Министерство транспорта Российской Федерации
Федеральное агентство железнодорожного транспорта
Федеральное государственное бюджетное образовательное
учреждение высшего профессионального образования
«Дальневосточный государственный
университет путей сообщения»

Кафедра “Высшая математика”

Л.В. Марченко Г.В. Костина

ВВЕДЕНИЕ В ВЫСШУЮ МАТЕМАТИКУ

Методическое пособие для студентов ИИФО специальностей
100100 «Сервис» и 100400 «Туризм».

Хабаровск
2013

УДК 51
ББК 22.11
М 300

Рецензент:

Доцент кафедры «Высшая математика»
Дальневосточного государственного университета
путей сообщения
кандидат физико-математических наук
В.И. Жукова

Марченко Л.В.
М 300 Введение в высшую математику: методическое пособие/ Л.В. Марченко, Г.В. Костина. – Хабаровск: Изд-во ДВГУПС, 2013. – 38 с.

Методическое пособие соответствует Государственному образовательному стандарту высшего профессионального образования направления подготовки 100100 «Сервис» и 100400 «Туризм» по дисциплине «Математика».

В пособии рассмотрены базовые разделы, необходимые для изучения дисциплин математического и естественнонаучного циклов. Помимо теоретической части пособие включает варианты выполнения контрольной работы.

Предназначено для студентов 1 курса заочной формы обучения направления подготовки 100100 «Сервис» и 100400 «Туризм».

УДК 51
ББК 22.11

ВВЕДЕНИЕ

Дисциплина «Введение в высшую математику» позволяет освоить базовые математические понятия, способствующие успешному овладению последующих курсов естественных наук и получению специализированных компетенций. Для изучения математики требуется качественное знание школьного курса этой дисциплины. Между тем, отдельные разделы требуют дополнительного рассмотрения. Кроме того, выработка общематематической культуры невозможна без изучения основных понятий математической логики, комбинаторики и других разделов дискретного анализа.

Данное пособие помимо теоретических сведений содержит варианты для выполнения контрольной работы по соответствующей дисциплине.

ПРАВИЛА ВЫПОЛНЕНИЯ КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ

Дисциплина «Введение в высшую математику» изучается в первом семестре первого года обучения. Студенту необходимо выполнить одну контрольную работу и сдать зачет по дисциплине.

Контрольная работа выполняется в отдельной тетради. На обложке следует указать название вуза, кафедры, номер контрольной работы, дисциплину, по которой выполняется работа, шифр специальности, номер зачетной книжки, а также фамилию, имя, отчество студента.

Вариант контрольной работы выбирается по последней цифре номера зачетной книжки студента. Если последней цифрой является ноль, то студент выполняет десятый вариант.

Условия задач необходимо переписать в тетрадь, а решения сопровождать подробными пояснениями. Работы, отпечатанные на компьютере, не принимаются.

Контрольная работа должна быть сдана до начала сессии.

Если при проверке контрольной работы были сделаны замечания, то необходимо провести соответствующие исправления в решениях.

1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ ТЕОРИИ МНОЖЕСТВ

Множество – это первичное понятие в математике. Оно не определяется, можно дать лишь его описание или заменить слово «множество» синонимами. Например, совокупность, набор, класс, коллекция, семейство и так далее. Множество надо понимать как совокупность объектов произвольной природы. Например, множество сотрудников в офисе, множество планет солнечной системы и так далее. Множество может быть конечным, если оно состоит из конечного числа элементов, или бесконечным, если оно содержит бесконечно много элементов. В теории множеств понятие множества задается с помощью некоторой системы аксиом.

Объекты, составляющие множество, называют его ***элементами*.** Задать множество — это значит указать правило, по которому можно отличить его элементы, от объектов, ему не принадлежащих. Множества обычно обозначают большими (прописными) буквами: $A, B, C.$ $\mathbf{K}$. Элементы множества обозначают малыми (строчными) буквами: $a, b, c.$ $\mathbf{K}$, и так далее. Утверждение «элемент a принадлежит множеству A» символически записывается так: $a \in A$. Запись $a \notin A$ означает, что элемент a не принадлежит множеству A. Реже употребляется запись вида $a \overline{\in} A$, также показывающая, что a не является элементом множества A. Если все элементы, из которых состоит A, входят и в множество B, то A называется подмножеством множества B, что обозначается $A \subset B$. Множества B и A называются равными, если они состоят из одних и тех же элементов: $A = B$. Запись $A \subseteq B$ указывает, что или $A \subset B$, или $A = B$. Множество, которое не содержит ни одного элемента, называется ***пустым***. Пустое множество обозначается символом Ø. Любое множество содержит Ø в качестве подмножества. Иногда вводится понятие универсального множества. Универсальное множество U – это множество, обладающее тем свойством, что все множества являются его подмножествами.

Объединением или суммой двух множеств A и B называется множество, состоящее из всех элементов, принадлежащих хотя бы одному из этих множеств. Обозначается $A \mathbf{U} B$.

Пересечением или произведением двух множеств A и B называется множество, состоящее из всех элементов, принадлежащих как A так и B (т.е. множество их общих элементов). Обозначается $A \mathbf{I} B$. Если множества A и B не имеют общих элементов, то $A \mathbf{I} B = \varnothing$. В этом случае множества A и B называются непересекающимися.

Разностью двух множеств A и B называется множество, состоящее из всех элементов, которые принадлежат множеству A, но не принадлежат множеству B. Обозначается $A \setminus B$.

Симметрической разностью двух множеств A и B называется множество, которое определяется как сумма (объединение) разностей $A \setminus B$ и $B \setminus A$. Обозначается $A \Delta B = (A \setminus B) \mathbf{U} (B \setminus A)$.

Операции над множествами удобно изображать в виде диаграмм Эйлера – Венна. Множества в диаграммах Венна изображаются внутренними частями круга. Универсальное множество изображается прямоугольником. Результат соответствующей операции на рис. 1, 2 указан закрашенной частью кругов.

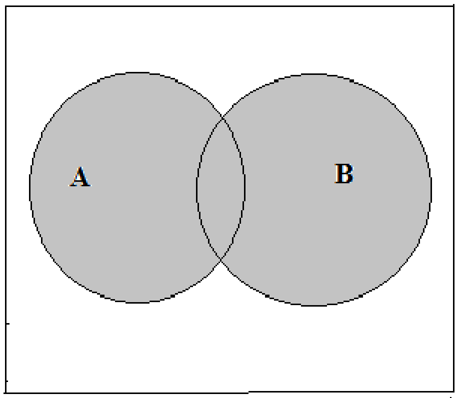

Рис.1. Объединение множеств.

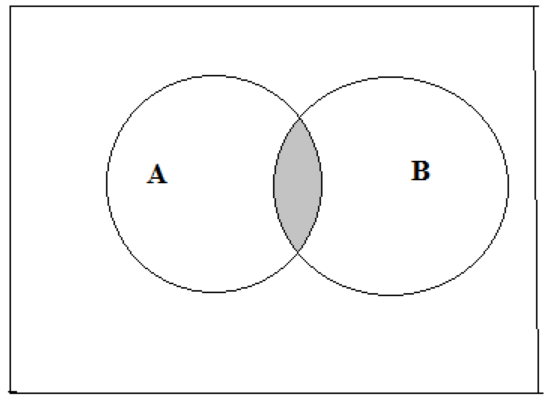

Рис.2 . Пересечение множеств.

Хорошо известными множествами чисел являются:

N – множество натуральных чисел;

Z – множество целых чисел;

Q – множество рациональных чисел;

R – множество действительных чисел.

Справедливо соотношение $N \subset Z \subset Q \subset R$.

Натуральные числа возникли в результате счета предметов. В порядке возрастания их можно записать как ряд чисел 1, 2, 3, 4, … . Натуральных чисел бесконечно много.

Множество, состоящее из натуральных чисел, целых отрицательных чисел (т.е. чисел $-1, \; -2, \; -3, \; \mathbf{K}, \; -n, \; \mathbf{K}$) и нуля (с арифметическими операциями) называется ***множеством целых чисел***, а сами эти числа называются ***целыми***.

Множество целых и дробных чисел (положительных и отрицательных) составляет ***множество рациональных чисел***. Любое рациональное число можно записать в виде дроби $\frac{p}{q}$ где p– целое число, q – натуральное число.

Иррациональным числом называют каждое число, не представимое в виде дроби $\frac{p}{q}$. Например, числа $\sqrt{2}$, $\sqrt[3]{7}$, $p \approx 3{,}14$ (отношение длины окружности к диаметру) – иррациональные.

Объединение множества рациональных чисел и множества иррациональных чисел (бесконечных десятичных непериодических дробей) дает ***множество действительных чисел***. На множестве действительных чисел определены все арифметические операции за исключением:

деления на ноль;

возведения нуля в нулевую степень;

извлечения корня четной степени из отрицательного числа.

Множество действительных чисел ***непрерывно***, то есть для любых двух неравных действительных чисел всегда найдется число меньшее одного из них и большее другого.

Множество может содержать конечное или бесконечное количество элементов. Конечные множества могут быть заданы простым перечислением элементов. Для бесконечных множеств способом задания является перечисление всех свойств, которыми обладают элементы данного множества. Количество элементов множества называется его мощностью. Из двух множеств более мощным является то, которое содержит больше элементов. Если количество элементов двух множеств одинаково, то множества называются равномощными. Простейшим среди бесконечных множеств является множество натуральных чисел, которое называется бесконечным ***счетным*** множеством. Все бесконечные множества, элементы которых можно пронумеровать с помощью натуральных чисел (поставить в соответствие каждому элементу множества ровно одно натуральное число, причем разным элементам множества будут соответствовать разные натуральные числа) также являются счетными множествами. Рациональные числа и целые числа представляют собой примеры счетных множеств. Множество действительных чисел бесконечно и несчетно. Оно является более мощным по сравнению с множеством натуральных чисел.

Всякое множество можно задать либо перечислив все его элементы (в случае конечного множества), либо указав свойства элементов этого множества. Для задания обычно используются фигурные скобки, внутри которых либо перечисляются элементы множества, либо указываются их особенные характеристики. Например, запись $A=\{-2,\ 3,\ 5,\ 9\}$ означает, что множество А состоит из четырех элементов, которые указаны в фигурной скобке.

Пример. Числовые множества A и B конечны и состоят из следующих элементов: $A=\{3,\ 7,\ 8,\ 9,\ 11\}$, $B=\{1,\ 2,\ 3,\ 8,\ 9,\ 10,\ 12,\ 13\}$. Найти объединение, пересечение, разность и симметрическую разность данных множеств.

Решение. Согласно определению, объединение множеств состоит из тех элементов, которые принадлежат хотя бы одному из множеств

А или В, поэтому $A \cup B = \{1,\ 2,\ 3,\ 7,\ 8,\ 9,\ 10,\ 11,\ 12,\ 13\}$. Пересечение множеств состоит из общих элементов обоих множеств $A \cap B = \{3,\ 8,\ 9\}$. Разность множеств $A \setminus B$ содержит только те элементы множества А, которые не являются элементами множества В: $A \setminus B = \{7,\ 11\}$. Аналогично $B \setminus A = \{1,\ 2,\ 10,\ 12,\ 13\}$. Симметрическая разность

$$A \Delta B = (A \setminus B) \cap (B \setminus A) = \{1,\ 2,\ 7,\ 10,\ 11,\ 12,\ 13\}.$$ ■

Пример. Определите количество элементов данного множества $A = \{3,\ 7,\ 8,\ \{3,\ 7\},\ 15\}$.

Решение. Множество А состоит из пяти элементов: чисел 3, 7, 8, 15 и множества {3, 7}, которое также является элементом множества А. ■

Пример. Вставьте между множествами один из символов $\in$ или $\subset$, чтобы получилось истинное утверждение:

$\{1,\ 2\} \quad \{1,\ 2,\ 4,\ 6\}$;

$\{1,\ 2\} \quad \{1,\ 2,\ \{1,\ 2\},\ \{7,\ 8\}\}$.

Решение. Для первой пары множеств правильным будет утверждение $\{1,\ 2\} \subset \{1,\ 2,\ 4,\ 6\}$, поскольку каждый элемент первого множества является элементом второго множества.

Для второй пары множеств справедливо следующее высказывание $\{1,\ 2\} \in \{1,\ 2,\ \{1,\ 2\},\ \{7,\ 8\}\}$, так как первое множество $\{1,\ 2\}$ содержится во втором в качестве элемента. ■

Множество действительных чисел можно изобразить графически в виде точек числовой оси.

Возьмем на плоскости произвольную прямую и отметим на этой прямой некоторую точку О, называемую началом отсчета. Теперь будем двигаться по прямой в одном из направлений от точки отсчета, считая это направление положительным (это положительное направление отмечают стрелкой). Тогда движение в противоположном направлении от точки О будет называться отрицательным. Прямая, на которой указано положительное направление, называется ***осью***. Если теперь на оси выбрать единицу измерения, то мы получим числовую ось (каждому действительному числу будет соответствовать единственная точка числовой оси). Если числовая ось изображена горизонтальной линией, то положительным направлением, обычно, считают движение слева направо (рис. 3).

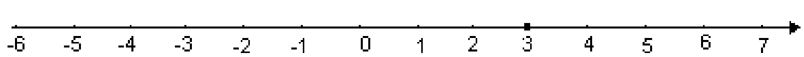

Рис. 3. Числовая ось.

Для каждых двух действительных чисел a и b определено одно из соотношений: $a > b$, $a < b$ или $a = b$. Наличие сравнения «больше» или «меньше» для любой пары действительных чисел называется свойством упорядоченности множества всех действительных чисел. Исходя из упорядоченности множества действительных чисел R и возможности их графического представления в виде точек числовой оси, можно задавать подмножества действительных чисел в виде интервала или отрезка на числовой оси. Например, множество действительных чисел, меньших либо равных двум, имеет следующее задание: $A=\{x\in R: x\le 2\}$. Запись $B=\{x\in R: x<2\}$ означает, что рассматривается множество действительных чисел, меньших, чем два. Множество $C=\{x\in R: x>(-3)\}$ определяет действительные числа, большие, чем (-3). Приведенные примеры множеств определяли на действительной оси бесконечные промежутки. Такие множества называются неограниченными или, точнее, неограниченными слева или справа.

Если $a\le b$, $a\in R$, $b\in R$, то множество $\{x\in R: a\le x\le b\}$ называется ***отрезком*** числовой прямой и обозначается $[a,b]=\{x\in R: a\le x\le b\}$. Если $a<b$, $a\in R$, $b\in R$, то множество $\{x\in R: a<x<b\}$ называется ***интервалом*** числовой прямой и обозначается $(a,b)=\{x\in R: a<x<b\}$. Заметим, что отрезок включает в себя граничные точки множества, поэтому отрезок является ***замкнутым*** множеством. Интервал не включает граничные точки множества и называется ***открытым*** множеством.

Множества $(a,b]=\{x\in R: a<x\le b\}$, $[a,b)=\{x\in R: a\le x<b\}$ называются полуоткрытыми (полуинтервалами). Множество $R=(-\infty,+\infty)$ определяет всю числовую ось, то есть все множество действительных чисел.

Пример. Даны два множества $A=\{x\in R: -3{,}5<x\le 2\}$ и $B=\{x\in R: -1\le x<5\}$. Укажите множество целых чисел, принадлежащих пересечению множеств A.и B.

Решение. Найдем пересечение множеств $A\cap B=\{x\in R: -1\le x\le 2\}=[-1;2]$. Полученный отрезок содержит четыре целых числа, поэтому искомое множество имеет вид $C=(x\in Z)\cap(A\cap B)=\{-1,\ \ 0,\ \ 1,\ \ 2\}$. ■

Если $a\in R$ – произвольное действительное число, $e>0$ – положительное число, то интервал $(a-e,a+e)$ называется e – окрестностью точки $a\in R$. С понятием окрестности точки связаны многие базовые понятия математики.

Пример. На числовой прямой заданы множества: $(-3,\ 5)$, $(0,\ 4)$, $(1{,}5;\ 2{,}5)$, $[0,\ 4)$, $[1,\ 3]$, $(1,\ 3]$. Укажите, какие из указанных множеств являются окрестностями точки $x=2$.

Решение. Окрестностью точки является интервал, для которого точка $x = 2$ является серединой. Этому требованию удовлетворяют интервалы $(0, \quad 4)$ и $(1{,}5; \quad 2{,}5)$. ■

2. КОМБИНАТОРИКА. ГРУППИРОВКИ ЭЛЕМЕНТОВ КОНЕЧНОГО МНОЖЕСТВА.

Пусть задано некоторое конечное множество. Требуется составить из его элементов некоторые группы и выяснить, сколько всего таких групп можно получить. Раздел математики, занимающийся подсчетом числа всевозможных соединений (комбинаций) того или иного вида, называется комбинаторикой. Определим основные принципы подсчета таких соединений. Это комбинаторный принцип сложения (правило суммы) и комбинаторный принцип умножения (правило произведения).

Правило суммы. Пусть объект a можно выбрать m способами, объект b можно выбрать n способами. Тогда выбор либо объекта a, либо объекта b можно осуществить $m+n$ способами.

Пример. Студент выбирает какую-либо одну книгу на полке, где находятся 20 различных учебников по математике, 15 учебников по информатике и 10 учебников по химии. Тогда существуют 20+15+10=47 различных вариантов выбора книги. ■

Правило произведения. Пусть объект a можно выбрать m способами, объект b можно выбрать n способами. Тогда выбор пары a и b можно осуществить $m \cdot n$ способами.

Пример. Из города А в город В ведут 5 дорог, а из города В до города С ведут 4 дороги. Следовательно, количество путей, ведущих из А в С и проходящих через город В, равно $5 \cdot 4 = 20$. ■

Рассмотрим группы элементов, называемые ***перестановками***, ***размещениями*** и ***сочетаниями***.

Пусть задано множество, состоящее из n различных элементов. Обозначим элементы множества $\{x_1, \quad x_2, \quad \mathbf{K}, \quad x_n\}$ и вычислим, сколько существует способов записать элементы этого множества в различном порядке. На первое место мы можем поставить любой из n имеющихся элементов. Тогда для выбора элемента на второе место остается (n-1) способ. Третий элемент можно выбрать (n-2) способами, и так далее. Согласно правилу произведения, общее количество различных перестановок элементов будет равно $n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \mathbf{L}\, 3 \cdot 2 \cdot 1$.

Множества, состоящие из одного и того же числа элементов и отличающиеся друг от друга только порядком элементов, называются ***перестановками***.

Каждая перестановка содержит все n элементов множества, и различные перестановки отличаются только порядком элементов.

Число перестановок из n элементов обозначается $P_n = n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\ldots 3\cdot 2\cdot 1$, где P – первая буква французского слова permutation – перестановка.

Произведение подряд идущих натуральных чисел от 1 до некоторого n называется ***факториалом*** целого положительного числа n и обозначается $n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\ldots 3\cdot 2\cdot 1 = n!$. Таким образом, $P_n = n!$. Принято считать, что $0! = 1$.

Пример. Сколько различных четырехзначных чисел можно составить из цифр 1, 2, 5, 8 при условии, что цифры в числе не повторяются?

Решение. Количество различных четырехзначных чисел из данных цифр равно числу перестановок из четырех элементов $P_4 = 4! = 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1 = 24$. ■

Пример. Найти n, если $P_{n-2} = 120$.

Решение. Применяя формулу для числа перестановок, запишем соотношение в виде $P_{n-2} = (n-2)! = 1\cdot 2\cdot 3\ldots(n-2) = 120$. Подберем значение n, исходя из равенств $0! = 1$, $1! = 1$, $2! = 1\cdot 2 = 2$, $3! = 1\cdot 2\cdot 3 = 6$, $4! = 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4 = 24$, $5! = 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5 = 120$. Следовательно, $(n-2)! = 120 = 5!$, откуда $n-2 = 5$ и $n = 7$.■

Вновь рассмотрим множество, состоящее из n различных элементов $\{x_1, \ x_2, \ \ldots, \ x_n\}$, зафиксируем некоторое натуральное число $k < n$ и вычислим, сколько существует способов составить группы, содержащие k элементов из данных n, отличающиеся друг от друга либо самими элементами, либо их порядком. То есть нас будут интересовать различные упорядоченные подмножества, состоящие из k элементов. Согласно комбинаторному принципу умножения, число таких групп равно $n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\ldots(n-k+1)$.

Упорядоченные подмножества, состоящие из k элементов, выбранных из данных n, называются ***размещениями из*** n ***элементов по*** k.

Число размещений обозначается символом A_n^k, где A - первая буква французского слова arrangement, что означает размещение, приведение в порядок.

Формулу $A_n^k = n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\ldots(n-k+1)$ удобно записывать в виде $A_n^k = \dfrac{n!}{(n-k)!}$.

Заметим, что при $k = n$ мы получаем формулу перестановок.

Пример. Сколько существует способов избрания президента, вице-президента, секретаря и казначея из 32 членов клуба?

Решение. Из 32 человек необходимо выбрать четверых, причем важно, в каком порядке будет происходить выбор, поскольку каждому достаются различные посты. Поэтому количество способов равно числу размещений из 32 по 4:

$$A_{32}^{4}=\frac{32!}{(32-4)!}=\frac{32!}{28!}=32\cdot 31\cdot 30\cdot 29=863040. \ ■$$

Пример. Найти n, если $\frac{P_{n+5}}{P_{n-k}}=240\cdot A_{n+3}^{k+3}$.

Решение. Применяя формулы для числа перестановок и числа размещений, запишем соотношение в виде $\frac{(n+5)!}{(n-k)!}=240\cdot\frac{(n+3)!}{(n+3-k-3)!}$. После сокращения получим $(n+5)(n+4)=240$, $n^2+9n-220=0$, $n=11$, $n=-20$. Поскольку число n натуральное, то смысл имеет только значение $n=11$. ■

Теперь рассмотрим ситуацию, в которой из множества $\{x_1,\ x_2,\ \mathbf{K},\ x_n\}$ требуется выбрать группы, содержащие k элементов из данных n, $k<n$, отличающиеся друг от друга хотя бы одним элементом. Причем порядок расположения элементов не имеет значения. Очевидно, что количество таких групп будет меньше, чем число размещений из n по k во столько раз, сколько существует перестановок из k элементов, а именно $\frac{A_n^k}{k!}=\frac{n!}{(n-k)!k!}$.

Подмножества, состоящие из k элементов, выбранных из данных n, отличающиеся друг от друга по крайней мере одним элементом (без учета порядка расположения элементов), называются ***сочетаниями из*** n ***элементов по*** k.

Число сочетаний обозначается символом $C_n^k=\frac{n!}{(n-k)!k!}$, где C – первая буква французского слова combinacion – сочетания.

Пример. Для участия в профсоюзной конференции требуется направить четверых сотрудников из 32 сотрудников отдела. Сколько существует вариантов выбора представителей?

Решение. Поскольку для выбора представителей важен только состав участников, но не важно, в каком порядке происходило их выдвижение, то количество всевозможных вариантов равно числу сочетаний из 32 по 4: $C_{32}^{4}=\frac{32!}{28!\cdot 4!}=\frac{29\cdot 30\cdot 31\cdot 32}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}=35960$. ■

Пример. Решить неравенство $C_{10}^{x-1}\geq 2C_{10}^{x}$.

Решение. В силу определения сочетаний, значениями переменной x могут быть только целые числа от 1 до 10. Используя формулу сочетаний, запишем неравенство в виде $\frac{10!}{(10-x+1)!(x-1)!} \geq 2\frac{10!}{(10-x)!x!}$. Разделим обе части неравенства на $\frac{10!}{(10-x)!(x-1)!}$ и получим $\frac{1}{(11-x)} \geq \frac{2}{x}$. Откуда $x \geq 22-2x$ или $x \geq \frac{22}{3}$. Учитывая ограничения на x, получаем множество решений данного неравенства $\{8, \ 9, \ 10\}$.■

Число C_n^k обладает рядом свойств. Укажем без доказательства некоторые из них.

1) $C_n^k = C_n^{n-k}$, в частности $C_n^0 = C_n^n = 1$;

2) $C_{n+1}^{k+1} = C_n^k + C_n^{k+1}$;

3) $C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \ldots + C_n^k + \ldots + C_n^{n-1} + C_n^n = 2^n$.

Доказательства перечисленных свойств можно получить непосредственно из определения сочетаний.

Перестановки, размещения и сочетания представляют собой примеры ***бесповторных*** выборок, поскольку каждый элемент множества может быть взят только один раз. Теперь рассмотрим ситуацию, при которой выбранный элемент возвращается в первоначальное множество, и его вновь можно выбирать. Пусть дано множество, состоящее из n различных элементов $\{x_1, \ x_2, \ \ldots, \ x_n\}$. Зафиксируем некоторое натуральное число k и вычислим, сколько существует способов составить группы, содержащие k элементов из данных n, причем каждый из k элементов может быть выбран более одного раза. Первым элементом может быть любой из n элементов множества, то есть для выбора первого элемента существует n способов. Поскольку каждый элемент можно выбирать неоднократно, то второй элемент можно выбрать также n способами. Рассуждая подобным образом, получим, что каждый из k элементов можно выбрать n способами. Согласно комбинаторному принципу умножения получим, что общее число выборок по k элементов из данных n равно n^k. Указанная выборка называется ***повторной***. Заметим, что ограничение, справедливое для бесповторных выборок, $k \leq n$, не работает в случае повторяющихся элементов. Для повторных выборок число k может быть как больше, так и меньше либо равным n.

Пример. Сколько различных пятизначных чисел можно составить из цифр 1, 2, 5, 8 при условии, что цифры в числе могут повторяться?

Решение. Из множества, содержащего $n=4$ различных элементов нужно составить выборки, содержащие $k=5$ элементов. Поскольку цифры в числе могут повторяться, то общее число всевозможных выборок равно $n^k=4^5=1024$. ■

3. ПРЯМОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЕ МНОЖЕСТВ. БИНАРНЫЕ ОТНОШЕНИЯ.

Пусть даны два произвольных множества X и Y, элементы которых мы будем обозначать $x\in X$, $y\in Y$. Произведением (или ***декартовым произведением***) двух непустых множеств $X\times Y$ называется множество упорядоченных пар (x,y), где $x\in X$, $y\in Y$. Упорядоченность пары означает, что если мы будет рассматривать декартово произведение $Y\times X$, то соответствующая пара будет иметь вид (y,x), где $y\in Y$, $x\in X$.

Пример. Даны множества $A=\{a,\ b,\ c,\ d\}$, $B=\{a,\ c,\ d,\ f\}$, $C=\{a,\ b,\ f,\ e\}$. Найти число элементов декартова произведения множеств $A\times(B\cap C)$ и указать эти элементы.

Решение. Найдем пересечение множеств $B\cap C$, содержащее общие элементы обоих множеств: $B\cap C=\{a,\ f\}$. Поскольку множество A содержит четыре элемента, а множество $B\cap C$ – два элемента, то, согласно комбинаторному принципу умножения, количество соответствующих пар декартова произведения будет равно $4\times 2=8$. Перечислим все возможные пары: (a,a), (a,f), (b,a), (b,f), (c,a), (c,f), (d,a), (d,f). ■

Понятие декартова произведения можно обобщить на случай n множеств. Если $X_1,\ X_2,\ \ldots,\ X_n$ - произвольные непустые множества, то их декартово произведение состоит из всевозможных упорядоченных наборов $(x_1,x_2,\ldots,x_n)$, где $x_1\in X_1$, $x_2\in X_2$, …, $x_n\in X_n$. В частности, декартово произведение множества действительных чисел на себя $R\times R=R^2$ представляет собой множество всевозможных упорядоченных пар действительных чисел.

В разделе 1 было установлено взаимообратное соответствие действительных чисел и точек числовой оси. Если теперь взять две взаимно перпендикулярные оси с общим началом отсчета и одинаковой единицей измерения, то мы получим на плоскости ***декартову прямоугольную систему координат***. Каждая из осей называется координатной осью. Горизонтальная ось называется ***осью абсцисс*** и обозначается ОХ, а вертикальная – ***осью ординат*** и обозначается ОУ, система координат обозначается ХОУ. Каждой точке плоскости соответствует один из элементов декартова произведения $R \times R = R^2$, а каждому элементу декартова произведения соответствует ровно одна точка плоскости XOY. Точка О называется ***началом координат***. Координатные оси делят всю плоскость на четыре угла, которые называются либо координатными углами, либо квадрантами, либо четвертями. Квадранты нумеруются в направлении против часовой стрелки, как указано на рис. 4.

Первому квадранту соответствуют значения $x > 0, y > 0$;

второму квадранту – значения $x < 0, y > 0$;

третьему квадранту – значения $x < 0, y < 0$;

четвертому квадранту – значения $x > 0, y < 0$.

Положение произвольной точки М на плоскости в декартовой прямоугольной системе координат определяют следующим образом. Из точки М опускают перпендикуляр на ось ОХ и фиксируют точку на оси, соответствующую основанию перпендикуляра – это координата x. Теперь опустим перпендикуляр на ось ОУ и получим координату y. Эти два значения (x, y) полностью определяют положение точки М на плоскости.

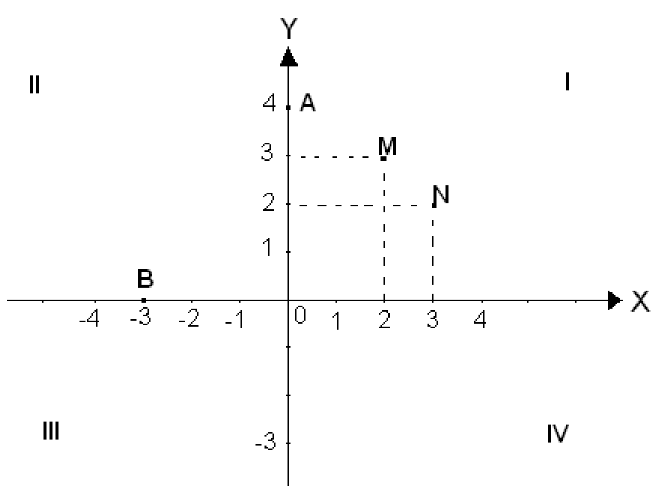

Рис.4. Декартова система координат.

Таким образом, точка М определена своими ***проекциями на координатные оси***. Указывая координаты точки, принято первой указывать координату x, а второй – координату y: $M(x, y)$. Пары (2;3) и (3;2) определяют разные точки плоскости. На рис.4 это точки М и N соответственно. Если точка лежит на оси абсцисс ОХ, то ее координата y (ордината) равна нулю. Если же точка лежит на оси ординат ОУ, то ее координата x (абсцисса) равна нулю. На рис. 4

точки А и В имеют координаты А(0;4), В(-3;0). Начало координат точка О имеет нулевые координаты: О(0;0).

Пример. Пусть даны два множества: $X = \{x \in R | -2 < x \le 2\}$, $Y = \{y \in R | -3 \le y \le 5\}$. Изобразить в декартовой системе координат область, соответствующую декартовому произведению множеств $X \times Y$.

Решение. Декартовым произведением множеств являются всевозможные пары (x, y), то есть точки в декартовой системе координат, для которых $-2 < x \le 2$ и $-3 \le y \le 5$. Границами искомой области являются прямые $x = 2$, $y = -3$, $y = 5$ и пунктирная линия $x = -2$, так как точки прямой $x = -2$ не принадлежат множеству X. На рис.5 изображена область, которая является декартовым произведением $X \times Y$. ■

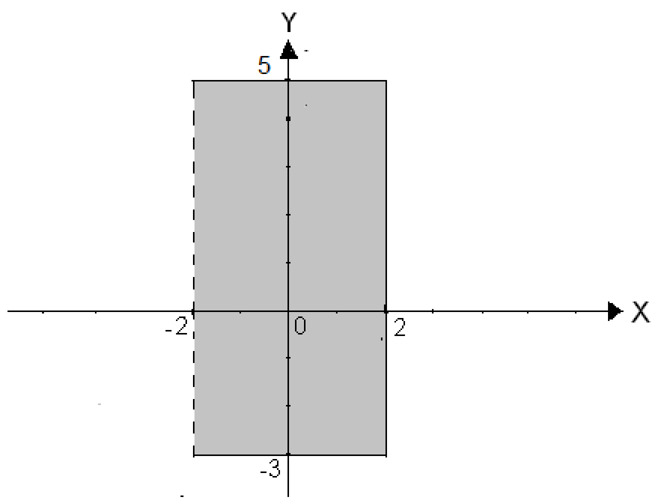

Рис. 5. Декартово произведение $X \times Y$

Декартово произведение множеств $X \times Y$ содержит в качестве элементов упорядоченные пары (x, y). Любое подмножество из произведения $X \times Y$ называется ***бинарным отношением***.

4. ОТОБРАЖЕНИЕ МНОЖЕСТВ. ФУНКЦИЯ.

Рассмотрим два произвольных множества X и Y, элементы которых мы будем обозначать $x \in X$, $y \in Y$. Поставим каждому элементу $x \in X$ в соответствие один и только один элемент $y \in Y$ по определенному правилу f. Тем самым мы задаем ***отображение*** множества X в множество Y. Для обозначения отображения одного множества в другое будем использовать запись $f : X \to Y$. Если x -

элемент множества X, а y - соответствующий ему при отображении элемент из Y, то можно записать $y=f(x)$. Вместо термина «отображение» часто используют термин «***функция***». Множество X называется множеством (областью) определения функции $f(x)$, а множество Y - множеством (областью) значений функции $y=f(x)$. Если x - элемент из множества X, то отвечающий ему элемент $y=f(x)$ называется его ***образом*** (при отображении f). Совокупность тех элементов $x\in X$, образом которых является данный элемент $y\in Y$, называется ***прообразом*** элемента y и обозначается $f^{-1}(y)$.

Если функция $f:X\to R$, где $X\subset R$, $X\neq\varnothing$, то есть областью определения функции и областью значений функции являются действительные числа, то говорят, что задана действительная функция действительного аргумента. Для действительных функций $y=f(x)$ принято обозначать область определения $D(f)$, а область значений функции $E(f)$. Величина x называется независимой переменной или ***аргументом*** функции, а величина y - зависимой переменной или ***значением*** функции.

Функция может быть задана различными способами: аналитическим (формулой), табличным, описательным, графическим.

Если функция задана формулой и область определения функции не указана, то считают, что область определения состоит из всех значений независимой переменной, при которых эта формула имеет смысл (принимает действительные значения).

Пример. Найти область определения функции $y=\dfrac{x}{x-1}$.

Решение. Функция представляет собой дробь, поэтому определена только в том случае, если знаменатель дроби отличен от нуля: $x-1\neq 0$, $x\neq 1$. Следовательно, область определения функции – все действительные значения переменной x, за исключением значения $x=1$.

Ответ: $x\in(-\infty;1)\cup(1;+\infty)$.■

Пример. Найти область определения функции $y=\sqrt{5-2x}$.

Решение. Функция содержит корень четной степени, который определен только в случае неотрицательного подкоренного выражении: $5-2x\geq 0$, $-2x\geq -5$, $x\leq\dfrac{5}{2}=2{,}5$. Следовательно, область определения функции – действительные числа, не превосходящие значения $2{,}5$.

Ответ: $x\in(-\infty;2{,}5]$.■

Если требуется найти значение функции при определенном значении аргумента x, то надо подставить вместо переменной ее числовое значение. Например, значение функции $y(x)=2x^2+\sqrt{x}$ при $x=4$, равно $y(4)=2\cdot 4^2+\sqrt{4}=34$.

Графиком функции $y=f(x)$ является изображение в декартовой системе координат множества точек (x,y), где $x\in D(f)$, а $y=f(x)$.

Если буквально следовать определению, то для построения графика функции нужно найти все пары соответствующих значений аргумента и функции и построить все точки с этими координатами. В большинстве случаев это сделать невозможно, так как таких точек бесконечно много. Поэтому обычно находят несколько характерных точек, принадлежащих графику, и соединяют их либо отрезками прямой, либо плавной кривой. Чтобы выяснить, какие точки следует прежде всего определить для построения графика, рассмотрим общие свойства функций.

Общие свойства функции.

Определение. Функция $y=f(x)$ называется ***четной,*** если она обладает следующими двумя свойствами:

1) область определения этой функции симметрична относительно точки O (начала координат), то есть если точка x принадлежит области определения, то и точка $(-x)$ также принадлежит области определения;
2) для любого значения x, взятого из области определения функции, выполняется равенство $f(x)=f(-x)$.

График четной функции симметричен относительно оси ординат.

Определение. Функция $y=f(x)$ называется ***нечетной,*** если:

1) область определения этой функции симметрична относительно точки O (начала координат), то есть если точка x принадлежит области определения, то и точка $(-x)$ также принадлежит области определения;
2) для любого значения x, взятого из области определения функции, выполняется равенство $f(-x)=-f(x)$.

График нечетной функции симметричен относительно начала координат.

Замечание. При построении графиков четных и нечетных функций достаточно построить только правую ветвь графика – для положительных значений аргумента. Левая ветвь достраивается четным или нечетным образом.

Определение. Функция $y=f(x)$ называется ***периодической***, если существует такое число $T\neq 0$, что для любого значения x, взятого из области определения функции, значения $x \pm T$ также принадлежат этой области определения и выполняется равенство $f(x) = f(x \pm T)$.

Число T называется ***периодом*** функции. Для всякого целого числа $k \neq 0$ значение Tk также является периодом. Следовательно, всякая периодическая функция имеет бесконечное множество периодов. На практике обычно рассматривают наименьший положительный период.

Значения периодической функции через промежуток, равный периоду, повторяются. Это обстоятельство используется при построении графика.

Определение. Нулем функции называется то действительное значение x, при котором значение функции равно нулю.

Чтобы найти нули функции, необходимо решить уравнение $f(x) = 0$. Графически нули функции представляют собой абсциссы точек, в которых график этой функции пересекает ось абсцисс или касается её. Функция может не иметь нулей.

Определение. Функция $y = f(x)$ ***монотонно возрастает*** на интервале $(a;b)$, если для любых x_1 и x_2, принадлежащих интервалу $(a;b)$, из неравенства $x_2 > x_1$ следует неравенство $f(x_2) > f(x_1)$.

Функция $y = f(x)$ ***монотонно убывает*** на интервале $(a;b)$, если для любых x_1 и x_2, принадлежащих интервалу $(a;b)$, из неравенства $x_2 > x_1$ следует неравенство $f(x_2) < f(x_1)$. (Интервал $(a;b)$ принадлежит области определения функции.)

Укажем ***основные элементарные функции***. К основным элементарным функция относятся:

1. Степенная функция $y = x^a$, где a - любое действительное число.

2. Показательная функция $y = a^x$, где $a > 0, \quad a \neq 1$.

3. Логарифмическая функция $y = \log_a x$, где $a > 0, \quad a \neq 1$.

4. Тригонометрические функции $y = \sin x, \quad y = \cos x, \ y = tgx,$ $y = ctgx$.

5. Обратные тригонометрические функции $y = \arcsin x, y = \arccos x,$ $y = arctgx, arcctgx$.

Основные элементарные функции могут соединяться между собой с помощью арифметических действий (сложения, вычитания, умножения, деления), а также взятия функции от функции (суперпозиции функций).

Функция, заданная формулой $y = kx + b$, где k и b – некоторые числа, называется ***линейной функцией.*** Областью определения линейной функции служат все действительные числа. Графиком линейной функции является прямая.

Функция, заданная формулой $y=ax^2+bx+c$, где y,x – переменные, a,b,c – заданные числа, $a\neq 0$, называется ***квадратичной функцией***. Областью определения квадратичной функции является множество действительных чисел. Графиком функции $y=ax^2+bx+c$ является ***парабола***.

Функция вида $y=\frac{ax+b}{cx+d}$, где a, b, c, d – постоянные числа, причем $c\neq 0$, $ad\neq bc$, называется ***дробно-линейной функцией***. Функция определена всюду, кроме значения $x=-\frac{d}{c}$. Если $a=0$, $c=1$, $d=0$, то получим частный случай дробно-линейной функции $y=\frac{b}{x}$. Область определения такой функции $x\in(-\infty,0)\mathbf{U}(0,+\infty)$. Графиком функции $y=\frac{b}{x}$ является кривая, состоящая из двух ветвей, симметричных относительно начала координат. Такая кривая называется ***гиперболой***.

Если известен график функции $y=f(x)$, то с помощью некоторых преобразований плоскости (параллельного переноса, осевой симметрии, центральной симметрии, сжатия и растяжения) можно построить графики более сложных функций.

Простейшие преобразования графика функции.

1. Построение графика функции $y=af(x)$, где $a\neq 0$.

График функции $y=af(x)$ получаются умножением на число a соответствующих ординат точек графика функции $y=f(x)$. Такое преобразование графика функции называется его растяжением вдоль оси Oy в a раз, если $a>1$, и сжатием вдоль этой оси в $\frac{1}{a}$ раз при $0<a<1$. Если $a<0$, то график функции $y=|a|f(x)$ необходимо симметрично отобразить относительно оси *OX*.

2. Построение графика функции $y=f(x+a)+b$.

Чтобы построить графика функции $y=f(x+a)+b$ необходимо:

а) построить график функции $y=f(x)$;

б) выполнить параллельный перенос графика функции $y=f(x)$ по оси Ox на $|a|$ единиц вправо, если $a<0$, или на $|a|$ единиц влево, если $a>0$;

в) полученный в предыдущем пункте график функции $y=f(x+a)$ параллельно перенести в положительном направлении оси Oy на $|b|$ единиц, если $b>0$, и в отрицательном направлении этой оси на $|b|$ единиц, если $b<0$.

3. Построение графика функции $y=f(kx)$.

График функции $y=f(kx)$ получается из графика функции $y=f(x)$ сжатием с коэффициентом k к оси Oy (если $0<k<1$) или растяжением (если $k>1$). График функции $y=f(-kx)$ получается из графика функции $y=f(kx)$ симметричным отображением относительно оси Oy.

Пример. С помощью преобразования графика функций можно получить из графика функции $y=x^2$ график функции $y=2x^2-8x+9$.

Решение. Запишем функцию в виде $y=2x^2-8x+9=2\left(x^2-4x\right)+9=2\left(x^2-4x+4\right)-8+9=2(x-2)^2+1$.

Таким образом, график данной функции может быть построен с помощью преобразований графика функции $y=x^2$ путем параллельного переноса и растяжения вдоль оси Oy. Эскиз графика изображен на рис.6. ■

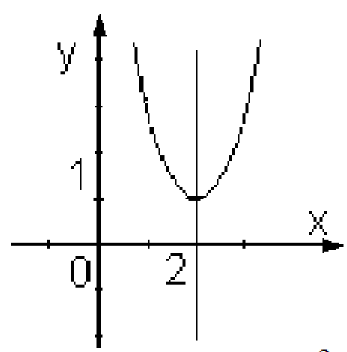

Рис.6. График функции $y=2x^2-8x+9$

5. ЭЛЕМЕНТЫ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛОГИКИ.

Математическая логика есть часть общей логики, в которой законы мышления выражаются формулами подобно тому, как в алгебре выражаются правила действий с числами.

Предметом математической логики являются методы рассуждений, построения новых понятий и доказательств теорем, а так же изучение правильных способов рассуждений, то есть таких, которые приводят к верным результатам, если верны исходные посылки.

Основным понятием математической логики является понятие простого высказывания. Под простым высказыванием понимается предложение, утверждающее что-либо о чём-либо, и при этом можно сказать истинно оно или ложно в определённых условиях места и времени. Логическим значением высказывания является «истина» или «ложь».

Обычно логические значения обозначаются:

«истина» - «И» или «1»;

«ложь» - «Л» или «0».

Каждое высказывание или истинно. или ложно и ни одно из высказываний не может одновременно утверждать и отрицать одно и то же. Каждый из объектов высказывания не изменяется в процессе высказывания.

Примеры высказываний:

1) число 8 делится на 2.

2) Москва – столица России.

3) Число 100 делится на 7.

Высказывания 1), 2) – истинные, высказывание 3) – ложное.

Не являются высказываниями предложения, о которых нельзя сказать истинные они или ложные.

Из простых высказывания можно образовать новые составные высказывания с помощью союзов «и», «а», «или», «либо», «если…, то», «тогда и только тогда, когда», «неверно, что». Эти союзы называются логическими связками. Построение из данных высказываний нового составного высказывания называется логической операцией над высказываниями. Высказывания обозначаются большими латинскими буквами А, В, С, … Основные логические операции: отрицание, конъюнкция, дизъюнкция, импликация, эквивалентность.

Отрицанием высказывания А называется новое высказывание, обозначаемое символом $\overline{A}$ или $\neg A$, которое считается истинным, если А ложно, или ложным если А истинно. Отрицание $\overline{A}$ читается «не А» или «неверно, что А». Логическое значение высказывания $\overline{A}$ можно описать с помощью таблицы, называемой таблицей истинности (верхняя строка - высказывание, последующие строки – логическое значение высказываний).

A	$\overline{A}$
1	0
0	1

Конъюнкцией (логическим умножением) двух высказываний А, В называется новое высказывание, обозначаемое символом $A \wedge B$ (или $A \& B$), которое считается истинным, если оба высказывания А и В истинные, и ложным, если хотя бы одно из них ложно.

Конъюнкция $A \wedge B$ читается «А и В». Высказывания А, В называются членами конъюнкций.

Таблица истинности конъюнкции.

A	B	$A \wedge B$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

Дизъюнкцией (логическим сложением) двух высказываний А, В называют новое высказывание, обозначаемое символом $A \vee B$, которое считается истинными, если хотя бы одно из высказываний А, В истинно, и ложным, если они оба ложны. Дизъюнкция $A \vee B$ читается «А или В». Высказывания А, В называются членами дизъюнкций.

Таблица истинности дизъюнкции.

A	B	$A \vee B$
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

Импликацией двух высказываний А, В называется новое высказывание, обозначаемое символом $A \to B$, которое считается ложным, если А истинно, а В ложно, и истинным при всех других логических значениях высказываний А, В. Импликация $A \to B$ читается «если А, то В», «А влечёт В», «из А следует В», «А имплицирует В». Высказывание А называется условием или посылкой, высказывание В - заключением или следствием.

Таблица истинности импликации.

A	B	$A \to B$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

Эквиваленцией (или ***эквивалентностью***) двух высказываний А, В называется новое высказывание, обозначаемое символом $A \leftrightarrow B$, которое считается истинным, когда оба высказывания А, В либо истинны, либо ложны, и ложным во всех остальных случаях. Эквивалентность $A \leftrightarrow B$ читается «А эквивалентно В», «А тогда и только тогда, когда В», «для того, чтобы А, необходимо и достаточно, чтобы В».

Таблица истинности эквиваленции.

A	B	$A \leftrightarrow B$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	1

Пусть А – высказывание «12 делится на 3», В – высказывание «12 делится на 4», тогда их конъюнкцией $A \wedge B$ будет высказывание «12 делится на 3 и на 4».

С помощью логических операций над высказываниями можно строить различные составные высказывания. Порядок выполнения операций указывается скобками.

Из простых высказываний, обозначенных буквами, логических символов и скобок можно составлять различные выражения, называемые формулами.

Формулами логики высказываний являются:

1) всякое простое высказывание, обозначенное буквой;

2) символы «истина», «ложь»;

3) если F – формула, то $\overline{F}$ - формула;

4) если F, Φ - формулы, то $F \wedge \Phi$, $F \vee \Phi$, $F \rightarrow \Phi$, $F \leftrightarrow \Phi$ - формулы.

5) других формул логики высказываний нет.

Формулы, указанные в пунктах 1) и 2) называются элементарными. Значением формулы называется логическое значение высказывания. Запись высказывания в виде формулы называется формализацией высказывания.

Процедура формализации высказывания:

1) если высказывание простое, то ему ставится в соответствие элементарная формула;

2) если высказывание составное, то для составления соответствующей формулы нужно:

а) выделить все элементарные высказывания и логические связки, образующие данное составное высказывание;

б) заменить их соответствующими символами;

в) расставить скобки в соответствии со смыслом данного высказывания.

Правила опускания скобок:

1) наружные скобки можно опустить;

2) если подформула имеет вид $(\overline{\Phi})$, то скобки можно опустить;

3) логические операции упорядочиваются по силе связывания: сильнее всего связывают конъюнкция, затем идёт дизъюнкция, далее – импликация и эквиваленция.

Иногда при записи знак конъюнкции опускают и вместо $A \wedge B$ или $A \& B$ пишут АВ. Все возможные логические значения формулы в зависимости от значений, входящих в неё элементарных высказываний, могут быть описаны полностью с помощью таблицы истинности. Если формула содержит n элементарных высказываний, то таблица содержит 2^n строк.

Пример. Убрать лишние скобки в формуле

$$(((A \wedge B) \vee (\overline{C} \wedge D)) \to (\overline{A \vee C} \to D))$$

Решение. После отбрасывания лишних скобок формула приобретает вид:

$$A \wedge B \vee \overline{C} \wedge D \to \left(\overline{A \vee C} \to D\right) \blacksquare$$

Пример. Формализовать следующие высказывания:

1) «2 – простое число и 7 – простое число»;

2) «число 15 делится на 5 или на 3»;

3) «если число 3519 делится на 9. то оно делится на 3»

Решение.

1) высказывание А – «2 простое число»; В – «7 – простое число». Сложное высказывание: $A \wedge B$.

2) А – «число 15 делится на 5»; В – «число 15 делится на 3». Сложное высказывание: $A \vee B$.

3) А – «число 3519 делится на 9»; В – «число 15 делится на 3». Сложное высказывание: $A \to B$.■

Пример. Определить порядок действий и составить таблицу истинности для формулы:

$$(A \vee B) \to (A \wedge \overline{B} \vee \overline{A} \to \overline{B})$$

Решение. Порядок действий:

1) $\Psi_1 : \overline{A}$

2) $\Psi_2 : \overline{B}$

3) $\Psi_3 :\ A \vee B$

4) $\Psi_4 : A \wedge \overline{B}$

5) $\Psi_5 : (A \wedge \overline{B}) \vee \overline{A}$

6) $\Psi_6 :\ ((A \wedge \overline{B}) \vee \overline{A}) \to \overline{B}$

7) $\Psi_7 : (A \vee B) \to (A \wedge \overline{B} \vee \overline{A} \to \overline{B})$

A	B	Ψ_1	Ψ_2	Ψ_3	Ψ_4	Ψ_5	Ψ_6	Ψ_7
1	1	0	0	1	0	0	1	1
1	0	0	1	1	1	1	1	1
0	1	1	0	1	0	1	0	0
0	0	1	1	0	0	1	1	1

Получили таблицу истинности. ■

Две формулы алгебры логики высказываний F и Φ называются равносильными, если они принимают одинаковые логические значения на любом наборе значений входящих в формулы элементарных высказываний. Равносильность формул обозначается $F \equiv \Phi$.

Равносильность формул называют законами логики. Запись $F \equiv 1$ означает, что формула Φ является тождественно истинной.

Основные равносильности.

1) $(A \vee \overline{A}) \equiv 1$ - закон исключения третьего

2) $\overline{A \vee \overline{\overline{A}}} \equiv 1$ - закон отрицания противоречия

3) $\overline{\overline{A}} \equiv A$ - закон двойственного отрицания

4) $A \vee A \equiv A$ законы
5) $A \wedge A \equiv A$ тождества

6) $(A \wedge B) \to A \equiv 1$ законы
7) $(A \to (A \vee B)) \equiv 1$ упрощения

8) $(A \wedge B) \wedge C \equiv A \wedge (B \wedge C)$ законы
9) $(A \vee B) \vee C \equiv A \vee (B \vee C)$ ассоциативности

10) $(A \vee B) \wedge C \equiv (A \wedge C) \vee (B \wedge C)$ законы
11) $(A \wedge B) \vee C \equiv (A \vee C) \wedge (B \vee C)$ дистрибутивности

12) $\overline{A \wedge B} \equiv (\overline{A} \vee \overline{B})$ законы
13) $\overline{A \vee B} \equiv (\overline{A} \wedge \overline{B})$ Де Моргана

14) $(A \to B) \equiv (\overline{B} \to \overline{A})$ - закон контрапозиции

15) $A \vee (A \wedge B) \equiv A$ законы
16) $A \wedge (A \vee B) \equiv A$ поглощения

17) $(A \vee B) \wedge (\overline{A} \vee B) \equiv B$ законы
18) $(A \wedge B) \vee (\overline{A} \wedge B) \equiv B$ склеивания

19) $(A \to B) \equiv (\overline{A} \vee B)$

20) $(A \to B) \equiv \overline{A \wedge \overline{B}}$

21) $(A \leftrightarrow B) \equiv (A \to B) \wedge (B \to A)$

22) $(A \leftrightarrow B) \equiv (\overline{A} \vee B) \wedge (\overline{B} \vee A)$

Если в равносильные формулы всюду вместо какой-нибудь переменной подставить одну и ту же функцию, то вновь полученные формулы тоже окажутся равносильными. Таким образом, из каждой равносильности можно получить сколь угодно новых равносильностей. Указанные законы логики позволяют упрощать и преобразовывать сложные высказывания.

6. КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА №1 ПО ДИСЦИПЛИНЕ «ВВЕДЕНИЕ В ВЫСШУЮ МАТЕМАТИКУ». ВАРИАНТЫ ЗАДАНИЙ.

Вариант 1.

Задание 1. Числовые множества A и B конечны и состоят из следующих элементов: $A = \{3, \ 4, \ 5, \ 8, \ 11\}$, $B = \{0, \ 2, \ 3, \ 5, \ 9, \ 11, \ 12, \ 13\}$. Найти объединение, пересечение, разность и симметрическую разность данных множеств.

Задание 2. Определите количество элементов данного множества $A = \{0, \ 1, \ 2, \ \{1, \ 2\}, \ 6\}$.

Задание 3. Даны два множества $A = \{x \in R : -0{,}5 < x \leq 2\}$ и $B = \{x \in R : -1 \leq x < 3\}$. Укажите множество целых чисел, принадлежащих пересечению и объединению множеств A.и B.

Задание 4. С помощью диаграмм Эйлера – Венна изобразите множества и закрасьте ту часть, которая соответствует указанным операциям: $(C \cup A) \cap (C \cup B)$, $(A \setminus C) \cap (C \setminus B)$.

Задание 5. Вставьте между множествами один из символов $\in$ или $\subset$, чтобы получилось истинное утверждение:

$\{1, 3\} \quad \{1, \ 3, \ 5, \ 6\}$;

$\{1, 3\} \quad \{1, \ 2, \ \{1, 3\}, \ \{4, \ 5\}\}$.

Задание 6. На числовой прямой заданы множества: $(-4, \ 6)$, $(0, \ 4)$, $(2{,}5; \ 3{,}5)$, $[0, \ 4)$, $[1, \ 3]$, $(1, \ 3]$. Укажите, какие из указанных множеств являются окрестностями точки $x = 2$.

Задание 7. Найдите неизвестное x из уравнения $C_{2x}^{x} : C_{2x+1}^{x+1} = 6:11$.

Задание 8. На пять сотрудников выделены три путевки. Сколькими способами их можно распределить, если: а)все путевки различны; б) все путевки одинаковы?

Задание 9. Даны множества $A=\{a,\ b,\ c\}$, $B=\{a,\ \ c,\ \ d,\ \ f\}$, $C=\{a,\ \ b,\ \ e\}$. Найти число элементов декартова произведения множеств $A\times(B\cap C)$ и указать эти элементы.

Задание 10. Пусть даны два множества: $X=\{x\in R|-3<x\le 1\}$, $Y=\{y\in R|-2\le y\le 0\}$. Изобразить в декартовой системе координат область, соответствующую декартовому произведению множеств $X\times Y$.

Задание 11. Построить в прямоугольной системе координат линии, заданные уравнениями: $y=2x+1$, $y=x^2+4x-5$.

Задание 12. Найдите область определения функции $y=\dfrac{1}{x\sqrt{4-x^2}}$.

Задание 13. Определить порядок действий и составить таблицу истинности для формулы: $(\overline{A}\vee C)\wedge(B\to(C\to A))$.

<u>Вариант 2.</u>

Задание 1. Числовые множества A и B конечны и состоят из следующих элементов: $A=\{5,\ \ 6,\ \ 8,\ \ 10,\ \ 11\}$, $B=\{1,\ \ 2,\ \ 4,\ \ 5,\ \ 8,\ \ 10,\ \ 11,\ \ 13\}$. Найти объединение, пересечение, разность и симметрическую разность данных множеств.

Задание 2. Определите количество элементов данного множества $A=\{3,\ \ 4,\ \ 5,\ \ \{3,\ \ 4\},\ \ 10\}$.

Задание 3. Даны два множества $A=\{x\in R:-3{,}5<x\le 2{,}5\}$ и $B=\{x\in R:-3\le x<4\}$. Укажите множество целых чисел, принадлежащих пересечению и объединению множеств А.и В.

Задание 4. С помощью диаграмм Эйлера – Венна изобразите множества и закрасьте ту часть, которая соответствует указанным операциям: $A\setminus(C\cap B)$, $(B\setminus A)\cup(A\setminus C)$.

Задание 5. Вставьте между множествами один из символов $\in$ или $\subset$, чтобы получилось истинное утверждение:

$\{1,\ \ 3\}\qquad\{1,\ \ 3,\ \ 5,\ \ 8\}$;

$\{1,\ \ 3\}\qquad\{1,\ \ 2,\ \ \{1,\ \ 3\},\ \ \{8,\ \ 9\}\}$.

Задание 6. На числовой прямой заданы множества: $(-3,\ \ 5)$, $(0,\ \ 2)$, $(0{,}5;\ \ 1{,}5)$, $[0,\ \ 2)$, $[0,\ \ 2]$, $(2,\ \ 3]$. Укажите, какие из указанных множеств являются окрестностями точки $x=1$.

Задание 7. Найдите неизвестное x из уравнения $\frac{P_{x+1}}{A_{x-1}^{n-1}\cdot P_{x-n}}=56$.

Задание 8. Сколькими способами можно разложить в ряд 5 белых и 4 черных шара так, чтобы черные шары не лежали рядом?

Задание 9. Даны множества $A=\{\ b,\ c,\ d\}$, $B=\{a,\ c,\ d,\ f\}$, $C=\{\ b,\ f,\ e\}$. Найти число элементов декартова произведения множеств $A\times(B\cap C)$ и указать эти элементы.

Задание 10. Пусть даны два множества: $X=\{x\in R|-2<x\le 0\}$, $Y=\{y\in R|-3\le y<1\}$. Изобразить в декартовой системе координат область, соответствующую декартовому произведению множеств $X\times Y$.

Задание 11. Построить в прямоугольной системе координат линии, заданные уравнениями: $y=2x$, $y=x^2+3x-4$.

Задание 12. Найдите область определения функции $y=\sqrt{4-5x}+\frac{1}{x}$.

Задание 13. Определить порядок действий и составить таблицу истинности для формулы: $(A\to B)\vee(A\to(B\wedge A))$.

Вариант 3.

Задание 1. Числовые множества A и B конечны и состоят из следующих элементов: $A=\{0,\ 1,\ 3,\ 4,\ 6\}$, $B=\{1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 8,\ 10,\ 11,\ 13\}$. Найти объединение, пересечение, разность и симметрическую разность данных множеств.

Задание 2. Определите количество элементов данного множества $A=\{0,\ 1,\ 3,\ \{3,\ 4\},\ 7\}$.

Задание 3. Даны два множества $A=\{x\in R:-4{,}5<x\le 1\}$ и $B=\{x\in R:-1\le x<3\}$. Укажите множество целых чисел, принадлежащих пересечению и объединению множеств А.и В.

Задание 4. С помощью диаграмм Эйлера – Венна изобразите множества и закрасьте ту часть, которая соответствует указанным операциям: $A\cup(A\setminus B)$, $(B\setminus A)\cap(B\setminus C)$.

Задание 5. Вставьте между множествами один из символов $\in$ или $\subset$, чтобы получилось истинное утверждение:

$\{-1,\ 2\}\qquad\{-1,\ 2,\ 5,\ 8\}$;

$\{-1,\ 2\}\qquad\{-1,\ 2,\ \{-1,\ 2\},\ \{8,\ 9\}\}$.

Задание 6. На числовой прямой заданы множества: $(-3,-1)$, $(-4,\ 0)$, $(-2{,}5;\ 1{,}5)$, $[-4,\ 0)$, $[-3,\ -1]$, $(-3,\ -1]$. Укажите, какие из указанных множеств являются окрестностями точки $x=-2$.

Задание 7. Найдите неизвестное x из уравнения $12C_{x+3}^{x-1}=55A_{x+1}^{2}$.

Задание 8. На первой из двух параллельных прямых лежит 10 точек, на второй – 20 точек. Сколько существует треугольников с вершинами в этих точках?

Задание 9. Даны множества $A=\{a,\ b,\ c\}$, $B=\{a,\ f\}$, $C=\{a,\ b\}$. Найти число элементов декартова произведения множеств $A\times(B\cap C)$ и указать эти элементы.

Задание 10. Пусть даны два множества: $X=\{x\in R \mid -3<x\le 2\}$, $Y=\{y\in R \mid -3\le y\le 0\}$. Изобразить в декартовой системе координат область, соответствующую декартовому произведению множеств $X\times Y$.

Задание 11. Построить в прямоугольной системе координат линии, заданные уравнениями: $y=-2x+3$, $y=x^2-4x+3$.

Задание 12. Найдите область определения функции $y=\log_4(4-3x)+\sqrt{x}$..

Задание 13. Определить порядок действий и составить таблицу истинности для формулы: $(A\to(B\to C))\vee(\overline{C}\wedge\overline{A})$.

<u>Вариант 4.</u>

Задание 1. Числовые множества A и B конечны и состоят из следующих элементов: $A=\{1,\ 3,\ 4,\ 9,\ 10\}$, $B=\{0,\ 2,\ 3,\ 4,\ 9,\ 10,\ 12,\ 13\}$. Найти объединение, пересечение, разность и симметрическую разность данных множеств.

Задание 2. Определите количество элементов данного множества $A=\{-3,\ 3,\ 4,\ \{4,\ 7\},\ 15\}$.

Задание 3. Даны два множества $A=\{x\in R: -2<x\le 2\}$ и $B=\{x\in R: -1\le x<3\}$. Укажите множество целых чисел, принадлежащих пересечению и объединению множеств А.и В.

Задание 4. С помощью диаграмм Эйлера – Венна изобразите множества и закрасьте ту часть, которая соответствует указанным операциям: $B\setminus(A\cap B)$, $(A\cup B)\setminus C$.

Задание 5. Вставьте между множествами один из символов $\in$ или $\subset$, чтобы получилось истинное утверждение:

$\{0,\ 1\}\qquad \{0,\ 1,\ 2,\ 3\}$;

$\{0,\ 1\}\qquad \{-1,\ 0,\ \{0,\ 1\},\ 2,\ \{4,\ 6\}\}$.

Задание 6. На числовой прямой заданы множества: $(-3,\ 3)$, $(0,\ 1)$, $(-1{,}5;\ 1{,}5)$, $[-1,\ 1)$, $[-1,\ 1]$, $(-3,\ 3]$. Укажите, какие из указанных множеств являются окрестностями точки $x=0$.

Задание 7. Найдите неизвестное x из уравнения $\dfrac{P_{x+2}}{A_x^n \cdot P_{x-n}}=132$.

Задание 8. Четыре автора должны написать книгу из 17 глав, причем первый и третий должны написать по пять глав, второй – 4, а третий – 3 главы книги. Сколькими способами можно распределить главы между авторами?

Задание 9. Даны множества $A=\{a,\ b\}$, $B=\{a,\ d,\ f\}$, $C=\{a,\ b,\ f\}$. Найти число элементов декартова произведения множеств $A\times(B \cap C)$ и указать эти элементы.

Задание 10. Пусть даны два множества: $X=\{x\in R \mid -5\le x\le 2\}$, $Y=\{y\in R \mid 0\le y\le 5\}$. Изобразить в декартовой системе координат область, соответствующую декартовому произведению множеств $X\times Y$.

Задание 11. Построить в прямоугольной системе координат линии, заданные уравнениями: $y=x+1$, $y=2x^2+4x-6$.

Задание 12. Найдите область определения функции $y=\dfrac{1}{x-3}+\sqrt{x^2-5}$.

Задание 13. Определить порядок действий и составить таблицу истинности для формулы: $A\wedge B\leftrightarrow C\to \overline{A}\vee B$.

<u>Вариант 5.</u>

Задание 1. Числовые множества A и B конечны и состоят из следующих элементов: $A=\{-3,\ 0,\ 2,\ 4,\ 6\}$, $B=\{-1,\ 0,\ 3,\ 4,\ 9,\ 11,\ 12,\ 15\}$. Найти объединение, пересечение, разность и симметрическую разность данных множеств.

Задание 2. Определите количество элементов данного множества $A=\{1,\ 2,\ 5,\ \{3,\ 6\},\ 7\}$.

Задание 3. Даны два множества $A=\{x\in R:-3<x\le 4{,}5\}$ и $B=\{x\in R:-2\le x<5\}$. Укажите множество целых чисел, принадлежащих пересечению и объединению множеств А.и В.

Задание 4. С помощью диаграмм Эйлера – Венна изобразите множества и закрасьте ту часть, которая соответствует указанным операциям: $(C\setminus B)\cup A$, $(A\cup B)\cap C$.

Задание 5. Вставьте между множествами один из символов $\in$ или $\subset$, чтобы получилось истинное утверждение:

$\{-1,\ \ 2\}\qquad \{-1,\ \ 1,\ \ 2,\ \ 3\}$;

$\{-1,\ \ 2\}\qquad \{-3,\ \ -2,\ \ \{-1,\ \ 2\},\ \ \{5,\ \ 8\}\}$.

Задание 6. На числовой прямой заданы множества: $(-3,\ \ 9)$, $(0,\ \ 6)$, $(1{,}5;\ \ 4{,}5)$, $[0,\ \ 6)$, $[1,\ \ 4]$, $(1,\ \ 4]$. Укажите, какие из указанных множеств являются окрестностями точки $x=3$.

Задание 7. Найдите неизвестное x из уравнения $C_{2x}^{x+1}:C_{2x+1}^{x-1}=3:5$.

Задание 8. Во взводе 3 сержанта и 30 солдат. Сколькими способами можно выбрать одного сержанта и трех солдат для патрулирования?

Задание 9. Даны множества $A=\{\ \ b,\ \ c,\ \ d\}$, $B=\{a,\ \ c,\ \ d,\ \ \}$, $C=\{a,\ \ f,\ \ e\}$. Найти число элементов декартова произведения множеств $C\times(B\cap A)$ и указать эти элементы.

Задание 10. Пусть даны два множества: $X=\{x\in R\mid -1<x\le 2\}$, $Y=\{y\in R\mid -2\le y\le 3\}$. Изобразить в декартовой системе координат область, соответствующую декартовому произведению множеств $X\times Y$.

Задание 11. Построить в прямоугольной системе координат линии, заданные уравнениями: $y=3x+4$, $y=2x^2-4x+2$.

Задание 12. Найдите область определения функции $y=\dfrac{1}{9-x^2}+\sqrt{1-x}$.

Задание 13. Определить порядок действий и составить таблицу истинности для формулы: $(A\vee B)\to(A\to\overline{B})$.

Вариант 6.

Задание 1. Числовые множества A и B конечны и состоят из следующих элементов: $A=\{1,\ \ 2,\ \ 4,\ \ 5,\ \ 7\}$,

$B=\{0,\quad 2,\quad 3,\quad 7,\quad 8,\quad 11,\quad 13,\quad 15\}$. Найти объединение, пересечение, разность и симметрическую разность данных множеств.

Задание 2. Определите количество элементов данного множества $A=\{1,\quad 3,\quad 4,\quad \{5,\quad 6\},\quad 8\}$.

Задание 3. Даны два множества $A=\{x\in R: -5<x\le 2\}$ и $B=\{x\in R: -1\le x<3\}$. Укажите множество целых чисел, принадлежащих пересечению и объединению множеств А.и В.

Задание 4. С помощью диаграмм Эйлера – Венна изобразите множества и закрасьте ту часть, которая соответствует указанным операциям: $(A\cup B)\setminus(B\cup C)$, $(A\setminus B)\cup(A\setminus C)$.

Задание 5. Вставьте между множествами один из символов $\in$ или $\subset$, чтобы получилось истинное утверждение:

$\{-3,\quad 0\}\qquad \{-3,\quad 0,\quad 1,\quad 6\}$;

$\{-3,\quad 0\}\qquad \{-5,\quad -4,\quad \{-3,\quad 0\},\quad \{4,\quad 5\}\}$.

Задание 6. На числовой прямой заданы множества: $(-4,\quad -2)$, $(-7,\quad 1)$, $(-4{,}5;\quad -1{,}5)$, $[-6,\quad 0)$, $[-6,\quad 0]$, $(-4,\quad -2]$. Укажите, какие из указанных множеств являются окрестностями точки $x=-3$.

Задание 7. Найдите неизвестное x из уравнения

$$\frac{P_{x+5}}{A_{x+3}^{n+3}\cdot P_{x-n}}=240$$

.

Задание 8. Хоккейная команда состоит из двух вратарей, 7 защитников и 10 нападающих. Сколькими способами тренер может образовать стартовую шестерку, состоящую из одного вратаря, двух защитников и трех нападающих?

Задание 9. Даны множества $A=\{a,\quad b,\quad c,\quad \}$, $B=\{a,\quad c,\quad d,\quad f\}$, $C=\{a,\quad b,\quad e\}$. Найти число элементов декартова произведения множеств $B\times(A\cap C)$ и указать эти элементы.

Задание 10. Пусть даны два множества: $X=\{x\in R\mid -2<x\le 4\}$, $Y=\{y\in R\mid -2\le y\le 2\}$. Изобразить в декартовой системе координат область, соответствующую декартовому произведению множеств $X\times Y$.

Задание 11. Построить в прямоугольной системе координат линии, заданные уравнениями: $y=x+3$, $y=x^2+6x-7$.

Задание 12. Найдите область определения функции $y=\sqrt{\dfrac{x}{x-2}}$.

Задание 13. Определить порядок действий и составить таблицу истинности для формулы: $(A\vee C)\to(A\wedge\overline{B}\vee\overline{A})$.

Вариант 7.

Задание 1. Числовые множества A и B конечны и состоят из следующих элементов: $A=\{-2,\ 1,\ 3,\ 4,\ 11\}$, $B=\{-3,\ -2,\ 3,\ 4,\ 9,\ 10,\ 12,\ 13\}$. Найти объединение, пересечение, разность и симметрическую разность данных множеств.

Задание 2. Определите количество элементов данного множества $A=\{-4,\ -3,\ -1,\ \{0,\ 3\},\ 3\}$.

Задание 3. Даны два множества $A=\{x\in R: -7{,}5<x\le -2\}$ и $B=\{x\in R: -3\le x<3\}$. Укажите множество целых чисел, принадлежащих пересечению и объединению множеств А.и В.

Задание 4. С помощью диаграмм Эйлера – Венна изобразите множества и закрасьте ту часть, которая соответствует указанным операциям: $(A\cup B)\setminus C,\ \ (A\setminus C)\cap(B\setminus C)$.

Задание 5. Вставьте между множествами один из символов $\in$ или $\subset$, чтобы получилось истинное утверждение:

$\{11,\ 12\}\qquad \{1,\ 2,\ 4,\ 11,\ 12\}$;

$\{11,\ 12\}\qquad \{3,\ 5,\ \{8,\ 9\},\ \{11,\ 12\}\}$.

Задание 6. На числовой прямой заданы множества: $(-3,\ 11)$, $(0,\ 8)$, $(3{,}5;\ 4{,}5)$, $[0,\ 8)$, $[1,\ 7]$, $(2,\ 6]$. Укажите, какие из указанных множеств являются окрестностями точки $x=4$.

Задание 7. Найдите неизвестное x из уравнения $12C_{x+4}^{x}=55A_{x+2}^{2}$.

Задание 8. На конференции должны выступать докладчики A, B, C и D, причем B не может выступать раньше, чем A. Сколькими способами можно установить очередность выступлений?

Задание 9. Даны множества $A=\{a,\ b\}$, $B=\{a,\ d,\ f\}$, $C=\{a,\ d,\ e\}$. Найти число элементов декартова произведения множеств $A\times(B\cap C)$ и указать эти элементы.

Задание 10. Пусть даны два множества: $X=\{x\in R|\ 0\le x\le 2\}$, $Y=\{y\in R|-3\le y\le 2\}$. Изобразить в декартовой системе координат область, соответствующую декартовому произведению множеств $X\times Y$.

Задание 11. Построить в прямоугольной системе координат линии, заданные уравнениями: $y=3x+5$, $y=-x^2-4x+5$.

Задание 12. Найдите область определения функции $y=\sqrt{\dfrac{x-3}{x+2}}$.

Задание 13. Определить порядок действий и составить таблицу истинности для формулы: $(A \to \overline{B}) \to (\overline{A \vee B} \wedge C)$.

Вариант 8.

Задание 1. Числовые множества A и B конечны и состоят из следующих элементов: $A=\{1,\ 3,\ 4,\ 9,\ 10\}$, $B=\{1,\ 2,\ 3,\ 7,\ 8,\ 10,\ 11,\ 13\}$. Найти объединение, пересечение, разность и симметрическую разность данных множеств.

Задание 2. Определите количество элементов данного множества $A=\{-1,\ 2,\ 3,\ \{2,\ 5\},\ 7,\ 9\}$.

Задание 3. Даны два множества $A=\{x\in R: -5<x\le 0\}$ и $B=\{x\in R: -3\le x<4\}$. Укажите множество целых чисел, принадлежащих пересечению и объединению множеств А.и В.

Задание 4. С помощью диаграмм Эйлера – Венна изобразите множества и закрасьте ту часть, которая соответствует указанным операциям: $B\setminus(A\cap B)$, $(B\setminus A)\cup(C\setminus B)$.

Задание 5. Вставьте между множествами один из символов $\in$ или $\subset$, чтобы получилось истинное утверждение:

$\{3,\ 4\}\qquad \{0,\ 1,\ 3,\ 4,\ 6\}$;

$\{3,\ 4\}\qquad \{0,\ 2,\ \{3,\ 4\},\ \{5,\ 6\}\}$.

Задание 6. На числовой прямой заданы множества: $(3,\ 7)$, $(0,\ 10)$, $(1{,}5;\ 8{,}5)$, $[0,\ 10)$, $[1,\ 9]$, $(1,\ 9]$. Укажите, какие из указанных множеств являются окрестностями точки $x=5$.

Задание 7. Найдите неизвестное x из уравнения $C_{2x-2}^{x}:C_{2x-1}^{x-2}=3:5$.

Задание 8. Сколькими способами можно разместить 12 человек по трем комнатам, если в первую комнату можно поместить 2, во вторую 4, а в третью 6 человек?

Задание 9. Даны множества $A=\{a,\ c,\ d\}$, $B=\{a,\ d,\ f\}$, $C=\{a,\ f,\ e\}$. Найти число элементов декартова произведения множеств $B\times(A\cap C)$ и указать эти элементы.

Задание 10. Пусть даны два множества: $X=\{x\in R \mid -3<x\le 1\}$, $Y=\{y\in R \mid -4\le y\le 2\}$. Изобразить в декартовой системе координат область, соответствующую декартовому произведению множеств $X\times Y$.

Задание 11. Построить в прямоугольной системе координат линии, заданные уравнениями: $y = 2x - 4$, $y = -x^2 + x + 2$.

Задание 12. Найдите область определения функции $y = \ln\left(\frac{x}{x-3}\right)$.

Задание 13. Определить порядок действий и составить таблицу истинности для формулы: $\overline{A} \wedge B \vee \overline{C}$.

Вариант 9.

Задание 1. Числовые множества A и B конечны и состоят из следующих элементов: $A = \{-4,\ -2,\ 1,\ 0,\ 5\}$, $B = \{-5,\ -4,\ -3,\ 0,\ 3,\ 6,\ 10,\ 11\}$. Найти объединение, пересечение, разность и симметрическую разность данных множеств.

Задание 2. Определите количество элементов данного множества $A = \{2,\ 4,\ 6,\ \{4,\ 5\},\ 7,\ 10\}$.

Задание 3. Даны два множества $A = \{x \in R : -3 < x \le 2\}$ и $B = \{x \in R : -1 \le x < 5{,}5\}$. Укажите множество целых чисел, принадлежащих пересечению и объединению множеств А.и В.

Задание 4. С помощью диаграмм Эйлера – Венна изобразите множества и закрасьте ту часть, которая соответствует указанным операциям: $(A \cap B) \setminus A$, $(A \cup B) \cap (A \cup C)$.

Задание 5. Вставьте между множествами один из символов $\in$ или $\subset$, чтобы получилось истинное утверждение:

$\{1,\ 4\}\quad \{1,\ 2,\ 4,\ 5\}$;

$\{1,\ 4\}\quad \{0,\ 2,\ \{1,\ 4\},\ \{5,\ 8\}\}$.

Задание 6. На числовой прямой заданы множества: $(-6,\ -2)$, $(-8,\ 0)$, $(-5{,}5;\ -2{,}5)$, $[-8,\ 0)$, $[-5,\ -3)$, $(-10,\ 2]$. Укажите, какие из указанных множеств являются окрестностями точки $x = -4$.

Задание 7. Найдите неизвестное x из уравнения $C_{2x+2}^{x+1} : C_{2x+3}^{x+2} = 6:11$.

Задание 8. В коробке лежат жетоны с номерами 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10. Из коробки вынимают три жетона. Во скольких случаях сумма написанных на жетонах чисел: а) равна 9; б) не меньше 9?

Задание 9. Даны множества $A = \{a,\ b,\ f\}$, $B = \{c,\ f\}$, $C = \{a,\ b,\ f,\ e\}$. Найти число элементов декартова произведения множеств $B \times (A \cap C)$ и указать эти элементы.

Задание 10. Пусть даны два множества: $X = \{x \in R | -3 < x \le 2\}$, $Y = \{y \in R | -4 \le y \le 5\}$. Изобразить в декартовой системе координат область, соответствующую декартовому произведению множеств $X \times Y$.

Задание 11. Построить в прямоугольной системе координат линии, заданные уравнениями: $y = 3x + 1$, $y = 3x^2 + 4x - 5$.

Задание 12. Найдите область определения функции $y = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 - 14}}$.

Задание 13. Определить порядок действий и составить таблицу истинности для формулы: $\overline{A} \vee B \to A \wedge \overline{B}$.

Вариант 10.

Задание 1. Числовые множества A и B конечны и состоят из следующих элементов: $A = \{3, 4, 6, 7, 8\}$, $B = \{2, 3, 5, 8, 9, 10, 12, 13\}$. Найти объединение, пересечение, разность и симметрическую разность данных множеств.

Задание 2. Определите количество элементов данного множества $A = \{1, 4, 5, \{4, 8\}, 10\}$.

Задание 3. Даны два множества $A = \{x \in R: -4 < x \le 2\}$ и $B = \{x \in R: -2 \le x < 4\}$. Укажите множество целых чисел, принадлежащих пересечению и объединению множеств А.и В.

Задание 4. С помощью диаграмм Эйлера – Венна изобразите множества и закрасьте ту часть, которая соответствует указанным операциям: $C \setminus (A \cap C)$, $(C \setminus B) \cup (B \setminus A)$.

Задание 5. Вставьте между множествами один из символов $\in$ или $\subset$, чтобы получилось истинное утверждение:

$\{-1, 1\} \quad \{-1, 0, 1, 4, 6\}$;

$\{-1, 1\} \quad \{-2, -1, \{-1, 1\}, 4 \{7, 8\}\}$.

Задание 6. На числовой прямой заданы множества: $(-3, 4)$, $(0, 2)$, $(1{,}5; 2{,}5)$, $[0, 2)$, $[0, 2]$, $(-1, 3]$. Укажите, какие из указанных множеств являются окрестностями точки $x = 1$.

Задание 7. Найдите неизвестное x из уравнения
$$\frac{P_{2x+5}}{A_{2x+3}^{n+3} \cdot P_{2x-n}} = 240$$
.

Задание 8. В купе железнодорожного вагона имеются два противоположных дивана по пять мест на каждом. Из десяти пассажиров четверо желают сидеть лицом по направлению движения, трое – спиной по направлению движения, а остальным трем безразлично как сидеть. Сколькими способами могут разместиться пассажиры?

Задание 9. Даны множества $A=\{a,\ b,\ c,\ d\}$, $B=\{a,\ d,\ f\}$, $C=\{a,\ b,\ f,\ e\}$. Найти число элементов декартова произведения множеств $(A\cup B)\times(B\cup C)$ и указать эти элементы.

Задание 10. Пусть даны два множества: $X=\{x\in R|-6<x\le 1\}$, $Y=\{y\in R|-2\le y\le 1\}$. Изобразить в декартовой системе координат область, соответствующую декартовому произведению множеств $X\times Y$.

Задание 11. Построить в прямоугольной системе координат линии, заданные уравнениями: $y=4x+1$, $y=x^2+x+2$.

Задание 12. Найдите область определения функции $y=\dfrac{1}{x^2+3x-4}$.

Задание 13. Определить порядок действий и составить таблицу истинности для формулы: $\overline{A}\to(B\vee C)$.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Данная методическая разработка предназначена для знакомства студентов с некоторыми определениями, формулировками и основными понятиями математики. В частности, с элементами дискретной математики. Математика – базовая междисциплинарная наука, объединяющая своими методами, алгоритмами, моделями остальные науки.

Цель курса – формирование начального уровня математической культуры специалиста, достаточного для использования математики в профессиональной сфере и для самообразования в области математических методов.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Кудрявцев, Л.Д. Курс математического анализа: в 3 т. Т.1. Дифференциальное и интегральное исчисление функции одной переменной / Л.Д Кудрявцев. – М.: Дрофа, 2003. – 704 с.
2. Кузнецова, Г.П. Элементы комбинаторики / Г.П. Кузнецова. – Хабаровск: Изд-во ДВГУПС, 2001. – 15 с.
3. Марченко, Л.В. Адаптационный курс по математике / Л.В. Марченко, Г.В. Костина. – Хабаровск: Изд-во ДВГУПС, 2009. – 98 с.
4. Марченко, Л.В. Элементы математической логики / Л.В. Марченко. – Хабаровск: Изд-во ДВГУПС, 2002. – 54 с.
5. Азарнова, Т.В. Методические указания для решения задач по курсу «Дискретная математика» / Т.В. Азарнова, И.Н. Булгакова. – Воронеж: изд-во ВГУ, 2000. – 50 с.

ОГЛАВЛЕНИЕ