Министерство транспорта Российской Федерации
Федеральное агентство железнодорожного транспорта
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Дальневосточный государственный
университет путей сообщения»

Кафедра «Высшая математика»

М.А. Городилова, Л.Н. Гамоля, В.И. Жукова, М.И. Якунина

Высшая математика

Методическое пособие по выполнению контрольных работ
для студентов ИИФО

Хабаровск
Издательство ДВГУПС
2020

5. ФУНКЦИИ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

5.1. Определение функции нескольких переменных

Пусть задано множество D упорядоченных пар чисел $(x; y)$. Соответствие f, которое каждой паре чисел $(x; y) \in D$ сопоставляет одно и только одно число $z \in R$, называется функцией двух переменных, определённой на множестве D со значениями в R, и записывается в виде

$$z = f(x; y) \text{ или } \quad f: D \to R.$$

При этом x и y называются **независимыми переменными** (аргументами), а z – **зависимой переменной (функцией**).

Множество $D = D(f)$ называется областью определения функции. Множество значений, принимаемых z в области определения, называется областью изменения этой функции, обозначается $E(f)$ или E.

5.2. Частные производные первого порядка

Пусть задана функция $z = f(x; y)$. Так как x и y – независимые переменные, то одна из них может изменяться, а другая сохранять своё значение. Дадим независимой переменной x приращение Δ_x, сохраняя значение y неизменным. Тогда z получит приращение, которое называется частным приращением z по x и обозначается $\Delta_x z$. Итак,

$$\Delta_x z = f(x + \Delta x; y) - f(x; y)$$

Аналогично получаем частное приращение z по y:

$$\Delta_y z = f(x; y + \Delta y) - f(x; y)$$

Полное приращение функции z определяется равенством:

$$\Delta z = f(x + \Delta x; y + \Delta y) - f(x; y).$$

Если существует предел $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta_x z}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(x + \Delta x; y) - f(x; y)}{\Delta x}$

то он называется частной производной функции $z = f(x; y)$ в точке $M_0(x_0; y_0)$. Её обычно обозначают символами $f_x^{'}, \dfrac{\partial z}{\partial x}, \dfrac{\partial f}{\partial x}$.

Аналогично определяется и обозначается частная производная от $z = f(x; y)$ по переменной y: $\lim\limits_{\Delta y \to 0} \dfrac{\Delta_y z}{\Delta y} = \lim\limits_{\Delta y \to 0} \dfrac{f(x; y + \Delta y) - f(x; y)}{\Delta y}$ и обозначается одним из символов $z_x^{'}, \dfrac{\partial z}{\partial y}, \dfrac{\partial f}{\partial y}$.

5.3. Частные производные высших порядков

Частные производные $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$ называют частными производными первого порядка. Их можно рассматривать, как функции от $(x; y) \in D$. Эти функции могут иметь частные производные, которые называются частными производными второго порядка. Они определяются и обозначаются следующим образом:

$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = f'_{xx}{}';$

$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = f''_{xy}(x; y);$

$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = f''_{yy}(x; y).$

Аналогично определяются частные производные 3-го, 4-го и т.д. порядков.

Частная производная второго или более высокого порядка, взятая по различным переменным, называется смешанной частной производной.

Пример 5.1

Найти частные производные второго порядка функции $z = e^{x^2+y^2}$.

Решение

Найдём частные производные первого порядка:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2xe^{x^2+y^2}; \frac{\partial z}{\partial y} = 2ye^{x^2+y^2}$$

Найдём частные производные второго порядка:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 2e^{x^2+y^2} + 4x^2e^{x^2+y^2};\ \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 2e^{x^2+y^2} + 4y^2e^{x^2+y^2};$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 4xye^{x^2+y^2}.$$

5.4. Дифференцируемость и полный дифференциал функции

Функция $z = f(x; y)$ называется дифференцируемой в точке $M(x; y)$, если её полное приращение в этой точке можно представить в виде

$$\Delta z = \frac{\partial f(x; y)}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial f(x; y)}{\partial y}\Delta y + \alpha\Delta x + \beta\Delta y$$

Главная часть приращения функции $z = f(x; y)$, линейная относительно Δx *и* Δy называется полным дифференциалом этой функции и обозначается символом dz:

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}\partial x + \frac{\partial z}{\partial y}dy.$$

5.5. Экстремум функции двух переменных

Точка (x_0, y_0) называется точкой максимума функции $z = f(x; y)$,если существует такая δ – окрестность точки $(x_0; y_o)$, что для каждой точки $(x; y)$ отличной от $(x_0; y_o)$, из этой окрестности выполняется неравенство $f(x; y) < f(x_0; y_o)$

Аналогично определяется точка минимума функции: для всех точек $(x; y)$ отличных от $(x_0; y_o)$ из окрестности точки $(x_0; y_o)$ выполняется неравенство $f(x; y) > f(x_0; y_o)$.

Необходимые и достаточные условия экстремума.

Теорема (необходимые условия экстремума). Если в точке $N(x_0; y_0)$дифференцируемая функция $z = f(x; y)$ достигает экстремума, то её частные производные в этой точке равны нулю: $f_x'(x_0; y_0) = 0$, $f_y'(x_0; y_0) = 0$ или не существуют.

Точки, в которых первые производные равны нулю или не существуют, называются критическими точками.

В критических точках функция может иметь экстремум, а может и не иметь. Для этого необходимы дополнительные исследования функции.

Теорема (достаточное условие экстремума). Пусть в некоторой области, содержащей точку $M(x_0; y_0)$ функция $f(x; y)$имеет непрерывные частные производные до третьего порядка включительно; пусть, кроме того, точка $M(x_0; y_0)$ является критической точкой функции $f(x; y)$, т. е.

$$\frac{\partial f(x_0;y_0)}{\partial x} = 0, \frac{\partial f(x_0;y_0)}{\partial y} = 0$$

Вычислим значения частных производных второго порядка в точке $M(x_0; y_0)$:

$$A = \frac{\partial^2 f(x_0;y_0)}{\partial x^2}\ C = \frac{\partial^2 f(x_0;y_0)}{\partial y^2}\ B = \frac{\partial^2 f(x_0;y_0)}{\partial x dy}$$

Обозначим

$$\Delta = \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} = \text{AC-}B^2$$

Тогда:

Если $\Delta > 0$, то функция $f(x; y)$в точке $M(x_0; y_0)$ имеет экстремум: максимум, если $A < 0$;минимум, если $A > 0$;

Если $\Delta < 0$, *то функция* $f(x; y)$ в точке $M(x_0; y_0)$ экстремума не имеет.

В случае $\Delta = 0$ экстремум в точке $M(x_0; y_0)$ может быть, может не быть. Необходимы дополнительные исследования.

Пример 5.2

Исследовать функцию $z = x^3 + 8y^3 + 6y^3 + 5$ на экстремум.

Решение

Находим частные производные первого порядка

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 3x^2 - 6y;\ \ \frac{\partial z}{\partial y} = 24y^2 - 6x.$$

Воспользовавшись необходимыми условиями экстремума, находим критические (стационарные) точки

$$\begin{cases} \frac{\partial z}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial z}{\partial y} = 0 \end{cases}; \begin{cases} 3x^2 - 6y = 0 \\ 24y^2 - 6x = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ y_1 = 0 \end{cases}; \begin{cases} x_2 = 1 \\ y_2 = {}^1/_2 \end{cases}$$

Критические точки $M_1(0;0), M_2(1;{}^1/_2)$

Исследуем эти точки на экстремум с помощью достаточных условий. Для этого найдём сначала вторые частные производные:

$$A = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 6x;\quad C = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 48y;\quad B = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -6$$

Подставляя сюда координаты критических точек, получим:

Для точки M_1: $A = 0$: $C = 0$: $B = -6 \Longrightarrow \Delta = AC - B^2 = -36 < 0$, следовательно, согласно достаточному условию, в точке M_1 функция не имеет экстремума;

Для точки M_2: $A = 6$: $C = 24$: $B = -6 \Longrightarrow \Delta = 108 > 0$ и $A > 0$, следовательно, в точке M_2 функция имеет экстремум, а именно минимум. Значение функции в точке экстремума $z_{min} = 4$.

5.6. Метод наименьших квадратов

Пусть на основании эксперимента требуется установить функциональную зависимость между двумя переменными величинами x и y. В результате эксперимента получено n значений функции $y = f(x)$ при соответствующих значениях аргумента x:

x	x_1	x_2	…	x_n
y	y_1	y_2	…	y_n

Вид функции устанавливается из теоретических соображений или на основании характера расположения на координатной плоскости точек, соответствующих экспериментальным данным. Предположим, что между x и y существует линейная зависимость, выражающаяся формулой

$$y = ax + b \qquad (5.1)$$

Требуется подобрать коэффициенты a и b таким образом, чтобы сумма квадратов разностей значений y_i, определенных экспериментально, и функции $\varphi(x_i, a, b)$ в соответствующих точках была бы наименьшей.

$$S(a,b) = \sum_{i=1}^{n}[y_i - (ax_i + b)]^2. \quad (5.2)$$

На основании теоремы о необходимом условии экстремума следует, что значения a, b удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{cases} \frac{\partial S}{\partial a} = 0 \\ \frac{\partial S}{\partial b} = 0 \end{cases}, \text{ то есть } \quad \begin{cases} \sum_{i=1}^{n} x_i y_i - a\sum_{i=1}^{n} x_{i^2} - b\sum_{i=1}^{n} x_i = 0 \\ \sum_{i=1}^{n} y_i - a\sum_{i=1}^{n} x_i - bn = 0 \end{cases}. \quad (5.3)$$

Из этой системы находим числа a и b и затем, подставляя их в уравнение (8) получаем уравнение искомой прямой.

Пример 5.3

Пусть в результате эксперимента получены семь значений функции $y = f(x)$ при семи значениях аргумента x, которые приведены в таблице:

X	1	2	3	4	5	6	7
Y	5	4	3	4	1	3	1

Методом наименьших квадратов найти функцию вида $y = ax + b$, выражающую приближённо аппроксимирующую функцию $y = f(x)$. В декартовой прямоугольной системе координат отметить экспериментальные точки и построить аппроксимирующую функцию.

Решение

При составлении системы уравнений (5.3) для определения коэффициентов a и b предварительно вычислим:

i	x	y	xy	x^2
1	1	5	5	1
2	2	4	8	4
3	3	3	9	9
4	4	4	16	16
5	5	1	5	25
6	6	3	18	36
7	7	1	7	49
Σ	28	20	67	140

$$\sum_{i=1}^{7} x_i y_i = 67\,; \quad \sum_{i=1}^{7} x_i = 28 \quad \sum_{i=1}^{7} y_i = 20 \quad \sum_{i=1}^{7} x_{i^2} = 140$$

Система (10) примет вид $\begin{cases} 67 - 140a - 28b = 0 \\ 20 - 28a - 7b = 0 \end{cases}$

Решая эту систему, найдём $a = -0{,}464,\ \ b = 4{,}43$.

Следовательно, $y = -0{,}464x + 4{,}43$-уравнение искомой прямой.

На координатной плоскости отметим экспериментальные точки и строим график полученной функции.

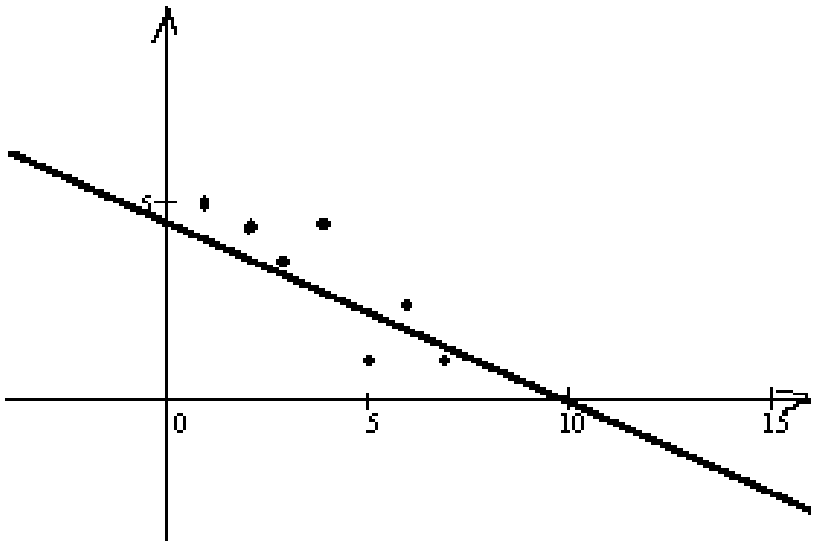


Рис. 1.3. График функции $y = -0{,}464x + 4{,}43$

7. ИНТЕГРИРОВАНИЕ ФУНКЦИИ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

7.1. Неопределенный интеграл

Во многих задачах науки и техники приходится восстанавливать функцию по известной производной.

Определение 7.1. Функция $F(x)$ называется первообразной для функции $f(x)$ на заданном промежутке, если на этом промежутке функция $F(x)$ непрерывна и выполняется равенство

$F'(x) = f(x).$

Множество всех первообразных функции $f(x)$ имеет вид $F(x) + C.$

Отыскание для функции $f(x)$ всех ее первообразных называется интегрированием и составляет одну из задач интегрального исчисления.

Определение 7.2. Совокупность всех первообразных для функции $y = f(x)$ на заданном промежутке называется неопределенным интегралом этой функции и обозначается

$\int f(x)dx = F(x) + C.$

Функция $f(x)$ называется подынтегральной функцией, а произведение $f(x)\cdot dx$ – подынтегральным выражением.

Рассмотрим некоторые свойства неопределенных интегралов.

Свойство 1. Дифференциал от неопределенного интеграла равен подынтегральному выражению, а производная – подынтегральной функции

$$d\left(\int f(x)dx\right)=f(x)dx;\ \left(\int f(x)dx\right)'=f(x)$$

Свойство 2. Неопределенный интеграл от производной некоторой функции равен сумме этой функции и некоторой постоянной

$$\int F'(x)dx=F(x)+C.$$

Свойство 3. Постоянный множитель можно выносить за знак неопределенного интеграла

$$\int \lambda\cdot f(x)dx=\lambda\int f(x)dx,\ \lambda\ -\text{const}.$$

Свойство 4. Если существуют интегралы $\int f_1(x)dx$ и $\int f_2(x)dx$, то неопределенный интеграл суммы (разности) $f_1(x)\pm f_2(x)$ равен сумме (разности) неопределенных интегралов от этих функций

$$\int\left(f_1(x)\pm f_2(x)dx\right)=\int f_1(x)dx\pm\int f_2(x)dx.$$

Пользуясь свойством 1 и обращаясь к формулам для производных основных элементарных функций, можно составить таблицу интегралов.

$$\int 1\cdot dx=x+c;$$

$$\int x^{\lambda}dx=\frac{x^{\lambda+1}}{\lambda+1}+c,\ \text{где}\ \lambda\neq-1;$$

$$\int\frac{dx}{x}=ln|x|+c;$$

$$\int\frac{dx}{1+x^2}=\begin{cases}arctgx+c\\-arcctgx+c\end{cases};$$

$$\int\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=\begin{cases}arcsin\,x+c\\-arccos\,x+c\end{cases};$$

$$\int a^x dx=\frac{a^x}{ln\,a}+c;$$

$$\int e^x dx=e^x+c;$$

$$\int cos\,x dx=sin\,x+c;$$

$$\int sin\,x dx=-cos\,x+c;$$

$$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = tgx + c;$$

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -ctgx + c;$$

$$\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a} arctg \frac{x}{a} + c;$$

$$\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right| + c;$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = arcsin \frac{x}{a} + c;$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a}} = ln \left| x + \sqrt{x^2 \pm a} \right| + c;$$

$$\int \frac{xdx}{x^2 \pm a} = \frac{1}{2} ln \left| x^2 \pm a \right| + c.$$

Пример 7.1

Вычислить интегралы:

$$1. \int \left(6x^3 - 4x^2 + 5\right) dx = \int 6x^3 dx - \int 4x^2 dx + \int 5dx =$$

$$= 6\int x^3 dx - 4\int x^2 dx + 5\int dx = 6 \cdot \frac{x^4}{4} - 4 \cdot \frac{x^3}{3} + 5x + c = \frac{3}{2}x^4 - \frac{4}{3}x^3 + 5x + c;$$

$$2. \int \frac{x\sqrt{x} + 2x^2 - 1}{2\sqrt[4]{x}} dx = \int \frac{x \cdot x^{\frac{1}{2}} + 2x^2 - 1}{2x^{\frac{1}{4}}} dx = \int \left(\frac{x^{1+\frac{1}{2}}}{2x^{\frac{1}{4}}} + \frac{2x^2}{2x^{\frac{1}{4}}} - \frac{1}{2x^{\frac{1}{4}}} \right) dx =$$

$$= \int \frac{1}{2} \cdot x^{\frac{3}{2} - \frac{1}{4}} dx + \int x^{2 - \frac{1}{4}} dx - \int \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{4}} dx = \frac{1}{2}\int x^{\frac{5}{4}} dx + \int x^{\frac{7}{4}} dx - \frac{1}{2}\int x^{-\frac{1}{4}} dx =$$

$$=$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{x^{\frac{5}{4}+1}}{\frac{5}{4}+1} + \frac{x^{\frac{7}{4}+1}}{\frac{7}{4}+1} - \frac{1}{2} \cdot \frac{x^{-\frac{1}{4}+1}}{-\frac{1}{4}+1} + c = \frac{1}{2} \cdot \frac{x^{\frac{9}{4}}}{\frac{9}{4}} + \frac{x^{\frac{11}{4}}}{\frac{11}{4}} - \frac{1}{2} \cdot \frac{x^{\frac{3}{4}}}{\frac{3}{4}} + c = \frac{2}{9}x^{\frac{9}{4}} + \frac{4}{11}x^{\frac{11}{4}} - \frac{2}{3}x^{\frac{3}{4}} + c;$$

$$3. \int ctg^2 x dx = \int \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x} dx = \int \frac{1 - \sin^2 x}{\sin^2 x} dx = \int \left(\frac{1}{\sin^2 x} - \frac{\sin^2 x}{\sin^2 x} \right) dx =$$

$$\int \frac{1}{\sin^2 x} dx - \int 1 \cdot dx = -ctgx - x + c;$$

$$4.\int\frac{1}{x^2\left(1+x^2\right)}dx=\int\frac{1+x^2-x^2}{x^2\left(1+x^2\right)}dx=\int\frac{\left(1+x^2\right)-x^2}{x^2\left(1+x^2\right)}dx=\int\left(\frac{1+x^2}{x^2\left(1+x^2\right)}-\frac{x^2}{x^2\left(1+x^2\right)}\right)dx=$$

$$=\int\left(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{1+x^2}\right)dx=\int x^{-2}dx-\int\frac{1}{1+x^2}dx=\frac{x^{-2+1}}{-2+1}-arctgx+c=-\frac{1}{x}-arctgx+c.$$

Рассмотрим правила, позволяющие вычислить неопределенный интеграл, зная таблицу.

Если существует $\int f(x)dx=F(x)+c$, то справедливы равенства:

$$\int f(x+b)dx=F(x+b)+c;$$

$$\int f(ax)dx=\frac{1}{a}F(ax)+c;$$

$$\int f(ax+b)dx=\frac{1}{a}F(ax+b)+c.$$

Примеры

$$\int sin(x-10)dx=-cos(x-10)+c;$$

$$\int\frac{dx}{cos^2 4x}=\frac{1}{4}tg4x+c;$$

$$\int\frac{1}{\sqrt{1-(3x+1)^2}}dx=\frac{1}{3}arcsin(3x+1)+c;$$

$$\int(7x+4)^{102}dx=\frac{1}{7}\frac{(7x+4)^{103}}{103}+c=\frac{(7x+4)^{103}}{721}+c.$$

Одним из основных методов интегрирования является метод замены переменной. Он применяется в том случае, если подынтегральное выражение можно представить в виде $\int F(\varphi(x))\cdot\varphi(x)dx$. Подстановка $\varphi(x)=t$ сводит исходный интеграл к интегралу вида $\int F(t)dt$.

Пример 7.2

$$1.\ \int x^2\cdot e^{x^3-2}dx=\left|\begin{array}{l}подстановка\\ x^3-2=t\\ 3x^2dx=dt\\ x^2dx=\frac{1}{3}dt\end{array}\right|=\frac{1}{3}\int e^t dt=\frac{1}{3}e^t+c=\frac{1}{3}e^{x^3-2}+c;$$

$$2.\ \int \frac{arctg^3 x}{1+x^2}dx = \left| \begin{array}{l} подстановка \\ arctgx = t \\ \dfrac{dx}{1+x^2} = dt \end{array} \right| = \int t^3 dt = \frac{t^4}{4} + c = \frac{arctg^4 x}{4} + c\,;$$

$$3.\ \int \frac{dx}{x\left(1-ln^2 x\right)} = \left| \begin{array}{l} подстановка \\ ln\, x = t \\ \dfrac{dx}{x} = dt \end{array} \right| = \int \frac{dt}{1-t^2} = arctgt + c = arctg\left(ln\, x\right) + c.$$

К сожалению, не существует формулы, выражающей интеграл от произведения функций через интегралы сомножителей. Для того, чтобы найти интеграл от произведения некоторого класса функций, таких как $x^{\lambda} \cdot ln^k$, $x^{\lambda} \cdot sin\, kx$, $x^{\lambda} \cdot cos\, kx$, $x^{\lambda} \cdot e^{kx}$, $x^{\lambda}\, arcsin\, kx$, $x^{\lambda} arctgkx$ и других, применяется формула интегрирования по частям:

$$\int udv = uv - \int vdu.$$

Пример 7.3

Вычислить интегралы, применяя формулу интегрирования по частям.

$$\int x \cdot cos\, 2xdx = \left| \begin{array}{l} положим \\ u = x \;\; dv = cos\, 2xdx \\ тогда \\ dV = dx, \\ V = \int cos\, 2xdx = \dfrac{1}{2} sin\, 2x \end{array} \right| = \frac{1}{2} x\, sin\, 2x - \frac{1}{2}\int sin\, 2xdx = \frac{1}{2} x\, sin\, 2x + \frac{1}{4} cos\, 2x + c;$$

$$\int x^2 \cdot sin\, xdx = \left| \begin{array}{l} u = x^2,\;\; dv = sin\, xdx \\ du = 2xdx, \\ v = \int sin\, xdx = -cos\, x \end{array} \right| = -x^2 \cdot cos\, x + 2\int x \cdot cos\, xdx = \left| \begin{array}{l} применим \\ формулу \\ еще \;\; раз \\ u = x\; dv = cos\, xdx \\ du = dx\; v = sin\, x \end{array} \right| =$$

$$= -x^2\, cos\, x + 2\left(x \cdot sin\, x - \int sin\, xdx\right) = -x^2\, cos\, x + 2x\, sin\, x + 2\, cos\, x + c;$$

$$\int x^4 \cdot \ln x dx = \left| \begin{array}{l} u = \ln x \\ du = \dfrac{1}{x} dx \\ dv = x^4 dx \\ v = \dfrac{x^5}{5} \end{array} \right| = \frac{x^5}{5} \cdot \ln x - \frac{1}{5} \int \frac{1}{x} \cdot x^5 dx = \frac{x^5}{5} \ln x - \frac{1}{5} \int x^4 dx = \frac{x^5}{5} \ln x - \frac{1}{5} \cdot \frac{x^5}{5} + c =$$

$$= \frac{x^5}{5} \left(\ln x - \frac{1}{5} \right) + c.$$

7.2. Определенный интеграл

Определенный интеграл – одно из основных понятий математического анализа – является мощным средством исследования в математике, физике, механике и других дисциплинах.

Пусть некоторая функция $y = f(x)$ задана при $a \le x \le b$. Разобьем этот отрезок на n произвольных частей точками $a=x_0<x_1<x_2<x_{i-1}<x_i<x_n=b$ и составим сумму, которая называется интегральной суммой для функции $f(x)$ на отрезке [a, b]:

$$\sum_{i=1}^{n} f(C_i) \cdot \Delta x_i = f(C_1) \cdot \Delta x_1 + f(C_2) \Delta x_2 + \ldots + f(C_n) \Delta x_n,$$

где $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, а каждая точка C_i произвольно выбрана из интервала (x_{i-1}, x_i).

Определение. Если предел интегральной суммы конечен и не зависит от способа разбиения [a, b] и от выбора точек C_i, то он называется определенным интегралом от функции $f(x)$ на [a, b] и обозначается

$$\int_a^b f(x) dx = lim \sum_{i-1}^{n} f(C_i) \cdot \Delta x_i,$$

где *а* – нижний предел интегрирования; *в* - верхний предел интегрирования.

Рассмотрим основные свойства определенного интервала, которые помогут его вычислить.

Свойство 1. $\int_a^b f(x) dx = -\int_b^a f(x) dx.$

Свойство 2. $\int_a^a f(x) dx = 0.$

Свойство 3. Постоянный множитель K можно выносить за знак определенного интеграла: $\int_a^b K \cdot f(x)dx = K\int_a^b f(x)dx.$

Свойство 4. Определенный интеграл от алгебраической суммы нескольких функций равен алгебраической сумме интегралов от этих функций:

$$\int_a^b (f(x) \pm g(x)dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx.$$

Свойство *5*. Если отрезок [a, b] разбит точкой c на две части [a, c] и [c, b], то

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

Определенный интеграл можно вычислить с помощью простой и удобной формулы, которая называется формулой Ньютона-Лейбница:

$$\int_a^в f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)\ .$$

Как видно, эта формула выражает определенный интеграл от непрерывной функции через первообразную.

Рассмотрим примеры вычисления определенного интеграла.

Пример 7.4. Вычислить

$$\int_1^2 (3x^2 - x + 1)dx = \left|\begin{matrix}используем\\ свойства\end{matrix}\right| = 3\int_1^2 x^2dx - \int_1^2 xdx + \int_1^2 dx = \left|\begin{matrix}находим\\ первообразные\end{matrix}\right| =$$

$$= 3\cdot\frac{x^3}{3}\Big|_1^2 - \frac{x^2}{2}\Big|_1^2 + x\Big|_1^2 = 2^3 - 1^3 - \frac{1}{2}(2^2 - 1^3) + 2 - 1 = 8 - 1 - \frac{1}{2}\cdot(4-1) + 1 = 8 - \frac{3}{2} = 6\frac{1}{2}.$$

Пример 7.5. Вычислить

$$\int_1^4 \frac{1+\sqrt{x}}{x^2}dx = \int_1^4 \left(\frac{1}{x^2} + \frac{x^{\frac{1}{2}}}{x^2}\right)dx = \int_1^4 \left(x^{-2} + x^{-\frac{3}{2}}\right)dx = \frac{x^{-2+1}}{-2+1}\Big|_1^4 + \frac{x^{-\frac{3}{2}+1}}{-\frac{3}{2}+1}\Big|_1^4 =$$

$$= -\frac{1}{x}\Big|_1^4 - 2\cdot\frac{1}{\sqrt{x}}\Big|_1^4 = -\left(\frac{1}{4} - 1\right) - 2\left(\frac{1}{\sqrt{4}} - \frac{1}{\sqrt{4}}\right) = \frac{3}{4} + 2\cdot\frac{1}{2} = 1\frac{3}{4}.$$

Пример 7.6. Вычислить

$$\int_0^4 \sqrt{2x+1}dx = \int_0^4 (2x+1)^{\frac{1}{2}} dx = \frac{1}{2}\frac{(2x+1)^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1}\Bigg|_0^4 = \frac{1}{3}\cdot(2x+1)^{\frac{3}{2}}\Bigg|_0^4 = \frac{1}{3}\left((8+1)^{\frac{3}{2}} - 1^{\frac{3}{2}}\right) =$$

$$= \frac{1}{3}\cdot(27-1) = \frac{26}{3}$$

Пример 7.7. Вычислить

$$\int_0^1 \frac{(e^x-1)^2}{e^x}dx = \int_0^1 \frac{e^{2x}-2e^x+1}{e^x}dx = \int_0^1 \left(\frac{e^{2x}}{e^x} - \frac{2e^x}{e^x} - \frac{1}{e^x}\right)dx = \int_0^1 \left(e^x - 2 - e^{-x}\right)dx =$$

$$\int_0^1 e^x dx - 2\int_0^1 dx - \int_0^1 e^{-x}dx = e^x\Big|_0^1 - 2x\Big|_0^1 + e^{-x}e^{-x}\Big|_0^1 = e - 1 - 2 + e^{-1} - 1 = e - 4 + \frac{1}{e}.$$

Замена переменной в определенном интеграле.

Пусть требуется вычислить $\int_a^b f(x)dx$, где функция $f(x)$ непрерывна на отрезке [a, b]. Введем новую переменную t по формуле $x = \varphi(t)$.Не приводя доказательство, запишем формулу замены переменных

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t)\cdot\varphi'(t)dt.$$

При этом функции $\varphi(t)$ и $\varphi'(t)$ должны быть непрерывны на отрезке $[\alpha, \beta]$, концы которого α, β находятся из условий $\varphi(\alpha)=a$, $\varphi(\beta)=b$.

Замечание. Отметим, что при вычислении определенного интеграла не нужно возвращаться к первоначальной переменной x, но необходимо пересчитать пределы интегрирования.

Пример 7.8. Вычислить

$$\int_3^8 \frac{xdx}{\sqrt{2x+1}} = \left| \begin{array}{l} выполним\ замену \\ 2x+1=t^2 тогда \\ x=\frac{1}{2}\left(t^2-1\right), dx=\frac{1}{2}\cdot 2tdt \\ или\ dx=tdt \\ заменим\ пределы\ интегрирования: \\ если\ x=3,\ то\ t^2=7, t_1=\sqrt{7} \\ если\ x=8,\ то\ t^2=17, t_2=\sqrt{17} \end{array} \right| = \int_{\sqrt{7}}^{\sqrt{17}} \frac{\frac{1}{2}(t^2-1)\cdot tdt}{\sqrt{t^2}} =$$

$$= \frac{1}{2}\int_{\sqrt{7}}^{\sqrt{17}} (t^2-1)dt = \frac{1}{2}\left(\frac{t^3}{3}-t\right)\Big|_{\sqrt{7}}^{\sqrt{17}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{17^3}}{3}-\sqrt{17}-\frac{\sqrt{7^3}}{3}+\sqrt{7}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{14}{3}\sqrt{7}+\frac{2}{3}\sqrt{7}\right).$$

Пример 7.9. Вычислить

$$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{tg^4 x}{\cos^2 x}dx = \left| \begin{array}{l} замена \\ tgx=t; \frac{1}{\cos^2 x}dx=dt \\ находим\ новые\ пределы \\ интегрирования \\ t_1=tg\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{3}, t_2=tg\frac{\pi}{3}=\sqrt{3} \end{array} \right| = \int_{\frac{\sqrt{3}}{3}}^{\sqrt{3}} t^4 dt = \frac{t^5}{5}\Big|_{\frac{\sqrt{3}}{3}}^{\sqrt{3}} = .$$

$$= \frac{\sqrt{3^5}}{5} - \frac{\sqrt{3^5}}{5^5\cdot 5} = \frac{\sqrt{3^5}\left(5^5-1\right)}{5^6}$$

Пример 7.10. Вычислить

$$\int_0^1 \frac{dx}{e^x + e^{-x}} = упростим \int_0^1 \frac{dx}{e^x + \frac{1}{e^x}} = \int_0^1 \frac{e^x dx}{1 + e^{2x}} = \left| \begin{array}{l} замена: \\ e^x = t \\ e^x dx = dt \\ новые\ пределы \\ интегрирования \\ t_1 = e^0 = 1 \\ t_2 = e^1 = e \end{array} \right| = \int_1^e \frac{dt}{1+t^2} = arctgt \Big|_1^e =$$

$$= arctge - arctg1 = arctge - \frac{\pi}{4}.$$

7.3. Приложения определенного интеграла

С помощью определенного интеграла можно решать различные задачи прикладного характера. Наиболее часто используются формулы для вычисления площади плоской фигуры. Рассмотрим одну из формул. Пусть в полярной системе координат имеем кривую, заданную уравнением

$$\rho = \rho(\varphi).$$

Определение 7.4. Криволинейным сектором называется фигура, ограниченная двумя лучами $\varphi=\alpha$, $\varphi=\beta$ и графиком функции $\rho=\rho(\varphi)$.

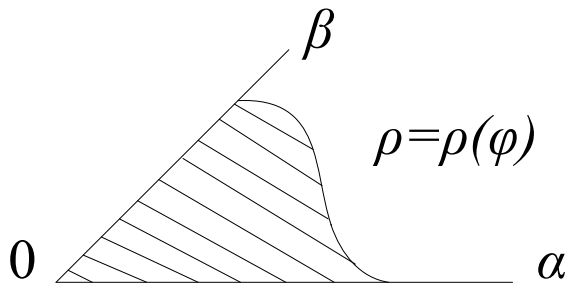


Рис. 1.1. Криволинейный сектор

Площадь криволинейного сектора вычисляется по формуле

$$S = \frac{1}{2} \int_\alpha^\beta \rho^2(\varphi) d\varphi.$$

Пример 7.11. Найти площадь фигуры, ограниченной кардиоидой $\rho = \alpha(1 - \cos\varphi)$.

Решение

Выполним построение фигуры

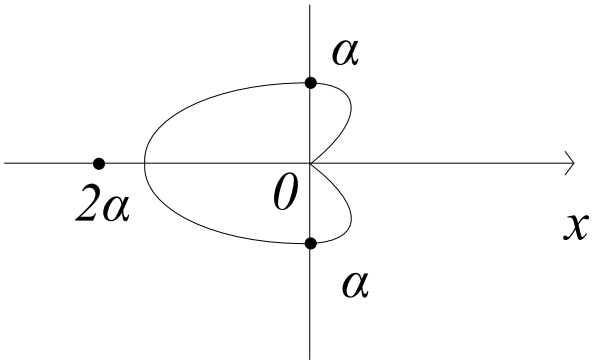


Рис. 1.2

Из рисунка видно, что фигура симметрична оси *OX*, следовательно

$$S = 2\cdot\frac{1}{2}\int_0^{\pi} a^2(1-\cos\varphi)^2 d\varphi = a^2\int_0^{\pi}(1-2\cos\varphi+\cos^2\varphi)d\varphi = a^2\int_0^{\pi} d\varphi - 2\int_0^{\pi}\cos\varphi d\varphi + \int_0^{\pi}\cos^2\varphi d\varphi) =$$

$$= a^2(\varphi\Big|_0^{\pi} - 2\cdot\sin\varphi\Big|_0^{\pi} + \int_0^{\pi}\frac{1+\cos 2\varphi}{2}d\varphi) = a^2(\pi - 2\sin\pi + 2\sin 0 + \frac{1}{2}\int_0^{\pi} d\varphi + \frac{1}{2}\int_0^{\pi}\cos 2\varphi d\varphi) =$$

$$= a^2(\pi - 2\sin\pi + 2\sin 0 + \frac{1}{2}\int_0^{\pi} d\varphi + \frac{1}{2}\int_0^{\pi}\cos 2\varphi d\varphi) = a^2(\pi + \frac{1}{2}\varphi\Big|_0^{\pi} + \frac{1}{4}\sin 2\varphi\Big|_0^{\pi})$$

$$= a^2(\pi + \frac{\pi}{2} + \frac{1}{4}\sin 2\pi - \frac{1}{4}\sin 0) = a^2\cdot\frac{3}{2}\pi = \frac{3\pi\alpha^2}{2} = \frac{3\pi\alpha}{2}\text{(кв.ед.).}$$

Пример 7.12. Вычислить площадь круга $\rho = 2\sin\varphi$.

Решение

Построим окружность

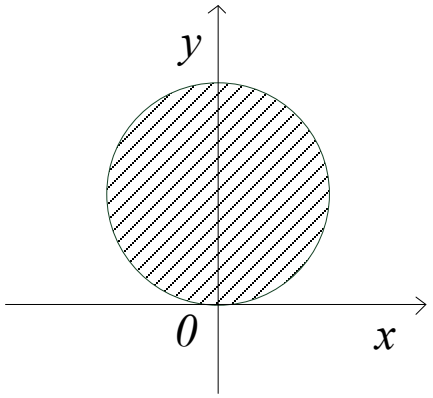


Рис. 1.3

Из рисунка видно, что фигура расположена в I и II четвертях. Следовательно,

$$S = \frac{1}{2}\int_0^{\pi}(2\sin\varphi)^2 d\varphi = \frac{1}{2}\cdot 4\cdot\int_0^{\pi}\frac{1-\cos 2\varphi}{2}d\varphi = \int_0^{\pi}1\cdot d\varphi - \int_0^{\pi}\cos 2\varphi d\varphi = \varphi\Big|_0^{\pi} =$$

$$= \pi - \frac{1}{2}(\sin 2\pi - \sin 0) = \pi(\text{кв.ед}).$$

8. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Определение 8.1. Обыкновенным дифференциальным уравнением называется уравнение связывающее функцию, ее независимую переменную и производные этой функции различных порядков.

Порядком дифференциального уравнения называется порядок старшей производной, входящей в это уравнение.

Уравнение n-го порядка можно представить в виде

$$F\left(x,y,y',y'',\cdots,y^{(n)}\right) = 0. \qquad (9.1)$$

Определение 8.2. Решением дифференциального уравнения называется функция $y = \varphi(x)$, которая при подстановке в уравнение (9.1), обращает его в тождество.

Общим решением дифференциального уравнения *n*-го порядка (9.1) называется решение зависящее от n произвольных констант:

$$y = \varphi(x,c_1,c_2,\cdots,c_n).$$

Определение 8.3. Частным решением уравнения (9.1) называется решение полученное из общего решения при конкретных значениях констант.

Определение 8.4. Задачей Коши уравнения (9.1) называется задача нахождения частного решения этого уравнения удовлетворяющего начальным условиям:

$$\begin{cases} F\left(x,y,y',y'',\cdots,y^{(n)}\right) = 0, \\ y(x_0) = y_0,\ y'(x_0) = y'_0,\ \ y''(x_0) = y''_0,\cdots,\ \ y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n)}. \end{cases} \qquad (9.2)$$

8.1. Дифференциальные уравнения первого порядка

Определение 8.5. Дифференциальным уравнением первого порядка называется уравнение вида

$$F(x,y,y') = 0. \qquad (9.3)$$

Если уравнение (9.3) можно разрешить относительно производной, то оно будет называться дифференциальным уравнением первого порядка в нормальной форме:

$$y' = f(x,y). \tag{9.4}$$

Замечание. Так как

$$y' = \frac{dy}{dx},$$

то дифференциальное уравнение первого порядка (9.4) можно записать в виде

$$P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0. \tag{9.5}$$

Определение 8.6. Общим решением дифференциального уравнения первого порядка или общим интегралом называется функция $y = \varphi(x,C)$, которая зависит от одной произвольной константы и удовлетворяет уравнению (9.3).

Определение 8.7. Частным решением называется любая функция $y = \varphi(x, C_0)$, которая получается из общего решения, если постоянной C придать определенное значение C_0.

Для дифференциального уравнения первого порядка начальное условие имеет вид $y(x_0) = y_0$, а задача Коши (9.2) записывается системой

$$\begin{cases} y' = f(x,y), \\ y(x_0) = y_0. \end{cases}$$

Рассмотрим основные типы дифференциальных уравнений первого порядка.

Определение 8.8. Дифференциальным уравнением с разделяющимися переменными называется уравнение вида

$$M_1(x)N_1(y)dx + M_2(x)N_2(y)dy = 0. \tag{9.6}$$

Замечание. Для нахождения общего решения уравнения (9.6) разделим обе части уравнения на выражение $N_1(y)M_2(x)$, получим уравнение с разделенными переменными

$$\frac{M_1(x)}{M_2(x)}dx = -\frac{N_2(y)}{N_1(y)}dy.$$

Общее решение (общий интеграл) находим почленным интегрированием полученного уравнения

$$\int \frac{M_1(x)}{M_2(x)}dx = -\int \frac{N_2(y)}{N_1(y)}dy.$$

Произвольная константа C содержится в неопределенном интеграле.

Пример 8.1. Найти общее решение дифференциального уравнения

$$(y + x^2 y)dx + (2x - xy)dy = 0.$$

Решение. Разделим переменные в данном уравнении, получим

$$y(1 + x^2)dx = -x(2 - y)dy \Rightarrow \frac{1 + x^2}{x}dx = \frac{y - 2}{y}dy.$$

Интегрируя обе части последнего уравнения, получим общее решение

$$\int \frac{1 + x^2}{x}dx = \int \frac{y - 2}{y}dy \Rightarrow ln|x| + \frac{x^2}{2} = y - 2ln|y| + C.$$

(Общее решение записано в неявной форме, так как явно функцию $y(x)$ нельзя выразить).

Пример 8.2. Найти частное решение дифференциального уравнения, удовлетворяющего начальному условию:

$$\begin{cases} y' = (y + 2)\cos x, \\ y\left(\frac{\pi}{2}\right) = -1. \end{cases}$$

Решение. Сначала найдем общее решение дифференциального уравнения. Для этого запишем его в дифференциальной форме (9.6):

$$\frac{dy}{dx} = (y + 2)\cos x \Rightarrow \frac{dy}{y + 2} = \cos x\, dx \Rightarrow \int \frac{dy}{y + 2} = \int \cos x\, dx \Rightarrow$$

$$\Rightarrow ln|y + 2| = \sin x + ln|C| \Rightarrow ln\left|\frac{y + 2}{C}\right| = \sin x \Rightarrow y = Ce^{\sin x} - 2.$$

Найдем частное решение, соответствующее начальному условию

$$-1 = Ce^{\sin\frac{\pi}{2}} - 2 \Rightarrow C = \frac{1}{e}; \quad y = \frac{1}{e}e^{\sin x} - 2.$$

Определение 8.9. Функция $f(x, y)$ называется однородной порядка k если $f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^k f(x, y)$.

Определение 8.10. Однородным дифференциальным уравнением первого порядка называется уравнение $y' = f(x, y)$, если $f(x, y)$ – однородная функция нулевого порядка.

Замечание. Однородное дифференциальное уравнение первого порядка всегда можно свести к виду

$$y' = F\left(\frac{y}{x}\right). \tag{9.7}$$

Для нахождения общего решения однородного дифференциального уравнения его сводят к уравнению с разделяющимися переменными с помощью подстановки

$t = \frac{y}{x} \Rightarrow y = tx \Rightarrow y' = t'x + t.$ Здесь $t' = \frac{dt}{dx}$.

Пример 8.3. Найти общий интеграл уравнения

$$x^2 y' = x^2 + xy + 2y'.$$

Решение. Проверим, что уравнение является однородным. Для этого его представим в нормальной форме (9.4):

$$y' = 1 + \frac{y}{x} + 2\frac{y^2}{x^2}.$$

Полученное уравнение имеет вид (9.7), то есть является однородным первого порядка. Для нахождения общего решения этого уравнения введем замену

$$t = \frac{y}{x} \rightarrow \ y' = t'x + t,$$

Получим уравнение с разделяющимися переменными относительно функции

$$t = t(x):$$
$$t'x + t = 1 + t + 2t^2.$$

Разделим переменные в этом уравнении, полагая

$$t' = \frac{dt}{dx}.$$

Получим уравнение

$$\frac{dt}{1+2t^2} = \frac{dx}{x} \ \Rightarrow \ \int \frac{dt}{1+2t^2} = \int \frac{dx}{x} \ \Rightarrow \ \frac{\sqrt{2}}{2} arctq\sqrt{2}t = ln|x| + ln|C| \Rightarrow$$
$$arctq\sqrt{2}t = \sqrt{2}ln|Cx| \ \Rightarrow \ t = tq(lq|Cx|).$$

Тогда общее решение исходного уравнения имеет вид

$$\frac{y}{x} = tq(ln|Cx|) \ \Rightarrow \ y = x \cdot tq(ln|Cx|).$$

Определение 8.11. Линейным дифференциальным уравнением первого порядка называется уравнение вида

$$y' + P(x)y = Q(x), \qquad (9.8)$$

где $P(x)$, $Q(x)$ – непрерывные функции от x.

Общее решение уравнения (9.8) ищется в виде произведения двух функций от x

$$y = u(x)v(x) \ \Rightarrow \ \frac{dy}{dx} = u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx}. \qquad (9.9)$$

Одну из этих функций можно взять произвольной, другая определяется из уравнения (9.8).

Подставим формулы (9.9) в уравнение (9.8), получим

$$u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx} + Puv = Q \ \Rightarrow \ u\left(\frac{dv}{dx} + Pv\right) + v\frac{du}{dx} = Q.$$

Последнее уравнение запишем в виде системы двух дифференциальных уравнений первого порядка с разделяющимися переменными (функцию v в которой ищем произвольно):

$$\begin{cases} \dfrac{dv}{dx} + Pv = 0, \\ v\dfrac{du}{dx} = Q. \end{cases} \tag{9.10}$$

Решая систему (9.10), получим функции v и u (одно решение будет частным, например, v другое – общим). Подставим v и u в (9.9), получим общее решение уравнения (9.8).

Пример 8.4. Решить задачу Коши

$$\begin{cases} y' - 2xy = (1 + x^2)e^{x^2}, \\ y(0) = 1. \end{cases}$$

Решение. Сначала найдем общее решение линейного дифференциального уравнения первого порядка

$$y' - 2xy = (1 + x^2)e^{x^2}.$$

Решение ищем в виде $y=uv$ из системы (9.10):

$$\begin{cases} \dfrac{dv}{dx} - 2xv = 0, \\ v\dfrac{du}{dx} = (1 + x^2)e^{x^2}. \end{cases}$$

Найдем частное решение первого уравнения

$$\frac{dv}{dx} - 2xv = 0 \Rightarrow \int \frac{dv}{v} = 2\int x dx \Rightarrow v = e^{x^2}.$$

Подставим функцию v во второе уравнение системы и определим его общее решение:

$$e^{x^2}\frac{du}{dx} = (1 + x^2)e^{x^2} \Rightarrow \int du = \int (1 + x^2)\, dx \Rightarrow u = x + \frac{x^3}{3} + C.$$

Таким образом, общее решение исходного линейного дифференциального уравнения имеет вид

$$y = e^{x^2}\left(x + \frac{x^3}{3} + C\right).$$

С учетом начального условия задачи Коши найдем частное решение линейного уравнения:

$$1 = e^0(0 + 0 + \mathrm{C}) \Rightarrow \mathrm{C} = 1.$$

Подставим найденное значение произвольной константы в общее решение, получим решение задачи Коши

$$y = e^{x^2}\left(x + \frac{x^3}{3}\right).$$

9. ЗАДАНИЯ К КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЕ

41–50. Исследовать на экстремум следующие функции двух переменных:

51. $z = x^2 + xy + y^2 - 13x - 11y + 7;$

52. $z = x^3 + y^3 - 6xy;$

53. $z = (x-1)^2 + 2y^2;$

54. $z = x^3y^2(6 - x - y),\ (x > 0,\ \ y > 0);$

55. $z = e^{x-y}(x^2 - 2y^2);$

56. $z = e^{\frac{x}{2}}(x + y^2);$

57. $z = y\sqrt{x} - y^2 - x + 6y;$

58. $z = x^3 + 8y^2 - 6xy + 1;$

59. $z = 3x^2 - 2x\sqrt{y} + y - 8x + 8;$

60. $z = 3x + 6y - x^2 - xy - y^2.$

51–60. В результате эксперимента получены семь значений искомой функции Y при семи значениях аргумента. Используя метод наименьших квадратов, найти функциональную зависимость между X и Y в виде линейной функции $y = ax + b$. Построить график этой функции, отметить экспериментальные значения.

51.	X	1	2	3	4	5	6	7
	Y	6,5	7,0	5,1	5,8	4,5	4,9	3,0

52.	X	1	2	3	4	5	6	7
	Y	2,0	3,5	3,4	4,5	4,2	5,8	6,0

53.	X	1	2	3	4	5	6	7
	Y	5,2	5,5	4,0	5,0	2,8	3,1	1,6

54.	X	1	2	3	4	5	6	7
	Y	2,8	2,8	4,0	3,7	5,5	5,2	6,2

55.	X	1	2	3	4	5	6	7
	Y	6,5	4,5	5,2	4,0	2,5	3,0	1,6

56.	X	1	2	3	4	5	6	7
	Y	5,8	4,2	5,0	4,0	4,3	2,5	3,5

57.	X	1	2	3	4	5	6	7

	Y	4,5	5,8	4,2	4,2	4,7	2,6	3,6
58.	X	1	2	3	4	5	6	7
	Y	3,2	2,2	3,5	4,5	3,5	5,7	4,5

59.	X	1	2	3	4	5	6	7
	Y	2,1	3,5	2,5	4,3	3,8	4,5	5,5

60.	X	1	2	3	4	5	6	7
	Y	5,5	6	4,1	4,8	3,5	3,9	25

61–70. Найти неопределенные интегралы

61. а) $\int e^{arctg2x} \cdot \frac{dx}{1+4x^2}$; б) $\int x^3 \cdot \ln x dx$.

62. а) $\int e^{3x} \cdot \sin(e^{3x}-1)dx$; б) $\int x \cdot \cos 5x dx$.

63. а) $\int \frac{dx}{\cos^2 x\sqrt{tgx+1}}$; б) $\int x \cdot arctgx dx$.

64. а) $\int \frac{\cos x dx}{2\sin x+3}$; б) $\int x^2 e^{\frac{x}{2}} dx$.

65. а) $\int \frac{xdx}{\cos^2\left(x^2+3\right)}$; б) $\int (x+2)\cdot \cos x dx$.

66. а) $\int \frac{\sin x dx}{\sqrt{4-\cos^2 x}}$; б) $\int x \cdot \sin 2x dx$.

67. а) $\int \frac{dx}{\sqrt{x}\cdot \sin^2\sqrt{x}}$; б) $\int (x+2)\cdot e^x dx$.

68. а) $\int \frac{arcsin^3 x}{\sqrt{1-x^2}}dx$; б) $\int \ln(x+2)dx$.

69. а) $\int \frac{\sin(\ln x)}{x}dx$; б) $\int x \cdot 3^x dx$.

70. а) $\int \frac{1}{x^2}\cdot e^{\frac{1}{x}} dx$; б) $\int arccos 4x dx$.

71–80. Вычислить определенный интеграл

71. $\int_2^6 \frac{\sqrt{x-2}}{1+\sqrt{x-2}}dx$;

72. $\int_0^1 \frac{xdx}{\sqrt{2x+7}}dx$;

73. $\int_1^e \frac{dx}{x(1+\ln^2 x)}dx$;

74. $\int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\cos x dx}{1+\sin^2 x}$;

75. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{tg^3 x - \sqrt[3]{tgx}}{\cos^2 x}dx$;

76. $\int_0^4 \frac{\sqrt{x}}{4+x}dx$;

77. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt[4]{2+\sin x}\cdot\cos x dx$;

78. $\int_0^1 \frac{dx}{e^x + e^{-x}}dx$;

79. $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{tg^4 x + 1}{\cos^2 x}dx$;

80. $\int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt[7]{3+4x^3}}dx$.

81–90. Вычислить площадь фигуры, ограниченную заданными линиями

81. а) $y = x,\ y = x^2,\ x = \frac{3}{4}$;

82. а) $y = x^2 + 1,\ y = -x^2 + 3$;

83. а) $y = x^2,\ y = 4$;

84. а) $y = 2x,\ xy = 2$;

85. а) $xy = 6,\ y = 7 - x$;

86. а) $y^2 = 4 + x\ x = 2,$;

87. а) $y = x^3,,\ y = x,\ y = 2x$;

88. а) $4y = 8x - x^2,\ 4y = x + 6$

89. а) $y = (x-4)^2,\ y = 16 - x^2$;

90. а) $y = x,\ x = \sqrt{y}$;

91–100. Найти общее решение дифференциальных уравнени

91. а) $y' + y\cos x = \sin x\cos x$;

92. а) $xy' + y = e^x$;

93. а) $xy' - 2y = x^2\cos x$;

94. а) $(x^2+1)y' + 4xy = 1$;

95. а) $y' - ytgx = ctgx$;

96. а) $y' + y = \cos x$;

97. а) $y'\cos x - y\sin x = \sin 2x$;

98. а) $x^2y' + xy = -1$;

99. a) $xy' + 2y = x^2$;
100. a) $y' - yctgx = \sin x$.

ПРАВИЛА ВЫПОЛНЕНИЯ И ОФОРМЛЕНИЯ КОНТРОЛЬНЫХ РАБОТ

При выполнении контрольных работ, представляемых на рецензирование, надо строго придерживаться указанных ниже правил. Работы, выполненные без соблюдения этих правил, не рецензируются и возвращаются студенту для переработки.

Контрольную работу следует выполнять в тетради чернилами любого цвета, кроме красного, оставляя поля для замечаний рецензента.

В заголовке работы на обложке тетради должны быть ясно написаны фамилия студента, его инициалы, шифр, номер контрольной работы, название дисциплины; здесь же следует указать название учебного заведения, дату отсылки работы в ВУЗ и адрес студента. В конце работы следует поставить дату ее выполнения и расписаться.

В работу должны быть включены все задачи, указанные в задании, строго по положенному варианту, Контрольные работы, содержащие не все задачи задания. А также содержащие задачи не своего варианта или распечатанные на компьютере, не рецензируются.

Решения задач надо располагать в порядке возрастания их номеров, указанных в заданиях, сохраняя номера задач.

Перед решением каждой задачи надо полностью выписать ее условие. В том случае. Если несколько задач, из которых студент выбирает задачи своего варианта, имеют общую формулировку, следует, переписывая условия задачи, заменить общие данные конкретными, взятыми из соответствующего номера.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Городилова, М.А. Числовые и степенные ряды. Ряды Фурье. Методические указания и индивидуальные задания / М.А. Городилова, Г.В. Костина. – Хабаровск : ДВГУПС, 2005.
2. Данко, П.Е. Высшая математика в упражнениях и задачах / П.Е. Данко, А.Г. Попов − Т.1.
3. Данко, П.Е. Высшая математика в упражнениях и задачах / П.Е. Данко, А.Г. Попов − Т.1.
4. Жукова, В.И. Интегрирование функций нескольких переменных. учеб. пособие / В.И. Жукова, Е.И. Рукавишникова, Г.А. Ушакова, Н.Л. Ющенко. – Хабаровск : ДВГУПС, 2006.
5. Костина, Г.В. Исследование функций и построение графиков / Г.В. Костина, Л.В. Марченко. – 2003.
6. Костина, Г.В., Марченко Л.В. Обыкновенные дифференциальные уравнения : учеб. пособие / Г.В. Костина, Л.В. Марченко. – ДВГУПС, 2006.
7. Кузнецова, Е.В. Основы математического анализа: предел и непрерывность : учеб. пособие / Кузнецова Е.В. – ДВГУПС, 2006.
8. Кулик, А.В., Плотникова Т.Г. Дифференцирование : учеб. пособие / А.В. Кулик, Т.Г. Плотникова. – ДВГУПС, 2005.
9. Лиховодова, Т.Б. Функции нескольких переменных : учеб. пособие / Т.Б. Лиховодова. – ДВГУПС, 2009.
10. Ломакина, Е.Н. Комплексные числа : метод. указания и задания для самостоятельной работы студентов первого курса ЕНФ / Е.Н. Ломакина. – Хабаровск : ДВГУПС, 2003.
11. Марченко, Л.В. Метод наименьших квадратов : метод. указания к проведению практического занятия / Л.В. Марченко. – Хабаровск : ДВГУПС, 2002.
12. Пискунов, Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисление / Н.С. Пискунов. – 1999.

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ.....**Ошибка! Закладка не определена.**

1. ПОНЯТИЕ ФУНКЦИИ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ .....**ОШИБКА! ЗАКЛАДКА НЕ ОПРЕДЕЛЕНА.**
2. ПРЕДЕЛЫ И НЕПРЕРЫВНОСТЬ ФУНКЦИИ ... **Ошибка! Закладка не определена.**
   2.1. Понятие предела .....**Ошибка! Закладка не определена.**
   2.2. Исследование функции на непрерывность
   в заданных точках x_1 и x_2 .....**Ошибка! Закладка не определена.**
3. ПРОИЗВОДНАЯ ФУНКЦИИ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ.....**Ошибка! Закладка не определена.**
   3.1. Понятие производной функции..**Ошибка! Закладка не определена.**
   3.2. Таблица производных основных элементарных функций....**Ошибка! Закладка не определена.**
   3.3. Правила дифференцирования:....**Ошибка! Закладка не определена.**
4. ИССЛЕДОВАНИЕ ФУНКЦИИ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ.....**Ошибка! Закладка не определена.**
   4.1. Экстремум функции, его классификация..... **Ошибка! Закладка не определена.**
   4.2. Наибольшее и наименьшее значение функции
   $y = fx$ непрерывной на отрезке a; b..... **Ошибка! Закладка не определена.**
5. ФУНКЦИИ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ 2
   5.1. Определение функции нескольких переменных 2
   5.2.Частные производные первого порядка 2
   5.3. Частные производные высших порядков..... 3
   5.4. Дифференцируемость и полный дифференциал функции..... 3
   5.5. Экстремум функции двух переменных 4
   5.6. Метод наименьших квадратов..... 5
6. ЗАДАНИЯ К КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЕ № 1 ..... **Ошибка! Закладка не определена.**
7. ИНТЕГРИРОВАНИЕ ФУНКЦИИ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ 7
   7.1. Неопределенный интеграл..... 7
   7.2. Определенный интеграл..... 12
   7.3. Приложения определенного интеграла 16
8. КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА.....**Ошибка! Закладка не определена.**

8.1. Алгебраическая форма комплексного числа .. **Ошибка! Закладка не определена.**
8.2. Тригонометрическая форма комплексного числа **Ошибка! Закладка не определена.**
8.3. Алгебраические операции над комплексными числами ..... **Ошибка! Закладка не определена.**
9. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ 18
9.1. Дифференциальные уравнения первого порядка **Ошибка! Закладка не определена.**
9.2. Линейные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами ..... **Ошибка! Закладка не определена.**

10. РЯДЫ ..... **Ошибка! Закладка не определена.**
10.1. Ряд и его сумма ..... **Ошибка! Закладка не определена.**
10.2. Сходимость рядов с положительными членами **Ошибка! Закладка не определена.**
10.3. Знакочередующиеся ряды ..... **Ошибка! Закладка не определена.**
10.4. Степенные ряды ..... **Ошибка! Закладка не определена.**
10.5. Приложения степенных рядов .. **Ошибка! Закладка не определена.**
10.6. Интегрирование дифференциальных уравнений с помощью рядов ..... **Ошибка! Закладка не определена.**
11. ЗАДАНИЯ К КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЕ № 2 23
ПРАВИЛА ВЫПОЛНЕНИЯ И ОФОРМЛЕНИЯ КОНТРОЛЬНЫХ РАБОТ 27
БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК 28