МИНИСТЕРСТВО ПУТЕЙ СООБЩЕНИЯ РФ
ИРКУТСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ПУТЕЙ СООБЩЕНИЯ



ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

**Учебное пособие
для студентов заочного отделения
всех специальностей**

**ИРКУТСК
2003**

КОМПЛЕКС МЕТОДИЧЕСКИХ ПОСОБИЙ ПО МАТЕМАТИКЕ ДЛЯ ЗАОЧНОГО ОБУЧЕНИЯ

Под редакцией доктора технических наук,
профессора А. П. Хоменко

- Комплексные числа. Основы линейной алгебры. Системы линейных уравнений
- Векторная алгебра и аналитическая геометрия
- Введение в анализ
- Дифференциальное исчисление функций одной переменной
- Дифференциальное исчисление функций нескольких переменных
- Линейное программирование. Динамическое программирование
- Интегральное исчисление функций одной переменной
- Кратные, криволинейные и поверхностные интегралы. Элементы теории поля
- Обыкновенные дифференциальные уравнения
- Ряды
- Теория функций комплексной переменной. Операционное исчисление
- Вариационное исчисление. Уравнения математической физики
- **Теория вероятностей**
- Математическая статистика
- Марковские случайные процессы и теория игр
- Дискретная математика

МИНИСТЕРСТВО ПУТЕЙ СООБЩЕНИЯ

ИРКУТСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ПУТЕЙ СООБЩЕНИЯ

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Учебное пособие
для студентов заочного обучения
всех специальностей

Под редакцией
доктора технических наук, профессора А. П. Хоменко

ИРКУТСК
2003

УДК 519. 2

Трухан А.А. Теория вероятностей: Учебное пособие.
Иркутск, 2003,-84 с.

Содержит основные теоретические положения раздела "Теория вероятностей" с примерами и варианты индивидуальных заданий. Расположение задач индивидуальных заданий соответствует последовательности примеров с решениями в данном учебном пособии. Приведены необходимые таблицы для доведения решения задач до конечных чисел.

Пособие предназначено для студентов всех специальностей второго курса заочной формы обучения, но может быть полезным при изучении соответствующего раздела математики на дневном отделении.

Ил.43. Табл.2. Библиогр.: 12 назв.

Рецензенты: д.-р. физ.-мат. наук. проф. В.Г. Власов (ИрГТУ);

канд. экон. наук, доц. Г.В. Силичева (ИрГУПС)

© Иркутский государственный университет путей сообщения, 2003

1. СЛУЧАЙНЫЕ СОБЫТИЯ

1.1. ОСНОВНЫЕ ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ПОЛОЖЕНИЯ И ФОРМУЛЫ

Теория вероятностей – это раздел математики изучающий закономерности в случайных явлениях и процессах.

Случайное явление – это явление, которое при повторении опыта протекает каждый раз по иному.

Случайный процесс – это цепочка связанных каким-либо образом явлений.

Опыт (испытание) – целенаправленная, запланированная деятельность человека, как правило, неоднократно повторяемое, с целью изучения законов природы.

Событие (исход) – всякий факт, который может произойти в результате некоторого опыта.

Случайное событие – событие, которое в результате опыта может произойти, а может не произойти.

Например, стрельба по цели из орудия. Здесь выстрел из орудия можно трактовать как опыт, событие как – попадание снаряда в цель, случайное событие – как попадание или не попадание снаряда в цель.

Отметим две особенности теории вероятностей. Теория вероятностей имеет дело с *массовыми* случайными явлениями (много объектов исследования или опыт повторяется неоднократно). Именно в массовых случайных явлениях проявляется закономерность в виде устойчивости определенных характеристик. *Свойство устойчивости* лежит в основе теории вероятностей. Определенные особенности опыта в массе взаимно погашаются, нивелируются, и средний результат оказывается практически не случайным. Например, при большом числе бросаний монеты отношение случаев выпадения герба к количеству бросков стремится к 0,5. Таким образом, теория вероятностей не может предсказать исход отдельного опыта, он остается случайным, но дает возможность предсказать средний результат многократно повторяемых опытов.

Случайные события обозначаются большими буквами ***A***, ***B***, ***C***, ... События бывают простыми (элементарными), когда их нельзя разделить на более простые, и сложными, состоящими из композиции простых событий. Например, бросанию одной монеты соответствуют два элементарных исхода - выпадение герба или решки. Для каждого опыта можно указать некоторую совокупность (множество) взаимно исключающих друг друга (альтернативных) элементарных событий.

Причем в результате опыта должен обязательно реализоваться один из них. Такая совокупность называется *пространством элементарных событий* и обозначается Ω. Элементарные события обозначаются - $w_i\,(w \in \Omega)$, где i пробегает от 1 до n (количество элементарных событий). Пространство элементарных событий может быть конечномерным или бесконечномерным. Приведем пример конечномерного пространства. Бросают две монеты разного достоинства, имеется четыре альтернативных исхода $(n = 4)$:

$$\Omega = \{w_1(\Gamma,\Gamma); w_2(\Gamma,P); w_3(P,\Gamma); w_4(P,P)\}.$$

Примером бесконечномерного пространства является стрельба в мишень конечного размера, если попадание рассматривать как математическую точку. Пронумеровать все исходы, а это попадание в цель, невозможно.

Из элементарных событий можно составить более сложные события. *Благоприятствующими событиями* событию A называют такие события, в результате появления которых появляется и это событие A. Например, при бросании двух монет событию A – выпадению одного герба – благоприятны два события: w_2 и w_3 и неблагоприятны: w_1 и w_4. Событию B – выпадение хотя бы одного герба – благоприятны три элементарных события: w_1, w_2, w_3. Заметим, что понятие благоприятных событий очень важно для подсчетов вероятностей событий.

Для наглядной иллюстрации простанства элементарных событий служат диаграммы Вьена, где события изображаются в виде некоторых площадок или просто кругов Эйлера. На рис.1.1 представлена диаграмма Вьена с тремя несовместными событиями A, B и C.

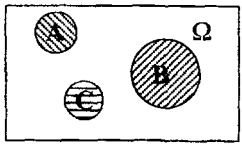


Рис. 1.1

1.2. КЛАССИФИКАЦИЯ СОБЫТИЙ

1. *Достоверное событие* – событие, которое при всех испытаниях обязательно наступает. Например, при бросании игральной кости, на каждой из сторон которой разное количество очков от 1 до 6, событие A, выпадение не более 6 очков, является достоверным. В этом случае $A=\Omega$ и событие A *заполняет всю диаграмму Вьена.*

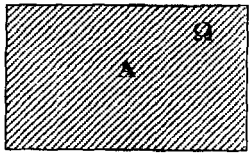


Рис. 1.2

2. *Невозможное событие* – событие, которое никогда не наступает. Например, для того же примера с бросанием кости. Событие B – выпадение 12 очков, невозможное событие. В этом случае полагаем $B = \varnothing$.

3. *Несовместные события* – это события, которые никогда не появляются совместно (одновременно). Например, выпадение герба и решки при одном бросании монеты. Такие события обозначаются на диаграмме Вьена непересекающимися кругами Эйлера.

4. *Совместные события* – это такие события, когда появление одного события A не исключает появление другого события B. Например, при вынимании из колоды карт туза – событие A, не исключает, что туз может быть пиковым – событие B. Совместные события на диаграмме Вьена могут быть представлены в виде перекрывающихся кругов Эйлера.

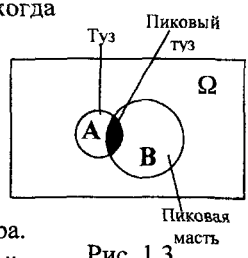


Рис. 1.3

5. *Равновозможные события* – ни одно из событий не является более возможным, чем остальные. Такие события обладают одинаковой степенью реализации и обусловлены наличием симметрии в опытах. Например, кости должны быть однородными с правильными гранями, карты не крапленые, рулетка без тормоза и т.д. На диаграмме Вьена площадь кругов Эйлера в этом случае одинакова.

6. *Полная группа событий.* События образуют полную группу событий, если в результате опыта одно из них обязательно реализуется. То есть они в совокупности занимают все пространство элементарных событий. Например, $w_1 + w_2 + w_3 + w_4 + w_5 = \Omega$.

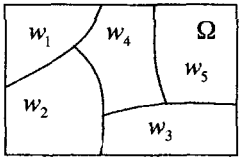


Рис. 1.4

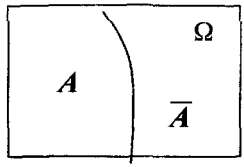


Рис. 1.5

7. *Противоположные события* можно рассматривать как частный случай полной группы событий с $n = 2$. Событие $\overline{A}$ состоит в том, что событие A не произошло.

1.3. КЛАССИЧЕСКОЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ ВЕРОЯТНОСТИ

Различные события, как известно, отличаются различной степенью возможности их реализации. Поэтому для количественного сравнения степеней возможностей событий необходимо ввести некоторое число, которое тем больше, чем больше возможность реализации этого события. Такое число и называется вероятностью события.

Вероятность события - это численная мера степени объективной возможности этого события. Обозначается $P(A)$ или P_A. Здесь под скобками подразумевается не функциональная зависимость, а просто указание, что вероятность относится к событию A.

Кроме того, введем понятие случая. События называются *случаями*, если они образуют *полную группу* событий, *равновозможны и несовместны*. События, происходящие при азартных играх, и есть случаи. Если в опытах есть симметрия, то говорят, что они сводятся к "схеме случаев". Для таких опытов, возможно, непосредственно подсчитать вероятность того или иного события (случая). Подсчет вероятности основан на оценки доли благоприятствующих случаев в общем числе случаев. Это классическое определение вероятности. Если m – число благоприятствующих случаев событию A, а n – общее число случаев, то вероятность события A определяется как

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{mesA}{mes\Omega},$$

где $mesA$ - мера события A. Очевидно должно выполняться $0 \le P(A) \le 1$.

Примеры.

1. При бросании игральной кости возможны 6 случаев, чтобы найти вероятность выпадания четной цифры. Благоприятствующих событий выпаданию четной цифры 3 – это 2, 4 и 6, поэтому $P(A) = 3/6 = 0{,}5$.

2. В урне 5 красных, 3 синих, 7 желтых и 10 белых шаров. Найти вероятность, что случайно вытащенный из урны шар является цветным. Так как событию появления цветного шара благоприятны $m = 15$ шаров, а всего $n = 25$ шаров, то $P(A) = 15/25 = 0{,}6$.

1.4. ЭЛЕМЕНТЫ КОМБИНАТОРИКИ

Математическим аппаратом вычисления вероятностей для "схемы случаев" является *комбинаторика* – один из разделов дискретной математики.

Основной задачей комбинаторики является задача о размещении элементов множества в соответствии со специальными правилами и выяснение, сколькими способами это можно осуществлять. Важным в комбинаторике является понятие конечного счетного множества. Всякая конечная совокупность элементов произвольного рода называется *множеством*. Множество считается определенным, если указаны все его элементы с помощью какого-либо признака или с помощью некоторого списка, где обозначены все его элементы. Пространство элементарных событий можно рассматривать как конечное и счетное множество, а случайные события как элементы этого множества. Сложные события можно рассматривать как множество элементарных событий. Будем обозначать множества, как и события буквами $A,B,C,...,$ а их элементы малыми буквами $a,b,c,....$ Запись $a \in A$ обозначает, что a есть элемент множества A. Запись $b \in B$ обозначает, что b не принадлежит множеству B. Множество характеризуется количеством элементов, которое для конечных множеств называется мощностью множества и обозначается $|A|$ или $N(A)$. Два множества считаются равными между собой $A = B$, если элементы первого множества являются и элементами второго и наоборот: $a \in A$, $a \in B$. Пустым множеством называется множество $\varnothing$, не содержащее ни одного элемента. Должно выполняться $\varnothing \subset A$. Если каждый элемент множества $B \subset A$, но не все элементы A входят в B, то B называют подмножеством A и обозначают $B \subset A$. Запись $B \subseteq A$ обозначает включение до совпадения. Очевидно $A \subseteq A$. Множество называется упорядоченным, если каждому элементу этого множества поставлено в соответствие некоторое число - номер элемента от 1 до n, где n - число натуральное, так, что различным элементам множества соответствуют различные числа. Всякое конечное множество можно сделать упорядоченным, если переписать все элементы в некоторый список и пронумеровать его. Обозначают упорядоченное множество как $\vec{A}$. Возможно рассмотрение упорядоченного подмножества $\vec{B}$ данного множества A, которое может быть неупорядоченным. Если в множестве A имеется n элементов, то можно образовать 2^n подмножеств.

Существуют два основных правила комбинаторики:

– если два альтернативных (взаимно исключающих) действия могут быть выполнены n и m способами, то выполнение одного из них возможно $n+m$ способами. Например, в вазе пять груш и два яблока, то способов выбрать один фрукт – семь;

– если первое действие можно сделать n способами, а второе – m способами, то два действия можно сделать $n \times m$ способами. Например, сколько трехзначных чисел можно составить из цифр 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, если:

а) цифры могут повторяться;

б) ни одна из цифр не повторяется больше одного раза;

в) число должно быть нечетным и цифры могут повторяться.

Решение. а) Имеем три позиции. На первую позицию (сотни) претендуют 6 цифр, а не семь, поскольку 0 исключается (иначе будет двухзначное число); на вторую позицию претендуют уже 7 цифр, так как 0 уже можно использовать (цифры могут повторяться); на третью позицию (единицы) опять претендуют 7 цифр. Таким образом, получаем $6 \times 7 \times 7 = 294$ трехзначных чисел.

б) В этом случае на первую позицию претендует, очевидно, 6 цифр; на вторую (десятки) претендует уже 6 цифр, поскольку одна из цифр уже использована; на третье место претендует уже 5 цифр, поскольку две использовали. Таким образом, имеем $6 \times 6 \times 5 = 180$ трехзначных чисел.

в) В этом случае имеем $6 \times 7 \times 3 = 126$ чисел, поскольку нечетное число должно оканчиваться на нечетную цифру, а их три - 1, 3, 5.

Количество способов организации заданных подмножеств данного множества определяется известными комбинаторными коэффициентами.

Перестановки. Пусть множество A имеет n элементов, тогда количество способов различных их перестановок между собой определяется $N = P_n = n!$. Здесь $n! = n(n-1)(n-2)...3 \cdot 2 \cdot 1$, символ ! - знак факториала. Действительно, берем один из элементов множества и размещаем в любом месте упорядоченного множества. Способов это сделать n. Берем второй элемент и способов его размещения уже $n-1$, так как одно место уже занято, и т.д. Последний элемент можно разместить только одним способом, так как остается незанятым только одно свободное место.

Примеры.

1. Сколькими способами можно расставить 5 книг на полке.

Решение. $P_5 = 5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$.

2. Сколькими способами можно переставить n элементов так, чтобы данные два элемента не стояли рядом ?

Решение. Всего различных перестановок $n!$. Количество способов, когда данные элементы стоят рядом, равно $2(n-1)(n-2)!$. Так как двумя способами их можно переставить между собой, $n-1$ способами разместить среди n элементов и $(n-2)!$ способами можно переставить оставшиеся $n-2$ элементов, которые нас не интересуют. Таким образом, количество способов перестановки, учитывающих условие того, что заданные два элемента не стоят рядом, равно $N = n!-2(n-1)(n-2)! = (n-2)(n-1)!$.

Размещения. Рассмотрим задачу о размещении k элементов из n элементов множества. Пусть само множество неупорядочено. Всего способов перестановок этого множества, как мы уже знаем, $n!$. Нас интересует упорядоченное распределение только k элементов из n. Остальные $n-k$ элементов нас не интересуют, а способов их перестановки $(n-k)!$. Таким образом, количество перестановок k элементов из n, которое называется размещением и обозначается A_n^k, будет определяться как

$$N_k(n) = A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}.$$

Пример. Сколькими способами можно рассадить 3 человек на 10 мест.

Решение. $A_{10}^3 = \frac{10!}{7!} = 10 \cdot 9 \cdot 8 = 720$. Или по другому - количество способов разместить первого человека на 10 мест, очевидно, равно 10, второго 9, поскольку одно место уже занято, ну а третьего уже только 8. Итак, получаем $N = 10 \cdot 9 \cdot 8 = 720$.

Сочетания. Рассмотрим задачу о числе сочетаний k элементов из n элементов. Если нас не интересует взаимная перестановка k элементов из n, а их $k!$, а интересует только их сочетание (порядок не важен), то количество способов выбрать k элементов из n определяется как

$$N_k(n) = C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

и называется числом сочетаний k элементов из n элементов.

Примеры.

1. Сколькими способами можно выбрать 3 книги из 12 ?

Решение. Нас не интересует последовательность выбора этих трех книг, а только их сочетание, поэтому $C_{10}^3 = \frac{10!}{3!\ 7!} = 120$.

2. В турнире принимают участие n шахматистов и каждые два из них встречаются между собой только один раз. Сколько партий будет сыграно?

Решение. $C_n^2 = \dfrac{n!}{2!(n-2)!} = \dfrac{n(n-1)}{2}$.

Из формулы для определения числа сочетаний k элементов из n следует симметрия этого числа по индексам:

$$C_n^k = C_n^{n-k} = \frac{n!}{(n-k)!\ k!} .$$

Числа C_n^k являются коэффициентами бинома Ньютона и определяют постоянные в сумме

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^k b^{n-k} .$$

Так, для $n=2$, $C_2^0 = C_2^2 = 1$, $C_2^1 = 2$; для $n=3$, $C_3^0 = C_3^3 = 1$, $C_3^1 = C_3^2 = 3$.
Умножая бином Ньютона на $(a+b)$, легко получить такое свойство:

$$C_{n+1}^k = C_n^k + C_n^{k+1} .$$

Умножая бином Ньютона на $(a+b)^m$ можно получить еще одно свойство:

$$C_{n+m}^k = \sum_{i=0}^{k} C_n^i + C_m^{k-i} .$$

Задавая различные значения a и b в биноме, можно получить следующие биноминальные тождества:

для $a = b = 1$, $C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \ldots + C_n^n = 2^n$;

для $a = -b = 1$, $C_n^0 - C_n^1 + C_n^2 - \ldots + (-1)^n C_n^n = 0$.

Предпоследнее тождество определяет количество всех подмножеств множества A из n элементов, включая пусто множество.

Например. Пусть дано множество $A = \{a,b,c\}$. Определить количество всех подмножеств, образующихся из этого множества.

$$M(A) = \{\{a\},\{b\},\{c\},\{a,b\},\{a,c\},\{b,c\},\{a,b,c\},\varnothing\}.\ N(M) = 2^3 = 8 .$$

Перестановки с повторением. Если множество A имеет одинаковые повторяющиеся элементы, то их перестановка между собой не приводит к новому упорядоченному множеству. Поэтому надо исключить способы, когда меняются местами одинаковые элементы, число которых пусть будет $k_1, k_2, \ldots, k_m$, причем $n = k_1 + k_2 + k_3 + \ldots + k_m$. Тогда количество способов перестановки элементов множества между собой так, чтобы при этом все комбинации были различными, определяется по формуле

$$P_n(k_1, k_2, ..., k_m) = \frac{n!}{k_1! k_2! ... k_m!}$$

Например, сколькими способами можно переставить буквы в слове "математика"? Видно, что буквы "м" и "т" встречаются по два раза, а буква "а" три раза, поэтому количество способов получить различные перестановки равно $N = P_{10}(2,2,3) = \frac{10!}{2! \cdot 2! \cdot 3!} = 151200$.

Размещения с повторением. Рассмотрим размещение k элементов с повторением из n элементов. Очевидно, что таких способов

$$\overline{A}_n^k = n^k.$$

Поясним на примере. Сколькими способами можно составить пятизначный номер из девяти цифр от 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, причем цифры в номере могут повторяться? Так как $m = 5$, и $n = 9$, то на все 5 позиций претендуют по 9 цифр: $N = \overline{A}_9^5 = 9^5 = 6561$.

Сочетание с повторением. Пусть имеются n различных элементов множества и из них надо образовать k комбинаций, не принимая во внимание порядок в комбинации. Образуемые комбинации должны отличаться хотя бы одним элементом. В этом случае число сочетаний с повторением определяется

$$\overline{C}_n^k = C_{n+k-1}^k = \frac{(n+k-1)!}{k!(n-1)!}.$$

Действительно, если n элементов расположить по типам и их перенумеровать, а затем еще раз перенумеровать, прибавляя последовательно по единице к номеру каждого типа, то получим сочетание уже без повторений, состоящее из неповторяющихся чисел 1, 2, 3, ..., $n + k - 1$. Заметим, что все они различны, и при этом в каждое сочетание входят k элементов.

Примеры.

1. В магазине продаются пирожные 4 сортов. Сколькими способами можно купить 7 пирожных ?

Решение. Очевидно, что сорта пирожных среди купленных будут повторяться. Обозначим $k = 7$, $n = 4$.

$$\overline{C}_4^7 = C_{4+7-1}^7 = C_{10}^7 = C_{10}^3 = 120.$$

2. Сколько костей домино, если на каждой из костей по две из 7 цифр 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 ?

Решение. $N = \overline{C}_7^2 = C_8^2 = 28$.

3. Дано множество $A = \{a,b,c\}$. Образовать множество по 2 элемента с повторением и определить количество элементов этого множества.

Решение. $B = \{ac,bc,ab,aa,bb,cc\}$; $N(B) = \overline{C}_3^2 = C_4^2 = 6$.

1.5. СТАТИСТИЧЕСКАЯ ВЕРОЯТНОСТЬ ИЛИ ЧАСТОТА СОБЫТИЙ

Если опыт не сводится к "схеме случаев" (например, кость со смещенным центром тяжести), то вероятность события определить так просто, как делалось выше, невозможно. Однако есть другой способ подсчета, применяемый на практике. Производится n опытов, в каждом из которых заданное событие A появляется или не появляется. *Частотой события* A или *статистической вероятностью* в данной серии опытов называется отношение числа опытов, в которых событие A происходит, к числу всех опытов. Если m^* число опытов, где появилось A и n число опытов, то частота события A определяется

$$P^*(A) = \frac{m^*}{n}.$$

В отличие от классического определения вероятности, частоту событий будем отмечать звездочкой.

Свойства частоты событий:

1. $0 \le P^*(A) \le 1$, так как частота невозможного события $P^* = 0$ $(m^* = 0)$ и частота достоверного события $P^* = 1$ $(m^* = n,\ 0 \le m^* \le n)$.
2. При увеличении числа опытов $(n \to \infty)$ частота события A стремится к некоторому пределу, который и будет вероятностью события A. Говорят, что частота сходится по вероятности к вероятности события A и обозначается $P^* \underset{n\to\infty}{\overset{P}{\to}} P$. Под этой записью подразумевают, что событие, заключающееся в том, что абсолютная разность частоты и вероятности события A меньше бесконечно малой величины, является достоверным:

$$P\left(\left|P^* - P\right| < \varepsilon\right) \cong 1.$$

Заметим, что между P^* и P имеется глубокая диалектическая связь и различия. Связь обусловлена тем, что, чем чаще событие наблюдается, тем больше его вероятность, и наоборот. Отличие же заключается в том, что

вероятность события определяется до опытов, а частота события после опытов.

1.6. ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ ВЕРОЯТНОСТЬ

В ряде практических задач число возможных исходов бесконечно (пространство элементарных событий бесконечно), что делает невозможным применение классического определения вероятностей. Однако, если остается в силе понятие равновозможности событий, то применяется так называемый геометрический метод подсчета вероятности. Задача сводится к бросанию математической точки на конечный участок прямой или плоскости или пространства и делается подсчет его доли. Так, если есть отрезок длиной L и его часть l ($L > l$), то вероятность попасть математической точки в отрезок l находится как $P = l/L$. То же самое для плоскости. Пусть имеем на плоскости область D и область d, то вероятность попадания математической точки в d будет находиться как отношение площадей

$$P(A) = \frac{S_d}{S_D},$$

здесь вероятность попадания не **зависит от формы** областей D и d, а зависит только от **их площадей.**

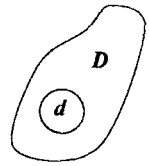


Рис. 1.6

Примеры.

1. Вращается диск, на котором имеется черный сектор с площадью 1/5 всего диска. Найти вероятность попадания математической точки в черный сектор:

$$P = \frac{S_d}{S_D} = \frac{\frac{1}{5}S}{S} = \frac{1}{5}.$$

2. Задача о встрече. Два товарища договорились встретиться с 13^{00} до 14^{00} в условленном месте и договорились ждать не более 15 минут. Найти вероятность их встречи. Для решения построим "вероятностный" чертеж. По оси ординат отложим время ожидания одного из них, а по оси абсцисс время ожидания другого. Видно, что встреча произойдет, если время их совместного прихода

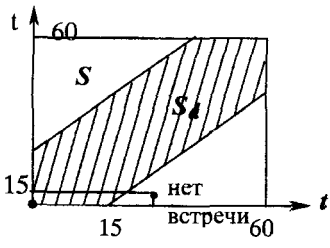


Рис. 1.7

попадет в заштрихованную область. Тогда

$$P = \frac{S_d}{S} = \frac{60^2 - 45^2}{60^2} = 0{,}45.$$

1.7. АЛГЕБРА СОБЫТИЙ

Если событие, вероятность которого необходимо определить, достаточно сложное (затруднителен подсчет числа благоприятствующих событий), то его представляют в виде композиции элементарных событий или более простых событий, вероятность которых известна.

Суть этих методов сводится к применению двух теорем о сложении и умножении вероятностей и большого числа их следствий. Обе теоремы строго доказываются только для "схемы случаев". Для событий, не сводящихся к "схеме случаев", эти теоремы принимаются как аксиомы.

Рассмотрим алгебру событий. *Логической суммой двух событий* A *и* B называют событие C, состоящее в выполнении события A или B или обоих сразу, если события совместны (хотя бы одного из них). Логическая сумма двух событий называется *объединением* и обозначается $A \cup B$ или $A + B = C$, где подразумевается логическое сложение. Причем, если $A \subset \Omega$ и $B \subset \Omega$, то $C \subset \Omega$. На диаграмме Вьена сумма событий A и B интерпретируется, как общая площадь кругов Эйлера. На рис. 1.8 $A \cup B$ представлена заштрихованной областью Поясним на *примере*. Пусть $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $B = \{4, 5, 6, 7\}$, то $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$. Все элементы множества A и B входят в $A \cup B$ только один раз. Другой пример, событие A – попадание в мишень при первом выстреле, а событие B – попадание в мишень при втором выстреле, то $A + B$ – событие хотя бы одного попадания.

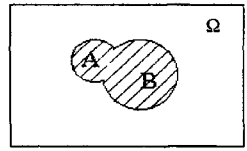


Рис. 1.8

Очевидно, должно выполняться $N(A + B) = N(A) + N(B) - N(AB)$.

На рис. 1.9 представлено событие $D = A \cup B \cup C$ в виде заштрихованной площадки:

$$N(A + B + C) = N(A) + N(B) + N(C) - N(AB) - N(AC) - N(BC) + N(ABC).$$

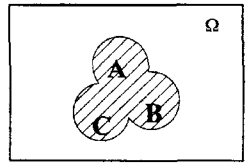


Рис. 1.9

Например. В детском спортивном клубе каждый спортсмен либо девочка, либо блондин, либо не любит мороженое. Всего в клубе 50 девочек, из них 20 блондинок и лишь две блондинки не любят мороженое. Всего в клубе 30 спортсменов блондинов, а мороженое не любят 5 из них, а всего спортсменов, не любящих мороженое, 12, из них 8 девочек. Сколько спортсменов в данном спортивном клубе ?

Решение. Из условия A - события множество девочек $N(A)=50$; B - множество блондинов $N(B)=30$; C - множество спортсменов, не любящих мороженое $N(C)=12$. Далее из условия следует, что $N(A\cap B)=20$, $N(B\cap C)=5$, $N(A\cap C)=8$, $N(A\cap B\cap C)=2$. Тогда спортсменов

$$N(A\cup B\cup C)=N(A)+N(B)+N(C)-N(A\cap B)-N(B\cap C)-N(A\cap C)+$$
$$+N(A\cap B\cap C)=50+30+12-20-5-8+2=61.$$

Если события несовместны, то $C=A\cup B$ есть событие появления только одного из них:или A, или B. Заметим, что $A\cup A=A$.

Приведем пример построения сложного события из более простых. Пусть произведено 4 выстрела. Обозначим события: A_0 – все промахи; A_1 – одно попадание в 4 выстрелах; A_2 – два попадания; A_3 – три попадания; A_4 – четыре попадания в 4 выстрелах. Тогда сложные события конструируются как:

– не более двух попаданий $B=A_0+A_1+A_2$;

– не менее трех попаданий $C=A_3+A_4$;

– хотя бы два попадания $D=A_2+A_3+A_4$;

– хотя бы одно попадание $F=A_1+A_2+A_3+A_4$.

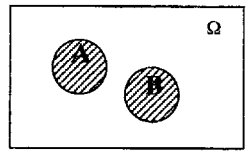


Рис. 1.10

Произведением двух событий A и B называется событие C, состоящее в совместном выполнении событий A и B. Логическое умножение – это пересечение множеств A и B. Обозначается $A\cap B$ или $A\cdot B=C$. На диаграмме Вьена произведение событий A и B интерпретируется как область пересечения кругов Эйлера. Очевидно, что если A и B несовместны, то $A\cap B=\varnothing$. На рисунке $A\cap B$ представлена заштрихованной областью. Поясним на примере. Пусть $A=\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $B=\{4, 5, 6, 7\}$, то $A\cap B=\{4, 5, 6\}$. Можно обобщить на произведение нескольких событий, например, трех. Произведение трех событий A, B и C есть событие, состоящее в их

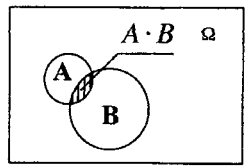


Рис. 1.11

совместном появлении $D = A \cap B \cap C$. На рис. 1.12 D представляет собой область пересечения совместных событий A, B и C.

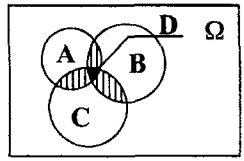


Рис. 1.12

Рассмотрим несколько *примеров.*

1. Из колоды карт вынимают наугад карту. Если это валет, то обозначим событием A. Если это карта бубновой масти, то обозначим событие B. Тогда событие $A \cap B$ – это не что иное, как бубновый валет.

2. По мишени сделано три выстрела. Составить событие B, состоящее в том, что после трех выстрелов в мишени есть хотя бы одно попадание.

Решение. Обозначим элементарные события: A_1 – попадание при первом выстреле; A_2 – попадание при втором выстреле; A_3 – попадание при третьем выстреле; $\overline{A}_1$ – промах при первом выстреле; $\overline{A}_2$ – промах при втором выстреле и $\overline{A}_3$ – промах при третьем выстреле. Тогда событие хотя бы одного попадания в мишень можно записать в виде $B = B_1 + B_2 + B_3$, где B_1 событие одного попадания в трех выстрелах, а B_2 и B_3 – события, когда в мишень попали два и три раза, соответственно. События B_1, B_2 и B_3 можно выразить через элементарные события следующим образом:

$$B_1 = A_1\overline{A}_2\overline{A}_3 + \overline{A}_1A_2\overline{A}_3 + \overline{A}_1\overline{A}_2A_3 ;$$

$$B_2 = A_1A_2\overline{A}_3 + A_1\overline{A}_2A_3 + \overline{A}_1A_2A_3 ;$$

$$B_3 = A_1A_2A_3 .$$

Заметим, что промах при трех выстрелах описывается $B_0 = \overline{A}_1\overline{A}_2\overline{A}_3$. Заметим также, что события B_0, B_1, B_2, B_3 несовместны и образуют полную группу событий.

3. Стреляют по воздушному шарику. При попадании он лопается. Составить событие B, заключающееся в том, что по шарику стреляли три раза и он лопнул. Кроме того, составить событие C, состоящее в том, что по шарику стреляли не более трех раз, прежде чем он лопнул.

Решение. Как и в предыдущей задаче обозначим A_1, A_2 и A_3 – элементарные события попадания в шарик при первом, втором и третьем выстреле, а $\overline{A}_1$, $\overline{A}_2$ и $\overline{A}_3$ – соответствующие промахи. Тогда $B = \overline{A}_1\overline{A}_2A_3$, а событие $C = A_1 + \overline{A}_1A_2 + \overline{A}_1\overline{A}_2A_3$.

Заметим, что наряду с операциями сложения и умножения можно ввести операцию *логического вычитания (исключения)* $A - B = C$ или

$A/B = C$, состоящее в том, что происходит событие A, а событие B не происходит. Однако эта операция не самостоятельная и может быть заменена операцией умножения событий $A \cdot \overline{B}$. Таким образом, выполняется соотношение $A - B = A \cdot \overline{B}$.

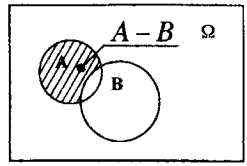


Рис. 1.13

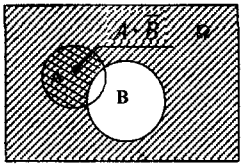


Рис. 1.14

Действительно, это видно из сравнения двух диаграмм Вьена. Здесь событие $A \cdot \overline{B}$ является пересечением событий A и $\overline{B}$ и соответствующая область показана на диаграмме двойной штриховкой.

1.8. ЗАКОНЫ АЛГЕБРЫ СОБЫТИЙ

1. $A \cdot \Omega = A, \quad A + \Omega = \Omega.$
2. $A \cdot \varnothing = \varnothing, \quad A + \varnothing = A.$
3. $A \cdot A = A, \quad A + A = A.$
4. $\overline{A} = \Omega - A, \quad \overline{\varnothing} = \Omega, \quad \overline{\Omega} = \varnothing.$
5. $A\overline{A} = \varnothing.$
6. $\overline{A + B} = \overline{A} \cdot \overline{B}.$
7. $\overline{A \cdot B} = \overline{A} + \overline{B}.$
8. $A - B = A\overline{B}, \quad B - A = B\overline{A}.$
9. $(A + B)C = AC + BC.$
10. $A \subseteq B \Rightarrow \overline{B} \subseteq \overline{A}.$

1.9. ТЕОРЕМЫ СЛОЖЕНИЯ И УМНОЖЕНИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Теорема сложения вероятностей. Вероятность суммы двух несовместных событий равна сумме вероятностей этих событий:

$$P(A + B) = P(A) + P(B).$$

Следствие 1. Можно обобщить формулу на произвольное число несовместных событий:

$$P\left(\sum_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i).$$

Следствие 2. Если несовместные события A_i образуют полную группу событий $\sum_{i=1}^{n} P(A_i) = \Omega$, то есть одно из них обязательно реализуется, то выполняется $P(\Omega) = 1$, и отсюда следует $P\left(\sum_{i=1}^{n} A_i\right) = 1$,

$$\sum_{i=1}^{n} P(A_i) = 1.$$

Таким образом, сумма вероятностей несовместных событий, образующих полную группу, равна единице.

Это правило имеет большое значение для контроля правильности решения задач по теории вероятностей.

Следствие 3. Если A и $\overline{A}$ – противоположные события, то $P(A) + P(\overline{A}) = 1$. Отсюда можно получить простую и удобную формулу для подсчета вероятности противоположного события $P(A) = 1 - P(\overline{A})$.

Например, сделано четыре выстрела по мишени. Обозначим A – событие хотя бы одного попадания, тогда $\overline{A}$ будет событием, описывающим промах при четырех выстрелах $\overline{A} = \overline{A}_1\overline{A}_2\overline{A}_3\overline{A}_4$, где A_i есть события попадания в мишень при i-ом выстреле, $i = 1,2,3,4$. Тогда вероятность хотя бы одного попадания в мишень определяется $P(A) = 1 - P(\overline{A}_1\overline{A}_2\overline{A}_3\overline{A}_4)$.

Следствие 4. Вероятность появления хотя бы одного из совместных событий равна сумме их вероятностей без вероятности их совместного появления (*правило сложения совместных событий*) :

$$P(A + B) = P(A) + P(B) + P(AB).$$

Следствие 5. Обобщим теорему на случай трех и более совместных событий:

$$P(A + B + C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(AB) - P(AC) - P(BC) - P(ABC).$$

Здесь область ABC добавляется, поскольку необходимо, чтобы все элементы множеств A, B и C входили только один раз. Для вероятности суммы нескольких совместных событий можно получить как

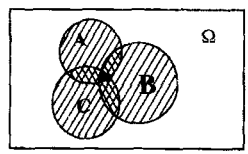


Рис. 1.15

$$P\left(\sum_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) - \sum_{i<j}^{n} P(A_iA_j) + \sum_{i<j<k}^{n} P(A_iA_jA_k) - \cdots (-1)^{n-1} P(A_1A_2 \ldots A_n).$$

Следствие 6. Вероятность появления только одного из совместных событий (или A,или B) можно определить как

$$P = P(A + B) - P(AB) = P(A) + P(B) - 2P(AB).$$

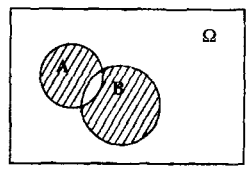


Рис. 1.16

Пример. Вероятность попадания в цель из первого и второго орудия равна $P_1 = 0,7$ и

$P_2 = 0{,}8$ соответственно. Найти вероятность хотя бы одного попадания в цель при одновременном залпе из двух орудий. Кроме того, найти вероятность одного попадания при залпе.

Решение Поскольку стрельба из двух орудий независима, то, как покажем далее, $P(A_1 \cdot A_2) = P(A_1) \cdot P(A_2) = P_1 P_2$. Тогда вероятность хотя бы одного попадания будет определяться

$$P(A_1 + A_2) = P_1 + P_2 - P_1 P_2 = 0{,}7 + 0{,}8 - 0{,}7 \cdot 0{,}8 = 0{,}94.$$

Вероятность же одного попадания определяется

$$P = P_1 + P_2 - 2P_1 P_2 = 0{,}7 + 0{,}8 - 2 \cdot 0{,}7 \cdot 0{,}8 = 0{,}38.$$

Теорема умножения вероятностей. Прежде чем ее сформулировать, введем два новых понятия о зависимых и независимых событиях.

Событие A называют *независимым* (*зависимым*) от события B, если вероятность события A не зависит (зависит) от того, произошло событие B или нет. События A и B, как правило, относятся к разным временным интервалам и интерпретируются как звенья причинно-следственной цепочки. Одно из событий предшествует другому.

Например, в урне 5 белых и 3 черных шара. Наугад вынимают последовательно один за другим два шара. Вероятность того, что первый вынутый шар будет белый равна $P(A) = \frac{5}{8}$. Вероятность же того, что второй шар будет белый равна $P(B) = \frac{4}{7}$, так как в урне после извлечения первого шара их осталось только 7. Если же первый шар сразу вернуть в урну, то вероятность того, что второй, вынутый наугад шар белый, будет $P(B) = \frac{5}{8}$. Таким образом, вероятность события B существенным образом зависит от уже произошедшего события A. Вероятность таких событий определяется как условная вероятность и обозначается $P(B/A)$ или $P_A(B)$.

Условной вероятностью события B называют вероятность события B, вычисленную при условии того, что имело место событие A. Условие независимости событий A и B будет определяться $P(B/A) = P(B)$. Заметим, что если события A и B независимы, то они независимы попарно $P(A/B) = P(A)$.

Теорема. Вероятность произведения двух совместных событий равна произведению вероятности одного из событий на условную вероятность другого при условии, что первое имело место.

$$P(AB) = P(A)\cdot P(B/A) = P(B)\cdot P(A/B).$$

Заметим, что для несовместных событий $P(AB) = 0$, так как $AB = \varnothing$.

Следствие 1. Если события A и B независимы, то теорема упрощается и гласит, что вероятность произведения независимых событий равна произведению их вероятностей: $P(AB) = P(A)\cdot P(B)$. Можно легко обобщить на произведение n независимых событий;

$$P\left(\prod_{i=1}^{n} A_i\right) = \prod_{i=1}^{n} P(A_i).$$

Следствие 2. Обобщим формулу на n зависимых событий:

$$P(A_1A_2A_3\ldots A_n) = P(A_1)\cdot P(A_2/A_1)\cdot P(A_3/A_1A_2)\cdots P(A_n/A_1A_2A_3\ldots A_{n-1}).$$

Рассмотрим несколько *примеров* на использование теорем сложения и умножения вероятностей.

1. Студент знает 20 вопросов из 25. Для получения зачета необходимо правильно ответить на три вопроса. Найти вероятность получения зачета.

Решение Событие получения зачета $A = A_1A_2A_3$, где A_i, $i = \overline{1,3}$, событие одного правильного ответа. Тогда

$$P(A) = P(A_1A_2A_3) = P(A_1)\cdot P(A_2/A_1)\cdot P(A_3/A_1A_2) = \frac{20}{25}\cdot\frac{19}{24}\cdot\frac{18}{23} = 0{,}49.$$

Эту же задачу можно решить с помощью комбинаторики, поскольку она не очень сложная. $P(A) = \dfrac{C_{20}^3\cdot C_5^0}{C_{25}^3} = 0{,}49$.

Заметим, что вероятность получения зачета после 4 правильных ответа на 4 вопроса будет $P'(A) = 0{,}37$, а на 5 из 5 $P(A) = 0{,}3$.

2. В урне 10 белых и 5 черных шаров. Из урны наугад вынимают последовательно 3 шара. Найти вероятность, что а) все они белые, б) первый белый, а остальные черные.

Решение. а) $P(A_1A_2A_3) = \dfrac{10}{15}\cdot\dfrac{9}{14}\cdot\dfrac{8}{13} = \dfrac{3\cdot 8}{7\cdot 13}$.

С помощью комбинаторики $P = \dfrac{C_{10}^3\cdot C_5^0}{C_{15}^3} = \dfrac{3\cdot 8}{7\cdot 13}$.

б) $P(A_1\overline{A}_2\overline{A}_3) = \dfrac{10}{15}\cdot\dfrac{5}{14}\cdot\dfrac{4}{13} = \dfrac{5\cdot 4}{21\cdot 13}$.

С помощью комбинаторики $P = \dfrac{C_{10}^1 \cdot C_5^2}{C_{15}^3} = \dfrac{5 \cdot 4}{21 \cdot 13}$.

3. В механизме три одинаковых узла. Работа механизма нарушается, если при сборке поставлено три бракованных узла. У сборщика 15 узлов,из них 5 бракованных. Найти вероятность отказа механизма.

Решение. Событие B – отказ механизма. Построим B из элементарных событий: $B = A_1A_2A_3$, где событие A_i – отказ i-го узла. Тогда $P(B) = P(A_1) \cdot P(A_2/A_1) \cdot P(A_3/A_1A_2) = \dfrac{5}{15} \cdot \dfrac{4}{14} \cdot \dfrac{3}{13} = \dfrac{2}{91}$.

С помощью классического определения $P(B) = \dfrac{C_5^3 \cdot C_{10}^0}{C_{15}^3} = \dfrac{2}{91}$.

4. Произведено три выстрела по мишени. Вероятности попаданий равны: $P_1 = 0{,}4$; $P_2 = 0{,}5$; $P_3 = 0{,}7$. Найти вероятность: а) одного попадания после трех выстрелов; б) хотя бы одного попадания; в) промаха в трех выстрелах.

Решение. Построим алгебру событий. Событие A – попадание при первом выстреле $(P(A_1) = 0{,}4$, а событие $\overline{A}_1$ – промах при первом выстреле $P(\overline{A}_1) = 1 - P(A_1) = 0{,}6)$. Аналогично для второго и третьего выстрелов. Тогда событие одного попадания в мишень после трех выстрелов $A = A_1\overline{A}_2\overline{A}_3 + \overline{A}_1A_2\overline{A}_3 + \overline{A}_1\overline{A}_2A_3$. Вероятность одного попадания:

а) $P(A) = P_1q_2q_3 + q_1P_2q_3 + q_1q_2P_3 = 0{,}36$.

б) Построим алгебру события D – хотя бы одного попадания $D = A + B + C$, где $B = A_1A_2\overline{A}_3 + A_1\overline{A}_2A_3 + \overline{A}_1A_2A_3$ – событие двух попаданий в трех выстрелах. Событие трех попаданий в трех выстрелах обозначено $C = A_1A_2A_3$. Легко подсчитать, что $P(C) = P_1P_2P_3 = 0{,}14$, а $P(B) = P_1P_2q_3 + P_1q_2P_3 + q_1P_2P_3 = 0{,}41$. Тогда вероятность хотя бы одного попадания $P(D) = 0{,}91$.

в) Вероятность промаха при трех выстрелах $P(\overline{D}) = q_1q_2q_3 = 0{,}09$. Видно, что события A, B, C и D образуют полную группу:

$$P(A + B + C + \overline{D}) = 1.$$

Рассмотрим подробнее вычисление вероятности появления хотя бы одного события. На практике часто возникают задачи об определении вероятности появления хотя бы одного из нескольких независимых событий. В этом случае удобно пользоваться следующей теоремой.

Теорема. Вероятность появления хотя бы одного из независимых событий $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n$ равна разности между единицей и произведением вероятностей событий, противоположных данным:

$$P(A) = 1 - q_1 q_2 q_3 \cdots q_n ,$$

где $P(A_1) = P_1$ и $P(\overline{A}_1) = q_1$, $P(A_2) = P_2$ и $P(\overline{A}_2) = q_2$.

$$P(A_i) + P(\overline{A}_i) = 1 \quad (i = \overline{1,n}).$$

В частном случае, когда $q_1 = q_2 = q_3 = \cdots = q_n = q$, то вероятность появления хотя бы одного из равновозможных событий определится формулой $P(A) = 1 - q^n$.

Примеры.

1. Два орудия стреляют залпом по мишени. Вероятность попадания первого и второго орудий $P_1 = 0{,}7$ и $P_2 = 0{,}8$ соответственно. Найти вероятность хотя бы одного попадания. Напомним, что мы решали эту задачу. Покажем другие способы решения.

Решение. а) События A_1 и A_2 попадания в мишень при стрельбе залпом независимы, но совместны, поэтому вероятность хотя бы одного попадания определится по теореме сложения совместных событий:

$$P(A) = P(A_1) + P(A_2) - P(A_1 A_2) = P_1 + P_2 - P_1 P_2 = 0{,}94 .$$

б) Образуем несовместные независимые события:

$B = A_1 \overline{A}_2 + \overline{A}_1 A_2$ – событие одного попадания;

$C = A_1 A_2$ – событие двух попаданий.

Тогда $P(A) = P(B + C) = P_1 q_2 + q_1 P_2 + P_1 P_2 = 0{,}94$.

в) Образуем событие $\overline{A} = \overline{A}_1 \overline{A}_2$ – оба орудия сделали промах. Тогда $P(A) = 1 - P(\overline{A}) = 1 - q_1 q_2 = 1 - 0{,}3 \cdot 0{,}2 = 0{,}94$.

2. Три электрические лампочки последовательно включены в цепь. Вероятность того, что одна из лампочек перегорит, если напряжение в сети превысит номинальное, равно 0,6. Найти вероятность того, что при повышенном напряжении в сети тока в цепи не будет.

Решение Пусть A – событие, что хотя бы одна из лампочек перегорит. Тогда $\overline{A} = \overline{A}_1 \overline{A}_2 \overline{A}_3$. По условию $P(\overline{A}_i) = 0{,}4 \ (i = \overline{1,3})$. Получаем искомую вероятность $P(A) = 1 - q^3 = 0{,}936$.

1.10. ФОРМУЛА ПОЛНОЙ ВЕРОЯТНОСТИ

Рассмотрим следствия теорем сложения и умножения вероятностей. Прежде всего, остановимся на теореме о полной вероятности. На практике часто возникают задачи о нахождении вероятностей событий, начальное состояние которых неизвестно. Нет достаточной информации. Допустим, мы знаем, что в урне находятся два шара, но не знаем, сколько из них черных и белых. Если при этом в урну положим белый шар, то как можем определить вероятность того, что вынутый наугад шар будет, например, белым? Казалось бы, задача некорректно поставлена, однако ее можно решить. Необходимо для этого построить несколько альтернативных гипотез о начальном состоянии события и найти вероятность этого события при условии выполнения этих гипотез. Для приведенного примера имеют место три гипотезы: два белых, два черных и по одному белому и черному.

Пусть требуется определить вероятность события A, которое может произойти вместе с одним из событий $H_1, H_2, H_3, \ldots, H_n$, несовместных и образующих полную группу. Будем называть эти события гипотезами. Докажем, что вероятность события A вычисляется как сумма произведения вероятности каждой из гипотез на условную вероятность события A при этой гипотезе:

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(H_i)P(A/H_i), \quad \sum_{i=1}^{n} P(H_i) = 1.$$

Действительно, так как гипотезы образуют полную группу, то событие A может появиться только в комбинации с какой-либо гипотезой – H_i. Строим это событие $A = AH_1 + AH_2 + AH_3 + \cdots + AH_n$. Так как H_i несовместны, то и $A \cdot H_i$ не совместны. Тогда по теореме сложения несовместных событий получаем $P(A) = P(AH_1) + P(AH_2) + \cdots + P(AH_n)$ и по теореме умножения $P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(H_i)P(A/H_i)$, что и требовалось доказать.

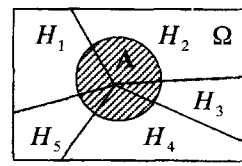


Рис. 1.17

Примеры.

1. Имеются три одинаковые урны. В первой – 2 белых и 1 черный шар, во второй – 3 белых и 1 черный шар и в третьей урне – 2 белых и 2

черных шара. Выбирают наугад урну и наугад вынимают из нее шар. Найти вероятность того,что он белый.

Решение Строим события гипотезы: H_1 – выбрать первую урну, H_2 – выбрать вторую урну и H_3 – выбрать третью урну. Поскольку урны одинаковы (неразличимы), то $P(H_1)=P(H_2)=P(H_3)=\frac{1}{3}$, так как должно выполняться $P(H_1)+P(H_2)+P(H_3)=1$. Тогда вероятности события A – вытащить белый шар:

$$P(A)=\sum_{i=1}^{3}P(H_i)P(A/H_i)=\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}+\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{4}+\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{4}\approx 0{,}64.$$

2. В спортивном клубе 26 футболистов, 14 боксеров и 10 борцов. Вероятность того, что футболист получит первый разряд равна 0,5, боксер – 0,6 и борец – 0,8. Найти вероятность получения первого разряда случайно отобранного члена клуба.

Решение. Строим гипотезы: H_1 – отобрали футболиста, H_2 – отобрали боксера и H_3 – отобрали борца. Вероятности этих гипотез определяются $P(H_1)=\frac{26}{50}$, $P(H_2)=\frac{14}{50}$, $P(H_3)=\frac{10}{50}$. Проверка $P(H_1)+P(H_2)+P(H_3)=1$. Тогда искомая вероятность

$$P(A)=\frac{26}{50}\cdot 0{,}5+\frac{14}{50}\cdot 0{,}6+\frac{10}{50}\cdot 0{,}8\approx 0{,}6.$$

1.11. ФОРМУЛА БАЙЕСА

Итак, при недостатке информации о начальном событии выдвигаются альтернативные гипотезы об этом событии. Если вероятности этих гипотез определены до опыта, то после его проведения можно перепроверить вероятности этих гипотез. Таким образом, можно уточнить значение их вероятностей. *Формула Байеса* показывает, как изменяется вероятность гипотезы $P(H_i)$ при реализации события A. Таким образом, определяем $P(A/H_i)$.

Из теоремы умножения вероятностей следует непосредственно

$$P(AH_i)=P(H_i)P(A/H_i)=P(A)P(H_i/A).$$

Из последнего равенства, используя формулу для полной вероятности, получаем вероятность любой из возможных гипотез после реализации события A:

$$P(H_i/A)=\frac{P(H_i)P(A/H_i)}{\sum_{i=1}^{n}P(H_i)P(A/H_i)}.$$

Причем должно выполняться $\sum_{i=1}^{n}P(H_i)=\sum_{i=1}^{n}P(H_i/A)=1$.

Пример. Изделие проверяется на стандартность двумя контролерами. Вероятность, что изделие попадет к первому контролеру, равна 0,55, а ко второму – 0,45. Вероятность того, что первый контролер признает стандартное изделие стандартным равна 0,9, а что второй контролер признает его стандартным равна 0,98 (опытный контролер). Изделие признано стандартным. Найти вероятность, что его проверил второй контролер.

Решение Рассортируем данные. Обозначим событие A – изделие стандартное, H_1 – гипотеза о том, что изделие попало первому контролеру, H_2 – изделие попало второму контролеру. По условию $P(H_1)=0{,}55$, $P(H_2)=0{,}45$ и $P(A/H_1)=0{,}9$, $P(A/H_2)=0{,}98$. Тогда вероятность того, что стандартное изделие было проверено вторым контролером, определится

$$P(H_2/A)=\frac{0{,}45\cdot 0{,}98}{0{,}45\cdot 0{,}98+0{,}55\cdot 0{,}9}=0{,}471,\text{ а }P(H_1/A)=0{,}529.$$

Видим, что вероятности гипотез после проверки уточнились.

1.12. ФОРМУЛА БЕРНУЛЛИ

На практике часто встречаются ситуации, когда один и тот же опыт повторяется неоднократно. В результате каждого опыта событие A или происходит, или не происходит. Зачастую нас интересует не исход отдельного опыта, а исход совокупности опытов. Например, при залпе батареи орудий, командира батарей интересует не кто конкретно попал в цель, а сколько вообще попаданий. Такие задачи довольно просто решаются для независимых опытов, когда вероятности исхода того или иного опыта не зависят от того, какие исходы имели предыдущие опыты. Таким образом, необходимо найти вероятность появления события A m раз в n опытах. Заметим, что независимые опыты могут проводиться в одинаковых условиях и в разных условиях. Давайте рассмотрим частную теорему для одинаковых условий опыта.

Теорема. Если в одних и тех же условий производится n независимых опытов, в каждом из которых событие A появляется, с вероятностью p и не появляется с вероятностью q $(q = 1 - p)$, то вероятность появления события A m раз в n опытах находится по *формуле Бернулли*

$$P_n(m) = C_n^m P^m q^{n-m}, \text{ где } C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}.$$

Доказательство. Рассмотрим алгебру событий. Пусть событие B_m –появления события A m раз в n опытах $B_m = A_1A_2A_3 \dots A_m\overline{A}_{m+1} \dots \overline{A}_n +$ $+ \overline{A}_1A_2A_3 \dots A_mA_{m+1}\overline{A}_{m+2} \dots \overline{A}_n + \dots + \overline{A}_1\overline{A}_2 \dots \overline{A}_{n-m}A_{n-m+1} \dots A_n$.
Заметим, что все события несовместны. Нас не интересует последовательность наступлений события A. Таких слагаемых будет C_n^m. Обозначим вероятность наступления события A $P = P(A)$, а не наступления $P(\overline{A}) = q$, тогда по теореме умножения и сложения вероятностей
$P(B_m) = P^m q^{n-m} + P^m q^{n-m} + \dots + P^m q^{n-m} = C_n^m P^m q^{n-m} \equiv P_n(m)$, что и требовалось доказать.

Заметим, что события B_m, где $m = \overline{0,n}$, образуют полную группу событий. Поэтому должно выполняться

$$\sum_0^n P_n(m) = 1 \quad \text{и} \quad \sum_0^n C_n^m P^m q^{n-m} = 1.$$

Действительно, вспоминая определение бинома Ньютона, получаем

$$(P+q)^n = \sum_{m=0}^n C_n^m P^m q^{n-m} = 1, \text{ так как } \quad p + q = 1.$$

Поэтому вероятности появления события A m раз в n опытах называют *биноминальным распределением.*

Заметим также, что размерность пространства элементарных событий равна 2^n, действительно, пусть бросают монету n раз, так как $p = q = 0{,}5$, то непосредственно получаем $\sum_{m=0}^n C_n^m = 2^n$.

Пример. В ГАИ дают 5 вопросов, которые имеют по 3 ответа, из них 2 неправильных и 1 правильный. Для получения прав необходимо правильно ответить хотя бы на 3 вопроса из 5. Найти вероятность получения прав методом случайного выбора ответов.

Решение. Вероятность угадать правильный ответ на один вопрос $p = \frac{1}{3}$, а не угадать $q = \frac{2}{3}$. Вероятность правильно ответить на 3 вопроса равна $P_5(3) = C_5^3 P^3 q^2$. Вероятность получить права, т.е. правильно ответить хотя бы на 3 вопроса:

$$P(B) = P_5(3) + P_5(4) + P_5(5) = C_5^3 P^3 q^2 + C_5^4 P^4 q + C_5^5 P^5 = \frac{10 \cdot 2^2 + 5 \cdot 2 + 1}{3^5} \cong 0{,}21$$

Отметим, что если бы для получения прав требовалось правильно ответить на все 5 вопросов, то вероятность их получения значительно бы уменьшилась:

$$P_5(5) = \frac{1}{3^5} = 0{,}004 \quad (0{,}4\%).$$

1.13. ПРЕДЕЛЬНАЯ ТЕОРЕМА ПУАССОНА (ЗАКОН РЕДКИХ СОБЫТИЙ)

Если число независимых опытов велико $(n \to \infty)$, а $P(A) \to 0$, то формулу Бернулли применять трудно и нецелесообразно. Можно получить приближенную формулу Пуассона.

Теорема. Вероятность того, что событие A наступает m раз в n опытах, когда $n \to \infty$, а вероятность появления A в одном опыте $p \to \infty$ и выполняется соотношение $\lambda = np$, где λ ограничено, приближенно находится по формуле Пуассона

$$P_n(m) = C_n^m P^m q^{n-m} \cong \frac{\lambda^m}{m!} e^{-\lambda}, \quad \sum_0^\infty P_m = 1.$$

Примеры.

1. Завод отправил на базу 5000 изделий. Вероятность того, что в пути изделие испортится, равна $p = 0{,}0002$. Найти вероятность, что на базу прибудут 3 негодных изделия.

Решение. Так как $\lambda = nP = 1$, то $P_3 = \frac{1^3}{3!} e^{-1} \cong 0{,}06$.

2. Вероятность поступления сигнала в течение часа на коммутатор, обслуживающий 1000 абонентов, равна $3 \cdot 10^{-3}$. Найти вероятность того, что в течение одного часа воспользуются телефоном два абонента.

Решение. Так как $\lambda = nP = 3$, то $P_2 = \frac{3^2}{2!} e^{-3} \cong 0{,}2$.

1.14. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ТЕОРЕМА МОАВРА-ЛАПЛАСА

Теорема. Если вероятность появления события A в каждом отдельном опыте есть P и P отлично от нуля, то вероятность появления события A в n опытах m раз приближенно вычисляется по формуле

$$P_n(m) = C_n^m p^m q^{n-m} \approx \frac{1}{\sqrt{npq}}\varphi(x),$$

где $x = \dfrac{m - nP}{\sqrt{nPq}}$ и $\varphi(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$ - функция Гаусса;

$\varphi(x)$ – табулированная функция (смотрите приложение).

Свойства $\varphi(x)$:

– $\varphi(\pm\infty) = 0$;

– симметрична, с максимумом в $x = 0$.

Таблица значений этой функции имеется в любом математическом справочнике.

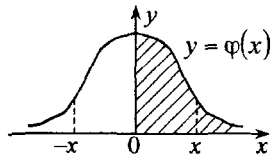


Рис. 1.18

Одним из следствий данной теоремы является, что наиболее вероятное число появления события A в n независимых опытах определяется как целая часть числа m:

$$np - q \le m \le np + p.$$

Примеры.

1. Найти вероятность того, что событие A наступит ровно 80 раз в 400 испытаниях, если вероятность появления этого события в каждом испытании равна 0,2.

Решение. По условию задачи имеем $n = 400$; $m = 80$; $p = 0{,}2$; $q = 1 - p = 0{,}8$. Тогда

$$x = \frac{m - np}{\sqrt{npq}} = \frac{80 - 400 \cdot 0{,}2}{8} = 0.$$

По таблице приложения 1 находим $\varphi(0) = 0{,}3989$. Искомая вероятность равна

$$P_{400}(80) = \frac{1}{8} \cdot 0{,}3989 \approx 0{,}04986.$$

2. Испытывается каждый из 15 элементов некоторого устройства. Вероятность того, что элемент выдержит испытание, равна 0,8. Найти наивероятнейшее число элементов, которые выдержат испытание.

Решение. По условию имеем $n = 15$; $p = 0{,}8$, тогда $q = 0{,}2$. Подставив в двойное неравенство данные задачи, получим

$15\cdot 0{,}8-0{,}2\le m_0\le 15\cdot 0{,}8+0{,}8$ или $11{,}8\le m_0\le 12{,}8$. Так как между числами 11,8 и 12,8 заключено одно целое число 12, то искомое наивероятнейшее число $m_0=12$.

1.15. ИНТЕГРАЛЬНАЯ ТЕОРЕМА МОАВРА-ЛАПЛАСА

Нелокальная теорема Моавра-Лапласа относится уже не к одной точке, а к некоторому интервалу значений m.

Теорема. Если вероятность появления события A в одном опыте равна p, где p конечна, то вероятность того, что событие A произойдет не менее k_1 – раз и не более k_2 – раз в n опытах приблизительно выразится формулой

$$P(a\le x\le b)\approx \Phi(b)-\Phi(a)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_a^b e^{-\frac{x^2}{2}}dx,$$

где $x=\dfrac{m-np}{\sqrt{npq}}$, $a=\dfrac{k_1-np}{\sqrt{npq}}$, $b=\dfrac{k_2-np}{\sqrt{npq}}$. $\Phi(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}}dt$ – функция Лапласа. Она табулирована (см. приложение) и имеет следующие свойства:

- $\Phi(0)=0$;
- $\Phi(\infty)=0{,}5$, так как $\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{x^2}{2}}dx=2\int_0^{\infty}e^{-\frac{x^2}{2}}dx=\sqrt{2\pi}$;
- $\Phi(x)$ – нечетная функция $(\Phi(-x)=-\Phi(x))$.

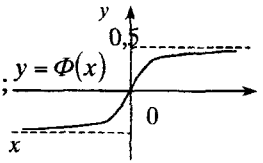


Рис. 1.19

Перейдем к доказательству формулы Моавра-Лапласа. Введем новую переменную $x_m=\dfrac{m-np}{\sqrt{npq}}$, тогда

$x_{m+1}=\dfrac{m+1-np}{\sqrt{npq}}$ и $\Delta x=x_{m+1}-x_m=\dfrac{1}{\sqrt{npq}}$.

Итак, суммируются события появления A от k_1 до k_2 раз в n опытах. Эти события несовместны, поэтому

$$P(k_1\le m\le k_2)=\sum_{k_1\le m\le k_2}P_n(m)\cong\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\sum_{m=k_1}^{k_2}e^{-\frac{x_m^2}{2}}\Delta x_m\cong\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_a^b e^{-\frac{x^2}{2}}dx,$$

где $a=\dfrac{k_1-np}{\sqrt{npq}}$ и $b=\dfrac{k_2-np}{\sqrt{npq}}$, и окончательно $P(a\le x\le b)=\Phi(b)-\Phi(a)$, что и требовалось показать.

Примеры.

1. Вероятность того, что деталь будет бракованной, равна 0,2. Найти вероятность того, что среди 400 случайно отобранных деталей окажутся бракованными от 70 до 100 деталей.

Решение. По условию $p = 0{,}2$; $q = 0{,}8$; $n = 400$; $k_1 = 70$; $k_2 = 100$. Тогда $a = \dfrac{70 - 8}{\sqrt{400 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}2}} = -1{,}25$ и $b = 2{,}5$. По таблице функции Лапласа получаем $P_{400}(70 < m < 100) \cong \Phi(2{,}5) + \Phi(1{,}25) = 0{,}888$.

2. Кошелек упал на пол и из него выпало 25 монет. Найти вероятность того, что от 10 до 20 монет будут лежать гербом вверх.

Решение. По условию $P = 0{,}5$; $q = 0{,}5$; $n = 25$; $n \cdot P = 12{,}5$; $k_1 = 10$; $k_2 = 20$. Тогда $a = -1$ и $b = 3$, и ответ $P_{25}(10 \le m \le 20) = \Phi(3) + \Phi(1) = 0{,}842$.

2. *СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ*

Случайной величиной называется величина, которая в результате опыта может принять то или иное значение, неизвестно заранее какое именно. Случайная величина характеризует случайное событие. Понятие случайной величины играет важную роль в теории вероятностей. Если классическая теория вероятностей оперирует с событиями, то современная теория вероятностей и математическая статистика оперируют только со случайными величинами.

Обозначаются случайные величины как X, Y, Z, ..., а их значения как $x, y, z, \ldots$ Приведем пример типичного приема перехода от события A к случайной величине, характеризующей это событие. Пусть производится опыт, в результате которого может появится или не появится событие A. Если ввести характеристику случайного события, сопоставив появлению события A единицу (1), а не появлению с события A ноль (0), то общее число появлений; события A в опытах равно сумме характеристик этого события во всех опытах:

$$P^* = \frac{m}{n} = \left(\underbrace{1 + 1 + \cdots + 1}_{m} + \underbrace{0 + 0 + \cdots + 0}_{n-m} \right) \Big/ n .$$

Заметим, что мы сразу определили частоту события A.

Случайные величины бывают *дискретными* и *непрерывными*. Примером непрерывной случайной величины может быть время безотказной работы радиолампы, ошибка взвешивания тела на весах, абсцисса точки попадания математической точки в некоторый интервал и так далее. В этих примерах возможные значения случайной величины не отделены друг от друга. Примером дискретной случайной величины может служить число попаданий в мишень при трех выстрелах $-0, 1, 2, 3$.

Рассмотрим основные формы *закона распределения* случайной величины. *Законом распределения случайной величины* называют всякое соотношение, устанавливающее связь между возможными значениями случайной величины и соответствующими им вероятностями. Случайная величина будет полностью описана с вероятностной точки зрения, если мы зададим закон распределения вероятностей.

Существуют три формы законов распределения:

1. *Ряд распределения* для дискретных случайных величин.

Рассмотрим прерывную случайную величину X, которая принимает значения $x_1, x_2, \cdots, x_n$ с возможными значениями вероятности $P(x_1) = p_1$, $P(x_2) = p_2, \cdots, P(x_n) = p_n$. События, которые характеризуются значениямиx_i, – несовместны и образуют полную группу, поэтому $\sum_{1}^{n} P(x_i) = 1$. Ряд распределения оформляется в виде таблицы или на плоскости (x, P) виде многоугольника.

x_i	x_1	x_2		x_n
P_i	p_1	p_2		p_n

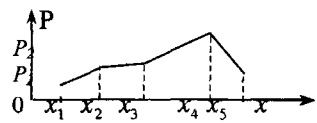


Рис. 2.1

2. *Функция распределения.* Для количественной характеристики непрерывных и прерывных случайных величин удобно пользоваться вероятностью события $X < x$. Таким образом, суммируются все предыдущие вероятности. Итак, функция распределения определяется как вероятность события $X < x$:

$$F(x) \equiv P(X \le x) = \sum_{X < x_i} P(x = x_i).$$

Свойства функции распределения:

1. функция $F(x)$ есть неубывающая функция своего аргумента. Если $x_2 > x_1$, то $F(x_2) > F(x_1)$.
2. $F(-\infty) = 0$. Характеризует невозможное событие.

3. $F(\infty)=1$. Достоверное событие.

Вероятность попадания случайной величины в заданный интервал оси Ox $\alpha \le x \le \beta$

$$P(\alpha \le x < \beta) = F(\beta) - F(\alpha)$$

равна приращению функции распределения на этом участке.

Заметим, что для непрерывной функции при $\alpha \to \beta$, $P(\alpha \le x < \beta) \to 0$. Таким образом, нулевой вероятностью могут обладать и достоверные события. Кажущийся парадокс легко объяснить. Например, масса тела распределена на участке числовой оси. Очевидно, что в одной точке этого участка масса равна нулю. Понятие массы может относиться только к конечному интервалу. То же самое и для вероятности.

3. *Плотность распределения* или дифференциальная функция распределения. Иногда называют просто – *плотность вероятности*. Определяется только для непрерывных случайных величин. Итак, пусть $F(x)$ непрерывна и дифференцируема (гладкая). Вычислим вероятность попадания случайной величины X в интервала Δx

$$P(x \le X < x + \Delta x) = \Delta P(x) = F(x + \Delta x) - F(x)$$

при $\Delta x \to 0$

$f(x) = F'(x) = \dfrac{dF(x)}{dx}$, здесь $f(x)$ и есть плотность распределения.

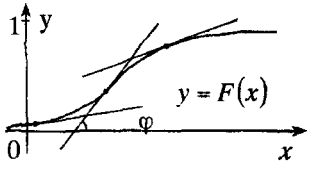


Рис. 2.2

Отсюда следует $P(\alpha \le x < \beta) = \int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx$.

Поскольку $0 \le p \le 1$, то должно выполняться $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$.

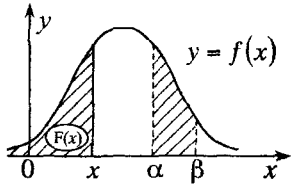


Рис. 2.3

Таким образом, вероятность попадания случайная величина X в интервал $\alpha \le x < \beta$ определяется

$$P(\alpha \le x < \beta) = \int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx = F(\beta) - F(\alpha).$$

Функция распределения интерпретируется как площадь под линией $y = f(x)$, расположенная левее x, $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)dx$.

Основные свойства дифференциальных функций распределения:

– $f(x) \ge 0$, поскольку $F(x)$ неубывающая функция;

– $f(\pm\infty) = 0$;

– если $F(x)$ безразмерна, то $[f(x)] = \frac{1}{[x]}$;

– $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$, так как $F(\infty) = 1$.

Перейдем к *моментному описанию* случайных величин. Для этого введем числовые характеристики случайной величины. Закон распределения случайной величины является исчерпывающей характеристикой и полностью ее определяет. Однако во многих практических задачах удобнее и проще пользоваться набором параметров, характеризующих распределение случайной величины. *Числовыми характеристиками случайной величины* называют параметры, характеризующие самые существенные черты закона распределения этой величины. Очевидно, что самым первым параметром является среднее значение случайной величины, около которого и группируются ее значения.

Математическое ожидание случайной величины – это ее среднее значение, которое определяется как средневзвешенное или среднеарифметическое. Пусть X принимает значения $x_1, x_2, \ldots, x_n$ с вероятностями $P_1, P_2, \ldots, P_n$. Тогда математическое ожидание

$$M[x] \equiv m_x = \sum_{i=1}^{n} x_i P_i, \quad \sum_{i=1}^{n} P_i = 1$$

является суммой произведений всех возможных значений случайной величины на соответствующие им вероятности. Отметим, что это постоянная величина. Для непрерывных случайных величин математическое ожидание определяется как несобственный интеграл I рода:

$$m_x = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x)dx.$$

Заметим, что математическое ожидание можно определить не у всех случайных величин, а только у тех, у которых сумма или интеграл сходятся. Заметим также, что аналогами математического ожидания могут являться мода и медиана. *Модой* называется наибольшее вероятное значение случайной величины. *Медианой* называется такое значение случайной величины, при котором выполняется соотношение

$$P(x < M_e) = P(x > M_e).$$

Моментное (приближенное) описание случайной величины широко используется в механике, математической статистике и т.д. Моменты подразделяются на два вида:

– начальные моменты (приложены к началу координат);

– центральные моменты.

Начальным моментом порядка s называется математическое ожидание степени s этой случайной величины и определяется как

$$M[x^s] \equiv \alpha_s[x], \quad \alpha_s[x] = \sum_1^n x_i^s P_i \quad \text{– для дискретной,}$$

$$\alpha_s[x] = \int_{-\infty}^{\infty} x^s f(x)dx \quad \text{– для непрерывной случайной величины.}$$

Очевидно, что первый начальный момент и есть математическое ожидание $m_x = \alpha_1[x]$.

Центральным моментом порядка s случайной величины X называется математическое ожидание s степени соответствующей центрированной величине $\overset{o}{x} = x - m_x$:

$$M\left[\overset{o}{x}^s\right] \equiv \mu_s[x], \quad \mu_s[x] = \sum_1^n \overset{o}{x}_i^s P_i \quad \text{– для дискретной,}$$

$$\mu_s[x] = \int_{-\infty}^{\infty} \overset{o}{x}^s f(x)dx \quad \text{– для непрерывной величины.}$$

Очевидно, что *центральный момент первого порядка* равен нулю:

$$\mu_1[x] = M\left[\overset{o}{x}\right] = \sum_1^n (x_i - m_x)P_i = \sum_1^n x_i P_i - m_x \sum_1^n P_i = m_x - m_x = 0.$$

Рассмотрим *второй центральный момент*, который называется *дисперсией* и играет важную роль в статистике:

$$D_x \equiv \mu_2[x] = \sum_1^n (x_i - m_x)^2 P_i \text{ – для дискретных случайных}$$

величин;

$$D_x = \int_{-\infty}^{\infty} (x - m_x)^2 f(x)dx \text{ – для непрерывных случайных}$$

величин.

Величина дисперсии характеризует разбросанность значений случайной величины X вокруг m_x. На примере дискретной случайной величины выразим дисперсию через начальные моменты

$$D_x = \sum_1^n (x_i - m_x)^2 P_i = \sum_1^n x_i^2 P_i - 2m_x \sum_1^n x_i P_i + m_x^2 \sum_1^n P_i =$$

$$= \sum_1^n x_i^2 P_i - 2m_x^2 + m_x^2 = \alpha_2[x] - \alpha_1^2[x].$$

$$D_x = \alpha_2[x] - \alpha_1^2[x] = M\left[x^2\right] - M^2[x].$$

Эта формула удобна для практического подсчета значения *дисперсии*. Другой характеристикой, связанной с дисперсией, является *среднеквадратичное отклонение*

$$\sigma_x = \sqrt{D_x},$$

которое имеет размерность случайной величины и может быть наглядно представлено графически.

Свойства математического ожидания и дисперсии:

– $M[c] = c$. Действительно, будем рассматривать c как дискретную величину, у которой одно значение принимается с вероятностью $P = 1$. $M[c] = c \cdot 1 = c$. Для непрерывной случайной величины

$$M[c] = \int_{-\infty}^{\infty} c \cdot f(x)dx = c \cdot \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = c.$$

– $M[cx] = cM[x]$. Обусловлено свойствами сумм и интегралов.

– $M\left[\overset{\circ}{x}\right] = 0$.

– $D[c] = 0$. Так как $D[c] = M\left[(c - m_c)^2\right] = M\left[(c - c)^2\right] = M[0] = 0$.

– $D[cx] = c^2 D[x]$. Действительно, $D[cx] = M\left[(cx - M[cx])^2\right] =$
$= M\left[c^2(x - m_x)^2\right] = c^2 M\left[(x - m_x)^2\right] = c^2 D[x]$.

Пример. Дискретная случайная величина задана рядом распределения

x_i	2	5	8
p_i	p_1	0,2	0,5

Найти значение вероятности p_1; числовые характеристики $M[X]$, $D[X]$, $\sigma[X]$; функцию распределения $F(x)$.

Решение. Так как $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$, то $p_1 + 0{,}2 + 0{,}5 = 1$, отсюда $p_1 = 0{,}3$.

Найдем математическое ожидание

$$M[X] = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i = 2 \cdot 0{,}3 + 5 \cdot 0{,}2 + 8 \cdot 0{,}5 = 5{,}6$$

Найдем дисперсию

$$D[X] = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i - [M[X]] = 4 \cdot 0{,}3 + 2{,}5 \cdot 0{,}2 + 64 \cdot 0{,}5 - (5{,}6)^2 = 6{,}8.$$

Определим среднее квадратическое отклонение

$$\sigma_x = \sqrt{D_x} = 2{,}6.$$

Для функции распределения $F(x)$ имеем:

$F(x)=0$, если $x \le 2$;

$F(x)=0{,}3$, если $2 < x \le 5$;

$F(x)=0{,}5$, если $5 < x \le 8$;

$F(x)=1$, если $x > 8$.

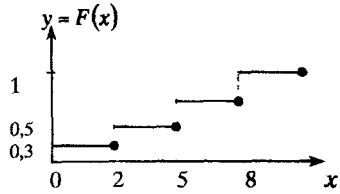


Рис. 2.4

2.1. КЛАССИЧЕСКИЕ ЗАКОНЫ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ И ИХ ЧИСЛОВЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ

Биноминальное распределение. Случайная величина X представляет собой число появлений события A в n независимых опытах и принимает целые неотрицательные значения. Вероятность появления события A m раз в n опытах определяется формулой Бернулли. Ряд распределения случайной величины X имеет вид $\left(P_n(m)=C_n^m p^m q^{n-m}\right)$:

x_i	0	1	2	...	n
P_i	$P_n(0)$	$P_n(1)$	$P_n(2)$		$P_n(n)$

,

где $\sum_{1}^{n} P_n(m)=1$.

Определим также функцию распределения $F(k)=\sum_{m=0}^{k} C_n^m p^m q^{n-m}$, при $k=n$, $F(n)=1$.

Для биноминального распределения $m_x = np$ и $D_x = npq$.

Пример. Производится 4 независимых испытания, в каждом из которых событие A появляется с вероятностью $p=0{,}4$. Рассматривается случайная величина X - число появлений события A в серии из четырех испытаний. Составить закон распределения вероятностей случайной величины X; найти функцию распределения вероятностей $F(x)$, математическое ожидание и дисперсию. Построить многоугольник распределения $P(x)$ и функцию распределения $F(x)$.

Решение. Дискретная случайная величина X может принимать значения: $x_1=0$, $x_2=1$, $x_3=2$, $x_4=3$, $x_5=4$.

Так как испытания независимы одно от другого и вероятности появления события A в каждом испытании одинаковы, то случайная величина X имеет биномиальное распределение. По условию имеем

$n=4$, $p=0{,}4$, $q=1-p=0{,}6$. Вероятность $P(X=m)$ вычисляются по формуле

$$P(X=m)=C_4^m p^m q^{4-m};\quad m=1,2,3,4.$$

Имеем: $P(X=0)=q^4=0{,}6^4=0{,}1296$;

$P(X=1)=C_4^1 p^1 q^3=4\cdot 0{,}4\cdot 0{,}6^3=0{,}3456$;

$P(X=2)=C_4^2 p^2 q^2=6\cdot 0{,}4^2\cdot 0{,}6^2=0{,}3456$;

$P(X=3)=C_4^3 p^3 q^1=4\cdot 0{,}4^3\cdot 0{,}6=0{,}1536$;

$P(X=4)=p^4=0{,}4^4=0{,}0256$.

Искомый закон распределения имеет вид

X	0	1	2	3	4
P	0,1296	0,3456	0,3456	0,1536	0,0256

и представлен на рисунке.

Построим функцию распределения $F(x)$ случайной величины X:

при $x\le 0$ имеем $F(x)=0$;

при $0<x\le 1$ имеем $F(x)=0{,}1296$;

при $1<x\le 2$ имеем $F(x)=0{,}1296+0{,}3456=0{,}4752$;

при $2<x\le 3$ имеем $F(x)=0{,}4752+0{,}3456=0{,}8208$;

при $3<x\le 4$ имеем $F(x)=0{,}8208+0{,}1536=0{,}9744$;

при $x>4$ имеем $F(x)=0{,}9744+0{,}0256=1$.

График функции распределения $F(x)$ представлен на рис. 2.6

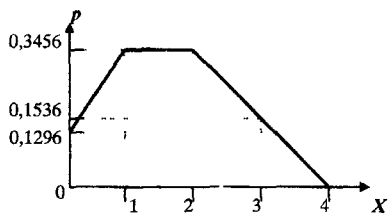


Рис. 2.5

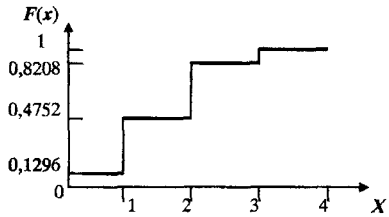


Рис. 2.6

Вычислим числовые характеристики случайной величины X:

$$M[X]=0\cdot 0{,}1296+1\cdot 0{,}3456+2\cdot 0{,}3456+3\cdot 0{,}1536+4\cdot 0{,}0256=1{,}6;$$

$$M(X)=0^2\cdot 0{,}1296+1^2\cdot 0{,}3456+2^2\cdot 0{,}3456+3^2\cdot 0{,}1536+4^2\cdot 0{,}0256=3{,}52;$$

$$D[X]=M(X^2)-[M[X]]^2=3{,}52-1{,}6^2=0{,}96.$$

Так как случайная величина X подчиняется биномиальному закону распределения, то ее математическое ожидание и дисперсия могут быть вычислены так:

$$M[X]=np=4\cdot 0{,}4=1{,}6;\quad D[X]=npq=4\cdot 0{,}4\cdot 0{,}6=0{,}96.$$

Распределение Пуассона. Дискретная случайная величина X принимает целые неотрицательные значения $1,2,3,\ldots,n$, где n достаточно большое число. Вероятность появления события в одном опыте P является достаточно малым числом. Однако $\lambda = np$ ограничено. Тогда случайная величина X распределена по закону Пуассона $P(m)=\frac{\lambda^m}{m!}e^{-\lambda}$, который определяет вероятность появления события A m раз в n опытах. Ряд распределения можно представить в виде

x_i	0	1	2	...	n
P_i	$P(0)$	$P(1)$	$P(2)$	...	$P(n)$

,

Функция распределения $F(m)=\sum_{m=0}^{k}\frac{\lambda^m}{m!}e^{-\lambda}$.

Выполняется $F(n)=\sum_{0}^{\infty}e^{-\lambda}\frac{\lambda^m}{m!}=e^{-\lambda}\sum_{0}^{\infty}\frac{\lambda^m}{m!}=e^{-\lambda}\cdot e^{\lambda}=1.$

Для распределения Пуассона $m_x=\lambda$ и $D_x=\lambda$.

Рассмотрим простейший поток событий, которые наступают в случайные моменты времени. Например, поступление сигналов вызова на автоматическую телефонную станцию. *Поток* называется *стационарным*, если вероятность появления k-событий за интервал времени t есть функция только k и t. Если события независимы, то поток обладает свойством отсутствия последействия. Если вероятность появления более одного события за малый промежуток времени значительно меньше вероятности появления только одного события, то поток обладает свойствами ординарности. *Простейшим (пуассоновским) потоком* называется поток событий, который обладает стационарностью, отсутствием последействий и ординарностью. *Интенсивностью потока a* называется среднее число событий, которые появляются в единицу времени $a=\lambda/t$, где $\lambda = np$. Если $\lambda = const$, то вероятность появления k событий за время t будет

$$P_t(k)=\frac{(at)^k}{k!}e^{-at}.$$

Пример. Среднее число вызовов, поступающих на АТС в одну минуту, равно 2. Найти вероятность, что за пять минут поступит 3 вызова.

Решение. По условию $a=2$, $t=5$, $k=3$. Тогда $\lambda = at = 10$.

$$P_5(3)=\frac{10^3}{3!}e^{-10}\cong 0{,}016.$$

Заметим, что вероятность поступления, допустим, 10 вызовов будет значительно больше: $P_5(10)=\frac{10^{10}}{10!}e^{-10}\cong 0{,}3$.

Геометрическое распределение. Пусть производятся независимые испытания, в каждом из которых событие наступает с вероятностью p $(p+q=1)$. Испытания заканчиваются, как только появится событие A. Если в $m-1$ опытах событие не появилось, а появилось в m опыте, то алгебра событий позволяет составить событие $B_m=\underbrace{\overline{A}\overline{A}\cdots\overline{A}}_{m-1}A$ (события несовместны). Вероятность этого события $P(B_m)=q^{m-1}\cdot p$.

Найдем вероятность появления события A не менее чем в m опытах, которая представляет собой геометрическую прогрессию. Для достаточно большого количества опытов ее можно считать бесконечно убывающей, тогда должно выполняться $\sum_1^{\infty}pq^{m-1}=\frac{p}{1-q}=1$. Легко показать, что $m_x=\frac{1}{p}$ и $D_x=\frac{q}{p^2}$.

Гипергеометрическое распределение. Пусть имеем N изделий, из которых M бракованных. Наугад извлекают изделия. Поскольку изделия обратно не возвращаются, то события, что изделие не бракованное, зависимы. Вероятность того, что среди случайно отобранных n изделий будет m бракованных, равна $P(m)=\frac{C_M^m\cdot C_{N-M}^{n-m}}{C_N^n}$.

Пример. В партии из 10 деталей имеется 7 стандартных. Наудачу отобраны 3 детали. Составить закон распределения вероятностей дискретной случайной величины X - числа стандартных деталей среди отобранных. Найти математическое ожидание и дисперсию, построить многоугольник распределения.

Решение. Случайная величина X - число стандартных деталей среди отобранных деталей - имеет гипергеометрическое распределение с параметрами $N=10$, $M=7$, $n=3$. Найдем вероятности возможных значений $x_1=0$, $x_2=1$, $x_3=2$, $x_4=3$ случайной величины X по формуле

$$P(m)=\frac{C_M^m \cdot C_{N-M}^{n-m}}{C_N^n},\ m=0,1,2,3.$$

Здесь N - число деталей в партии; M - число стандартных деталей в партии; n - число отобранных деталей; m - число стандартных деталей среди отобранных.

$$P(X=0)=\frac{C_7^0 \cdot C_3^3}{C_{10}^3}=\frac{1}{120};$$

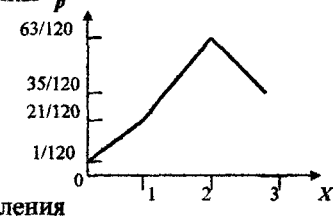
$$P(X=1)=\frac{C_7^1 \cdot C_3^2}{C_{10}^3}=\frac{7\cdot 3}{120}=\frac{21}{120};$$

$$P(X=2)=\frac{C_7^2 \cdot C_3^1}{C_{10}^3}=\frac{21\cdot 3}{120}=\frac{63}{120};$$

$$P(X=3)=\frac{C_7^3 \cdot C_3^0}{C_{10}^3}=\frac{35}{120}.$$

Ряд распределения случайной величины X имеет вид

x_i	0	1	2	3
P_i	$\frac{1}{120}$	$\frac{21}{120}$	$\frac{63}{120}$	$\frac{35}{120}$



Многоугольник P(x) распределения представлен на рис. 2.7

Рис. 2.7

Найдем математическое ожидание $M[X]$:

$$M[X]=0\cdot\frac{1}{120}+1\cdot\frac{21}{120}+2\cdot\frac{63}{120}+3\cdot\frac{35}{120}=\frac{252}{120}\cong 2{,}1.$$

Найдем $M(X^2)$: $M(X^2)=0\cdot\frac{1}{120}+1\cdot\frac{21}{120}+4\cdot\frac{63}{120}+9\cdot\frac{35}{120}=\frac{588}{120}\cong 4{,}9.$

Дисперсию найдем по формуле $D[X]=M(X^2)-[M[X]]^2$.

Имеем $D[X]=4{,}9-(2{,}1)^2=4{,}9-4{,}41=0{,}49.$

Тоже самое можно получить по формулам:

$$M[X]=\frac{M\cdot n}{N}=2{,}1;$$

$$D[X]=\frac{M\cdot n(N-M)(N-n)}{N^2\cdot(N-1)}=0{,}49.$$

Рассмотрим *типичные распределения* непрерывных случайных величин. К ним относятся *равномерное* распределение, *показательное* и *нормальное* распределения.

Пример. Непрерывная случайная величина X задана функцией распределения: $F(x)=\begin{cases}0 & \text{при } x<2;\\ (x-2)^2 & \text{при } 2\le x\le 3;\\ 1 & \text{при } x>3.\end{cases}$

Найти функцию плотности $f(x)$ и числовые характеристики $M[X]$, $D[X]$, $\sigma[X]$. Вычислить вероятности попадания случайной величины X в интервалы $(1;2,5)$ и $(2,5;3,5)$.

Решение. Найдем плотность распределения:

$$f(x)=F'(x)=\begin{cases}0 & \text{при } x<2;\\ 2(x-2) & \text{при } 2\le x\le 3;\\ 0 & \text{при } x>3.\end{cases}$$

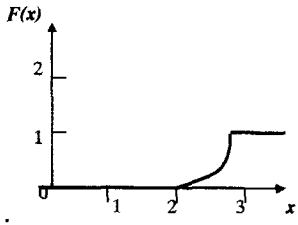


Рис. 2.8

Найдем математическое ожидание

$$M[X]=\int_{-\infty}^{\infty}xf(x)dx=2\int_{2}^{3}x(x-2)dx=2\left[\frac{x^3}{3}-x^2\right]_2^3=\frac{8}{3}.$$

Найдем дисперсию и среднее квадратическое отклонение

$$D[X]=\int_{-\infty}^{\infty}x^2f(x)dx-[M[X]]^2=2\int_{2}^{3}x^2(x-2)dx-\frac{64}{9}=$$

$$=2\left[\frac{x^4}{4}-\frac{2x^3}{3}\right]_2^3-\frac{64}{9}=\frac{43}{6}-\frac{64}{9}=\frac{1}{18}$$

$$\sigma[X]=\sqrt{D[X]}\approx 0{,}23.$$

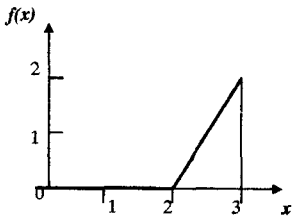


Рис. 2.9

Используя формулу

$$P(a<X<b)=F(b)-F(a),$$

найдем вероятность попадания X в заданные интервалы:

$$P_1=F(2,5)-F(1)=(2,5-2)^2-0=0,25;$$

$$P_2=F(3,5)-F(2,5)=1-(2,5-2)^2=1-0,25=0,75.$$

Равномерное распределение (закон равномерной плотности). В некоторых задачах в пределах некоторого интервала все значения случайной величины равновероятны

$$f(x)=\begin{cases} c, & \alpha \le x \le \beta \\ 0, & x<\alpha, x>\beta \end{cases}$$

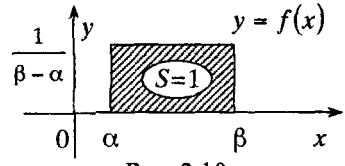


Рис. 2.10

Определим C из условия нормировки

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1, \quad C = \frac{1}{\beta - \alpha}.$$

Тогда функция распределения будет иметь вид

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)dx = \frac{x-\alpha}{\beta-\alpha}.$$

Вероятность попадания X в интервал $[a,b]$

$$P(a \le x \le b) = \frac{b-a}{\beta-\alpha}.$$

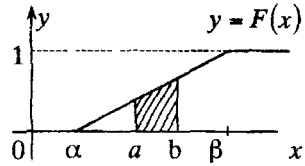


Рис. 2.11

Определим основные моменты, характеризующие это распределение:

$$m_x = \frac{1}{\beta-\alpha}\int_{\alpha}^{\beta} x dx = \frac{\beta+\alpha}{2},$$

$$D_x = \frac{1}{\beta-\alpha}\int_{\alpha}^{\beta} x^2 dx - \left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)^2 = \frac{\beta^2+\alpha\beta+\alpha^2}{3} - \frac{\beta^2+2\alpha\beta+\alpha^2}{4} = \frac{(\beta-\alpha)^2}{12}.$$

Таким образом, для равномерного распределения $m_x = \frac{\alpha+\beta}{2}$ и $D_x = \frac{(\beta-\alpha)^2}{12}$.

Показательное распределение имеет большое приложение в теории массового обслуживания, теории информации, физике, биологии и т. д. Многие явления природы описываются показательным законом распределения, который определяет процессы релаксации, затухания или раскачки и другие переходные процессы.

Плотность распределения показательного закона задается следующим образом: $f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & \text{при } x \ge 0 \\ 0, & \text{при } x < 0 \end{cases}$

Функция распределения

$$F(x) = \lambda \int e^{-\lambda x} dx = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x}, & \text{при } x \ge 0 \\ 0, & \text{при } x < 0 \end{cases}$$

Вероятность попадания случайной величины в интервал $[a,b]$ находится по формуле

$$P(a \le x \le b) = F(b) - F(a) = e^{-\lambda a} - e^{-\lambda b}.$$

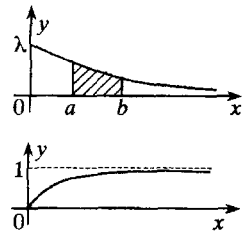


Рис. 2.12

Определим основные характеристики показательного распределения

$$m_x = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx = \lambda \int_0^{\infty} xe^{-\lambda x}dx = \frac{1}{\lambda}.$$

$$D_x = \int_{-\infty}^{\infty} (x - m_x)^2 f(x)dx = \lambda \int_0^{\infty} x^2 e^{-\lambda x}dx - \frac{1}{\lambda^2} = \frac{2}{\lambda^2} - \frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{\lambda^2}.$$

Таким образом, для показательного закона распределения $m_x = \frac{1}{\lambda}$, $D_x = \frac{1}{\lambda^2}$.

Пример. Время работы радиолампы t – случайная величина, которая распределена по показательному закону. Определить вероятность того, что лампа проработает не менее 600 часов, если средняя продолжительности ее работы равна 400 часам.

Решение. По условию $\lambda = \frac{1}{m_x} = \frac{1}{400}$. Тогда

$$P(600 \le t < \infty) = \lambda \int_{600}^{\infty} e^{-\lambda t}dt = -e^{-\frac{t}{400}}\Big|_{600}^{\infty} = e^{-\frac{3}{2}} \approx 0{,}22.$$

Нормальное распределение (закон Гаусса) играет исключительную роль в теории вероятностей, так как является предельным для всех остальных законов распределения. Нормальный закон распределения широко применяется для описания природных явлений и играет фундаментальную роль в понимании существа этих явлений.

Плотность распределения нормального закона распределения задается $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}$.

Функция распределения

$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}} dx.$$

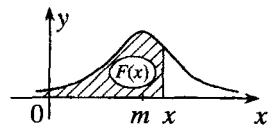


Рис. 2.13

Здесь $M[X] = m$ и $D[X] = \sigma^2$.

Пример. Непрерывная случайная величина X распределена по нормальному закону с математическим ожиданием $m = 10$ и средним квадратическим отклонением $\sigma = 2$. Найти вероятность попадания случайной величины в интервал $[8;14]$.

Решение. Нормальный закон распределения характеризуется плотностью $f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}$.

Вероятность того, что X примет значение, принадлежащее интервалу (a,b), определяется по формуле

$$P(a<X<b)=\Phi\left(\frac{b-m}{\sigma}\right)-\Phi\left(\frac{a-m}{\sigma}\right),$$

где $\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x e^{-\frac{z^2}{2}}dz$ - функция Лапласа. Для вычисления значений функции Лапласа пользуются специальной таблицей.

В условиях задачи имеем

$$P(8<X<14)=\Phi\left(\frac{14-10}{2}\right)-\Phi\left(\frac{8-10}{2}\right)=\Phi(2)-\Phi(-1)=\Phi(2)+\Phi(1)=$$
$$=0{,}4772+0{,}3413=0{,}8185.$$

Правило "3 сигм". Вычислим вероятность попадания случайной величины в интервалы:

$P(m\le x<m+\sigma)=\Phi(1)-\Phi(0)=0{,}341;$

$P(m+\sigma\le x<m+2\sigma)=\Phi(2)-\Phi(1)=0{,}136;$

$P(m+2\sigma\le x<m+3\sigma)=\Phi(3)-\Phi(2)=0{,}021;$

$P(m+3\sigma\le x<\infty)=\Phi(\infty)-\Phi(3)=0{,}002.$

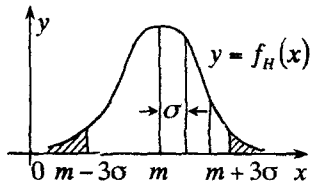


Рис. 2.14

Тогда

$P(m\le x<\infty)=0{,}341+0{,}136+0{,}021+0{,}002=0{,}5$

и $P(-\infty<x<\infty)=1$. Видно, что все значения случайной величины с точностью 10^{-3} укладываются в интервал 3σ, т. е. в $m-3\sigma\le x\le m+3\sigma$. На остальные значения приходится всего 0,3% распределения.

Пример. По шоссе шириной 20 м ведется стрельба в направлении, перпендикулярном шоссе. Прицеливание производится по середине шоссе. Среднеквадратичное отклонение в направлении стрельбы для данной дальности задано $\sigma=8$ м. Имеется систематическая ошибка (недолет) в 3 м. Найти вероятность попадания в шоссе при одном выстреле.

Решение. По условию задачи $m=-3$ и $\sigma=8$. Тогда $3\sigma=24$. Вероятность попадания в шоссе определится

$$P(-10 \le x \le 10) = \Phi\left(\frac{10+3}{8}\right) - \Phi\left(\frac{-10+3}{8}\right) = \Phi(1{,}65) + \Phi(0{,}87) = 0{,}75.$$

2.2. СИСТЕМА СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

На практике повсеместно сталкиваются с задачами, в которых результаты опытов описываются не одной, а двумя и более случайными величинами, образующими систему случайных величин. Например, точка попадания пули в мишень характеризуется координатами X и Y, тогда как точка попадания зенитного снаряда в самолет характеризуется уже тремя координатами X, Y, Z. Свойства системы нескольких случайных величин не исчерпываются свойствами отдельных случайных величин, а включают также взаимные связи случайных величин между собой. Так, например, если "характеризовать" человека только двумя случайными величинами – ростом и весом, то, как мы наблюдаем, существует так называемая корреляционная зависимость между этими величинами. Как правило, если человек выше ростом, то он и тяжелее, и наоборот.

Обозначаются случайные величины как X, Y, Z, ... Ограничимся рассмотрением системы только двух переменных, поскольку обобщение на их большее число не представляет особых трудностей.

Основные формы законов распределения двухмерной случайной величины.

1. Двухмерный ряд распределения для дискретной случайной величины. Оформляется в виде таблицы. Пусть X принимает $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$, и Y принимает значения $y_1, y_2, y_3, \ldots, y_m$ с вероятностями $P(x_i, y_j) = P_{ij}$, причем должно выполняться

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} P_{ij} = 1.$$

Y \ X	x_1	x_2	...	x_n
y_1	P_{11}	P_{21}		P_{n1}
y_2	P_{12}	P_{22}		P_{n2}
⋮			P_{ij}	⋮
y_m	P_{1m}	P_{2m}	...	P_{nm}

2. Функция распределения системы двух случайных величин применяется для описания как дискретных, так и непрерывных случайных величин. *Функцией распределения системы* (X, Y) называют вероятность совместного

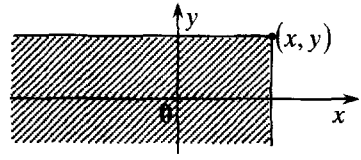


Рис. 2.15

выполнения неравенств $X < x$, $Y < y$: $F(x,y) = P(X < x, Y < y)$. Функция распределения допускает простую геометрическую интерпретацию, как вероятность попасть в прямоугольник левее и ниже точки (x,y).

Свойства функции распределения:

– $F(x,y)$ неубывающая функция обоих аргументов, $F(x_2,y) > F(x_1,y)$ при $x_2 > x_1$, $F(x,y_2) > F(x,y_1)$ при $y_2 > y_1$;

– $F(x,-\infty) = F(-\infty,y) = 0$ (невозможные события);

– $F(x,\infty) = F_1(x)$ одномерная функция x;

– $F(\infty,y) = F_2(y)$ одномерная функция y;

– $F(\infty,\infty) = 1$;

– $0 \le F(x,y) \le 1$;

– вероятность попадания случайной величины (x,y) в заданный прямоугольник $(x,y) \in R$:

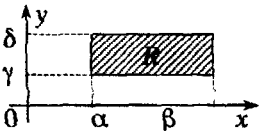


Рис. 2.16

$$P((x,y) \in R) = F(\beta,\delta) - F(\alpha,\delta) - F(\beta,\gamma) + F(\alpha,\gamma)$$

3. Плотность распределения системы случайных величин. Для непрерывных случайных величин можно ввести дифференциальную функцию распределения $f(x,y) = \dfrac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x \partial y}$. Тогда элемент вероятности dp можно представить как некоторый объем $dp = f(x,y)\,dx\,dy$. Вероятность попасть в область D определяется $P((x,y) \subset D) = \iint\limits_{(D)} f(x,y)\,dx\,dy$. Легко увидеть связь между $F(x,y)$ и $f(x,y)$:

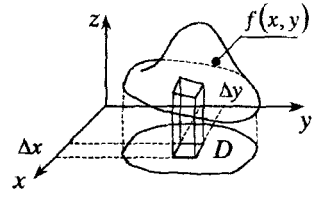


Рис. 2.17

$$F(x,y) = \int\limits_{-\infty}^{x} \int\limits_{-\infty}^{y} f(x,y)\,dx\,dy.$$

Свойства плотности распределения:

– $f(x,y) \ge 0$ для всех x и y;

$$-\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dxdy = 1.$$

Рассмотрим распределение отдельных случайных величин, входящих в систему. По свойству $F(x,y)$: $F(x,\infty) = F_1(x)$, $F(\infty,y) = F_2(y)$, следует

$$F_1(x) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{x} f(x,y)dydx \quad \text{и} \quad F_2(y) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{y} f(x,y)dxdy.$$

Плотность распределения одномерных случайных величин, входящих в систему, определится

$$f_1(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dy \quad \text{и} \quad f_2(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dx.$$

Следовательно, чтобы получить плотность распределения одной из случайных величин, входящих в систему, *необходимо проинтегрировать* плотность распределения системы по другой случайной величине.

Условный закон распределения случайной величины Y при определенном значении X.

$$f(y/x) = \frac{f(x,y)}{f_1(x)} = \frac{f(x,y)}{\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dy}.$$

Аналогично

$$f(x/y) = \frac{f(x,y)}{f_2(y)} = \frac{f(x,y)}{\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dx}.$$

Таким образом, получили закон умножения законов распределений:

$$f(x,y) = f_1(x)\cdot f(y/x) = f_2(y)\cdot f(x/y).$$

Случайная величина Y называется *независимой* от случайной величины X, если закон распределения ее не зависит от того, какие значения примет случайная величина X. Для того чтобы случайная величина Y не зависела от случайной величины X, необходимо и достаточно выполнения условия $F(x,y) = F_1(x)\cdot F_2(y)$ или $f(x,y) = f_1(x)\cdot f_2(y)$. То есть должно выполняться $f_1(x) = f(x/y)$ и $f_2(y) = f(y/x)$.

Например, для двухмерного распределения Коши

$$f(x,y) = \frac{1}{\pi^2}\cdot\frac{1}{x^2\cdot y^2 + x^2 + y^2 + 1} = \left(\frac{1}{\pi(x^2+1)}\right)\cdot\left(\frac{1}{\pi(y^2+1)}\right) = f_1(x)\cdot f_2(y).$$

Зависимости случайных величин бывают двух типов – функциональные $(y = f(x))$ и стохастические (вероятностные). Если связь стохастическая, то можно указать закон распределения случайной величины Y в зависимости от того, какое значение приобретает случайная величина X. Вероятностные связи могут быть более или менее тесными. Тесные связи характеризуются большой вероятностью совместного появления случайных величин. Те физические величины, которые на практике мы считаем функционально зависимыми (например, закон Ома $U = R \cdot J$), в действительности связаны весьма тесной стохастической связью, т.е. при определенном значении одной из них, значения другой колеблются столь мало, что этими колебаниями пренебрегают.

Определим меру зависимости случайных величин, которая определяет тесноту связи. Для этого введем числовые характеристики системы случайных величин.

Начальным моментом порядков k, s системы двух случайных величин (X,Y) называют математическое ожидание произведения x^k на y^s:

$$\alpha_{k,s} = M\left[x^k \cdot y^s\right] = \begin{cases} \sum_{i,j} P_{ij} x_i^k y_j^s & - \text{для дискретных } x, y; \\ \int_{-\infty}^{\infty}\int x^k y^s f(x,y)dxdy & - \text{для непрерывных } x, y. \end{cases}$$

Центральным моментом порядков k, s для системы (X,Y) называют математическое ожидание произведение центрированных случайных величин X и Y в степенях k и s соответственно.

$$\mu_{k,s} = M\left[\overset{o}{X}^k \cdot \overset{o}{Y}^s\right] = \begin{cases} \sum_{i,j} P_{ij}(x_i - m_x)(y_j - m_y) & - \text{для дискретных } x, y; \\ \int_{-\infty}^{\infty}\int (x - m_x)(y - m_y) f(x,y)dxdy & - \text{для непрерывных } x, y. \end{cases}$$

На практике применяют, в основном, следующие характеристики $\alpha_{10} = m_x$ и $\alpha_{01} = m_y$, определяющие среднее положение системы (X,Y) на плоскости. $\mu_{20} = D_x$ и $\mu_{02} = D_y$, определяющие разброс относительно этого положения.

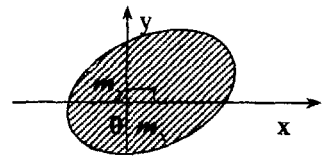


Рис. 2.18

Особую роль играет второй (центральный)

смешанный момент. Он называется *ковариацией* двух случайных величин. Еще его называют *корреляционным моментом* K_{xy} или *моментом* связи

$$\mu_{1,1} = M\left[\overset{0}{X}\cdot\overset{0}{Y}\right] = Cov[X,Y] = K_{xy}$$

и определяется как

$$K_{xy} = \sum_{i,j}(x_i - m_x)(y_j - m_y)P_{ij} \quad \text{– для дискретных } x, y;$$

$$K_{xy} = \int_{-\infty}^{\infty}\int(x - m_x)(y - m_y)f(x,y)dxdy \text{ – для непрерывных } x, y.$$

Отсюда легко получить удобную для расчетов K_{xy} формулу

$$K_{xy} = \alpha_{11} - \alpha_{10}\cdot\alpha_{01} \quad \text{или} \quad K_{xy} = M[X\cdot Y] - M[X]\cdot M[Y].$$

Покажем, что для независимых случайных величин корреляционный момент равен нулю. Действительно, если $f(x,y) = f_1(x)\cdot f_2(y)$, то

$$K_{xy} = \int_{-\infty}^{\infty}(x - m_x)f_1(x)dx\int_{-\infty}^{\infty}(y - m_y)f_2(y)dy = (m_x - m_x)(m_y - m_y) = 0.$$

Таким образом, если $K_{xy} = 0$, то с необходимостью следует, что x и y независимы. Однако более общим утверждением является, что независимые случайные величины всегда некоррелированы.

Величина корреляционного момента не совсем удобна для количественной оценки тесноты связи, так как содержит информацию о рассеянии самих случайных величин. Поэтому удобно ввести *коэффициент корреляции* $r = \dfrac{K_{xy}}{\sigma_x\sigma_y}$, который отражает только связь X и Y. Для функциональной связи $r = \pm 1$, а для стохастической $|r| < 1$. Если случайные величины независимы, то $r = 0$.

Отметим, что коэффициент корреляции характеризует только линейную зависимость случайных величин.

2.3. ТЕОРЕМЫ О ЧИСЛОВЫХ ХАРАКТЕРИСТИКАХ СИСТЕМЫ ДВУХ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

Итак, зная числовые характеристики отдельных случайных величин, необходимо найти числовые характеристики композиций этих случайных величин.

Теорема 1. Математическое ожидание суммы случайных величин равна сумме их математических ожиданий. $M[X+Y] = M[X] + M[Y]$. Покажем на примере непрерывных случайных величин:

$$M[X+Y]=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}(x+y)f(x,y)dxdy=\int_{-\infty}^{\infty}xf_1(x)dx+\int_{-\infty}^{\infty}yf_2(y)dy=m_x+m_y.$$

Теорема 2. Дисперсия суммы двух случайных величин равна сумме их дисперсий и удвоенного корреляционного момента этих величин. $D[X+Y]=D[X]+D[Y]+2K_{xy}$.

Докажем это. Обозначим $Z=X+Y$. Используя теорему 1 получим $m_z=m_x+m_y$. Центрируем случайные величины $Z-m_z=X-m_x+Y-m_y$.

Тогда

$$D[X+Y]=M\left[\overset{0}{Z}^2\right]=M\left[\overset{0}{X}^2\right]+2M\left[\overset{0}{X}\cdot\overset{0}{Y}\right]+M\left[\overset{0}{Y}^2\right]=D[X]+D[Y]+2K_{xy}.$$

Для независимых X и Y $D[X+Y]=D[X]+D[Y]$.

Теорема 3 Математическое ожидание произведения двух случайных величин равно сумме произведения их математических ожиданий и их корреляционного момента. $M[XY]=M[X]M[Y]+K_{xy}$.

Действительно, $K_{xy}=M\left[\overset{0}{X}\cdot\overset{0}{Y}\right]=M[(x-m_x)(y-m_y)]=M[XY]-m_xm_y$.

Отсюда $M[XY]=M[X]M[Y]+K_{xy}$.

Для независимых случайных величин $M[X\cdot Y]=M[X]\cdot M[Y]$.

Теорема 4 Дисперсия произведения независимых центрированных случайных величин равна произведению их дисперсий: $D\left[\overset{0}{X}\cdot\overset{0}{Y}\right]=D[X]\cdot D[Y]$.

Действительно, для $Z=\overset{0}{X}\cdot\overset{0}{Y}$ в силу теоремы 3 получаем $m_z=M\left[\overset{0}{X}\right]\cdot M\left[\overset{0}{Y}\right]=0$, так как $M\left[\overset{0}{X}\right]=m_x-m_x=0$. Тогда следует

$$D\left[\overset{0}{X}\cdot\overset{0}{Y}\right]=M\left[\overset{0}{X}^2\cdot\overset{0}{Y}^2\right]=M\left[\overset{0}{X}^2\right]\cdot+M\left[\overset{0}{Y}^2\right]=D[X]\cdot D[Y],$$

что и требовалось доказать.

Пример. Случайные величины X и Y независимы. Найти математическое ожидание $M(Z)$ и дисперсию $D(Z)$ случайной величины $Z=5X+8Y-4$, если $M[X]=1$, $M[Y]=2$, $D[X]=4$, $D[Y]=1$.

Решение Для независимых случайных величин имеем:

$$M[X+Y]=M[X]+M[Y];\quad M[X\cdot Y]=M[X]\cdot M[Y];$$

$$D[X+Y]=D[X]+D[Y];\quad D[X\cdot Y]=D[X]\cdot D[Y];$$

кроме того, $M(c)=c$, $D(c)=0$, $D(cX)=c^2D[X]$, где $c-const$. Тогда

$$M(Z)=5M[X]+8M[Y]-4=5+16-4=17;$$

$$D(Z)=25D[X]+64D[Y]=100+64=164;$$

$$\sigma(Z)=\sqrt{D(Z)}\cong 12{,}8.$$

2.4. НОРМАЛЬНЫЙ ЗАКОН НА ПЛОСКОСТИ

Нормальный закон распределения двух случайный величин x и y имеет вид

$$f(x,y)=\frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_y\sqrt{1-r^2}}e^{-\frac{1}{2(1-r^2)}\left\{\frac{(x-m_x)^2}{\sigma_x^2}-2r\frac{(x-m_x)(y-m_y)}{\sigma_x\sigma_y}+\frac{(y-m_y)^2}{\sigma_y^2}\right\}}.$$

Плотность распределения $f(x,y)$ полностью описывается 5 параметрами m_x, m_y, σ_x, σ_y и r. Видно, что при $r=0$, случайные величины становятся независимыми:

$$f(x,y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_x}e^{-\frac{(x-m_x)^2}{2\sigma_x^2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_y}e^{-\frac{(y-m_y)^2}{2\sigma_y^2}}=f_1(x)\cdot f_2(y)$$

Используя интеграл Пуассона, $\int_{-\infty}^{\infty}e^{-Au^2+2Bu-C}du=\sqrt{\frac{\pi}{A}}e^{-\frac{AC-B^2}{A}}$ легко получить одномерные плотности распределений $f_1(x)=\frac{e^{-\frac{(x-m_x)^2}{2\sigma_x^2}}}{\sqrt{2\pi}\sigma_y}$ и $f_2(y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_y}e^{-\frac{(y-m_y)^2}{2\sigma_y^2}}$, которые совпадают с определением нормального закона для одной случайной величины. Можно так же получить корреляционный момент, и он определится как $K_{xy}=r\sigma_x\sigma_y$.

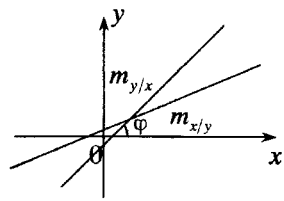


Рис. 2.19

Найдем вероятность попадания системы случайных величин (X,Y), распределенных по нормальному закону, и независимых, в некоторый заданный *прямоугольник* R. Итак, $r=0$ и $f(x,y)=f_1(x)\cdot f_2(y)$, тогда

$$P(a<x<b, c<y<d) = \int_a^b f_1(x)dx \int_c^d f_2(y)dy,$$

$$P((x,y)\in R) = \left[\Phi\left(\frac{b-m_x}{\sigma_x}\right) - \Phi\left(\frac{a-m_x}{\sigma_x}\right)\right] \cdot \left[\Phi\left(\frac{d-m_y}{\sigma_y}\right) - \Phi\left(\frac{c-m_y}{\sigma_y}\right)\right].$$

Найдем так же вероятность попадания (X,Y) в эллипс R: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. Пусть для простоты $m_x = m_y = 0$. Выразим параметры эллипса через среднеквадратичные отклонения: $a = k\sigma_x$ и $b = k\sigma_y$, где k-коэффициент пропорциональности. Сделаем замену переменных $\frac{x}{\sigma_x} = u$, $\frac{y}{\sigma_y} = v$.

Тогда

$$P((x,y)\in R) = \frac{1}{2\pi}\iint_{(D)} e^{-(u^2+v^2)/2} du dv = \left\{\begin{matrix} u = r\cos\varphi \\ v = r\sin\varphi \end{matrix}\right\} =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^k e^{-r^2/2} r dr = e^{-r^2/2}\Big|_0^k = 1 - e^{-k^2/2}.$$

Таким образом, $P((x,y)\in R) = 1 - e^{-k^2/2}$, где $k = \frac{a}{\sigma_x} = \frac{b}{\sigma_y}$.

При $\sigma_x = \sigma_y = \sigma$ (попадание в круг), $k = \frac{R}{\sigma}$.

Одномерная функция распределения определится $F(R) = P((x,y)\in R) = 1 - e^{-k^2/2} = 1 - e^{-R^2/2\sigma^2}$ и плотность распределения $f(R) = F'(R) = \frac{R}{\sigma} e^{-\frac{R^2}{2\sigma^2}}$ – представляет собой закон Рэлея, который описывает движение любой точки корабля во время волнения на море (закон корабельной качки).

Пример. Сделаны три выстрела в цель с разбросом снаряда $\sigma_x = \sigma_y = 3$ м без систематической ошибки $(m_x = 0,\ m_y = 0)$. Цель представляет из себя фигуру, изображенную на рис. 2.20, где $\ell = 3{,}6$ м, а $R = 1{,}5$ м. Найти вероятность хотя бы одного попадания, если ошибки попадания распределены по нормальному закону.

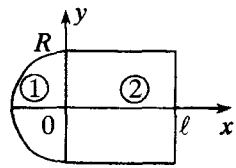


Рис. 2.20

Решение. Прежде всего найдем вероятность одного

попадания в данную фигуру. Саму фигуру удобно представить в виде суммы полукруга и прямоугольника. Тогда вероятность $P = P_1 + P_2$, где

$$P_1 = \frac{1}{2}P(r < 1{,}5) = \frac{1}{2}\left(1 - e^{-R^2/2\sigma^2}\right) \approx 0{,}05,$$

$$P_2 = \left[\Phi\left(\frac{3{,}6}{3}\right) - \Phi(0)\right] \cdot \left[\Phi\left(\frac{1{,}5}{3}\right) - \Phi\left(-\frac{1{,}5}{3}\right)\right] = \Phi(1{,}2) \cdot \Phi(0{,}5) \approx 0{,}15.$$

Получаем $P = 0{,}2$ и $q = 0{,}8$. Вероятность хотя бы одного попадания при трех выстрелах $P_3(\geq 1) = 1 - q^3 \approx 0{,}5$.

2.5. ЗАКОН БОЛЬШИХ ЧИСЕЛ

Устойчивость средних характеристик и составляет закон больших чисел. Суть его заключается в следующем: при очень большом числе случайных явлений средний их результат практически перестает быть случайным и может быть предсказан с большой степенью точности.

Неравенство Чебышева (лемма). Пусть имеется случайная величина X с характеристиками m_x и D_x. Каково бы ни было $\varepsilon > 0$, вероятность того, что случайная величина X отклонится от своего математического ожидания не меньше чем на ε ограничено сверху величиной $\dfrac{D_x}{\varepsilon^2}$,

$$P(|x - m_x| \geq \varepsilon) \leq \frac{D_x}{\varepsilon^2}.$$

Действительно, допустим для непрерывной случайной величины X распределенной по закону $f(x)$, следует

$$P(|x - m_x| \geq \varepsilon) = \int_{m_x - \varepsilon}^{m_x + \varepsilon} f(x)dx.$$

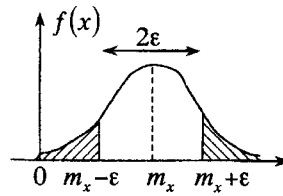


Рис. 2.21

Рассмотрим определение дисперсии:

$$D_x = \int_{-\infty}^{\infty}(x - m_x)^2 f(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty}|x - m_x|^2 f(x)dx \geq$$

$$\geq \varepsilon^2 \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx \geq \varepsilon^2\left(\int_{m_x+\varepsilon}^{\infty} f(x)dx + \int_{-\infty}^{m_x-\varepsilon} f(x)dx\right) = \varepsilon^2 \cdot \int_{|x-m_x|>\varepsilon} f(x)dx.$$

Отсюда непосредственно следует: $\int\limits_{|x-m_x|>\varepsilon} f(x)dx \le \frac{D_x}{\varepsilon^2}$ или $P\left(|x-m_x| \ge \varepsilon\right) \le \frac{D_x}{\varepsilon^2}$. Переходим к противоположному событию $P\left(|x-m_x| \le \varepsilon\right) \ge 1-\frac{D_x}{\varepsilon^2}$, что и требовалось показать.

Заметим, что неравенство Чебышева имеет большое теоретическое значение, так как позволяет достаточно просто доказать целый ряд теорем закона больших чисел. С другой стороны, неравенство Чебышева не имеет большого практического приложения, поскольку точность оценок, сделанных на основе его применения, невелика. Например, оценим вероятность отклонения случайной величины, распределенной по нормальному закону, на $3\sigma_x$ от m_x. Неравенство Чебышева дает $P\left(|x-m_x| \ge 3\varepsilon\right) \le \frac{D_x}{9\sigma_x^2} = 0{,}1$, тогда как на самом деле $P\left(|x-m_x| > \sigma_x\right) = \Phi(3) - \Phi(0) = 0{,}003$. Таким образом, неравенство Чебышева дает только грубую оценку.

Пусть производится n независимых опытов в равных условиях. В результате этих опытов случайная величина X принимает различные значения $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$. Предположим, что все x_i распределены по одному закону распределения $M[x_i] = m_x$ и $D[x_i] = D_x$, $i = \overline{1,n}$. Введем новую случайную величину $Y = \frac{1}{n}\sum\limits_1^n x_i$ и получим ее математическое ожидание и дисперсию:

$$m_y = M[Y] = M\left[\frac{1}{n}\sum_1^n x_i\right] = \frac{1}{n}\sum_1^n M[x_i] = \frac{nm_x}{n} = m_x;$$

$$D_y = D[Y] = D\left[\frac{1}{n}\sum_1^n x_i\right] = \frac{1}{n^2}\sum_1^n D[x_i] = \frac{nD_x}{n^2} = \frac{D_x}{n}.$$

Видно, что при $n \to \infty$, $D_y \to 0$, то есть случайная величина Y уже не является случайной. Чем больше будет опытов, тем точнее можно определить значение Y, $M[Y] = m_x$.

Теорема Чебышева. При достаточно большом числе независимых опытов среднее арифметическое наблюдаемых значений случайной величины сходится по вероятности к ее математическому ожиданию

$$Y \xrightarrow{P} m_x \text{ или } P = \left(\left|\sum_1^n x_i/n - m_x\right| \le \varepsilon\right) > 1-\delta,\ \varepsilon > 0,\ \delta > 0.$$

Доказательство Применим неравенство Чебышева:

$$P\left(\left|Y - m_y\right| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{D_y}{\varepsilon^2} \text{ следует } P = \left(\left|\sum_1^n x_i/n - m_x\right| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{D_x}{n\varepsilon^2} = \delta .$$

Каково бы не было число ε, всегда найдется число n, которое дает $\delta = \frac{D_x}{n\varepsilon^2} << 1$, где значение D_x ограничено. Таким образом, $P = \left(\left|\sum_1^n x_i/n - m_x\right| \leq \varepsilon\right) > 1 - \delta$, что и требовалось доказать.

Теорема Бернулли. При неограниченном увеличении числа независимых опытов частота события A сходится по вероятности к его вероятности $P(A) = P$ в отдельном опыте.

Используя неравенство Чебышева, получаем

$$P\left(\left|P^* - P(A)\right| < \varepsilon\right) > 1 - \frac{D_x}{\varepsilon^2 n} \to 1 \text{ для } n \to \infty .$$

Примеры.

1. Стрелок стреляет в мишень 3 раза, причем вероятность его попадания в мишень при каждом выстреле равна 2/3. Оценить вероятность попадания в мишень от 185 до 215 раз $\left(P^* = \sum_1^n x_i/n\right)$.

Решение. $m_p = 2/3$, $\varepsilon = 15/300 = 0{,}05$. Тогда $D_x = P \cdot q = 1/3 \cdot 2/3 = 2/9$ и

$$P\left(\left|\sum_1^{300} x_i/300 - \frac{2}{3}\right| < 0{,}05\right) > 1 - \frac{2 \cdot 300^2}{9 \cdot 300 \cdot 15^2} \approx 1 - 0{,}3 = 0{,}7 .$$

2. Прибор состоит из 20 независимо работающих блок-схем. Вероятность отказа каждой блок-схемы за время t равна 0,05. С помощью неравенства Чебышева оценить вероятность того, что отклонение числа отказавших блок-схем от среднего числа отказов за время t окажется меньше двух.

Решение. Обозначим через X дискретную случайную величину - число отказавших блок-схем за время t. Тогда

$$M[X] = np = 20 \cdot 0{,}05 = 1,$$
$$D[X] = npq = 20 \cdot 0{,}05 \cdot 0{,}95 = 0{,}95 .$$

Воспользуемся неравенством Чебышева:

$$P\left(\left|X - M[X]\right| < \varepsilon\right) > 1 - \frac{D[X]}{\varepsilon^2 n} .$$

Подставим $M[X]=1$, $D[X]=0{,}95$, $\varepsilon=2$, $n=20$, получим

$$P(|X-1<2|)>1-\frac{0{,}95}{20\cdot 4} \quad \text{или} \quad P(|X-1|<2)>0{,}988.$$

2.6. ЦЕНТРАЛЬНАЯ ПРЕДЕЛЬНАЯ ТЕОРЕМА

В законе больших чисел мы рассматривали предельные значения самих случайных величин. Теперь рассмотрим предельные законы законов распределения случайных величин. Основная идея продельной теоремы состоит в том, что при суммировании достаточно большого числа случайных величин распределение суммы случайных величин стремится к нормальному закону. И чем больше членов в сумме, тем точнее она будет описываться нормальным законом распределения. При этом не играет роли, как распределены сами члены суммы. Перечислим требования, предъявляемые к сумме случайных величин: во-первых, члены суммы должны быть одного порядка малости (равномерно малыми) и, во-вторых, сумма должна состоять из достаточно большого числа слагаемых $(n \geq 20)$. Отметим, что центральная предельная теорема на самом деле – это целый комплекс теорем для различных условий опыта. Приведем самую простую из них.

Теорема. Если $X_1, X_2, X_3, \ldots, X_n$ – независимые случайные величины, имеющие один и тот же закон распределения с математическим ожиданием m и дисперсией σ^2, то при неограниченном возрастании числа случайных величин n, закон распределения их суммы $Y=\sum_1^n x_i$ с $m_y=nm$ и $D_y=nD$ $\left(\sigma_y=\sqrt{n}\sigma\right)$ неограниченно приближается к нормальному

$$f(y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_y}e^{-\frac{(y-m_y)^2}{2\sigma_y^2}}.$$

и вероятность того, что случайная величина Y попадет в интервал (α,β) будет приближенно равна

$$P(\alpha<Y<\beta)\cong\Phi\left(\frac{\beta-m_y}{\sigma_y}\right)-\Phi\left(\frac{\alpha-m_y}{\sigma_y}\right),$$

где $m_y=nm$ и $\sigma_y=\sqrt{n}\sigma$.

Отметим, что частным случаем центральной предельной теоремы является нелокальная теорема Моавра-Лапласса $m_y = nP$, $D_y = nPq$, $\left(\sigma_y = \sqrt{nPq}\right)$ $P_n(m) = = C_n^m P^m q^{n-m}$.

Вероятность попадания Y в (α, β): $P(\alpha < Y < \beta) \cong \Phi\left(\dfrac{\beta - nP}{\sqrt{nPq}}\right) - \Phi\left(\dfrac{\alpha - nP}{\sqrt{nPq}}\right)$ была нами получена ранее.

Примеры.

1. В процессе производства 60% изделий получаются высшего сорта. Наудачу отбирают 200 изделий. Найти вероятность, что среди отобранных изделий от 120 до 150 являются изделиями высшего сорта.

Решение $P = 0{,}6$, $q = 0{,}4$, $m_y = np = 120$, $D_y = npq = 48$, $\sigma_y \cong 7$,

$$P(120 < Y < 150) \cong \Phi\left(\frac{150 - 120}{7}\right) - \Phi\left(\frac{120 - 120}{7}\right) = \Phi(4{,}3) = 0{,}5.$$

2. Складываются 24 независимых случайных величины, равномерно распределенных в интервале $[0,1]$. Написать приближенное выражение плотности распределения суммы этих случайных величин. Найти так же вероятность того, что сумма будет заключена в пределах от 6 до 8.

Решение. $Y = \sum_{i=1}^{24} x_i$, где $f(x) = \begin{cases} 1, & 0 \le x \le 1 \\ 0, & x < 0,\ x > 1 \end{cases}$

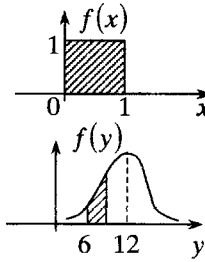


Рис. 2.22

$m_x = \dfrac{0+1}{2} = \dfrac{1}{2}$, $D_x = \dfrac{1}{12}$, $m_y = nP = 12$,

$D_y = nD_x = 2$.

Используем центральную предельную теорему $(n > 20)$: $f(y) \approx \dfrac{1}{\sqrt{4\pi}} e^{-\frac{(y-12)^2}{4}}$,

$$P(6 < Y < 8) \cong \Phi\left(\frac{8 - 12}{\sqrt{2}}\right) - \Phi\left(\frac{6 - 12}{\sqrt{2}}\right) = -\Phi(2{,}8) + \Phi(4{,}2) = 0{,}005.$$

ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЯ

1. Какие характерные требования лежат в основе построения теории вероятностей?
2. Сформулируйте основные правила комбинаторики.
3. Перечислите основные комбинаторные коэффициенты.
4. Классификация событий. Что называют благоприятствующими событиями?
5. Какие события называют случаями?
6. Как определяется классическая вероятность?
7. Как определяется вероятность бесконечного числа равновозможных исходов?
8. Что называется частотой события и как она связана с вероятностью этого события?
9. Как вычисляется вероятность суммы совместных и несовместных событий?
10. Дать определение условной вероятности.
11. Как вычисляется вероятность произведения событий?
12. Выведите формулу полной вероятности.
13. Получите формулу Байеса для проверки гипотез.
14. Выведите формулу Бернулли.
15. Что понимают под законом редких событий?
16. Каким образом определяется вероятность независимых повторных испытаний, когда их достаточно много?
17. Что называют случайной величиной?
18. Перечислите типичные распределения случайной величины.
19. Сформулируйте правило «трех сигм».
20. Приближенные методы описания случайной величины. Перечислите основные числовые характеристики распределения случайной ведичины.
21. Как описывается взаимная зависимость двух случайных величин?
22. Какие значения принимает коэффициент корреляции?
23. Получите числовые характеристики распределения суммы и произведения случайных величин.
24. Доказать теорему Чебышева закона больших чисел.
25. Сформулируйте центральную предельную теорему.

ИНДИВИДУАЛЬНЫЕ ЗАДАНИЯ

Вариант № 1

1. На вершину ведут 8 дорог. Сколькими способами турист может подняться на гору и спуститься с нее, не повторяя маршрута?
2. Сколькими способами можно упорядочить множество 1, 2, 3, 4, … так, чтобы числа 1, 2, 3 стояли рядом в порядке возрастания?
3. Сколькими способами можно обозначить треугольник, отмечая его вершины большими латинскими буквами?
4. В цехе работают 6 мужчин и 4 женщины. По табельным нормам наугад отобраны 7 человек. Найти вероятность того, что среди отобранных лиц окажутся 3 женщины.
5. На складе находятся 60 деталей, изготовленных тремя бригадами. Из них 30 деталей изготовлены первой бригадой, 16 – второй, 14 – третьей. Определить вероятность поступления на сборку детали, изготовленной второй или третьей бригадой.
6. С первого автомата на сборку поступают 20%, со второго – 30%, с треть- его – 50% деталей. Первый автомат дает в среднем 0,2% брака, второй – 0,3%, третий – 0,1%. Найти вероятность того, что поступившая на сборку деталь – бракованная.
7. Вероятность выигрыша по лотерейному билету будет $p = 0{,}3$. Имеется 4 билета. Определить вероятности всех возможных исходов для владельца этих билетов: а) ни один билет не выиграет; б) выиграет один билет; в) два билета выиграют; г) 3 билета выиграют; д) 4 билета выиграют.
8. При некотором технологическом процессе вероятность изготовления годной детали равна 0,8. Определить наиболее вероятное число годных деталей в партии из 135 штук.
9. При массовом производстве шестерен вероятность брака при штамповке равна 0,1. Какова вероятность того, что из 400 наугад взятых шестерен 50 будут бракованными?
10. Вероятность появления события на время испытаний $p = 0{,}8$. Найти вероятность того, что событие появится не менее 75 раз и не более 90 раз при 100 испытаниях.
11. Дан закон распределения дискретной случайной величины X:

Найти: 1) значение вероятности p_3, соответствующее значению x_3;

	1	3	6	8
P	0,2	0,1	p_3	0,3

2) $M[X]$, $D[X]$, $\sigma[X]$;

3) функцию распределения $F(x)$; построить ее график.

Построить многоугольник распределения случайной величины X.

12. Случайные величины X и Y независимы. Найти математическое ожидание $M[Z]$ и дисперсию $D[Z]$ случайной величины $Z = 3X - 2Y + 5$, если $M[X] = 6$, $M[Y] = -9$, $D[X] = 2$, $D[Y] = 4$.

13. Вероятность изготовления бракованного изделия равна 0,0002. Вычислить вероятность того, что контролер, проверяющий качество 5000 изделий, обнаружит среди них 4 бракованных.

14. Непрерывная случайная величина X задана функцией распределения

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \le 0, \\ x^2 & \text{при } 0 < x \le 1, \\ 1 & \text{при } x > 1. \end{cases}$$

Найти: 1) функцию плотности $f(x)$;

2) $M[X]$, $D[X]$, $\sigma[X]$;

3) вероятность того, что в результате опыта случайная величина X примет значение, принадлежащее интервалу $\left(\frac{1}{4}; \frac{3}{4}\right)$. Построить графики функций $F(x)$ и $f(x)$.

15. Вероятность безотказной работы элемента распределена по показательному закону $f(x) = 0{,}02e^{-0{,}02t}$ $(t > 0)$. Найти вероятность того, что элемент проработает безотказно в течение 50 часов.

16. Устройство состоит из 10 независимо работающих элементов. Вероятность отказа каждого элемента за время T равна 0,05. С помощью неравенства Чебышева оценить вероятность того, что абсолютная величина разности между числом отказавших элементов и средним числом (математическим ожиданием) отказов за время T окажется меньше двух.

17. По цели (на рис. 4.1 l = 6 м, r = 5 м) сделано три независимых выстрела без систематической ошибки $(m_x = m_y = 0)$ с ожидаемым разбросом попадания $\sigma_x = \sigma_y = 3$ м. Найти вероятность хотя бы одного попадания в цель.

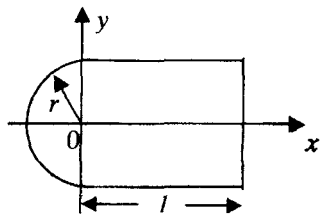


Рис. 4.1

Вариант № 2

1. Сколько трехзначных чисел можно составить из цифр 0, 1, 2, 3, 4, 5?
2. Хор состоит из 10 участников. Сколькими способами можно выбрать в течение 3 дней по 6 участников так, чтобы каждый день были различные составы хора?
3. Сколькими способами можно разделить колоду из 52 тасованных карт пополам так, чтобы в одной половине оказалось три туза?
4. Из ящика, содержащего жетоны с номерами от 1 до 40, участники жеребьевки вытягивают жетоны. Определить вероятность того, что номер первого наудачу извлеченного жетона не содержит цифры 2.
5. На испытательном стенде в определенных условиях испытываются 250 приборов. Найти вероятность того, что в течение часа откажет хотя бы один из испытываемых приборов, если известно, что вероятность отказа в течение часа одного из этих приборов равна 0,04 и одинакова для всех приборов.
6. В пирамиде 10 винтовок, из которых 4 снабжены оптическим прицелом. Вероятность того, что стрелок поразит мишень при выстреле из винтовки с оптическим прицелом, равна 0,95; для винтовок без оптического прицела эта вероятность равна 0,8. Стрелок поразил мишень из наудачу взятой винтовки. Найти вероятность того, что стрелок стрелял из винтовки с оптическим прицелом.
7. Прибор состоит из 10 узлов. Надежность (вероятность безотказной работы в течение времени t) для каждого узла равна $p = 0{,}4$. Узлы выходят из строя независимо один от другого. Найти вероятность того, что за время t: а) откажет хотя бы один узел; б) откажут ровно два узла; в) откажет ровно один узел; г) откажут не менее двух узлов.
8. Испытывается каждый из 16 элементов некоторого устройства. Вероятность того, что элемент выдержит испытания, равна 0,8. Найти наивероятнейшее число элементов, которые выдержат испытание.
9. Найти вероятность того, что событие A (переключение передач) наступит 70 раз на 243-километровой трассе, если вероятность переключения на каждом километре этой трассы равна 0,25.
10. Вероятность поражения мишени при одном выстреле равна 0,8. Найти вероятность того, что при 100 выстрелах мишень будет поражена не менее 75 раз и не более 90 раз.
11. Дан закон распределения дискретной случайной величины X:

	2	4	5	6
P	0,3	0,1	p_3	0,4

Найти: 1) значение вероятности p_3, соответствующее значению x_3;

2) $M[X]$, $D[X]$, $\sigma[X]$;

3) функцию распределения $F(x)$; построить ее график. Построить многоугольник распределения случайной величины X.

12. Случайные величины X и Y независимы. Найти математическое ожидание $M[Z]$ и дисперсию $D[Z]$ случайной величины $Z = 3X - 2Y + 5$, если $M[X] = -2$, $M[Y] = 4$, $D[X] = 3$, $D[Y] = 2$.

13. Рукопись объемом в 1000 страниц машинописного текста содержит 100 опечаток. Найти вероятность того, что наудачу взятая страница содержит ровно 2 опечатки.

14. Непрерывная случайная величина X распределена равномерно с постоянной плотностью вероятностей $f(x)$, где

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \le 0, \\ C & \text{при } 0 < x \le 4, \\ 0 & \text{при } x > 4. \end{cases}$$

Найти параметр $C = const$ и записать закон распределения.

Найти $M[X]$, $D[X]$.

Найти вероятность того, что X примет значение, принадлежащее интервалу $(1;3)$.

15. Длительность безотказной работы элемента имеет показательное распределение $F(t) = 1 - e^{-0,02t}$ $(t > 0)$. Найти вероятность того, что за $t = 24$ ч элемент не откажет.

16.. Непрерывная случайная величина X распределена по нормальному закону $f(x) = \frac{1}{4\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-1)^2}{32}}$. Найти $M[X]$, $D[X]$. Найти вероятность того, что в результате испытания X примет значение, заключенное в интервале $(5;9)$

17. Задано распределение вероятностей дискретной двумерной случайной величины:

Y	X			
	0	1	2	3
–1	0,01	0,06	0,05	0,14
0	0,04	0,04	0,15	0,17
1	0,05	0,10	0,10	0,09

Найти закон распределения составляющих X и Y; их математические ожидания m_x и m_y; дисперсии $D[X]$ и $D[Y]$; коэффициент корреляции r_{xy}.

Вариант № 3

1. Сколько трехзначных чисел можно составить из цифр 1, 2, 3, 4, 5, если каждую из этих цифр использовать не более одного раза?
2. Дано n точек, никакие 3 из которых не лежат на одной прямой. Сколько прямых можно провести, соединяя точки попарно?
3. Сколько можно сделать костей домино, используя числа от 0 до 9?
4. Какова вероятность того, что наудачу вырванный листок из нового календаря соответствует первому числу месяца? (Год считается не високосным).
5. В цехе имеется 3 телефона, работающих независимо друг от друга. Вероятности занятости каждого из них соответственно следующие: $q_1 = 0{,}08$; $q_2 = 0{,}15$; $q_3 = 0{,}2$. Найти вероятность того, что хотя бы один телефон свободен.
6. Имеются три одинаковые по виду урны. В первой урне 20 белых шаров, во второй – 10 белых и 10 черных шаров, в третьей – 20 черных шаров. Из выбранной наугад урны вынули белый шар. Найти вероятность того, что шар вынут из первой урны.
7. В некоторых районах летом в среднем 20% дней бывают дождливыми. Какова вероятность того, что в течение одной недели: а) будет хотя бы один дождливый день; б) будет ровно один дождливый день; в) число дождливых дней будет не более четырех; г) дождливых дней не будет.
8. Вероятность нарушения точности в сборке прибора составляет 0,32. Определить наиболее вероятное число точных приборов в партии на 9 штук.
9. Определить вероятность того, что при 150 выстрелах из винтовки мишень будет поражена 70 раз, если вероятность поражения мишени при одном выстреле равна 0,4.
10. Определить вероятность того, что из 1000 родившихся детей число мальчиков будет не менее 455 и не более 555, если вероятность рождения мальчиков равна 0,515.
11. Дан закон распределения дискретной случайной величины X:

	10	15	20	30
P	0,4	0,2	p_3	0,1

Найти: 1) значение вероятности p_3, соответствующее значению x_3;
2) $M[X]$, $D[X]$, $\sigma[X]$;
3) функцию распределения $F(x)$; построить ее график. Построить многоугольник распределения случайной величины X.

12. Случайные величины X и Y независимы. Найти математическое ожидание $M(Z)$ и дисперсию $D(Z)$ случайной величины $Z = 3X - 2Y + 5$, если $M[X] = 3$, $M[Y] = -3$, $D[X] = 1$, $D[Y] = 3$.

13. Вероятность изготовления нестандартной детали равна 0,004. Найти вероятность того, что среди 1000 деталей окажется 5 нестандартных.

14. Непрерывная случайная величина X задана функцией распределения

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \le -1, \\ \dfrac{3(x+1)}{4} & \text{при } -1 < x \le \dfrac{1}{3}, \\ 1 & \text{при } x > \dfrac{1}{3}. \end{cases}$$

Найти: 1) функцию плотности $f(x)$; 2) $M[X]$, $D[X]$, $\sigma[X]$; 3) вероятность того, что в результате опыта случайная величина X примет значение, принадлежащее интервалу $\left(0; \dfrac{1}{4}\right)$. Построить графики функций $F(x)$ и $f(x)$.

15. Вероятность безотказной работы телевизора распределена по показательному закону $f(t) = 0{,}002e^{-0{,}002t}$ $(t > 0)$. Найти вероятность того, что телевизор проработает безотказно в течение 1000 ч.

16. Непрерывная случайная величина X распределена по нормальному закону $f(x) = \dfrac{1}{3\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-4)^2}{18}}$. Найти $M[X]$ и $D[X]$. Найти вероятность того, что в результате испытания X примет значение, заключенное в интервале $(7;15)$.

17. Производится три независимых выстрела по цели, которая представляет собой прямоугольник со сторонами $a = 3$ км, $b = 2$ км. Центр рассеивания совпадает с началом координат. Рассеивание характеризуется срединными отклонениями $\sigma_x = 1{,}25$ км, $\sigma_y = 2$ км. Определить вероятность двух попаданий в цель.

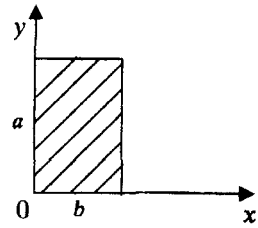


Рис. 4.2

Вариант № 4

1. На собрании должны выступать ораторы ***A, B, C, D.*** Сколькими способами их можно разместить в списке выступающих так, чтобы ***B*** выступал после оратора ***A***?
2. Сколькими способами можно разложить 14 одинаковых шаров по 8-ми ящикам?
3. Сколько пятизначных чисел можно составить из цифр от 1 по 9?
4. Студент пришел на экзамен, зная лишь 24 из 32-х вопросов программы. Экзаменатор задал ему 3 вопроса. Найти вероятность того, что студент ответил на все вопросы.
5. К концу дня в магазине осталось 60 арбузов, среди которых 50 спелых. Покупатель выбирает 2 арбуза. Какова вероятность того, что оба арбуза спелые?
6. В группе спортсменов 20 бегунов, 6 прыгунов и 4 метателя молота. Вероятность того, что будет выполнена норма мастера спорта бегуном, равна 0,9; прыгуном – 0,8 и метателем – 0,75. Определить вероятность того, что наудачу вызванный спортсмен выполнит норму мастера спорта.
7. Вероятность того, что вещь, взятая напрокат, будет возвращена исправной, равна 0,8. Определить вероятность того, что из пяти взятых вещей: а) три будут возвращены исправными; б) все пять вещей будут возвращены исправными; в) будут возвращены исправными не менее двух вещей.
8. Вероятность появления брака в партии из 500 деталей равна 0,035. Определить наивероятнейшее число бракованных деталей в этой партии.
9. При производстве электрических лампочек вероятность изготовления лампы первого сорта принимается равной 0,64. Определить вероятность того, что из 100 взятых наудачу электроламп, 70 будут первого сорта.
10. Подлежат исследованию 400 проб руды. Вероятность промышленного содержания металла в каждой пробе одинакова и равна 0,8. Найти вероятность того, что число проб с промышленным содержанием металла будет заключено между 290 и 340.
11. Дан закон распределения дискретной случайной величины X:

Найти: 1) значение вероятности p_3, соответствующее значению x_3;

2) $M[X]$, $D[X]$, $\sigma[X]$;

	3	5	7	9
P	0,2	0,3	p_3	0,2

3) функцию распределения $F(x)$; построить ее график. Построить многоугольник распределения случайной величины X.

12. Случайные величины X и Y независимы. Найти математическое ожидание $M[Z]$ и дисперсию $D[Z]$ случайной величины $Z = 3X - 2Y + 5$, если $M[X] = 4$, $M[Y] = 3$, $D[X] = 3$, $D[Y] = 4$.

13. Найти математическое ожидание и дисперсию дискретной случайной величины, распределенной по биноминальному закону: $P_5(2) = C_5^2 \cdot 0{,}9^2 \cdot 0{,}1^3$.

14. Завод отправил на базу 5000 доброкачественных изделий. Вероятность того, что в пути изделие повредится, равна 0,002. Найти вероятность того, что на базу прибудет 3 негодных изделия.

15. Непрерывная случайная величина X задана функцией распределения

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \le 0, \\ x/4 & \text{при } 0 < x \le 4, \\ 1 & \text{при } x > 4. \end{cases}$$

Найти: 1) функцию плотности $f(x)$; 2) $M[X]$, $D[X]$, $\sigma[X]$; 3) вероятность того, что в результате опыта случайная величина X примет значение, принадлежащее интервалу $(1;3)$. Построить графики функций $F(x)$ и $f(x)$.

16. Вероятность появления события в каждом испытании равна 0,25. Используя неравенство Чебышева, оценить вероятность того, что число X появлений события заключено в пределах от 150 до 250, если будет произведено 800 испытаний.

17. Система случайных величин (x, y) имеет плотность вероятности $f(x,y) = \dfrac{a}{1 + x^2 + y^2 + x^2 y^2}$. Требуется: 1) найти коэффициент a; 2) найти вероятность попадания в прямоугольник $0 < x < 1$; $-1 < y < 1$; 3) определить законы распределения одномерных величин X и Y; 4) выяснить, являются ли эти величины зависимыми.

Вариант № 5

1. Сколькими способами можно рассадить 8 гостей за круглым столом так, чтобы два известных гостя сидели рядом?
2. Сколько различных "слов" можно составить, переставляя буквы слова "комбинаторика"?
3. Сколько существует треугольников, длины сторон которых принимают одно из следующих значений: 4, 5, 6, 7 см?
4. В конверте лежат буквы разрезной азбуки: ***О, П, Р, С, Т.*** Буквы тщательно перемешаны. Определить вероятность того, что, вынимая эти буквы и укладывая их рядом, получится слово "***СПОРТ***".
5. С первого автомата на сборку поступает 20%, со второго 30%, с третьего – 50% деталей. Первый автомат дает в среднем – 0,2% брака, второй – 0,3%, третий – 1%. Найти вероятность того, что поступившая на сборку деталь бракованная.
6. Один из трех стрелков вызывается на линию огня и производит выстрел. Цель поражена. Вероятность попадания в мишень при одном выстреле для первого стрелка равна 0,3, для второго – 0,5, для третьего – 0,8. Найти вероятность того, что выстрел произведён вторым стрелком.
7. В цехе 6 моторов. Для каждого мотора вероятность того, что он в данный момент включен, равна 0,8. Найти вероятность того, что в данный момент: а) включено 4 мотора; б) включен хотя бы один мотор; в) включены все моторы.
8. В телевизоре стоят 12 ламп. Каждая из них с вероятностью 0,4 может выйти из строя в течение гарантийного срока. Найти наивероятнейшее число ламп, вышедших из строя в течение гарантийного срока.
9. Вероятность рождения мальчика равна 0,515. Найти вероятность того, что из 200 родившихся детей мальчиков и девочек будет поровну.
10. Вероятность того, что деталь не прошла проверку ОТК, будет $p = 0{,}2$. Найти вероятность того, что среди 400 случайно отобранных деталей окажется непроверенных от 70 до 100 деталей.
11. Дан закон распределения дискретной случайной величины X:

	4	6	8	10
P	0,2	0,4	p_3	0,1

Найти: 1) значение вероятности p_3, соответствующее значению x_3;
2) $M[X]$, $D[X]$, $\sigma[X]$;
3) функцию распределения

$F(x)$; построить ее график. Построить многоугольник распределения случайной величины X.

12. Случайные величины X и Y независимы. Найти математическое ожидание $M[Z]$ и дисперсию $D[Z]$ случайной величины $Z = 3X - 2Y + 5$, если $M[X] = -2$, $M[Y] = -1$, $D[X] = 1$, $D[Y] = 2$.

13. Аппаратура содержит 1000 элементов, вероятность отказа для каждого из которых в течение некоторого времени равна 0,002 и не зависит от состояния других элементов. Какова вероятность отказа аппаратуры, если он наступает при отказе хотя бы одного из элементов?

14. Непрерывная случайная величина X задана функцией распределения

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \le -2, \\ \dfrac{(x+2)}{4} & \text{при } -2 < x \le 2, \\ 1 & \text{при } x > 2. \end{cases}$$

Найти: 1) функцию плотности $f(x)$; 2) $M[X]$, $D[X]$, $\sigma[X]$; 3) вероятность того, что в результате опыта случайная величина X примет значение, принадлежащее интервалу $(0;1)$. Построить графики функций $F(x)$ и $f(x)$.

15. Испытывают два независимо работающих элемента. Длительность времени безотказной работы первого элемента имеет показательное распределение $F_1(t) = 1 - e^{-0,02t}$, второго – $F_2(t) = 1 - e^{-0,05t}$ $(t > 0)$. Найти вероятность того, что за время $t = 6$ ч оба элемента не откажут.

16. Непрерывная случайная величина X распределена по нормальному закону $f(x) = \dfrac{1}{4\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-8)^2}{32}}$. Найти $M[X]$, $D[X]$. Найти вероятность того, что в результате испытания X примет значение, заключенное в интервале $(8;16)$.

17. Система двух случайных величин (X,Y) подчиняется нормальному закону. Рассеивание круговое. Найти радиус круга, центр которого совпадает с центром рассеивания, а вероятность попадания в который равна 0,5.

Вариант № 6

1. Сколько имеется пятизначных чисел, которые делятся на 5?
2. В классе 34 учащихся. Из них 20 посещают математический кружок, 11 – физический, 10 учащихся не посещают ни одного из этих кружков. Сколько учеников посещают оба кружка?
3. Сколькими способами можно заполнить карточку "Спортлото" (6 из 49)?
4. При наборе телефонного номера абонент забыл две последние цифры и набрал их наудачу, помня лишь, что эти цифры нечетные и разные. Найти вероятность того, что номер набран правильно.
5. Из колоды карт (36 шт.) вынута одна карта. Найти вероятность того, что это "дама" или "король".
6. В лаборатории имеется 6 клавишных автоматов и 4 полуавтомата. Вероятность того, что за время выполнения расчета автомат не выйдет из строя, равна 0,95; для полуавтомата – равна 0,8. Студент производит расчет на наудачу выбранной машине. Найти вероятность того, что до окончания расчета машина не выйдет из строя.
7. В магазин вошли 12 покупателей. Вероятность того, что в отдельности каждый из них купит что-нибудь, равна 0,42. Найти вероятность того, что: а) все 12 покупателей совершат покупки; б) 6 покупателей совершат покупки; в) ни один покупатель не совершит покупки.
8. Для Ивана вероятность выиграть шахматную партию у Петра равна 0,8. Сыграно 12 партий. Найти наивероятнейшее число партий, выигранных Иваном.
9. Средний процент нарушения работы кинескопа телевизора в течение гарантийного срока равен 12%. Вычислить вероятность того, что из 46-ти телевизоров 36 выдержат гарантийный срок.
10. В партии из 22500 изделий каждое изделие независимо от других может быть бракованным с вероятностью $p = 0{,}2$. Найти вероятность того, что число бракованных изделий заключено между 4380 и 4560.
11. Дан закон распределения дискретной случайной величины X:

	2	4	6	8
P	0,12	0,28	p_3	0,3

Найти: 1) значение вероятности p_3, соответствующее значению x_3;
2) $M[X]$, $D[X]$, $\sigma[X]$;
3) функцию распределения $F(x)$; построить ее график. Построить многоугольник распределения случайной величины X.

12. Случайные величины X и Y независимы. Найти математическое ожидание $M[Z]$ и дисперсию $D[Z]$ случайной величины $Z = 3X - 2Y + 5$, если $M[X] = 3$, $M[Y] = -2$, $D[X] = 4$, $D[Y] = 1$.

13. Телефонная станция обслуживает 5000 абонентов. Вероятность позвонить любому абоненту в течение часа равна 0,004. Какова вероятность того, что в течение часа позвонят два абонента?

14. В партии из N деталей имеется M стандартных. Наудачу отобраны n деталей. Составить закон распределения вероятностей дискретной случайной величины X – числа стандартных деталей среди отобранных деталей. Найти $M[X]$, $D[X]$; построить многоугольник распределения, если $N = 7$, $M = 4$, $n = 3$.

15. Непрерывная случайная величина X задана функцией распределения

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \le 2, \\ \frac{x}{2} - 1 & \text{при } 2 < x \le 4, \\ 1 & \text{при } x > 4. \end{cases}$$

Найти: 1) функцию плотности $f(x)$;

2) $M[X]$, $D[X]$, $\sigma[X]$;

3) вероятность того, что в результате опыта случайная величина X примет значение, принадлежащее интервалу $(3;4)$. Построить графики функций $F(x)$ и $f(x)$.

16. Вероятность наступления некоторого события в каждом из 100 испытаний равна 0,3. Используя неравенство Чебышева, оценить вероятность того, что отклонение числа наступлений этого события от математического ожидания будет более 30.

17. Двумерная случайная величина (X,Y) задана плотностью совместного распределения $f(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{6\pi} & \text{при } \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} \le 1, \\ 0 & \text{при } \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} > 1. \end{cases}$. Найти плотности распределения составляющих X и Y.

Вариант № 7

1. В розыгрыше первенства по хоккею участвуют 12 команд. Команды, занявшие первые три места, награждаются золотой, серебряной и бронзовой медалями, а две последние команды покидают первенство. Сколько результатов первенства может быть?
2. Сколькими способами из колоды в 36 карт можно извлечь 6 карт так, чтобы среди них было 2 туза?
3. Сколько шестизначных чисел, кратных 5, можно составить из цифр от 1 до 6 при условии, что цифры не повторяются?
4. В урне 7 белых и 5 красных шаров. Какова вероятность того, что среди наудачу вытянутых 6 шаров будут 4 белых и 2 красных шара?
5. Среди 50 электрических лампочек имеется 3 нестандартных. Найти вероятность того, что две последовательно взятые электролампочки окажутся нестандартными.
6. С первого автомата на сборку поступает 40%, со второго – 30%, с третьего – 20%, с четвертого – 10% деталей. Среди деталей первого автомата имеется 0,1% бракованных деталей, второго – 0,2%, третьего – 0,25%, четвертого – 0,5%. Найти вероятность того, что поступившая на сборку деталь будет бракованной.
7. На автобазе имеется 12 автомашин. Вероятность выхода на линию каждой из них равна 0,8. Найти вероятность нормальной работы автобазы в ближайший день, если для этого необходимо иметь на линии не менее 8 автомашин.
8. В результате многолетних наблюдений установлено, что вероятность выпадения дождя 1 октября в данном городе равна 1/7. Определить наивероятнейшее число дождливых дней 1 октября в данном городе за 40 лет.
9. Определить вероятность одновременной остановки 30 машин из 100 работающих, если вероятность остановки одной машины равна 0,2.
10. Вероятность нарушения стандарта при штамповке карболитовых колец равна 0,3. Определить вероятность того, что из 800 головок готовых колец число непригодных будет заключено между 225 и 255.
11. Дан закон распределения дискретной случайной величины X:

	-1	1	2	3
P	0,15	0,25	p_3	0,3

Найти: 1) значение вероятности p_3, соответствующее значению x_3;
2) $M[X]$, $D[X]$, $\sigma[X]$;
3) функцию распределения

$F(x)$; построить ее график. Построить многоугольник распределения случайной величины X.

12. Случайные величины X и Y независимы. Найти математическое ожидание $M[Z]$ и дисперсию $D[Z]$ случайной величины $Z = 3X - 2Y + 5$, если $M[X] = 3$, $M[Y] = 2$, $D[X] = 2$, $D[Y] = 5$.

13. Вероятность того, что абонент наберет правильно номер телефона, принимается равной 0,999. Определить вероятность того, что среди 600 произведенных независимо один от другого вызовов окажется менее двух ошибочных.

14. Непрерывная случайная величина X распределена равномерно с постоянной плотностью вероятностей $f(x)$, где

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \le 3, \\ C & \text{при } 3 < x \le 7, \\ 0 & \text{при } x > 7. \end{cases}$$

1) Найти параметр $C = const$ и записать закон распределения.
2) Найти $M[X]$, $D[X]$.
3) Найти вероятность того, что X примет значение, принадлежащее интервалу $(2;4)$.

15. Испытывают три элемента, которые работают независимо один от другого. Длительность времени безотказной работы элементов распределена по показательному закону: для первого элемента $F_1(t) = 1 - 0{,}1e^{-0{,}1t}$, для второго – $F_2(t) = 1 - 0{,}2e^{-0{,}2t}$, для третьего элемента – $F_3(t) = 1 - 0{,}3e^{-0{,}3t}$. Найти вероятность того, что в интервале времени $(0;5)$ час откажут все три элемента.

16. Принимая вероятность рождения мальчика равной 0,5, оценить с помощью неравенства Чебышева вероятность того, что среди 1200 новорожденных мальчиков будет от 550 до 650

17. Задано распределение вероятностей дискретной двумерной случайной величины:

Y	X		
	3	10	12
4	0,17	0,13	0,25
5	0,10	0,30	0,05

Найти закон распределения составляющих X и Y; их математические ожидания m_x и m_y; дисперсии $D[X]$ и $D[Y]$; коэффициент корреляции r_{xy}.

Вариант № 8

1. Сколько существует пятизначных чисел, у которых все цифры нечетные?
2. Из 100 студентов английский язык знают 28 студентов, немецкий – 30, французский – 10, немецкий и французский – 5, а все три языка знают 3 студента. Сколько студентов не знают ни одного из трех языков?
3. Лифт останавливается на десяти этажах. Сколькими способами можно распределить между этими остановками 8 пассажиров лифта?
4. Из пяти букв разрезной азбуки составлено слово "книга". Ребенок, не умеющий читать, рассыпал эти буквы и затем собрал в произвольном порядке. Найти вероятность того, что у него снова получилось слово "книга".
5. Среди 17 студентов группы, в которой 8 девушек, разыгрываются 7 билетов. Какова вероятность того, что среди обладателей билетов окажутся 4 девушки?
6. Четырем клиентам назначена деловая встреча на 12 часов дня. Вероятности опоздания для каждого из них соответственно равны 0,2; 0,15; 0,3 и 0,1. Найти вероятность того, что хотя бы один клиент прибудет вовремя.
7. С первого автомата на сборку поступает 20%, со второго – 30%, с третьей – 50% деталей. Первый автомат дает в среднем 0,2% брака, второй – 0,3%, третий – 0,1%. Найти вероятность того, что оказавшаяся бракованной деталь изготовлена на первом автомате.
8. Вероятность попадания в цель при одном выстреле из винтовки равна 0,3. Произведено шесть выстрелов. Определить вероятность того, что: а) три пули попадут в цель, б) не менее трех пуль попадет в цель.
9. Вероятность рождения мальчика равна 0,515. Какова вероятность того, что среди 1000 новорожденных будет 480 девочек?
10. Вероятность неточной сборки прибора равна 0,2. Найти вероятность того, что среди 500 приборов окажется от 410 до 430 (включительно) точных.
11. Дан закон распределения дискретной случайной величины X:

	3	5	6	8
P	0,4	0,3	p_3	0,1

Найти: 1) значение вероятности p_3, соответствующее значению x_3;
2) $M[X]$, $D[X]$, $\sigma[X]$;
3) функцию распределения

$F(x)$; построить ее график. Построить многоугольник распределения случайной величины X.

12. Случайные величины X и Y независимы. Найти математическое ожидание $M[Z]$ и дисперсию $D[Z]$ случайной величины $Z = 3X - 2Y + 5$, если $M[X] = 2$, $M[Y] = 3$, $D[X] = 2$, $D[Y] = 3$.

13. Найти математическое ожидание и дисперсию дискретной случайной величины, распределенной по биноминальному закону: $P_7(2) = C_7^2 \cdot 0{,}6^2 \cdot 0{,}4^5$.

14. В партии из N деталей имеется M стандартных. Наудачу отобраны n деталей. Составить закон распределения вероятностей дискретной случайной величины X – числа стандартных деталей среди отобранных деталей. Найти $M[X]$, $D[X]$; построить многоугольник распределения, если $N = 8$, $M = 4$, $n = 3$.

15. Непрерывная случайная величина X задана функцией распределения

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \le 2, \\ (x-2)^2 & \text{при } 2 < x \le 3, \\ 1 & \text{при } x > 3. \end{cases}$$

Найти: 1) функцию плотности $f(x)$; 2) $M[X]$, $D[X]$, $\sigma[X]$; 3) вероятность того, что в результате опыта случайная величина X примет значение, принадлежащее интервалу $(1; 2)$. Построить графики функций $F(x)$ и $f(x)$.

16. Время T безотказной работы радиотехнической системы распределено по показательному закону. Интенсивность отказов системы $\lambda = 0{,}02$. Найти среднее время безотказной работы и вероятность безотказной работы за 80 ч.

17. Вероятность появления события A в каждом испытании равна 0,2. Используя неравенство Чебышева, оценить вероятность того, что в 10000 испытаний отклонение частоты события A от его вероятности не превзойдет по абсолютной величине 0,01.

Вариант № 9

1. Сколько четырехзначных чисел можно написать с помощью цифр 0, 1, 2, 3, 4, 5 с учетом повторений и без повторений?
2. В классе 42 ученика. Из них 16 занимаются в легкоатлетической секции, 24 – в футбольной, 15 – в шахматной, 11 занимаются одновременно легкой атлетикой и футболом, 8 – легкой атлетикой и шахматами, 12 – футболом и шахматами, а 6 – участвуют во всех трех секциях. Остальные увлекаются туризмом. Сколько их?
3. Сколькими способами можно разложить 10 одинаковых деталей по 4 ящикам стола?
4. Какова вероятность того, что среди вынутых наудачу 4 карт из колоды (36 шт.) ровно две окажутся принадлежащими трефовой масти?
5. Имеются две урны: в первой a белых паров и b черных; во второй c белых и d черных. Из первой урны во вторую перекладывают, не глядя, один шар. После этого из второй урны берут один шар. Найти вероятность того, что этот шар будет белым.
6. Стрельба производится по пяти мишеням типа A, по трем – типа B и по двум – типа C. Вероятность попадания в мишень типа A равна 0,4; типа B – 0,1; типа C – 0,15. Выстрел в одну из мишеней дал попадание. Найти вероятность того, что поражена мишень типа B.
7. Наблюдениями установлено, что в некоторой местности в сентябре в среднем бывает 12 дождливых дней. Какова вероятность, что из случайно взятых в этом месяце 8 дней 3 дня окажутся дождливыми?
8. Вероятность того, что пассажир опоздает к отправлению поезда, равна 0,02. Найти наиболее вероятное число опоздавших из 855 пассажиров.
9. Вероятность появления успеха в каждом испытании равна 0,25. Какова вероятность того, что при 300 испытаниях успех наступит ровно 75 раз?
10. Производство дает 1% брака. Какова вероятность того, что из взятых на исследование 1100 изделий выбраковано будет от 17 до 23 изделий?
11. Дан закон распределения дискретной случайной величины X:

	2	3	5	6
P	0,25	0,3	p_3	0,15

Найти: 1) значение вероятности p_3, соответствующее значению x_3;
2) $M[X]$, $D[X]$, $\sigma[X]$;
3) функцию распределения

$F(x)$; построить ее график. Построить многоугольник распределения случайной величины X.

12. Случайные величины X и Y независимы. Найти математическое ожидание $M[Z]$ и дисперсию $D[Z]$ случайной величины $Z = 3X - 2Y + 5$, если $M[X] = 2$, $M[Y] = 1$, $D[X] = 1$, $D[Y] = 4$.

13. Рабочий-сборщик, обслуживающий конвейер, за смену собирает в среднем 5000 деталей. Вероятность пропуска несобранной детали за смену равна 0,0016. Какова вероятность того, что за смену рабочий пропустит 6 несобранных деталей?

14. Непрерывная случайная величина X задана функцией распределения

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \le 0, \\ x(2-x) & \text{при } 0 < x \le 1, \\ 1 & \text{при } x > 1. \end{cases}$$

Найти: 1) функцию плотности $f(x)$;

2) $M[X]$, $D[X]$, $\sigma[X]$;

3) вероятность того, что в результате опыта случайная величина X примет значение, принадлежащее интервалу $(0{,}1;\ 0{,}5)$. Построить графики функций $F(x)$ и $f(x)$.

15. Определить время работы радиолампы с надежностью 0,8 (вероятность безотказной работы радиолампы), если среднее время ее работы равно 700ч.

16. Непрерывная случайная величина X распределена по нормальному закону $f(x) = \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-4)^2}{8}}$. Найти $M[X]$, $D[X]$. Найти вероятность того, что в результате испытания X примет значение, заключенное в интервале $(6;8)$.

17. Внутри прямоугольника, ограниченного прямыми $x = 0$, $x = \frac{\pi}{2}$, $y = 0$, $y = \frac{\pi}{2}$, задана плотность распределения системы двух случайных величин $f(x,y) = C\sin(x+y)$; вне прямоугольника имеем $f(x,y) = 0$. Найти: а) величину C; б) функцию распределения системы.

Вариант № 10

1. Сколькими способами можно выбрать на конкурс 2 юношей и одну девушку из 15 юношей и 20 девушек?
2. В отделе НИИ работают специалисты, каждый из которых знает хотя бы один иностранный язык, при этом 6 человек знают английский, 6 – немецкий, 7 – французский, 4 знают английский и немецкий, 3 – немецкий и французский, 2 – французский и английский и один сотрудник знает все эти языки. Сколько сотрудников работают в отделе?
3. Сколькими способами можно рассадить 8 человек за круглый стол или в ряд так, чтобы данные два человека не сидели рядом?
4. Телефонный номер состоит из шести цифр. Найти вероятность того, что все цифры различны.
5. Детали проходят три операции обработки. Вероятность получения брака на первой операции равна 0,02, на второй – 0,03, на третьей – 0,02. Найти вероятность получения детали без брака после трех операций, предполагая, что получение брака на отдельных операциях являются независимыми событиями.
6. Стрельба производится по пяти мишеням типа A, по трем – типа B и по двум – типа C. Вероятность попадания в мишень типа A равна 0,4; типа B – 0,1; типа C – 0,15. Найти вероятность поражения мишени при одном выстреле, если неизвестно, в мишень какого типа он будет сделан.
7. Найти вероятность того, что в семье, имеющей 6 детей, не менее двух девочек. Предполагается, что вероятности рождения мальчика и девочки одинаковые.
8. Вероятность изготовления нестандартной детали равна 0,1. Найти наивероятнейшее число стандартных деталей среди 20 деталей.
9. В сосуде находится 3 белых и 4 черных шара. Шары извлекаются таким образом, что каждый извлеченный шар возвращается обратно в сосуд. Определить вероятность того, что при 250 извлечениях белый шар появится 100 раз.
10. При штамповке металлических клемм получается в среднем 90% годных. Найти вероятность наличия от 790 до 820 (включительно) годных в партии из 900 клемм.
11. Дан закон распределения дискретной случайной величины X:

	1	3	5	7
P	0,3	0,2	p_3	0,2

Найти: 1) значение вероятности p_3, соответствующее значению x_3;
2) $M[X]$, $D[X]$, $\sigma[X]$;
3) функцию распределения $F(x)$; построить ее график. Построить многоугольник распределения случайной величины X.

12. Случайные величины X и Y независимы. Найти математическое ожидание $M[Z]$ и дисперсию $D[Z]$ случайной величины $Z = 3X - 2Y + 5$, если $M[X] = -3$, $M[Y] = 2$, $D[X] = 5$, $D[Y] = 2$.

13. Вероятность того, что при транспортировке какой-либо телевизор будет поврежден, равна 0,001. Завод отправил потребителю 3000 доброкачественных телевизоров. Какова вероятность того, что потребитель получил 5 телевизоров с дефектами?

14. В партии из N деталей имеется M стандартных. Наудачу отобраны n деталей. Составить закон распределения вероятностей дискретной случайной величины X – числа стандартных деталей среди отобранных деталей. Найти $M[X]$, $D[X]$; построить многоугольник распределения, если $N = 8$, $M = 6$, $n = 2$.

15. Непрерывная случайная величина X задана функцией распределения

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \le -1, \\ \dfrac{x+1}{3} & \text{при } -1 < x \le 2, \\ 1 & \text{при } x > 2. \end{cases}$$

Найти: 1) функцию плотности $f(x)$;
2) $M[X]$, $D[X]$, $\sigma[X]$;
3) вероятность того, что в результате опыта случайная величина X примет значение, принадлежащее интервалу $(0;1)$. Построить графики функций $F(x)$ и $f(x)$.

16. Радиоаппаратура за 1000 ч работы выходит из строя в среднем один раз. Определить вероятность выхода из строя радиоаппаратуры за 200 ч работы, предполагая, что срок безотказной работы радиоаппаратуры есть случайная величина, распределенная по показательному закону.

17. Плотность совместного распределения системы двух случайных величин задана функцией $f(x,y) = \dfrac{C}{(4+x^2)(9+y^2)}$. Найти :
а) величину C; б) функцию распределения системы.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Вентцель Е.С. Теория вероятностей. - М.: Наука, 1964. - 576 с.
2. Вентцель Е.С., Овчаров Л.А. Теория вероятностей и ее инженерное применение. - М.: Наука, 1988. - 480 с.
3. Вентцель Е.С., Овчаров Л.А. Теория вероятностей. - М.: Наука, 1973. - 366с.
4. Гмурман В.Е. Теория вероятностей и математической статистики. - М.: Высшая школа, 1977.-480 с.
5. Гурский Е.И. Теория вероятностей и элементы математической статистики. - М.: Высшая школа, 1971.-360 с.
6. Свешников А.А. Сборник задач по теории вероятностей, математической статистике и теории случайных функций. - М.: Наука, 1970. - 656 с.
7. Ефимов А.Е.Сборник задач по математике для втузов. Специальные курсы. - М.: Наука, 1984. - 608 с.
8. Маталкин Л.Д. Сборник задач по теории вероятностей. - М.: Изд-во. МГУ, 1972. - 192 с.
9. Данко П.Е, Попов А.Г., Кожевникова Т.Я. Высшая математика в упражнениях и задачах. - М.: Высшая школа, 1988.-П.2. – 416 с.
10. Гмурман В.Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике. - М: Высшая школа, 1977. - 400 с.
11. Гурский В.Е. Сборник задач по теории вероятностей и математической статистике. - М.: Высшая школа, 1984. - 312 с.
12. Трухан А.А., Кудряшев Г.С. Теория вероятностей и математическая статистика. Учебное пособие.- Иркутск; Изд-во :ИВАИИ, 2003. - 300 с.

Таблица значений функции $\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,3989	3989	3989	3988	3986	3984	3982	3980	3977	3973
0,1	3970	3965	3961	3956	3951	3945	3939	3932	3925	3918
0,2	3910	3902	3894	3885	3876	3867	3857	3847	3836	3825
0,3	3814	3802	3790	3778	3765	3752	3739	3726	3712	3697
0,4	3683	3668	3652	3637	3621	3605	3589	3572	3555	3538
0,5	3521	3503	3485	3467	3448	3429	3410	3391	3372	3352
0,6	3332	3312	3292	3271	3251	3230	3209	3187	3166	3144
0,7	3123	3101	3079	3056	3034	3011	2989	2966	2943	2920
0,8	2897	2874	2850	2827	2803	2780	2756	2732	2709	2685
0,9	2661	2637	2613	2589	2565	2541	2516	2492	2468	2444
1,0	0,2420	2396	2371	2347	2323	2299	2275	2251	2227	2203
1,1	2179	2155	2131	2107	2083	2059	2036	2012	1989	1965
1,2	1942	1919	1895	1872	1849	1826	1804	1781	1758	1736
1,3	1714	1691	1669	1647	1626	1604	1582	1561	1539	1518
1,4	1497	1476	1456	1435	1415	1394	1374	1354	1334	1315
1,5	1295	1276	1257	1238	1219	1200	1182	1163	1145	1127
1,6	1109	1092	1074	1057	1040	1023	1006	0989	0973	0957
1,7	0940	0925	0909	0893	0878	0863	0848	0833	0818	0804
1,8	0790	0775	0761	0748	0734	0721	0707	0694	0681	0669
1,9	0656	0644	0632	0620	0608	0596	0584	0573	0562	0551
2,0	0,0540	0529	0519	0508	0498	0488	0478	0468	0459	0449
2,1	0440	0431	0422	0413	0404	0396	0387	0379	0371	0363
2,2	0355	0347	0339	0332	0325	0317	0310	0303	0297	0290
2,3	0283	0277	0270	0264	0258	0252	0246	0241	0235	0229
2,4	0224	0219	0213	0208	0203	0198	0194	0189	0184	0180
2,5	0175	0171	0167	0163	0158	0154	0151	0147	0143	0139
2,6	0136	0132	0129	0126	0122	0119	0116	0113	0110	0107
2,7	0104	0101	0099	0096	0093	0091	0088	0086	0084	0081
2,8	0079	0077	0075	0073	0071	0069	0067	0065	0063	0061
2,9	0060	0058	0056	0055	0053	0051	0050	0048	0047	0046
3,0	0,0044	0043	0042	0040	0039	0038	0037	0036	0035	0034
3,1	0033	0032	0031	0030	0029	0028	0027	0026	0025	0025
3,2	0024	0023	0022	0022	0021	0020	0020	0019	0018	0018
3,3	0017	0017	0016	0016	0015	0015	0014	0014	0013	0013
3,4	0012	0012	0012	0011	0011	0010	0010	0010	0009	0009
3,5	0009	0008	0008	0008	0008	0007	0007	0007	0007	0006
3,6	0006	0006	0006	0005	0005	0005	0005	0005	0005	0004
3,7	0004	0004	0004	0004	0004	0004	0003	0003	0003	0003
3,8	0003	0003	0003	0003	0003	0002	0002	0002	0002	0002
3,9	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0001	0001

Таблица значений функции $\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}}dt$

x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$
0,00	0,0000	0,24	0,0948	0,48	0,1844	0,72	0,2642
0,01	0,0040	0,25	0,0987	0,49	0,1879	0,73	0,2673
0,02	0,0080	0,26	0,1026	0,50	0,1915	0,74	0,2703
0,03	0,0120	0,27	0,1064	0,51	0,1950	0,75	0,2734
0,04	0,0160	0,28	0,1103	0,52	0,1985	0,76	0,2764
0,05	0,0199	0,29	0,1141	0,53	0,2019	0,77	0,2794
0,06	0,0239	0,30	0,1179	0,54	0,2054	0,78	0,2823
0,07	0,0279	0,31	0,1217	0,55	0,2088	0,79	0,2852
0,08	0,0319	0,32	0,1255	0,56	0,2123	0,80	0,2881
0,09	0,0359	0,33	0,1293	0,57	0,2157	0,81	0,2910
0,10	0,0398	0,34	0,1331	0,58	0,2190	0,82	0,2939
0,11	0,0438	0,35	0,1368	0,59	0,2224	0,83	0,2967
0,12	0,0478	0,36	0,1406	0,60	0,2257	0,84	0,2995
0,13	0,0517	0,37	0,1443	0,61	0,2291	0,85	0,3023
0,14	0,0557	0,38	0,1480	0,62	0,2324	0,86	0,3051
0,15	0,0596	0,39	0,1517	0,63	0,2357	0,87	0,3078
0,16	0,0636	0,40	0,1554	0,64	0,2389	0,88	0,3106
0,17	0,0675	0,41	0,1591	0,65	0,2422	0,89	0,3133
0,18	0,0714	0,42	0,1628	0,66	0,2454	0,90	0,3159
0,19	0,0753	0,43	0,1664	0,67	0,2486	0,91	0,3186
0,20	0,0793	0,44	0,1700	0,68	0,2517	0,92	0,3212
0,21	0,0832	0,45	0,1736	0,69	0,2549	0,93	0,3238
0,22	0,0871	0,46	0,1772	0,70	0,2580	0,94	0,3264
0,23	0,0910	0,47	0,1808	0,71	0,2611	0,95	0,3289

x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$
0,96	0,3315	1,37	0,4147	1,78	0,4625	2,36	0,4909
0,97	0,3340	1,38	0,4162	1,79	0,4633	2,38	0,4913
0,98	0,3365	1,39	0,4177	1,80	0,4641	2,40	0,4918
0,99	0,3389	1,40	0,4192	1,81	0,4649	2,42	0,4922
1,00	0,3413	1,41	0,4207	1,82	0,4656	2,44	0,4927
1,01	0,3438	1,42	0,4222	1,83	0,4664	2,46	0,4931
1,02	0,3461	1,43	0,4236	1,84	0,4671	2,48	0,4934
1,03	0,3485	1,44	0,4251	1,85	0,4678	2,50	0,4938
1,04	0,3508	1,45	0,4265	1,86	0,4686	2,52	0,4941
1,05	0,3531	1,46	0,4279	1,87	0,4693	2,54	0,4945
1,06	0,3554	1,47	0,4292	1,88	0,4699	2,56	0,4948
1,07	0,3577	1,48	0,4306	1,89	0,4706	2,58	0,4951
1,08	0,3599	1,49	0,4319	1,90	0,4713	2,60	0,4953
1,09	0,3621	1,50	0,4332	1,91	0,4719	2,62	0,4956
1,10	0,3643	1,51	0,4345	1,92	0,4726	2,64	0,4959
1,11	0,3665	1,52	0,4357	1,93	0,4732	2,66	0,4961
1,12	0,3686	1,53	0,4370	1,94	0,4738	2,68	0,4963
1,13	0,3708	1,54	0,4382	1,95	0,4744	2,70	0,4965
1,14	0,3729	1,55	0,4394	1,96	0,4750	2,72	0,4967
1,15	0,3749	1,56	0,4406	1,97	0,4756	2,74	0,4969
1,16	0,3770	1,57	0,4418	1,98	0,4761	2,76	0,4971
1,17	0,3790	1,58	0,4429	1,99	0,4767	2,78	0,4973
1,18	0,3810	1,59	0,4441	2,00	0,4772	2,80	0,4974
1,19	0,3830	1,60	0,4452	2,02	0,4783	2,82	0,4976
1,20	0,3849	1,61	0,4463	2,04	0,4793	2,84	0,4977
1,21	0,3869	1,62	0,4474	2,06	0,4803	2,86	0,4979
1,22	0,3883	1,63	0,4484	2,08	0,4812	2,88	0,4980
1,23	0,3907	1,64	0,4495	2,10	0,4821	2,90	0,4981
1,24	0,3925	1,65	0,4505	2,12	0,4830	2,92	0,4982
1,25	0,3944	1,66	0,4515	2,14	0,4838	2,94	0,4984
1,26	0,3962	1,67	0,4525	2,16	0,4846	2,96	0,4985
1,27	0,3980	1,68	0,4535	2,18	0,4854	2,98	0,4986
1,28	0,3997	1,69	0,4545	2,20	0,4861	3,00	0,49865
1,29	0,4015	1,70	0,4554	2,22	0,4868	3,20	0,49931
1,30	0,4032	1,71	0,4564	2,24	0,4875	3,40	0,49966
1,31	0,4049	1,72	0,4573	2,26	0,4881	3,60	0,499841
1,32	0,4066	1,73	0,4582	2,28	0,4887	3,80	0,499928
1,33	0,4082	1,74	0,4591	2,30	0,4893	4,00	0,499968
1,34	0,4099	1,75	0,4599	2,32	0,4898	4,50	0,499997
1,35	0,4115	1,76	0,4608	2,34	0,4904	5,00	0,499997
1,36	0,4131	1,77	0,4616				

Оглавление

1. Случайные события.....3

2. Случайные величины.....30

3. Вопросы для самоконтроля 58

4. Индивидуальные задания.....59

Библиографический список.....79

Приложение.....80

Трухан

Александр Алексеевич

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Учебное пособие
для студентов заочного обучения
всех специальностей

Редактор Л.И. Рубанова

Компьютерная набор и верстка Н.Ю. Наймушина

Лицензия №021231 от 23.09.97

Подписано в печать 18.09.03

Формат 60x84/16. Печать офсетная

Усл. печ. л. 5,1. Уч.-изд. л. 5,3

Заказ

Глазковская типография, г. Иркутск, ул. Гоголя, 53