор $grad\ F(P)$ направлен вдоль нормали и, поэтому может быть принят в качестве ее направляющего вектора.

Тогда уравнение касательной плоскости к поверхности $F(x,y,z)=0$ в точке P_0 имеет вид

$$F'_x(x_0,y_0,z_0)(x-x_0)+F'_y(x_0,y_0,z_0)(y-y_0)+$$

$$+F'_z(x_0,y_0,z_0)(z-z_0)=0$$

Канонические уравнения нормали к поверхности $F(x,y,z)=0$ в точке P_0:

$$\frac{x-x_0}{F'_x(x_0,y_0,z_0)}=\frac{y-y_0}{F'_y(x_0,y_0,z_0)}=\frac{z-z_0}{F'_z(x_0,y_0,z_0)}.$$

Если поверхность задана уравнением $z=f(x,y)$, то уравнение касательной плоскости в точке $P_0(x_0,y_0,z_0)$ запишется в виде

$$f'_x(x_0,y_0)(x-x_0)+f'_y(x_0,y_0)(y-y_0)-(z-z_0)=0,$$

а канонические уравнения нормали – в виде

$$\frac{x-x_0}{f'_x(x_0,y_0)}=\frac{y-y_0}{f'_y(x_0,y_0)}=\frac{z-z_0}{-1}.$$

Пример 18. Составить уравнение касательной плоскости и нормали к поверхности $z=3x^3+2xy-2x$ в точке $C(2,3,z_0)$.

Р е ш е н и е Найдем частные производные функции z и вычислим их значения в указанной точке

$$f'_x(x,y)=9x^2+2y-2, \qquad f'_x(2,3)=40,$$

$$f'_y(x,\ y) = 2x, \qquad f'_y(2;3) = 4.$$

Значение $z_0 = z(C) = z(2;3) = 3 \cdot 2^3 + 2 \cdot 2 \cdot 3 - 2 \cdot 2 = 32$

Запишем уравнение касательной плоскости к данной поверхности в точке $C(2, 3, 32)$

$$40(x-2) - 4(y-3) - (z-32) = 0 \quad \Rightarrow \quad 40x + 4y - z - 60 = 0.$$

Запишем уравнение нормали к поверхности в точке C (2, 3, 32)

$$\frac{x-2}{40} = \frac{y-3}{4} = \frac{z-32}{-1} \quad \blacklozenge$$

3.4. Геометрический смысл полного дифференциала функции двух переменных

Пусть функция $z = f(x, y)$ имеет в точке $P_0(x_0; y_0)$ дифференциал $dz = f'_x(x_0, y_0)\Delta x + f'_y(x_0, y_0)\Delta y$

или $$dz = f'_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f'_y(x_0, y_0)(y - y_0) \qquad (*)$$

Рассмотрим уравнение касательной плоскости

$$f'_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f'_y(x_0, y_0)(y - y_0) - (z - z_0) = 0$$

или $$(z - z_0) = f'_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f'_y(x_0, y_0)(y - y_0) \qquad (**)$$

Правые части (*) и (**) совпадают, следовательно, и левые части этих равенств равны $dz = z - z_0$,

где dz - дифференциал функции $z = f(x, y)$ в точке $P_0(x_0, y_0)$, а $z - z_0$ - соответствующее приращение аппликаты (координаты z) касательной плоскости

Таким образом получаем, что *дифференциал функции двух переменных равен приращению аппликаты касательной плоскости* (рис 6)

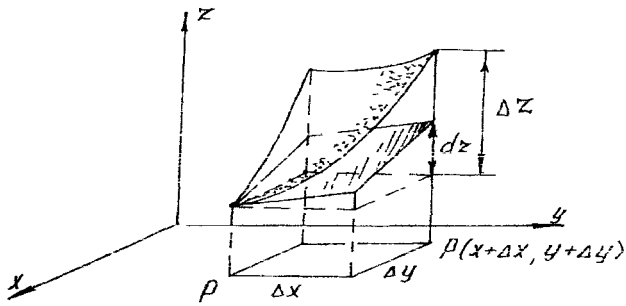


Рис 6

4. ЭКСТРЕМУМ ФУНКЦИИ ДВУХ ПЕРЕМЕННЫХ

4.1. Необходимые и достаточные условия существования экстремума

Пусть функция двух переменных $z = f(x, y)$ задана в некоторой области D.

Точка $P_0(x_0; y_0)$ называется *точкой максимума* функции $z = f(x, y)$, если существует такая окрестность этой точки, что для всех точек $P(x; y)$ этой окрестности, отличных от P_0, выполняется неравенство $f(P_0) > f(P)$ (рис 7).

Точка $P_0(x_0; y_0)$ называется *точкой минимума* функции $z = f(x, y)$, если существует такая окрестность этой точки, что для всех точек $P(x; y)$ этой окрестности, отличных от P_0, выполняется неравенство $f(P_0) < f(P)$ (рис 8)

Как и в случае функции одной переменной, точку максимума (или минимума) не следует смешивать с точкой, в которой функция принимает наибольшее (или наименьшее) значение в области D

Значение функции z в точке максимума (точке минимума) называют *максимумом* (*минимумом*) функции или *экстремумом*.

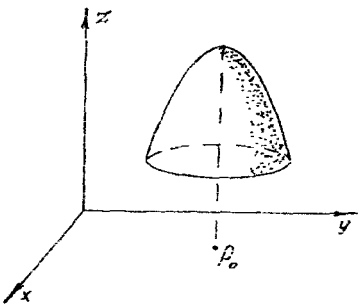


Рис. 7

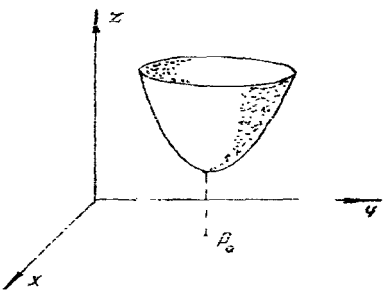


Рис. 8

Теорема (необходимый признак существования экстремума). Если $P_0(x_0;y_0)$ есть точка экстремума функции $z=f(x,y)$, то

$$\frac{\partial z}{\partial x}=z'_x=0, \qquad \frac{\partial z}{\partial y}=z'_y=0$$

в предположении, что указанные частные производные существуют в точке $P_0(x_0;y_0)$.

Таким образом, *обращение в нуль в точке* P_0 *частных производных первого порядка* функции $z=f(x,y)$ (если они существуют) является *необходимым условием* существования в точке P_0 экстремума этой функции.

Функция может иметь экстремум также в тех точках, где хотя бы одна из частных производных не существует. Например, функция $z=\sqrt{x^2+y^2}$, очевидно, имеет минимум в точке $O(0;0)$, но в этой точке

частные производные $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{2x}{\sqrt{x^2+y^2}}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{2y}{\sqrt{x^2+y^2}}$ не существуют.

Точки, в которых частные производные первого порядка $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$ обращаются в нуль или не существуют, называются *критическими точками* этой функции.

Из изложенного выше следует, что точки экстремума функции следует искать среди ее критических точек. Однако не всякая критическая точка будет точкой экстремума функции

Теорема (достаточный признак существования экстремума). Пусть $P_0(x_0;y_0)$ - критическая точка функции $z=f(x,y)$.

Обозначим $A=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, $C=\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$, $B=\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$

и составим $\Delta = A\cdot C - B^2$.

Тогда, если $\Delta(P_0)>0$, то $P_0(x_0;y_0)$ - точка экстремума,

причем $P_0(x_0;y_0)$ - точка максимума в случае $A=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}<0$,

$P_0(x_0;y_0)$ - точка минимума в случае $A=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}>0$,

если $\Delta(P_0)<0$, то в точке $P_0(x_0;y_0)$ - экстремума нет,

если $\Delta(P_0)=0$, то требуются дополнительные исследования (сомнительный случай).

Пример 19. Найти экстремумы функции $z = x^3 + 3xy^2 - 30x - 18y$.

Р е ш е н и е. Найдем частные производные первого порядка:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 3x^2 + 3y^2 - 30, \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = 6xy - 18.$$

Приравнивая эти производные к нулю, после элементарных преобразований получим систему уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial x} = 0, \\ \dfrac{\partial z}{\partial y} = 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x^2 + 3y^2 - 30 = 0, \\ 6xy - 18 = 0. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = 10, \\ xy = 3. \end{cases}$$

Складывая и вычитая почленно уравнения системы, получим:

$$\begin{cases} x^2 + 2xy + y^2 = 16, \\ x^2 - 2xy + y^2 = 4, \end{cases} \text{ или } \begin{cases} (x+y)^2 = 16, \\ (x-y)^2 = 4, \end{cases} \text{ или } \begin{cases} x + y = \pm 4, \\ x - y = \pm 2. \end{cases}$$

Решая эту систему уравнений (равносильную данной), находим четыре критические точки: $P_1(3;\ 1)$, $P_2(1;\ 3)$, $P_3(-1;\ -3)$, $P_4(-3;\ -1)$

Теперь найдем частные производные второго порядка:

$$A = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 6x, \qquad B = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 6x, \qquad C = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 6y,$$

составим выражение $\Delta = AB - C^2 = 36(x^2 - y^2)$

Так как

1) $\Delta(P_1) = 288 > 0$, $A(P_1) = 18 > 0 \Rightarrow P_1$ - точка минимума;

2) $\Delta(P_2) = -288 < 0 \Rightarrow$ в точке P_2 экстремума нет;

3) $\Delta(P_3) = -288 < 0 \Rightarrow$ в точке P_3 экстремума нет;

4) $\Delta(P_4) = 288 > 0$, $A(P_4) = -18 < 0 \Rightarrow P_4$ - точка максимума.

Итак, данная функция имеет два экстремума:

в точке P_1 - минимум $f(P_1) = -72$,

в точке P_4 - максимум $f(P_4) = 72$. ♦

4.2. Условный экстремум

Экстремум функции, найденный при условии, что изменения ее аргументов ограничены некоторыми дополнительными уравнениями, называется *условным экстремумом*

Уравнения, налагающие ограничения (связи) на аргументы данной функции, называются *уравнениями связей*. Геометрически это будут уравнения некоторых кривых или поверхностей.

Найти экстремум функции $z = f(x, y)$ при условии $\varphi(x, y) = 0$, означает отыскание экстремальных значений аппликат $z = f(x, y)$ вдоль кривой $\varphi(x, y) = 0$.

Найти экстремум функции $u = f(x, y, z)$ при условии $\varphi(x, y, z) = 0$, означает отыскание такой точки P_0 на поверхности $\varphi(x, y, z) = 0$, в которой $f(x, y, z)$ имеет наибольшее или наименьшее значение по сравнению с ее значениями в остальных точках поверхности $\varphi = 0$, лежащих в достаточно малой δ – окрестности точки P_0.

Значение функции $u = f(P)$ в точке P_0 называется *условным максимумом*, если эта точка удовлетворяет дополнительным уравнениям $\varphi_i(P) = 0$ и если существует такая ее δ окрестность, для всех точек которой, удовлетворяющих тем же уравнениям $\varphi_i(P) = 0$, будет выполняться неравенство $f(P) < f(P_0)$. Сама точка P_0 называется в этом случае *точкой условного максимума*

Аналогично определяется *условный минимум* и *точка условного минимума*, в которой $f(P) > f(P_0)$.

Если уравнения связи $\varphi_i(P) = 0$ разрешены относительно некоторых переменных, то, подставляя эти переменные в уравнение

функции, можно уменьшить число связей либо **вовсе избавиться от** связей и решать задачу о безусловном экстремуме.

Для нахождения экстремума функции двух переменных $z = f(x, y)$ при условии $\varphi(x, y) = 0$ подставим y из уравнения $\varphi(x, y) = 0$ в уравнение функции, получим задачу на экстремум для функции одной переменной $z = f(x, y(x))$.

Пример 20. Найти экстремум функции $z = x^2 + y^2$

при условии $x + y = 1$.

Р е ш е н и е. Из уравнения связи находим $y = 1 - x$.

Тогда $$z = x^2 + (1-x)^2 = x^2 + 1 - 2x + x^2 = 2x^2 - 2x + 1.$$

$$z' = 4x - 2, \quad z' = 0, \quad 4x - 2 = 0, \quad x = \frac{1}{2}.$$

Так как $z'' = 4 > 0$, то $x = \frac{1}{2}$ - точка минимума.

Тогда $y = 1 - x = \frac{1}{2} \Rightarrow z_{\min} = x^2 + y^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$,

т.е. при аргументах, удовлетворяющих уравнению связи $x + y = 1$.

$z_{\min} = \frac{1}{2}$ (рис. 9).

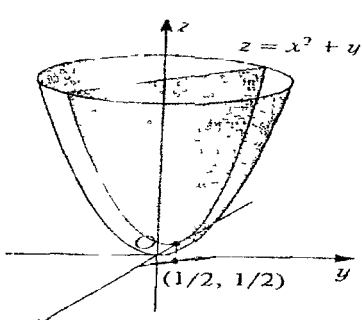


Рис. 9

Если уравнения связи не разрешимы ни относительно ни одной из переменных, то для нахождения условного экстремума используют метод множителей Лагранжа (см. [1]-[11])

4.3. Наибольшее и наименьшее значения функции в замкнутой области

Пусть функция $z = f(x, y)$ непрерывна в ограниченной замкнутой области D и дифференцируема внутри этой области.

Тогда она имеет в этой области наименьшее и наибольшее значения, которые достигаются либо внутри области, либо на ее границе

Если наибольшее или наименьшее значения функция принимает во внутренних точках области D, то эти точки, очевидно, являются точками экстремума функции $z = f(x, y)$

Таким образом, точки, в которых функция имеет наибольшее или наименьшее значения, являются либо точками экстремума, либо граничными точками области D

Алгоритм нахождения наибольшего и наименьшего значений функции двух переменных.

1. Находим критические точки функции $z = f(x, y)$ в области D из условий: $\frac{\partial z}{\partial x} = 0$, $\frac{\partial z}{\partial y} = 0$. Вычисляем значения функции z в этих точках

2 Находим наибольшее и наименьшее значения функции на границе области D

3 Сравнивая все полученные в п. 1, 2 значения функции z, выбираем наибольшее и наименьшее.

В некоторых случаях при нахождении наибольших и наименьших значений функции двух переменных в ограниченной замкнутой области границу этой области удобно разбить на части, каждая из которых задается своим уравнением.

Пример 21. Найти наибольшее и наименьшее значения функции

$$z = x^2 - xy + y^2 + x - 5y$$

в замкнутом треугольнике $0\,(0;\,0)$, $A\,(5;\,0)$, $B\,(0;\,5)$.

Решение.

1. Найдем критические точки функции внутри области D:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2x - y + 1 = 0, \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = -x + 2y - 5 = 0, \quad \text{т е}$$

$$\left.\begin{array}{l} 2x - y + 1 = 0 \\ 2y - x - 5 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 2x - y = -1 \\ -x + 2y = 5 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} y = 2x + 1 \\ -x + 2(2x + 1) = 5 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} y = 2x + 1 \\ x = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x = 1 \\ y = 3 \end{array}\right\}$$

Получили критическую точку $P_1(1;\,3)$ (см. рис. 10)

Вычислим значения функции $z(P_1) = z(1;\,3) = -7$.

2. Исследуем функцию на границе области:

I. Рассмотрим участок OA: $y = 0$, $z\,(x,\,0) = x^2 + x$, $0 \le x \le 5$,

$$z'_x = 2x + 1, \quad z'_x = 0 \;\Rightarrow\; 2x + 1 = 0 \;\Rightarrow\; x = -\frac{1}{2} \notin [0;\,5].$$

Тогда наибольшее и наименьшее значения функция может принимать на концах отрезка, $x \in [0;\,5]$.

Вычислим $z(O) = z\,(0;\,0) = 0$, $z(A) = z\,(5;\,0) = 30$.

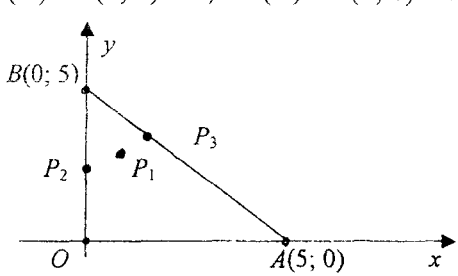


Рис. 10

II. Рассмотрим участок OB: $x = 0,\ z(0, y) = y^2 - 5y,\quad 0 \le y \le 5,$

$$z'_y = 2y - 5,\quad z'_y = 0 \ \Rightarrow\ 2y - 5 = 0 \ \Rightarrow\ y = \frac{5}{2} \in [0;\ 5].$$

Получили точку $P_2(0;\ 2{,}5)$ (рис. 10).

Вычислим значения функции в найденной точке P_2 и на концах отрезка $y \in [0;\ 5]$:

$$z(P_2) = z(0;\ 0{,}25) = -\frac{25}{4},\qquad z(B) = z(0;\ 5) = 0.$$

III. Рассмотрим участок AB: $y = 5 - x,$

$$z = x^2 - x(5 - x) + (5 - x)^2 + x - 5(5 - x) = 3x^2 - 9x,$$

$$z'_x = 6x - 9,\quad z'_x = 0 \ \Rightarrow\ 6x - 9 = 0 \ \Rightarrow\ x = \frac{3}{2} \ \text{и} \ y = \frac{7}{2}.$$

Получили точку $P_3(1{,}5;\ 3{,}5) \in D$ (рис. 10).

Вычислим $z(P_3) = z(1{,}5;\ 3{,}5) = -\frac{27}{4}.$

Обобщая полученные результаты, имеем:

$$z(P_1) = -7,\qquad z(P_2) = -\frac{25}{4},\qquad z(P_3) = -\frac{27}{4},$$

$$z(O) = 0,\qquad z(A) = 30,\qquad z(B) = 0,$$

следовательно $z_{наим} = -7;\qquad z_{наиб} = 30.$

Вопросы для самоконтроля

1. Функции двух, трех и более переменных (определение, область определения). Геометрическое толкование функции 2-х переменных.

2 Линии уровня функции двух переменных, их геометрическое изображение Поверхности уровня функции трех переменных.

3. Предел функции двух переменных в точке. Непрерывность функции в точке, точки разрыва

4. Понятие частных и полного приращений функции двух переменных. Определение частных производных, правило нахождения частных производных нескольких переменных. Геометрическая смысл частных производных.

5. Определение функции, дифференцируемой в данной точке. Полный дифференциал и его связь с частными производными. Применение полного дифференциала для вычисления приближенного значения функции.

6. Уравнение касательной плоскости и нормали к поверхности в данной точке.

7 Понятие сложной функции.

Формулы частных производных сложной функции

$$z = F(u, v), \text{ где } u = u(x, y), \ v = v(x, y),$$

Формула нахождения полной производной

а) $z = F(u, v)$, где $u = u(x)$, $v = v(x)$

б) $z = F(x, y, z)$, где $y = y(x)$, $z = z(x)$.

8. Формула производной неявной функции $z = f(x, y)$, заданной уравнением $F(x, y, z) = 0$

9. Формула производной неявной функции $y = f(x)$, заданной уравнением $F(x, y) = 0$

10. Частные производные высших порядков. Теорема о равенстве смешанных частных производных.

11 Понятие скалярного поля (на плоскости и в пространстве). Примеры Производная скалярного поля $u = u(x, y, z)$ в данной точке P_0 по направлению вектора $\vec{l}$ Формула ее вычисления. Механический смысл

12 Градиент скалярного поля $u = u(x, y, z)$ в данной точке P_0 Связь между производной по направлению и градиентом. Свойства градиента Механический смысл градиента

13 Определение максимума и минимума функции двух переменных. Необходимые и достаточные условия существования экстремума функции двух переменных. Правило нахождения экстремумов

14. Понятие наибольшего и наименьшего значений функции двух переменных в замкнутой области. Правило нахождения наибольшего и наименьшего значений.

15. Понятие условного экстремума функции. Методы нахождения условного экстремума.

Задания для контрольной работы

Вариант 1

1. Дана функция $z = \dfrac{y}{\left(x^2 - y^2\right)^5}$. Показать, что

$$\frac{1}{x}\frac{\partial z}{\partial x} - \frac{1}{y}\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{z}{y^2}.$$

2. Построить линии уровня функции $z = x^2 - 4x + y$.

3. Найти область определения функции $z = arcsin(5x + y + 2)$.

4. Найти полный дифференциал функции $u = (2x + 3y)^{2z}$.

5. Дана функция $z = x^2 - xy + 2y^2 + 3x + 2y + 1$,

вектор $\bar{l} = 2\bar{i} + \bar{j}$ и точка $A(1;\ 2)$.

Найти $\left.\dfrac{\partial z}{\partial l}\right|_A$, $grad\ z(A)$, $|grad\, z(A)|$.

Составить уравнение касательной плоскости и нормали к поверхности $z = f(x, y)$ в точке A.

6. Исследовать на экстремум функцию двух независимых переменных $z = x^4 + y^4 - 2x^2 - 2y^2$.

7. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z = x^2 + y^2 - 9xy + 27$ в замкнутой области D, заданной системой неравенств $0 \le x \le 3$, $0 \le y \le 3$. Сделать чертеж.

Вариант 2

1. Дана функция $z = \frac{y^2}{3x} + arcsin(xy)$. Показать, что

$$x^2 \frac{\partial z}{\partial x} - xy \frac{\partial z}{\partial y} + y^2 = 0.$$

2. Построить линии уровня функции $z = (x+3)^2 + y + 3$.

3. Найти область определения функции $z = \sqrt{4 - x - (y-2)^2}$

4. Найти полный дифференциал функции

$$u = arcsin(x^2 + xy^3 + zx + 2z).$$

5 Дана функция $z = 3x^2 - xy + y + x$,

вектор $\bar{l} = 3\bar{i} - 2\bar{j}$ и точка $A(1;\ 3)$.

Найти $\left.\frac{\partial z}{\partial l}\right|_A$, $grad\ z(A)$, $|grad\, z(A)|$.

Составить уравнение касательной плоскости и нормали к поверхности $z = f(x\ y)$ в точке A.

6. Исследовать на экстремум функцию двух независимых переменных $z = x^3 + y^3 - 6xy$.

7. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z = x^2 + 2y^2 + 1$ в замкнутой области D, заданной системой неравенств $x \geq 0,\ y \geq 0,\ x + y \leq 3$. Сделать чертеж.

Вариант 3

1. Дана функция $z = cos\, y + (y - x)\, sin\, y$. Показать, что

$$(x - y)\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial z}{\partial y}.$$

2. Построить линии уровня функции $z = x^2 - 4x + 8y - 4$.

3. Найти область определения функции $z = \dfrac{x + y}{\sqrt{x \quad y + 1}}$.

4. Найти полный дифференциал функции

$$u = ln(x^2 - y^2 + z^2 + 1).$$

5. Дана функция $z = xy + 2y^2 - 2x$,

вектор $\bar{l} = \bar{i} - 5\bar{j}$ и точка $A(1;\ 2)$.

Найти $\left.\dfrac{\partial z}{\partial l}\right|_A$, $grad\ z(A)$, $|grad\, z(A)|$.

Составить уравнение касательной плоскости и нормали к поверхности $z = f(x, y)$ в точке A.

6. Исследовать на экстремум функцию двух независимых переменных $z = 2x^3 + 4x^2 + y^2 - 2xy$.

7. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z = x^2 + xy$ в замкнутой области D, заданной системой неравенств $y \geq x^2 - 4$, $y \leq 2$. Сделать чертеж.

Вариант 4

1. Дана функция $z = ln\left(x^2+y^2+2x+1\right)$. Показать, что

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0.$$

2. Построить линии уровня функции $z = x-(y-5)^2$.

3. Найти область определения функции $z=\sqrt{y^2+x^2-4}$

4. Найти полный дифференциал функции

$$u = sin(x^3-y^2-5z).$$

5. Дана функция $z = x^2+3xy-6y$,

вектор $l = 3\bar{i}-5\bar{j}$ и точка $A(4;1)$.

Найти $\left.\frac{\partial z}{\partial l}\right|_A$, $grad\ z(A)$, $|grad\, z(A)|$.

Составить уравнение касательной плоскости и нормали к поверхности $z = f(x,y)$ в точке A.

6 Исследовать функцию на экстремум двух независимых переменных $z = x^3y+y^2x^3+15x$.

7. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z = 3-2x^2-xy-y^2$ в замкнутой области D, заданной системой неравенств $x \le 1$, $y \ge 0$, $y \le x$. Сделать чертеж.

Вариант 5

1. Дана функция $z = e^{xy}$. Показать, что

$$x^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - 2xy\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} - y^2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + 2xyz = 0.$$

2. Построить линии уровня функции $z = y^2 + x - 2y + 1$.

3. Найти область определения функции $z = \arcsin(3x + y - 2)$.

4. Найти полный дифференциал функции $u = \ln(x^2 - y^2 + z^2 + 1)$.

5. Дана функция $z = x^2 - y^2 + 6x + 3y$,

вектор $\bar{l} = 2\bar{i} + j$ и точка $A(2;3)$,

Найти $\left.\frac{\partial z}{\partial l}\right|_A$, $grad\ z(A)$, $|grad\, z(A)|$.

Составить уравнение касательной плоскости и нормали к поверхности $z = f(x,y)$ в точке A.

6. Исследовать на экстремум функцию двух независимых переменных $z = 2x^3 + xy^2 + 5x^2 + y^2$

7. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z = x^2 + 3y^2 + x - y$ в замкнутой области D, заданной системой неравенств $x \geq -1$, $y \geq -1$, $x + y \leq 1$. Сделать чертеж.

Вариант 6

1. Дана функция $z = ln\left(x + e^{-y}\right)$. Показать, что

$$\frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} - \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 0.$$

2. Построить линии уровня функции $z = x^2 \quad 4x + y$.

3. Найти область определения функции $z = x + \sqrt{x^2 + y^2 - 1}$.

4 Найти полный дифференциал функции $u = e^z \sin(2x + 3y)$.

5. Дана фучкция $z = x^2 + 2xy + 3y^2$,

вектор $\bar{l} = -3\bar{i} + 4j$ и точка $A(2;1)$,

Найти $\left.\frac{\partial z}{\partial l}\right|_A$, $grad\ z(A)$, $|grad\, z(A)|$.

Составить уравнение касательной плоскости и нормали к поверхности $z = f(x,y)$ в точке A.

6. Исследовать функцию на экстремум двух независимых переменных $z = x^2 + xy + y^2 - 3x - 6y$.

7 Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z = x^2 + 2xy + 2y^2$ в замкнутой области D, заданной системой неравенств $-1 \le x \le 1$, $0 \le y \le 3$. Сделать чертеж

Вариант 7

1 Дана функция $z = \frac{x}{y}$. Показать, что

$$x\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} - \frac{\partial z}{\partial y} = 0.$$

2. Построить линии уровня функции $z = (x+2)^2 - y^2 + 1$.

3. Найти область определения функции $z = \frac{1}{\sqrt{-x^2 + y + 5}}$

4. Найти полный дифференциал функции $z = ln(xyz^3)$.

5. Дана функция $z = 2x^3 + 4x^2 + y^2 - 2xy$,

вектор $\bar{l} = -2\bar{i} + 2\bar{j}$ и точка $A(-2;0)$.

Найти $\left.\frac{\partial z}{\partial l}\right|_A$, $grad\ z(A)$, $|grad\, z(A)|$.

Составить уравнение касательной плоскости и нормали к поверхности $z = f(x,y)$ в точке A.

6 Исследовать на экстремум функцию двух независимых переменных $z = x^3 + y^3 - 15xy$.

7 Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z = 5x^2 - 3xy + y^2 + 4$ в замкнутой области D, заданной системой неравенств $y \geq -1$, $x \geq -2$, $x + y \leq 1$. Сделать чертеж.

Вариант 8

1. Дана функция $z = x^y$. Показать, что

$$y\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = (1 + y\ ln x)\frac{\partial z}{\partial x}.$$

2. Построить линии уровня функции $z - y^2 + x - 2$.

3. Найти область определения функции $z = ln(-x + y)$.

4. Найти полный дифференциал функции $u = x^2 y - y^3 z + \frac{x}{z}$.

5. Дана функция $z = x^2 + y^2 - 3xy$,

вектор $\bar{l} = -\bar{i} + 3\bar{j}$ и точка $A(-1;5)$.

Найти $\left.\frac{\partial z}{\partial l}\right|_A$, $grad\ z(A)$, $|grad\, z(A)|$.

Составить уравнение касательной плоскости и нормали к поверхности $z = f(x, y)$ в точке A.

6. Исследовать на экстремум функцию двух независимых переменных $z = xy^2(1 - x - y)$.

7. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z = 10 + 2xy - x^2$ в замкнутой области D, заданной системой неравенств $0 \le y < 4\text{-}x^2$. Сделать чертеж.

Вариант 9

1. Дана функция $z = x\,e^{-\frac{y}{x}}$. Показать, что

$$x^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2xy\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + y^2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0.$$

2. Построить линии уровня функции $z = x^2 + y^2 - 4x + 4$.

3. Найти область определения функции $z = arcsin(x - 2y + 5)$.

4. Найти полный дифференциал функции $u = \sqrt{x^2 + y^2 - z^2}$.

5. Дана функция $z = x^2 - y^2 + 5x + 4y$,

вектор $\bar{l} = 3\bar{i} - 4\bar{j}$ и точка $A(3,2)$.

Найти $\left.\frac{\partial z}{\partial l}\right|_A$, $grad\ z(A)$, $|grad\, z(A)|$.

Составить уравнение касательной плоскости и нормали к поверхности $z = f(x,y)$ в точке A.

6 Исследовать на экстремум функцию двух независимых переменных $z = x^2 - xy + 2y^2 + 3x + 2y + 1$.

7. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z = x^2 + 2xy - y^2 + 4x$ в замкнутой области D, заданной системой неравенств $x \le 0,\ y \le 0,\ x + y + 2 \ge 0$. Сделать чертеж.

Вариант 10

1. Дана функция $z = sin(x + ay)$. Показать, что

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = a^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}.$$

2. Построить линии уровня функции $z = x^2 + y^2 + 6x - 6y + 14$.

3. Найти область определения функции $z = \sqrt{x^2 - 3y + 6}$.

4. Найти полный дифференциал функции $u = ln(xy + z^3)$

5. Дана функция $z = 2xy + 3y^2 - 5x$,

вектор $\bar{l} = 3\bar{i} + \bar{j}$ и точка $A(2;4)$.

Найти $\left.\frac{\partial z}{\partial l}\right|_A$, $grad\ z(A)$, $|grad\, z(A)|$.

Составить уравнение касательной плоскости и нормали к поверхности $z = f(x,y)$ в точке A.

6. Исследовать на экстремум функцию двух независимых переменных $z = x^2 + y^2 - 6x + 4y + 2$.

7. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z = x^2 + xy - 2$ в замкнутой области D, заданной системой неравенств $4x^2 - 4 \le y \le 0$. Сделать чертеж.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1 Бермант А Ф, Араманович И Г Краткий курс математического анализа -М Наука, 1973 - 733с
2 Боярчук А К, Головач Г П Справочное пособие по высшей математике -М Наука 1998 -Т 5 -384с
3 Данко П Е, Попов А Г, Кожевникова Т Я Высшая математика в упражнениях и задачах -М Высшая школа, 1999 Ч 1 -304с, Ч 2 -416с
4 Демилович Б Н Задачи и упражнения по математическому анализу -М Наука, 1978 - 478с
5 Задачник по курсу математического анализа / Под ред Н Я Виленкина -М Просвещение, 1971 - 456с
6 Запорожец Г И Руководство к решению задач по математическому анализу -М Высшая школа, 1964 -464 с
7 Мышкис А Д Лекции по высшей математике -М Наука, 1969 -640с
8 Пискунов Н С Дифференциальное и интегральное исчисление -М Наука, 1985 -Т 1 -460с
9 Сборник задач по курсу высшей математики /Под ред Г И Кручковича -М Высшая школа, 1973 -576с
10 Шипачев В С Высшая математика -М Высшая школа 1990 -479 с
11 Шнейдер В Е, Слуцкий А И, Шумов А С Краткий курс высшей математики -М Высшая школа,1978 -328с

ОГЛАВЛЕНИЕ

	с
1 Понятие функции нескольких переменных	3
1 1 Основные определения	3
1 2 Предел функции двух переменных Непрерывность	7
2 Дифференцируемость функции	10
2 1 Частные и полное приращения Частные производные	10
2 2 Дифференциал функции	12
2 3 Свойства дифференцируемой функции	15
2 4 Приложение полного дифференциала	17
2 5 Производная сложной функции	18
2 6 Производная функции заданной неявно	21
2 7 Инвариантность формы первого дифференциала	22
2 8 Частные производные высших порядков	23
2 9 Дифференциалы высших порядков	26
3 Скалярное поле	28
3 1 Производная по направлению	29
3 2 Градиент функции	32
3 3 Касательная плоскость и нормаль к поверхности	36
3 4 Геометрический смысл полного дифференциала функции двух переменных	38
4 Экстремум функции двух переменных	39
4 1 Необходимые и достаточные условия существования экстремума	39
4 2 Условный экстремум	4
4 3 Наибольшее и наименьшее значения функции в замкнутой области	45
Вопросы для самоконтроля	48
Задания для контрольной работы	50
Библиографический список	60

Учебное издание

Медведева Ирина Петровна

Попова Людмила Никандровна

Дифференциальное исчисление функции нескольких переменных

Учебное пособие
для студентов заочного отделения
всех специальностей

Редактор Л И Рубанова
Компьютерная верстка И П Медведевой

Лицензия №021231 от 23 07 97 г
Подписано в печать 11 12 03
Формат 60×84/16 Печать офсетная
Объем в печ л – 3 1 Уч - изд л – 3 3
План 2003 г
Заказ 270

Глазковская типография, г Иркутск, ул Гоголя, 53