Министерство транспорта Российской Федерации
Федеральное агентство железнодорожного транспорта
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Дальневосточный государственный
университет путей сообщения»

Кафедра «Высшая математика»

М.И. Якунина   В.Г. Гамалей

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИЙ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

Методическое пособие

2-е издание, исправленное

Хабаровск
Издательство ДВГУПС
2011

УДК 517.2(075.8)
ББК В 161.54 я 73
Я 496

Рецензент:

доцент кафедры «Высшая математика»,
кандидат физико-математических наук
Виноградова П.В.

Якунина, М. И.

Я 496 Дифференциальное исчисление функций одной переменной : методическое пособие / М.И. Якунина, В.Г. Гамалей. – 2-е изд., испр. – Хабаровск : Изд-во ДВГУПС, 2011. – 78 с.

Методическое пособие соответствует ГОС ВПО дисциплины «Высшая математика», «Математический анализ» всех направлений и специальностей.

Изложены краткие теоретические сведения по дифференциальному исчислению функции одной переменной, рассмотрены примеры исследования и построения графиков функции с помощью производной, приведены варианты индивидуальных заданий.

Пособие предназначено для студентов инженерных и экономических специальностей первого курса дневной формы обучения, изучающих дисциплину «Высшая математика», «Математический анализ».

Может быть использовано преподавателями для проведения практических занятий.

УДК 517.2(075.8)
ББК В 161.54 я 73

ВВЕДЕНИЕ

Пособие содержит весь необходимый материал по дифференциальному исчислению функций одной переменной, изучаемый студентами инженерно-технических и экономических специальностей университетов. Для углубленного изучения этого раздела в конце пособия приведен список рекомендуемой учебной литературы.

Пособие состоит из восьми параграфов, в каждом из которых содержатся необходимые теоретические сведения и подробно разобранные примеры.

В последнем параграфе приведены варианты индивидуальных заданий для студентов всех специальностей дневной формы обучения.

1. ПОНЯТИЕ ПРОИЗВОДНОЙ, ЕЁ ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ СМЫСЛ

1.1. Понятие производной

Пусть функция $y=f(x)$ определена в точке x_0 и некоторой ее окрестности, x–точка из этой окрестности. Разность $x-x_0$ обозначим через Δx и назовем ***приращением аргумента***, а разность $f(x)-f(x_0)$ обозначим через Δy и назовем ***приращением функции***.

Итак, $\Delta x=x-x_0$, $\Delta y=f(x)-f(x_0)$. Из равенства $\Delta x=x-x_0$ получаем равенство $x=x_0+\Delta x$, тогда $\Delta y=f(x+x_0)-f(x_0)$.

Производной функции $y=f(x)$ в точке x_0 в обозначении $f'(x_0)$ называется предел отношения приращения функции к приращению аргумента, когда приращение аргумента стремится к нулю, т. е.

$$f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}.$$

Производные элементарных функций представлены в табл. 1.

Таблица 1

1. $\left(x^{\alpha}\right)'=\alpha x^{\alpha-1}$. 2. $(\sin x)'=\cos x$. 3. $(\cos x)'=-\sin x$. 4. $\left(tg\,x\right)'=\dfrac{1}{\cos^2 x}$ 5. $(ctg\,x)'=-\dfrac{1}{\sin^2 x}$.	6. $(\arcsin x)'=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$. 7. $(\arccos x)'=-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$. 8. $\left(arctg\,x\right)'=\dfrac{1}{1+x^2}$. 9. $(arcctg\,x)'=-\dfrac{1}{1+x^2}$.	10. $\left(a^x\right)'=a^x\cdot\ln a$. 11. $\left(e^x\right)'=e^x$. 12. $\left(\log_a x\right)'=\dfrac{1}{x\cdot\ln a}$. 13. $\left(\ln x\right)'=\dfrac{1}{x}$.

1.2. Геометрический смысл производной

Рассмотрим геометрический смысл производной.

На рис. 1 изображен график непрерывной функции $y=f(x)$. Точка M_0 на графике имеет координаты (x_0, $f(x_0)$). Прямая M_0P является секущей для линии $y=f(x)$.

Предельное положение секущей M_0P при $P\to M_0$ называется ***касательной прямой к графику функции*** $y=f(x)$ ***в точке M_0.***

Угол между касательной прямой и положительным направлением с осью Ox равен α.

Геометрическое истолкование производной состоит в том, что угловой коэффициент касательной к графику функции *y=f(x)* в точке с абсциссой x_0 равен значению производной этой функции в точке x_0:

$$f'(x_0) = k = tg\alpha \,. \qquad (1.1)$$

Из курса аналитической геометрии известно, что уравнение прямой имеет вид: $y - f(x_0) = k(x - x_0)$. Откуда уравнение касательной M_0K имеет вид:

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)\,. \qquad (1.2)$$

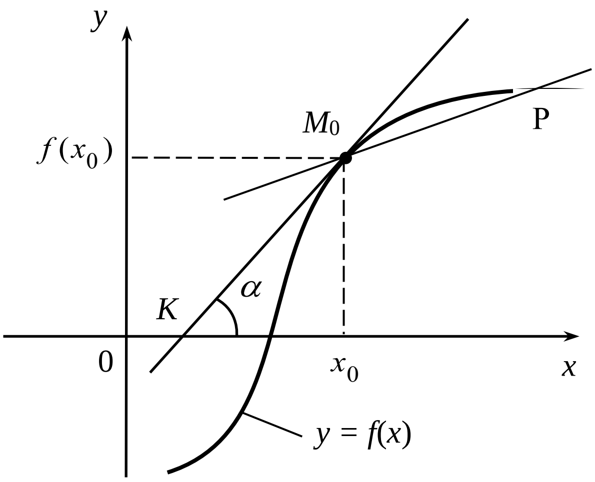

Рис. 1

Пример 1.1. Составить уравнение касательной к параболе $y = x^2 - 4x$ в точке, где $x = 1$.

Решение.

Подставляя в уравнение параболы заданную абсциссу точки касания $x = 1$, найдем её ординату:

$y(1) = 1^2 - 4 \cdot 1.$

Для определения углового коэффициента касательной находим производную $y'(x)$:

$y' = 2x - 4$.

Вычисляем значение $y'(x)$ в точке $x = 1$:

$y_0' = y'(1) = 2 \cdot 1 - 4 = -2$.

Подставляя значения x_0, y_0 и y_0' в уравнение (1.2), получим уравнение касательной

$y + 3 = -2(x - 1)$ или $2x + y + 1 = 0$.

Пример 1.2. Составить уравнение касательной, проведенной к кривой $y = -\frac{2}{3}x^3 - 2x^2 + 4x + 3$, параллельно прямой $8x + 4y + 11 = 0$.

Решение.

По условию, касательная к заданной кривой параллельна прямой $8x+4y+11=0$, следовательно угловые коэффициенты этих прямых должны быть равны.

Угловой коэффициент касательной для кривой:

$k = y'(x) = -2x^2 - 4x + 4$.

Найдем угловой коэффициент прямой. Для этого сведем уравнение к виду $y = kx + b$, где k - угловой коэффициент прямой.

$y = -2x - \frac{11}{4}$, $k = -2$.

Приравняем угловые коэффициенты и решим полученное квадратное уравнение:

$-2x^2 - 4x + 4 = -2$, $x_1 = 1$, $x_2 = -3$.

Найденные корни являются абсциссами точек, через которые проходят касательные к графику функции $y = -\frac{2}{3}x^3 - 2x^2 + 4x + 3$.

Найдем ординаты этих точек:

$y(1) = -\frac{2}{3}\cdot 1^3 - 2\cdot 1^2 + 4\cdot 1 + 3 = \frac{13}{3}$,

$y(-3) = -\frac{2}{3}\cdot(-3)^3 - 2\cdot(-3)^2 + 4\cdot(-3) + 3 = -9$.

Составим уравнения касательных по формуле (1.2) получим:

$y - \frac{13}{3} = -2(x-1)$, $y = -2x + \frac{19}{3}$,

$y + 9 = -2(x+3)$, $y = -2x - 15$.

2. ПРАВИЛА ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ. ПРОИЗВОДНАЯ СЛОЖНОЙ ФУНКЦИИ

2.1. Правила дифференцирования

Правила дифференцирования позволяют находить производные суммы (разности), произведения и частного двух функций:

1. $(C\cdot u(x))' = C\cdot u'(x)$.
2. $(u(x)\pm v(x))' = u'(x)\pm v'(x)$.
3. $(u(x)v(x))' = u'(x)\cdot v(x) + u(x)\cdot v'(x)$.

4. $\left(\dfrac{u(x)}{v(x)}\right)' = \dfrac{u'(x)\cdot v(x) - u(x)\cdot v'(x)}{v^2(x)}$, $v(x) \neq 0$.

Замечание 1. Свойство 2 выполняется для алгебраической суммы любого количества функций.

Замечание 2. Из свойства (3) легко вывести формулу для производной от произведения нескольких функций. Например,

$$(uvw)' = \left[(uv)w\right]' = (uv)'w + (uv)w' = (u'v + uv')w + uvw' =$$

$$= u'vw + uv'w + uvw'.$$

Аналогичный вид имеет формула для произведения любого числа множителей.

Пример 2.1. Пользуясь формулами дифференцирования, найти производные следующих функций: а) $y = x^2 - 5x + 4$;

б) $y = \sqrt{x} + \dfrac{5}{\sqrt[3]{x}} - \dfrac{1}{x^2} + \dfrac{1}{3x^3}$.

Решение.

а) Используя таблицу производных, первое и второе свойства получим: $y' = (x^2 - 5x + 4)' = (x^2)' - (5x)' + (4)' = 2x - 5\cdot 1 + 0 = 2x - 5$;

б) Вводя дробные и отрицательные показатели, преобразуем данную функцию:

$$y = \sqrt{x} + \frac{5}{\sqrt[3]{x}} - \frac{1}{x^2} + \frac{1}{3x^3} = x^{\frac{1}{2}} + 5x^{\frac{-1}{3}} - x^{-2} + \frac{1}{3}x^{-3}.$$

Тогда, используя производную степенной функции, свойства 1 и 2 будем иметь:

$$y' = (x^{\frac{1}{2}} + 5x^{\frac{-1}{3}} - x^{-2} + \frac{1}{3}x^{-3})' = (x^{\frac{1}{2}})' + (5x^{\frac{-1}{3}})' - (x^{-2})' + (\frac{1}{3}x^{-3})' =$$

$$= \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} + 5\cdot(-\frac{1}{3})x^{-\frac{4}{3}} - (-2)x^{-3} + \frac{1}{3}(-3)x^{-4} = \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{5}{3\sqrt[3]{x^4}} + \frac{2}{x^3} - \frac{1}{x^4}.$$

Пример 2.2. Найти производную функции $y = \cos x \cdot 5^x$:

Решение.

Воспользовавшись свойством 3 получим:

$$y' = (\cos x \cdot 5^x)' = (\cos x)' \cdot 5^x + \cos x \cdot (5^x)' = -\sin x \cdot 5^x + \cos x \cdot 5^x \ln 5.$$

Пример 2.3. Найти производную функции $y = \dfrac{x^2 + x + 1}{2x^3 + 1}$.

Решение.

Для решения первого примера используем свойство 4 производных.

$$y'=\left(\frac{x^2+x+1}{2x^3+1}\right)'=\frac{\left(x^2+x+1\right)'\cdot\left(2x^3+1\right)-\left(x^2+x+1\right)\cdot\left(2x^3+1\right)'}{\left(2x^3+1\right)^2}=$$

$$=\frac{(2x+1)\cdot\left(2x^3+1\right)-\left(x^2+x+1\right)\cdot 6x^2}{\left(2x^3+1\right)^2}=\frac{4x^4+2x^3+2x+1-6x^4-6x^3-6x^2}{\left(2x^3+1\right)^2}=$$

$$=\frac{-2x^4-4x^3-6x^2+2x+1}{\left(2x^3+1\right)^2}.$$

2.2. Производная сложной функции

Рассмотрим дифференцирование сложной функции.

Пусть $y=f(u(x))$ является ***сложной функцией***, где функция $u=u(x)$ – промежуточный аргумент. Покажем, как найти производную сложной функции, зная производную для функции $y=f(u(x))$ (её будем обозначать через y'_u) и производную u'_x для функции $u=u(x)$.

Теорема 1. Если функция $u=u(x)$ имеет производную u'_x в точке x, а функция $y=f(u)$ имеет производную y'_u в точке $u\,(u=u(x))$, то сложная функция $y=f(u(x))$ в точке x имеет производную y'_x, причем $y'_x = y'_u\, u'_x$.

Иначе, **производная сложной функции равна произведению производной данной функции по промежуточному аргументу на производную промежуточного аргумента.**

Пример 2.4. Найти производную функции $y=\left(e^{arctgx}+\cos^4 x\right)^3$.

Решение.

$$y'=\left(\left(e^{arctgx}+\cos^4 x\right)^3\right)'=3\cdot\left(e^{arctgx}+\cos^4 x\right)^2\cdot\left(e^{arctgx}+\cos^4 x\right)'=$$

$$=3\cdot\left(e^{arctgx}+\cos^4 x\right)^2\cdot\left(e^{arctgx}\cdot(arctgx)'+4\cos^3 x\cdot(\cos x)'\right)=$$

$$=3\cdot\left(e^{arctgx}+\cos^4 x\right)^2\cdot\left(e^{arctgx}\cdot\frac{1}{1+x^2}+4\cos^3 x\cdot(-\sin x)\right)=$$

$$=3\cdot\left(e^{arctgx}+\cos^4 x\right)^2\cdot\left(\frac{e^{arctgx}}{1+x^2}-4\sin x\cdot\cos^3 x\right).$$

Пример 2.5. Найти производную функции

$$y = \ln\left[\sin\left(x^5 + 2x + 1\right)\right].$$

Решение.

$$y' = \left(\ln\left[\sin\left(x^5 + 2x + 1\right)\right]\right)' = \frac{1}{\sin\left(x^5 + 2\cdot x + 1\right)} \cdot \left[\sin\left(x^5 + 2x + 1\right)\right]' =$$

$$= \frac{\cos\left(x^5 + 2x + 1\right)}{\sin\left(x^5 + 2x + 1\right)} \cdot \left(x^5 + 2x + 1\right)' = ctg\left(x^5 + 2x + 1\right) \cdot \left(5x^4 + 2\right) =$$

$$= \left(5x^4 + 2\right) \cdot ctg\left(x^5 + 2x + 1\right).$$

3. ДИФФЕРЕНЦИАЛ ФУНКЦИИ

Пусть функция в точке x_0 имеет производную. По определению производной (п.1.1) $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0)$, поэтому по свойствам предела можно записать $\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0) + \alpha$, где $\alpha = \alpha(\Delta x)$– бесконечно малая при $\Delta x \to 0$. Отсюда

$$\Delta y = f'(x_0)\Delta x + \alpha \cdot \Delta x. \qquad (3.1)$$

При $\Delta x \to 0$ второе слагаемое в равенстве (3.1) является бесконечно малой высшего порядка, по сравнению с Δx: $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\alpha \cdot \Delta x}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \alpha(\Delta x) = 0$, поэтому Δy и $f'(x_0) \cdot \Delta x$ – эквивалентные бесконечно малые (при $f'(x_0) \neq 0$).

Таким образом, приращение функции Δy состоит из двух слагаемых, первое из которых $f'(x_0) \cdot \Delta x$ является ***главной частью*** приращения Δy, линейной относительно Δx (при $f'(x_0) \neq 0$).

Дифференциалом функции $y = f(x)$ в точке x_0 называется главная часть приращения функции в точке x_0 и обозначается: dy или $df(x_0)$. Следовательно,

$$dy = df(x_0) = f'(x_0) \cdot \Delta x. \qquad (3.2)$$

Отметим, в частности, что

$$dx = x' \Delta x = 1 \cdot \Delta x = \Delta x,$$

т. е. дифференциал независимого переменного равен его приращению.

Это дает возможность представить формулу (3.2) в виде

$$dy = df(x_0) = f'(x_0) \cdot dx$$

и с другой стороны, записать производную в виде отношения дифференциалов:

$$y' = \frac{dy}{dx} \text{ или, что } f'(x) = \frac{df(x)}{dx}.$$

Пример 3.1. Найти дифференциал и приращение функции $y = x^2$ при: 1) произвольных x и Δx; 2) $x_0 = 20$, $\Delta x = 0,1$.

Решение.

1) $\Delta y = (x+\Delta x)^2 - x^2 = x^2 + 2x\cdot\Delta x + (\Delta x)^2 - x^2 = 2x\Delta x + (\Delta x)^2$, $dy = 2x\Delta x$.

2) Если $x_0 = 20$, $\Delta x = 0{,}1$, то $\Delta y = 40\cdot 0{,}1 + (0{,}1)^2 = 4{,}01$; $dy = 40\cdot 0{,}1 = 4$.

Запишем равенство (3.1) в виде:

$$\Delta y = dy + \alpha\cdot\Delta x. \tag{3.3}$$

Приращение Δy отличается от дифференциала dy на бесконечно малую высшего порядка, по сравнению с Δx, поэтому в приближенных вычислениях пользуются приближенным равенством $\Delta y \approx dy$, если Δx достаточно мало.

Учитывая, что $\Delta y = f(x + x_0) - f(x_0)$, получаем приближенную формулу:

$$f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0)\Delta x. \tag{3.4}$$

Пример 3.2. Вычислить приближенно $\sqrt{4{,}1}$.

Решение. Рассмотрим: $f(x) = \sqrt{x}$, $x_0 = 4$, $\Delta x = 0{,}1$.

Тогда $\sqrt{4{,}1} = f(x_0 + \Delta x)$.

$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$, $f'(x_0) = f'(4) = \frac{1}{2\sqrt{4}} = \frac{1}{4} = 0{,}25$

$f(x_0) = \sqrt{4} = 2$.

Используя формулу (3.4), получим:

$$\sqrt{4{,}1} \approx 2 + 0{,}25\cdot 0{,}1 \approx 2{,}025.$$

4. ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ ОБРАТНОЙ ФУНКЦИИ, ФУНКЦИЙ ЗАДАННЫХ НЕЯВНО, ПАРАМЕТРИЧЕСКИ. ЛОГАРИФМИЧЕСКОЕ ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ

4.1. Дифференцирование обратной функции

Введем правило для нахождения производной обратной функции.

Теорема. Пусть функция *y=f(x)* определена на промежутке *X*, непрерывна, монотонна (возрастает или убывает) и дифференцируема на X. Если ее производная y'_x в точке x не равна нулю, то ***обратная функция*** $x = f(y)$ имеет производную x'_y в точке $y = f(x)$, причем

$$x'_y = \frac{1}{y'_x}. \tag{4.1}$$

Доказательство. Функция $y = f(x)$ определена, непрерывна и монотонна на промежутке X, тогда она имеет обратную функцию $x = \varphi(y)$, определенную, непрерывную и монотонную на промежутке Y.

Если значение аргумента y получает приращение Δy, отличное от нуля, то в силу монотонности функции $x = \varphi(y)$ функция x получает приращение Δx и $\Delta x \to 0$. В силу непрерывности функции $x = \varphi(y)$: $\lim\limits_{\Delta y \to 0} \Delta x = 0$.

Следовательно, $x'_y = \lim\limits_{\Delta y \to 0} \dfrac{\Delta x}{\Delta y} = \lim\limits_{\Delta y \to 0} \dfrac{1}{\Delta y / \Delta x} = \dfrac{1}{\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta y / \Delta x} = \dfrac{1}{y'_x}$.

Итак, $x'_y = \dfrac{1}{y'_x}$.

Теорема доказана.

Пример 4.1. Если $x \in [-1;1]$, $y \in [-\pi/2; \pi/2]$, то функции $y = \arcsin x$, $x = \sin y$ являются взаимно обратными, причем $x'_y = (\sin y)' = \cos y$. Если $-\pi/2 < y < \pi/2$ (при этом $-1 < x < 1$), то $\cos y > 0$, поэтому $\cos y = +\sqrt{1 - \sin^2 y} = \sqrt{1 - x^2}$.

По формуле (4.1) имеем: $y'_x = \dfrac{1}{x'_y}$, тогда

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{(\sin y)'} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}, \ (-1 < x < 1).$$

4.2. Дифференцирование функций, заданных неявно

Не всегда функция бывает представлена в виде $y = f(x)$. Например, уравнение $y^3 - 5x^2 - 3x = 0$ задает функцию y, которую можно из этого уравнения выразить через x: $y = \sqrt[3]{3x + 5x^2}$.

Пусть переменные x, y связаны между собой некоторым уравнением

$$F(x, y) = 0, \tag{4.2}$$

причем y является функцией от x. Тогда говорят, что функция y задана **неявно** уравнением (4.2).

Не всегда функции, заданные неявно могут быть выражены явно через элементарные функции. Так, из уравнения $y + x = 2\sin y$, которое неявно задает функцию *у*, нельзя выразить *у* явно через элементарные функции.

Для того чтобы найти производную y' для функции, заданной неявно уравнением (4.2) надо найти производные по *х* от обеих частей этого уравнения, помня, что *у* – функция от *х* и приравнять эти производные. Из полученного уравнения найти y'.

Пример 4.2. Найти производную функции, заданной неявно уравнением $x^2 + y^2 = a^2$.

Решение.

$(x^2 + y^2)'_x = (a^2)'_x$.

$2x + 2y \cdot y' = 0$.

Отсюда $y' = -x / y$.

Пример 4.3. Найти y'_x, если переменные *x* и *y* связаны соотношением $\ln\left[\cos(xy)\right] = x \cdot tg\left(x^3 + y^2\right)$.

Решение.

Явно выразить одну из переменных через другую невозможно, поэтому находим производные левой и правой частей данного равенства и приравниваем их:

$$\frac{cos'(xy)}{cos(xy)} = tg\left(x^3 + y^2\right) + x \cdot tg'\left(x^3 + y^2\right).$$

Далее имеем:

$$\frac{\left[-\sin(xy)\right](xy)'}{\cos(xy)} = tg\left(x^3 + y^2\right) + \frac{x\left(x^3 + y^2\right)'}{\cos\left(x^3 + y^2\right)};$$

$$-\left(y + xy'\right) \cdot tg\left(xy\right) = tg\left(x^3 + y^2\right) + \frac{x \cdot \left(3x^2 + 2yy'\right)}{\cos^2\left(x^3 + y^2\right)}.$$

Перенося слагаемые, содержащие y'_x, в одну часть равенства, вынося y'_x за скобку, а остальные слагаемые – в другую, и деля на коэффициент при y'_x, получаем:

$$y' = -\left(ytg\left(xy\right) + tg\left(x^3 + y^2\right) + \frac{3x^3}{cos^2\left(x^3 + y^2\right)}\right) : \left(xtg\left(xy\right) + \frac{2xy}{cos^2\left(x^3 + y^2\right)}\right).$$

4.3. Дифференцирование функций, заданных параметрически

Рассмотрим задание линии на плоскости, при котором переменные *x*, *y* являются функциями третьей переменной *t* (называемой параметром):

$$\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases}. \tag{4.3}$$

Каждому значению *t* из некоторого интервала соответствуют определенные значения *x* и *y*, а, следовательно, определенная точка $M(x,y)$ плоскости. Когда *t* пробегает все значения из заданного интервала, то точка $M(x,y)$ описывает некоторую линию *L*. Уравнения (4.3) называются ***параметрическими*** уравнениями линии *L*.

Если функция $x = \varphi(t)$ на некотором интервале изменения *t* имеет обратную функцию $t = t(x)$, то подставляя это выражение в уравнение $y = \psi(t)$, получим $y = \psi(t(x))$, которое задает *y* как функцию от *x*.

Пусть $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t(x))$ имеют производные, причем $x'_t \neq 0$. По правилу дифференцирования сложной функции $y'_x = \psi'_t \cdot t'_x$. На основании правила дифференцирования обратной функции $t'_x = \dfrac{1}{\varphi'_t}$, имеем:

$$y'_x = \frac{\psi'_t}{\varphi'_t}. \tag{4.4}$$

Полученная формула (4.4) позволяет находить производные для функций, заданных параметрически.

Пример 4.4. Пусть функция *y*, зависящая от *x*, задана параметрически:

$$\begin{cases} x = a\cos t, \\ y = b\sin t, \end{cases} \quad 0 \le t \le \pi/2.$$

Найти y'_x.

Решение.

$$y'_x = \frac{\psi'_t}{\varphi'_t} = \frac{b\cos t}{-a\sin t} = -\frac{b}{a}\,\mathrm{ctgt}.$$

Пример 4.5. Найти y'_x для функции, заданной параметрически:

$$\begin{cases} x = 3\cos^2 t \\ y = 3\cos t^2 \end{cases}.$$

Решение

$x'_t(t) = 3 \cdot 2(\cos t)(-\sin t) = -3\sin(2t)$;

$$y_t'(t)=3\left(-\sin t^2\right)2t=-6t\sin t^2;$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{y_t'}{x_t'}=\frac{-6t\sin t^2}{-3\sin(2t)}=\frac{2t\sin t^2}{\sin(2t)}.$$

4.4. Логарифмическое дифференцирование

Рассмотрим показательно-степенную функцию $y=u(x)^{v(x)}$, где $u(x)>0$, $u(x)$, $v(x)$ – дифференцируемые функции.

Прологарифмируем равенство $y=u^v$, получим: $ln\, y=ln\, u^v$. По свойствам логарифмов $log_a b^n=n\, log_a b$ для нашего равенства будем иметь $ln\, y=v\, ln\, u$. Дифференцируем обе части полученного равенства как неявную функцию. В дальнейших вычислениях для удобства переменную x будем не указывать, но помнить, что y – функция от x:

$\frac{1}{y}y'=v'\ln u+v\cdot\frac{1}{u}\cdot u'$, откуда $y'=y(v'\ln u+v\cdot\frac{1}{u}\cdot u')$.

Подставляя сюда $y=u^v$, имеем:

$$y'=u^v\ln u\cdot v'+v\cdot u^{v-1}\cdot u'.$$

Этот прием нахождения производной называется ***логарифмическим дифференцированием***.

Пример 4.6. Найти производную функции $y=\left((\arcsin x)^{tgx}\right)'$.

Решение.

Прологарифмируем обе части равенства $\mathrm{y}=(\arcsin \mathrm{x})^{\mathrm{tgx}}$. Тогда $\ln y=\ln\left(\arcsin x\right)^{tgx}$. Используя свойство логарифмов $log_a b^n=n\, log_a b$ получим $\ln y=tgx\cdot\ln\left(\arcsin x\right)$. Найдем производные от обеих частей полученного равенства, приравнивая их:

$$\frac{y'}{y}=(tgx)'\cdot\ln\left(\arcsin x\right)+(tgx)\cdot\left[\ln\left(\arcsin x\right)\right]';$$

$$\frac{y'}{y}=\frac{\ln\left(\arcsin x\right)}{\cos^2 x}+tgx\cdot\frac{\left(\arcsin x\right)'}{\arcsin x};$$

$$\frac{y'}{y}=\frac{\ln\left(\arcsin x\right)}{\cos^2 x}+\frac{tgx}{\sqrt{1-x^2}\times\arcsin x}.$$

Учитывая, что $y = (\arcsin x)^{tgx}$, имеем:

$$y' = (\arcsin x)^{tgx} \cdot \left(\frac{\ln(\arcsin x)}{\cos^2 x} + \frac{tgx}{\sqrt{1-x^2} \cdot \arcsin x} \right).$$

Пример 4.7. Найти производную функции $y = x^{\sin x}$, ($x > 0$).

Решение.

Прологарифмировав обе части заданной функции получим $\ln y = (\ln x)^{\sin x}$. Воспользуемся свойством логарифмов $\ln y = \sin x \cdot \ln x$**.** Дифференцируя полученное равенство по x будем иметь:

$(\ln y)' = (\sin x \cdot \ln x)'$, $\frac{1}{y} y' = \cos x \cdot \ln x + \sin x \cdot \frac{1}{x}$, откуда

$y' = x^{\sin x}(\cos x \cdot \ln x + \sin x \cdot \frac{1}{x})$ или $y' = x^{\sin x} \cos x \cdot \ln x + \sin x \cdot x^{\sin x - 1}$.

5. ПРОИЗВОДНЫЕ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ

5.1. Понятие производной высшего порядка

Пусть функция $y = f(x)$ определена и дифференцируема на некотором промежутке X, тогда ее производная $f'(x)$ также является функцией от x на этом промежутке. Если $f'(x)$ имеет производную на промежутке X, то эта производная называется ***производной второго порядка*** функции $y = f(x)$ и обозначается: y'' или $f''(x)$.

Итак, $f''(x) = (f'(x))'$

Производная от производной второго порядка называется ***производной третьего порядка*** и обозначается: y''' или $f'''(x)$.

Вообще, ***производной n-го порядка*** называется производная от производной $(n-1)$-го порядка и обозначается: $y^{(n)}$ или $f^{(n)}(x)$ или $\frac{d^n y}{dx^n}$.

Итак,

$$f^{(n)}(x) = (f^{(n-1)}(x))'.$$

Производные y'', y''', ... называются ***производными высших порядков***.

Пример 5.1. $f(x) = \sqrt{x}$. Найти $f'''(x)$ и $f'''(4)$.

Решение.

$f'(x) = \left(x^{1/2}\right)' = \frac{1}{2} x^{-1/2}$,

$f''(x) = -\frac{1}{4} x^{-3/2}$,

$$f'''(x) = \frac{3}{8}x^{-5/2} = = \frac{3}{8\sqrt{x^5}},$$

$$f'''(4) = \frac{3}{8\sqrt{4^5}} = \frac{3}{8 \cdot 2^5} = \frac{3}{256}.$$

Пример 5.2. Найти производную n-го порядка для функции $y = e^{3x}$.

Решение.

$y' = 3e^{3x}$,

$y'' = 3 \cdot 3 \cdot e^{3x} = 9e^{3x}$,

$y''' = 3^3 \cdot e^{3x}$.

По аналогии находим: $y^{(n)} = 3^n e^{3x}$.

5.2. Производные высших порядков от функций, заданных параметрически

Пусть функция y, зависящая от x, задана параметрически в интервале T:

$$\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases}, \ t \in T$$

Найдем $y''_x = \dfrac{d^2y}{dx^2}$. Известно, что $y'_x = \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y'_t}{x'_t}$ (п. 4.3), поэтому

$$\frac{d^2y}{dx^2} = (y'_x)'_x = \frac{(y'_x)'_t}{x'_t} = \frac{\left(y'_t / x'_t\right)'_t}{x'_t} = \frac{y''_t x'_t - x''_t y'_t}{(x'_t)^3}.$$

Аналогично будет вычисляться $\dfrac{d^3y}{dx^3}$ и т. д.

Пример 5.3. Найти y'_x и y''_x для функции, заданной параметрически:

$$\begin{cases} x = 3\cos^2 t \\ y = 3\cos t^2 \end{cases}.$$

Решение.

$x'_t(t) = 3 \cdot 2(\cos t)(-\sin t) = -3\sin(2t)$;

$x''_{tt}(t) = -3\left[\cos(2t)\right]2 = -6\cos(2t)$;

$y'_t(t) = 3\left(-\sin t^2\right)2t = -6t\sin t^2$;

$y''_{tt}(t) = -6\left(\sin t^2 + t\left(\cos t^2\right)2t\right) = -6\left(\sin t^2 + 2t^2\cos t^2\right)$;

$$y'_x = \frac{dy}{dx} = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{-6t\sin t^2}{-3\sin(2t)} = \frac{2t\sin t^2}{\sin(2t)};$$

$$y''_x = \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{y''_{tt}x'_t - y'_t x''_{tt}}{\left[x'_t(t)\right]^3} =$$

$$= \frac{-6\left(\sin t^2 + 2t^2\cos t^2\right)\left[-3\sin(2t)\right] - \left(-6t\sin t^2\right)\left[-6\cos(2t)\right]}{9\sin^2(2t)} =$$

$$= \frac{18\sin(2t)\left(\sin t^2 + 2t^2\cos t^2\right) - 36t\sin t^2\cos(2t)}{9\sin^2(2t)} =$$

$$= \frac{2\left[\sin(2t)\left(\sin t^2 + 2t^2\cos t^2\right) - 2t\sin t^2\cos(2t)\right]}{\sin^2(2t)}.$$

Пример 5.4. Функция y от x задана параметрически уравнениями:

$$\begin{cases} x = a\cos^3 t \\ y = a\sin^3 t \end{cases}, 0 \le t \le \frac{\pi}{2}.$$

Найти $\dfrac{d^2y}{dx^2}$.

Решение.

$$\frac{dy}{dx} = y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{3a\sin^2 t\cos t}{-3a\cos^2 t\sin t} = tgt;$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{(y'_x)'_t}{x'_t} = \frac{(-tgt)'}{(a\cos^3 t)'} = -\frac{1}{\cos^2 t(-3a\cos^2 t\sin t)} = \frac{1}{3a\cos^4 t\sin t}.$$

5.3. Производные высших порядков от функций, заданных неявно

Нахождение производных высших порядков от функций, заданных неявно, рассмотрим на примере.

Пример 5.5. Найти $\dfrac{dy}{dx}$, $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ для функции, заданной неявно уравнением: $e^y + xy = e$. Вычислить $y'(0)$, $y''(0)$.

Решение.

Найдем сначала y', как описано в п. 4.2.

$(e^y + xy)' = (e)'$,

$e^y y' + y + xy' = 0$,

$y'(e^y + x) = -y$,

$y' = -\dfrac{y}{e^y + x}$.

Для нахождения y'' будем дифференцировать равенство

$e^y \cdot y' + y + xy' = 0$, получим:

$e^y \cdot (y')^2 + e^y y'' + y' + y' + xy'' = 0$.

Отсюда найдем y'' и подставим найденное выражение для y':

$y''(e^y + x) = -e^y \cdot (y')^2 - 2y'$,

$$y'' = -\frac{e^y (y')^2 + 2y'}{e^y + x} = -\frac{e^y\left(-\dfrac{y}{e^y + x}\right)^2 + 2\left(-\dfrac{y}{e^y + x}\right)}{e^y + x} = \frac{-e^y y^2 + 2y(e^y + x)}{(e^y + x)^3} =$$

$$= \frac{-e^y y^2 + 2e^y y + 2yx}{(e^y + x)^3}.$$

Итак, $y' = -\dfrac{y}{e^y + x}$, а $y'' = \dfrac{-e^y y^2 + 2e^y y + 2yx}{(e^y + x)^3}$.

Подставим $x=0$ в исходное уравнение $e^y + xy = e$, получим:

$e^0 + 0 \cdot y = e$, откуда $y=1$,

значит $y(0)=1$; $y'(0) = -\dfrac{1}{e}$; $y''(0) = \dfrac{e}{(e)^3} = \dfrac{1}{e^2}$.

6. ПРАВИЛО ЛОПИТАЛЯ

Рассмотрим новый способ нахождения пределов отношения двух бесконечно малых или бесконечно больших функций, т. е. раскрытия неопределенностей типа $\left(\dfrac{0}{0}\right)$ и $\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)$, так называемое ***правило Лопиталя***.

Теорема Лопиталя 1 (*раскрытие неопределенностей типа* $\left(\dfrac{0}{0}\right)$). Пусть функции $f(x)$, $g(x)$ определены, непрерывны и дифференцируемы в точке x_0 и некоторой ее окрестности, причем $g'(x) \neq 0$ для любого x из этой окрестности, и пусть $f(x_0) = 0$, $g(x_0) = 0$ (следовательно, $f(x)$, $g(x)$– бесконечно малые при $x \to x_0$). Если $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ существует, то существует $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ и

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}. \qquad (6.1)$$

Пример 6.1. Найти $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^{7x} - 1}{tg(3x)}$.

Решение.

Так как при $x \to 0$ функции $e^{7x} \to 1$ и $tg(3x) \to 0$, то имеем неопределенность типа $\left(\dfrac{0}{0}\right)$. Числитель и знаменатель данной дроби представляют собой непрерывные дифференцируемые функции в точке $x = 0$. Это означает, что можно применить правило Лопиталя:

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^{7x} - 1}{tg(3x)} = \lim_{x \to 0} \frac{\left(e^{7x} - 1\right)'}{\left(tg(3x)\right)'} = \lim_{x \to 0} \frac{7e^{7x}}{\dfrac{3}{\cos^2 3x}} = \frac{7}{3} \lim_{x \to 0} \cos^2(3x) \cdot e^{7x} = \frac{7}{3} \cdot 1 = \frac{7}{3}.$$

Пример 6.2. Найти $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1 - \cos 3x}{2x}$.

Решение.

Поскольку функции $f(x) = 1 - \cos 3x$ и $g(x) = 2x$ удовлетворяют условиям теоремы Лопиталя, то $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1 - \cos 3x}{2x} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{(1 - \cos 3x)'}{(2x)'} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{3 \sin 3x}{2} = 0$.

Замечание 1. Теорема Лопиталя справедлива и в том случае, когда функции $f(x)$, $g(x)$ не определены в точке x_0, но $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 0$ и $\lim\limits_{x \to 0} g(x) = 0$.

В самом деле, если доопределить $f(x)$ и $g(x)$, положив $f(x_0) = g(x_0) = 0$, тогда $f(x)$, $g(x)$ будут непрерывны в точке x_0, а потому теорема Лопиталя будет применима к ним.

Замечание 2. Правило Лопиталя применимо и в том случае, когда $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = 0$, $\lim\limits_{x \to \infty} g(x) = 0$.

Действительно, введя новую переменную $y = 1/x$, видим, что $y \to 0$ при $x \to \infty$. Тогда $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{y \to 0} \dfrac{f(1/y)}{g(1/y)} = \lim\limits_{y \to 0} \dfrac{f'(1/y)}{g'(1/y)} = \lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$.

Теорема Лопиталя (*раскрытие неопределенностей типа* $\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)$.

Пусть функции $f(x)$, $g(x)$ дифференцируемы в окрестности точке x_0, за исключением самой точки x_0, причем $g'(x) \neq 0$, и пусть $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \infty$, $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = \infty$. Если существует $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ то существует и $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$.

Замечание 3. Предел отношения двух функций может существовать, в то время как предел отношения их производных не существует.

Например, $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{x + \sin x}{x} = 1$, а $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{(x + \sin x)'}{(x)'} = \lim\limits_{x \to \infty} (1 + \cos x)$ – не существует, так как $\lim\limits_{x \to \infty} \cos x$ не существует.

Замечание 4. Если $\frac{f'(x)}{g'(x)}$ при $x \to x_0$ $(x \to \infty)$ является неопределенностью типа $\left(\frac{0}{0}\right)$ или $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$, и $f'(x)$, $g'(x)$ удовлетворяют условиям теоремы Лопиталя, то $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim\limits_{x \to x_0} \frac{f''(x)}{g''(x)}$.

Таким образом, для раскрытия неопределенностей типа $\left(\frac{0}{0}\right)$ или $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$ иногда приходиться применять правило Лопиталя несколько раз.

Пример 6.3. Найти $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\ln x}{\operatorname{ctg} x}$.

Решение.

При $x \to 0$ и $x > 0$ $\lim\limits_{x \to 0} \ln x = \infty$, $\lim\limits_{x \to 0} ctgx = \infty$, следовательно, имеем отношение двух бесконечно больших при $x \to 0$ и неопределенность типа $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$. Вычислим:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\ln x}{\operatorname{ctg} x} = \lim_{x \to 0} \frac{1/x}{-1/\sin^2 x} = -\lim_{x \to 0} \frac{\sin^2 x}{x} = -\lim_{x \to 0} \frac{2 \sin x \cos x}{1} = 0.$$

Пример 6.4. Найти $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\ln x}{1 + 2 \cdot \ln(\sin x)}$.

Решение.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln x}{1+2\ln(\sin x)}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{(\ln x)'}{(1+2\ln(\sin x))'}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1/x}{2\cdot(1/\sin x)\cdot\cos x}=\frac{1}{2}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x\cdot\cos x}=\frac{1}{2}$$

Пример 6.5. Найти $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{e^x}{x^2}$.

Решение.

Имеем неопределенность типа $\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)$. Применяя теорему Лопиталя два раза, получим: $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{e^x}{x^2}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{e^x}{2x}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{e^x}{2}=\infty$.

Замечание 5. Правило Лопиталя можно применять и к неопределенностям другого вида, а именно $(0\cdot\infty)$, $(\infty-\infty)$, (0^0), (1^∞), (∞^0). Неопределенности вида $(0\cdot\infty)$, $(\infty-\infty)$ можно свести к неопределенностям $\left(\dfrac{0}{0}\right)$ и $\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)$. Покажем это на примерах.

Пример 6.6. Найти $\lim\limits_{x\to 0}x^2\ln x$.

Решение.

Так как $\lim\limits_{x\to 0}\ln x=\infty$, то имеем неопределенность типа $(0\cdot\infty)$. Преобразуем ее к виду $\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)$:

$\lim\limits_{x\to 0}x^2\ln x=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln x}{1/x^2}$, затем применим правило Лопиталя:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln x}{1/x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{(\ln x)'}{(1/x^2)'}=\lim_{x\to 0}\frac{1/x}{-2/x^3}=\lim_{x\to 0}\left(-\frac{x^2}{2}\right)=0.$$

Итак, $\lim\limits_{x\to 0}x^2\ln x=0$.

Пример 6.7. Найти $\lim\limits_{x\to+\infty}x^2e^{-x}$.

Решение.

$$\lim_{x\to+\infty} x^2e^{-x} = (0\cdot\infty) = \lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{e^x} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{x\to+\infty}\frac{\left(x^2\right)'}{\left(e^x\right)'} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{2x}{e^x} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{x\to+\infty}\frac{(2x)'}{\left(e^x\right)'} = \lim_{x\to+\infty}\frac{2}{e^x} = 0.$$

Пример 6.8. Найти $\lim_{x\to1}\left(\frac{x}{x-1}-\frac{1}{\ln x}\right)$.

Решение.

$$\lim_{x\to1}\left(\frac{x}{x-1}-\frac{1}{\ln x}\right) = (\infty-\infty) = \lim_{x\to1}\left(\frac{x\ln x - x + 1}{\ln x\cdot(x-1)}\right) =$$

$$= \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x\to1}\frac{(x\ln x - x + 1)'}{(\ln x\cdot(x-1))'} = \lim_{x\to1}\frac{\ln x + x\cdot\frac{1}{x} - 1}{\frac{1}{x}\cdot(x-1)+\ln x} =$$

$$= \lim_{x\to1}\frac{\ln x}{\ln(x-1/x+1)} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x\to1}\frac{(\ln x)'}{\ln(x-1/x+1)'} = \lim_{x\to1}\frac{1/x}{1/x+1/x^2} = \frac{1}{2}.$$

Рассмотрим неопределенности вида (0^0), (1^∞), (∞^0). Такие неопределенности имеют место при рассмотрении функций $y = f(x)^{g(x)}$, если при $x\to a$ функция $f(x)$ стремится соответственно к 0, 1 и ∞, $g(x)$ – соответственно к 0, ∞ и 0. Для раскрытия этих неопределенностей функция предварительно логарифмируется и, значит, сначала отыскивается предел не заданной функции, а её логарифма, а затем уже по пределу логарифма находится предел функции (что допустимо вследствие непрерывности логарифмической функции). Рассмотрим это на примере.

Пример 6.9. Найти $\lim_{x\to+\infty}(\frac{2}{x}+1)^x$.

Решение.

В данном случае имеем неопределенность типа $\left(1^\infty\right)$, поэтому для раскрытия этой неопределенности применим метод логарифмирования.

Пусть $A = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2}{x}+1\right)^x$. Тогда с учетом того, что логарифмическая функция непрерывна, имеем

$$\ln A = \ln \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2}{x}+1\right)^{x} = \lim_{x\to+\infty}\ln\left(\frac{2}{x}+1\right)^{x} = \lim_{x\to+\infty} x\ \ln\cdot\left(\frac{2}{x}+1\right) = (0\cdot\infty) =$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln\left(\frac{2}{x}+1\right)}{\frac{1}{x}} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\ln\left(\frac{2}{x}+1\right)\right)'}{\left(\frac{1}{x}\right)'} = \lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{\frac{2}{x}+1}\cdot\left(-\frac{2}{x^2}\right)'}{-\frac{1}{x^2}} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{2}{\frac{2}{x}+1} = 2.$$

Так как $\ln A = 2$, то $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{2}{x}+1\right)^{x} = e^2$.

7. ПРИМЕНЕНИЕ ПРОИЗВОДНОЙ ДЛЯ ИССЛЕДОВАНИЯ СВОЙСТВ ФУНКЦИЙ

7.1. Возрастание и убывание функций

Функция $y = f(x)$ называется ***возрастающей*** (***убывающей***) на некотором интервале (a,b), если большему значению аргумента из этого интервала соответствует ***большее*** (***меньшее***) значение функции. Т. е. $f(x)$ **возрастает в интервале** (a,b), если для любых значений x_1, x_2, удовлетворяющих условию $a < x_1 < x_2 < b$, имеет место неравенство $f(x_1) < f(x_2)$, и **убывает,** если для любых значений x_1, x_2, удовлетворяющих указанному условию, имеет место неравенство $f(x_1) > f(x_2)$.

Интервалы, в которых функция возрастает или убывает, называются интервалами монотонности функции.

Рассмотрим применение производной для нахождения интервалов монотонности функций.

Теорема 1 (*достаточное условие возрастания функции*). Если функция $y = f(x)$ непрерывна на отрезке $[a;b]$ и дифференцируема в интервале (a,b), причем $f'(x) > 0$ ($f'(x) < 0$) для любого $x \in (a,b)$, то эта функция возрастает (убывает) на отрезке $[a;b]$.

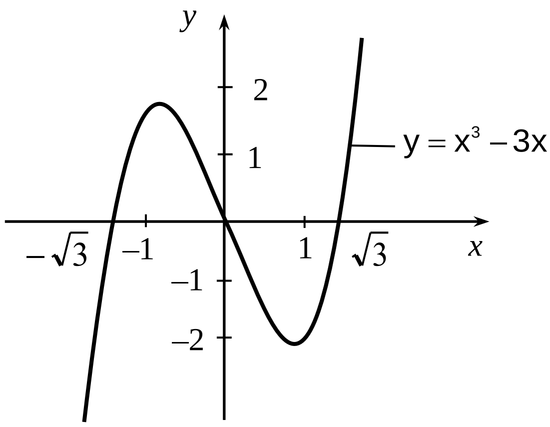

Рис. 2

Пример 7.1. Исследовать на монотонность (т. е. возрастание и убывание) функцию: $f(x) = x^3 - 3x$.

Решение.

$f'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x^2 - 1)$.

Неравенство $f'(x) > 0$, т. е. $3(x^2 - 1) > 0$, справедливо для $x < -1$ и для $x > 1$. Следовательно, функция $f(x)$ возрастает на интервалах $(-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$.

Поскольку неравенство $f'(x) < 0$, т. е. $3(x^2 - 1) < 0$ справедливо для $x \in (-1; 1)$, то в интервале $(-1; 1)$ функция $f(x)$ убывает (рис. 2).

7.2. Экстремумы функции

Дадим точные определения точкам максимума и минимума функции. Пусть функция $f(x)$ определена на промежутке X и точка $x_0 \in X$. Говорят, что в точке x_0 функция $f(x)$ имеет ***максимум (минимум)***, если существует такая окрестность точки x_0, что для любого x из этой окрестности $f(x) < f(x_0)$ ($f(x) > f(x_0)$).

Точки максимума и минимума называются точками ***экстремума***.

Замечание 1. Точки экстремума всегда являются внутренними точками промежутка, т. е. не могут быть его концами.

Теорема 2 (*необходимое условие экстремума*). Если функция $f(x)$ дифференцируема в точке x_0 и некоторой ее окрестности и x_0 – точка экстремума, то $f'(x_0) = 0$.

Точки, в которых производная функции равна нулю, называются ***стационарными*** или ***точками возможного экстремума***. Точки, в которых производная равна нулю или не существует (но сама функция в этих точках определена) называются ***критическими***.

Следствие. Если x_0 – точка экстремума, то $f'(x_0)=0$ или $f'(x_0)$ не существует.

В качестве примера приведем функцию $f(x)=|x|$ (рис. 3).

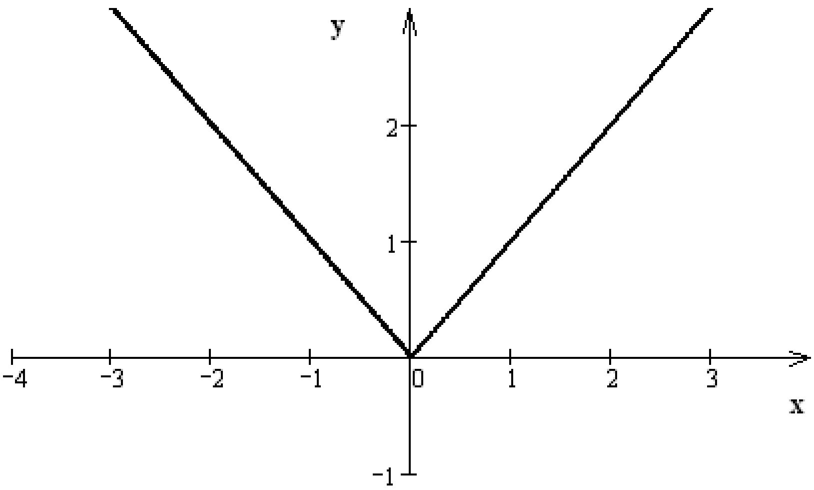

Рис. 3

Очевидно, что $x_0 = 0$ является точкой минимума, так как $|0| < |x|$ для любого $x \neq 0$. А в точке $x_0 = 0$ производной $f'(0)$не существует, но функция в точке $x_0 = 0$ определена.

Если $f'(x_0)=0$ или $f'(x_0)$ не существует, то точку x_0 будем называть ***критической*** (или подозрительной на экстремум). Критическая точка может и не быть точкой экстремума.

Теорема 3 (*первое достаточное условие экстремума*). Пусть функция $f(x)$ определена и непрерывна в точке x_0 и некоторой ее окрестности $(x_0-\delta,\ x_0+\delta)$. Дифференцируема в этой окрестности, за исключением, быть может самой точки x_0, и точка x_0 – критическая точка для функции $f(x)$ (т. е. $f'(x_0)=0$ или $f'(x_0)$ не существует). Тогда:

1) если для любой точки x из левой полуокрестности точки x_0 производная положительна ($\forall x \in (x_0-\delta,\ x_0)$: $f'(x)>0$), а для любого x из её правой полуокрестности производная отрицательна ($\forall x \in (x_0,\ x_0+\delta)$: $f'(x)<0$), то x_0 – точка максимума;

2) если для $\forall x \in (x_0-\delta,\ x_0)$ производная $f'(x)<0$, а для $\forall x \in (x_0,\ x_0+\delta)$ $f'(x)>0$, то x_0 – точка минимума.

Пример 7.2. Исследовать на монотонность и экстремумы функцию $f(x)=x^2e^{-x}$. Построить её график.

Решение.

Заданная функция определена и непрерывна на всей числовой оси $(-\infty;+\infty)$. Найдем производную: $f'(x)=2xe^{-x}-x^2e^{-x}=xe^{-x}(2-x)$. Найдем критические точки, для этого решим уравнение $f'(x)=0$, получим

$xe^{-x}(2-x)=0$

$x_1=0,\ x_2=2$

Точки x_1, x_2 – критические точки. Эти точки разбивают всю числовую ось на три интервала: (–∞; 0), (0; 2), (2; +∞). Определим знак $f'(x)$ на каждом из интервалов: если $x\in(-\infty,\ 0)$, то $f'(x)<0$; если $x\in(0,\ 2)$, то $f'(x)>0$; если $x\in$(2, +∞ ∞), то $f'(x)<0$. Отсюда определяется поведение функции $f(x)$: на первом и последнем интервалах функция $f(x)$ убывает, а на втором – возрастает. Отсюда следует, что x_1 = 0 является точкой минимума, $y_{\min}(0)=0$, а x_2=2 – точка максимума, $y_{\max}(2)=\dfrac{4}{e^2}\approx 0{,}54$.

Составим таблицу, в первой строке которой поместим указанные точки и интервалы, во второй строке – сведения о производной $f'(x)$ в точках и на интервалах, а в третьей – поведение данной функции $f(x)$ (табл. 2).

Таблица 2

x	$(-\infty,\ 0)$	0	(0, 2)	0	$(2,+\infty)$
$f'(x)$	$f'(x)<0$	0	$f'(x)>0$	0	$f'(x)<0$
$f(x)$	убывает	$y_{min}(0)=0$	возрастает	$y_{\max}(2)=4/e^2$	убывает

По данным исследования построим график заданной функции (рис. 4).

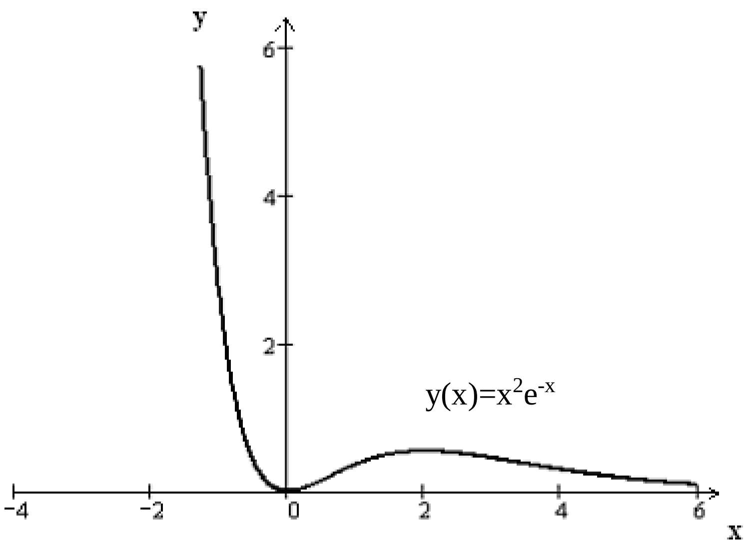

Рис. 4

7.3. Наибольшее и наименьшее значения функции на отрезке

Известно, что если функция непрерывна на отрезке, то она достигает на этом отрезке своего наименьшего и наибольшего значения. Иногда требуется найти наименьшее или наибольшее значение такой функции.

Если на отрезке $[a;b]$ есть точки минимума и максимума функции $f(x)$, то наименьшее значение функция будет принимать либо в одной из точек минимума, либо на конце отрезка $[a;b]$. Аналогично для наибольшего значения.

Сформулируем алгоритм нахождения наибольшего и наименьшего значения функции $f(x)$, непрерывной на отрезке:

1. Найти критические точки x_1, x_2, ..., x_n функции $f(x)$.
2. Отобрать все критические точки, принадлежащие отрезку $[a;b]$.
3. Вычислить значения функции $f(x)$ в этих критических точках и на концах отрезка.
4. Из полученных значений выбрать самое большое и самое малое. Эти числа и будут наибольшим и наименьшим значениями $f(x)$ на отрезке $[a;b]$.

Пример 7.3. Найти наименьшее и наибольшее значения функции

$f(x) = x^4 - 2x^2 + 5$ *на отрезке* $[-2;2]$

Решение.

1. Найдем критические точки для данной функции:

$f'(x) = 4x^3 - 4x = 4x(x^2 - 1)$;

$f'(x) = 0$ при $x_1=0$, $x_2=-1$, $x_3=+1$. Производная функции определена для любого x.

2. Все три критические точки принадлежат данному отрезку.
3. Вычислим значения функции в точках: $-2;\ -1;\ 0;\ 1;\ 2$:

$f(-2) = (-2)^4 - 2(-2)^2 + 5 = 16 - 8 + 5 = 13;$

$f(-1) = (-1)^4 - 2(-1)^2 + 5 = 1 - 2 + 5 = 4;$

$f(0) = (0)^4 - 2(0)^2 + 5 = 5;$

$f(1) = 4;$

$f(2) = 13.$

4. Из найденных значений самое малое число 4, а самое большое число 13.

Таким образом, наименьшее значение функции равно 4, в точке $x=1$, наибольшее значение равно 13, в точке $x=2$ и в точке $x=-2$.

Пример 7.4. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $y = x - 2\sin x$ на отрезке $\left[0,\ \frac{\pi}{2}\right]$.

Решение.

1. $y' = 1 - 2\cos x$. Точек в которых производная не существует нет, т. е. y' определена при любом x; $y' = 0$ когда $cos\, x = \dfrac{1}{2}$.

2. На отрезке $\left[0,\ \dfrac{\pi}{2}\right]$, $cos\, x = \dfrac{1}{2}$ при $x = \dfrac{\pi}{3}$.

3. Имеем три точки: $x = 0$, $x = \dfrac{\pi}{3}$, $x = \dfrac{\pi}{2}$, в которых может достигать наибольшее и наименьшее значения.

$f(0) = 0 - 2\sin 0 = 0$;

$f\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = \dfrac{\pi}{2} - 2\sin\dfrac{\pi}{2} = \dfrac{\pi}{2} - 2 = \dfrac{\pi - 4}{2}$;

$f\left(\dfrac{\pi}{3}\right) = \dfrac{\pi}{3} - 2\sin\dfrac{\pi}{3} = \dfrac{\pi}{3} - 2\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Итак, $f_{наиб} = f(0) = 0$, $f_{наим} = f\left(\dfrac{\pi}{3}\right) = \dfrac{\pi}{3} - 2\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2} \approx \dfrac{3{,}14}{3} - \sqrt{3} \approx -0{,}58$.

Пример 7.5. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $y = 3x^4 - 4x^3 - 24x^2 + 48x + 12$ на отрезке $[-1;\ 4]$.

Решение.

1. Найдем критические точки функции из условия, что $y'(x) = 0$ или такие при которых $y'(x)$ не существует:

$y'(x) = \left(3x^4 - 4x^3 - 24x^2 + 48x + 12\right)' = 12x^3 - 12x^2 - 48x + 48$.

Производная $y'(x)$ во всех точках существует, $y'(x) = 0$, когда $x^3 - x^2 - 4x + 4 = 0$.

Раскладывая левую часть на множители, получаем:

$x^3 - x^2 - 4x + 4 = x^2(x-1) - 4(x-1) = (x-1)(x^2-4)$.

Отсюда находим критические точки: $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = -2$.

2. Из этих точек отрезку $[-1,\ 4]$ принадлежат только две: $x_1 = 1$ и $x_2 = 2$.

3. Найдем значения функции в этих точках и на концах отрезка, т. е. при $x = -1$, $x = 4$, $x = 1$, $x = 2$:

$f(-1) = 3(-1)^4 - 4(-1)^3 - 24(-1)^2 + 48(-1) + 12 =$

$= 3 + 4 - 24 - 48 + 12 = 19 - 72 = -53$;

$f(1) = 3\cdot 1^4 - 4\cdot 1^3 - 24\cdot 1^2 + 48\cdot 1 + 12 = 63 - 28 = 35$;

$f(2) = 3\cdot 2^4 - 4\cdot 2^3 - 24\cdot 2^2 + 48\cdot 2 + 12 = 48 - 32 - 96 + 96 + 12 = 60 - 32 = 28$;

$f(4)=3\cdot 4^4-4\cdot 4^3-24\cdot 4^2+48\cdot 4+12=$

$=2\cdot 4^4-6\cdot 4^3+3\cdot 4^3+3\cdot 4=4\cdot 83=252$.

Итак, получили $f_{наиб}=f(4)=252$, $f_{наим}=f(-1)=-53$.

Среди многих применений производной функции одной переменной важное значение имеет решение так называемых задач на максимум (минимум).

Пример 7.6. Найти прямоугольный треугольник наибольшей площади, у которого сумма катета и гипотенузы равна k.

Решение.

Обозначим один из катетов треугольника через x, тогда гипотенуза будет равна $k-x$, а другой катет, по теореме Пифагора будет равен:

$\sqrt{(k-x)^2-x^2}=\sqrt{k^2-2kx}$ при условии, что

$k^2-2kx\geq 0$

$2kx\leq k^2$

$x\leq\frac{k}{2}.$

Площадь треугольника $S(x)=\frac{1}{2}x\sqrt{k^2-2kx}$, так как $S(x_0)$ должна быть максимальной, то $S'(x_0)=0$ или $S'(x)$ не существует. Находим производную:

$$S'(x)=\frac{1}{2}\left(\sqrt{k^2-2kx}+\frac{x(-2k)}{2\sqrt{k^2-2kx}}\right)=\frac{k^2-2kx-kx}{2\sqrt{k^2-2kx}}=\frac{k^2-3kx}{2\sqrt{k^2-2kx}}.$$

$S'(x)$ не существует, если $x=k/2$, но тогда катет окажется равным гипотенузе, что невозможно. $S'(x)=0$, если $k(k-3x)=0$. Тогда $x=\frac{k}{3}$.

Проверяем является ли эта точка точкой максимума. При $x\in\left(0;\frac{k}{3}\right)$

$S'(x)>0$, а при $x\in\left(\frac{k}{3};\frac{k}{2}\right)$ $S'(x)<0$. Таким образом при $x=\frac{k}{3}$ площадь треугольника будет наибольшей.

Гипотенуза будет равна $k-\frac{k}{3}=\frac{2k}{3}$, т. е. $\cos\alpha=\frac{k/3}{2k/3}=\frac{1}{2}$,

где α – угол, прилежащий к катету x. Значит, $\alpha=\frac{\pi}{3}$; другой угол будет $\frac{\pi}{6}$.

Следовательно, искомый треугольник – это прямоугольный треугольник с углами $\frac{\pi}{3}$, $\frac{\pi}{6}$ и сторонами $\frac{1}{3}k$, $\frac{2}{3}k$ и $\frac{\sqrt{3}k}{3}$.

Пример 7.7. Из трех одинаковых досок изготовить симметричный желоб с наибольшей площадью поперечного сечения.

Решение.

Ширину данных досок обозначим через a. Поперечное сечение желоба изображено на рис. 5.

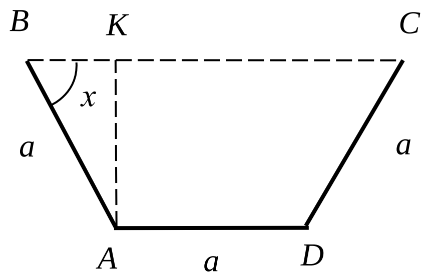

Рис. 5

Обозначим через x угол ABK $(0 < x < \pi)$, тогда $AK = a\sin x$, $BK = a\cos x$.

Площадь поперечного сечения (площадь трапеции) будет:

$$S_{тр} = \frac{BC + AD}{2}AK = \frac{2a + 2a\cos x}{2}a\sin x =$$

$$= a^2(1 + \cos x)\sin x = a^2\left(\sin x + \frac{1}{2}\sin(2x)\right).$$

Наибольшее значение эта функция принимает в точке максимума, а необходимым условием того, что точка x является точкой максимума функции $S(x)$, является то, что $S'(x) = 0$ или $S'(x)$ не существует. Найдем $S'(x)$:

$$S'(x) = a^2\left[\cos x + \frac{1}{2}2\cos(2x)\right] = a^2\left(\cos x + 2\cos^2 x - 1\right).$$

Но $\cos x + 2\cos^2 x - 1$ всегда существует. Точки, в которых $S'(x) = 0$, находятся из уравнения: $\cos x + 2\cos^2 x - 1 = 0$. Тогда $\cos x = -1$ или $\cos x = \frac{1}{2}$. Если $\cos x = -1$, то $x = (2k+1)\pi,\ k \in Z$.

Но в этом случае никакого желоба не получится, так как $0 < x < \pi$. Остается случай, когда, $\cos x = \frac{1}{2}$, тогда $x = \frac{\pi}{3}$, так как $0 < x < \pi$.

Проверим, является ли эта точка $x = \frac{\pi}{3}$ точкой максимума функции $S(x)$. При $x \in \left(0; \frac{\pi}{3}\right)$, производная функции принимает положительные значения, а при $x \in \left(\frac{\pi}{3}; \pi\right)$ – отрицательные. То есть при $x = \frac{\pi}{3}$ площадь поперечного сечения желоба будет наибольшей.

Таким образом, $x = \frac{\pi}{3}$ действительно точка максимума. А площадь поперечного сечения составит.

$$S\left(\frac{\pi}{3}\right) = a^2\left(\sin\frac{\pi}{3} + \frac{2}{2}\sin\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{3}\right) = a^2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2 \cdot 2}\right) = \frac{a^2 3\sqrt{3}}{2}.$$

7.4. Выпуклость графика функции, точки перегиба

Пусть $f(x)$– функция, дифференцируемая на интервале $(a;b)$. Рассмотрим кривую, являющуюся графиком функции $y = f(x)$.

Кривая, заданная функцией $y = f(x)$, называется ***выпуклой вверх*** на интервале $(a;b)$, если все точки кривой лежат ниже любой ее касательной на этом интервале.

Кривая называется ***выпуклой вниз*** на интервале $(a;b)$, если все точки кривой лежат выше любой ее касательной на этом интервале.

Точкой перегиба называется точка на кривой, где меняется направление её выпуклости.

Теорема 4 (*достаточные условия выпуклости графика функции*).

Если во всех точках интервала $(a;b)$ вторая производная функции $f(x)$ отрицательна, т. е. $f''(x) < 0$, то кривая $y = f(x)$ на этом интервале выпукла вверх; если во всех точках интервала $(a;b)$ - $f''(x) > 0$, то кривая $y = f(x)$ на этом интервале выпукла вниз.

Пример 7.8. Определить направление выпуклости и точки перегиба кривой $y = 3x^5 - 5x^4 + 4$.

Решение:

Ищем точки x из области определения функции, в которых $y'' = 0$ или не существует.

$y' = 15x^4 - 20x^3$

$y'' = 60x^3 - 60x^2 = 60x^2(x-1)$.

Вторая производная равна нулю $y'' = 0$ в точках $x = 0$ и $x = 1$. Эти точки являются искомыми, так как область определения и область непрерывности данной кривой есть вся ось абсцисс. Других точек x, которые могли бы быть абсциссами точек перегиба, нет, так как y'' существует всюду.

Исследуем найденные точки, определяя знак y'' слева и справа от каждой из них. Результаты исследования запишем в таблицу, подобную той, которая составляется при отыскании точек экстремума (табл. 3).

Таблица 3

x	$(-\infty;\ 0)$	0	(0, 1)	1	$(1,\ +\infty)$
$f''(x)$	$f''(x) < 0$	0	$f''(x) < 0$	0	$f''(x) > 0$
$f(x)$	выпукла вверх	нет перегиба	выпукла вверх	точка перегиба	выпукла вниз

Выполним построение (рис. 6).

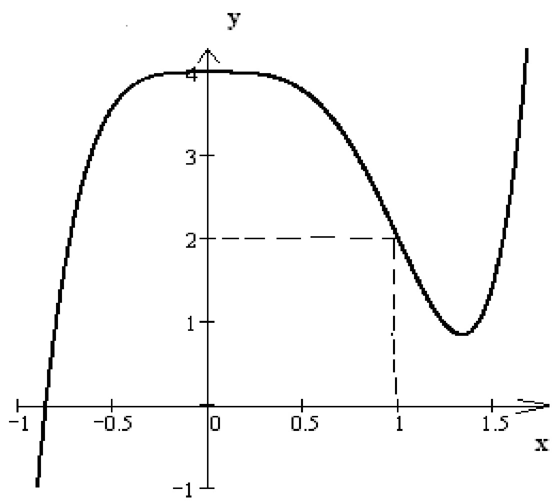

Рис. 6

7.5. Асимптоты

При исследовании функции часто приходится устанавливать вид ее графика (а значит, и характер функции) при неограниченном удалении точки графика от начала координат (при стремлении переменной точки в бесконечность). При этом важным случаем является тот, когда график функции при удалении его переменной точки в бесконечность неограниченно приближается к некоторой прямой.

Если $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=b$, то прямая $y=b$ является асимптотой графика функции $y=f(x)$ (при $x\to+\infty$). Эта асимптота параллельна оси Ox и называется ***горизонтальной асимптотой*** (рис. 7). Аналогично, прямая $y=f(x)$ является асимптотой графика функции $y = f(x)$ при $x\to-\infty$, если $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=b$.

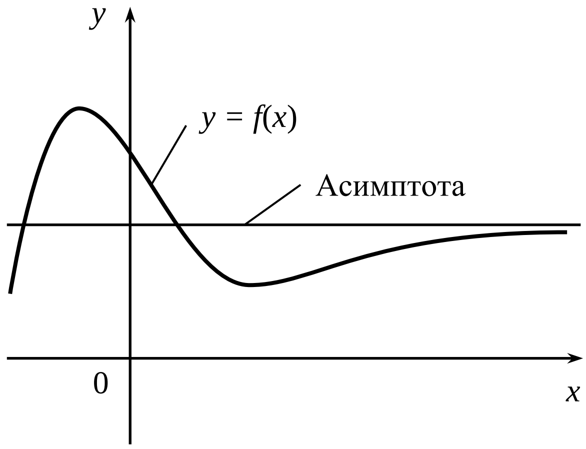

Рис. 7

Рассмотрим асимптоты, параллельные оси Oy.

Прямая $x=x_0$ называется ***вертикальной асимптотой,*** если хотя бы один из односторонних пределов $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)$, $\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)$, является бесконечным (рис. 8).

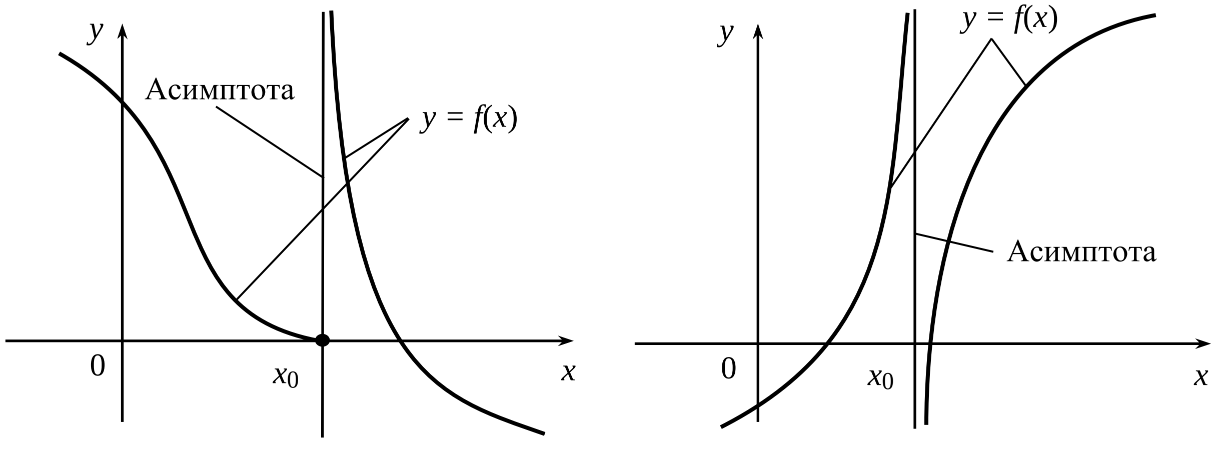

Рис. 8

Следовательно, для отыскания вертикальных асимптот нужно найти точки разрыва функции второго рода.

Пример 7.9. Найти вертикальные асимптоты для функции $y = \dfrac{1}{x-2}$.

Решение.

Функция $f(x) = \dfrac{1}{x-2}$ определена и непрерывна во всех точках числовой оси, за исключением точки $x_0=2$, в которой функция терпит разрыв, $\lim\limits_{x\to 2-0} \dfrac{1}{x-2} = -\infty$, $\lim\limits_{x\to 2+0} \dfrac{1}{x-2} = +\infty$. Следовательно, прямая $x=2$ является вертикальной асимптотой для графика $y=\dfrac{1}{x-2}$. Кроме того, $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{1}{x-2} = 0$ и $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{1}{x-2} = 0$, следовательно, прямая $y=0$ является горизонтальной асимптотой при $x \to +\infty$ и при $x \to -\infty$ рис. 9.

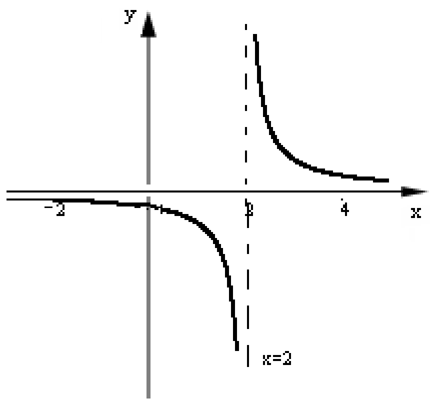

Рис. 9

Рассмотрим асимптоты, которые не параллельны координатным осям (рис. 10). Будем называть их наклонными асимптотами.

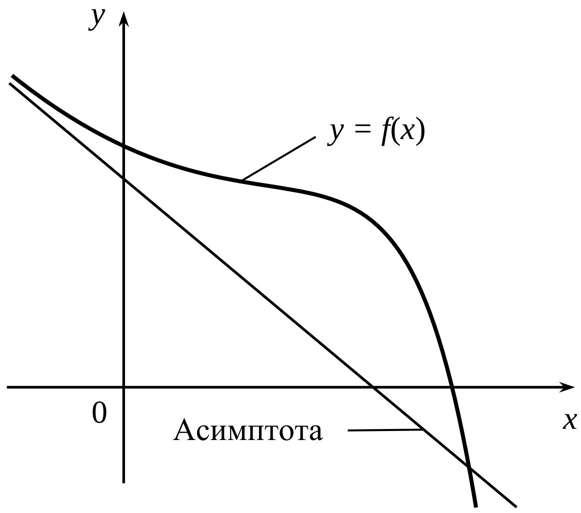

Рис. 10

Прямая $y = kx + b$ называется ***наклонной асимптотой*** функции $y = f(x)$, если функцию можно представить в виде

$$f(x) = kx + b + \alpha(x), \qquad (7.1)$$

где $\alpha(x) \to 0$, при $x \to +\infty$.

Определим числа k и b.

Поделим обе части равенства (7.1) на x и перейдем к пределу при $x \to +\infty$:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} (k + \frac{b}{x} + \frac{\alpha(x)}{x})$$

Откуда

$$k = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} \ . \qquad (7.2)$$

Определим коэффициент b.

Равенство (7.1) перепишем в виде:

$$f(x) - kx = b + \alpha(x)$$

Перейдем к пределу $x \to +\infty$, получим.

$$\lim_{x\to+\infty} (f(x) - kx) = \lim_{x\to+\infty} (b + \alpha(x)).$$

$$b = \lim_{x\to+\infty} (f(x) - kx) \ . \qquad (7.3)$$

Если хотя бы один из пределов (7.2), (7.3) не существует, то при $x \to +\infty$ кривая не имеет наклонной асимптоты.

Аналогично решается вопрос об асимптотах при $x \to -\infty$.

Замечание. Если, $k = 0$, то $y = b$ будет являться горизонтальной асимптотой. Т. е. отдельно находить горизонтальные асимптоты нет необходимости, они будут найдены при нахождении наклонных асимптот (при k=0).

Пример 7.10. Найти асимптоты линии $y = e^x - x$.

Решение.

Функция $f(x) = e^x - x$ определена, непрерывна на бесконечном интервале $(-\infty; +\infty)$ поэтому вертикальных асимптот нет.

Найдем наклонные асимптоты. Для этого вычислим пределы (7.1), (7.3) при $x \to +\infty$ и при $x \to -\infty$:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} (\frac{e^x}{x} - 1) = +\infty,$$

так как $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$ (проверьте это по правилу Лопиталя). Отсюда следует, что при $x \to +\infty$ наклонных асимптот нет.

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty}\left(\frac{e^x}{x}-1\right)=-1, \text{ так как } \lim_{x\to-\infty}\frac{e^x}{x}=0,$$

отсюда $k=-1$. Далее, $\lim\limits_{x\to-\infty}(f(x)-kx)=\lim\limits_{x\to-\infty}(e^x-x+x)=\lim\limits_{x\to-\infty}e^x=0$

значит, b=0.

Итак, прямая $y=-x$ есть наклонная асимптота при $x\to-\infty$ для графика функции $y=e^x-x$ (рис.11).

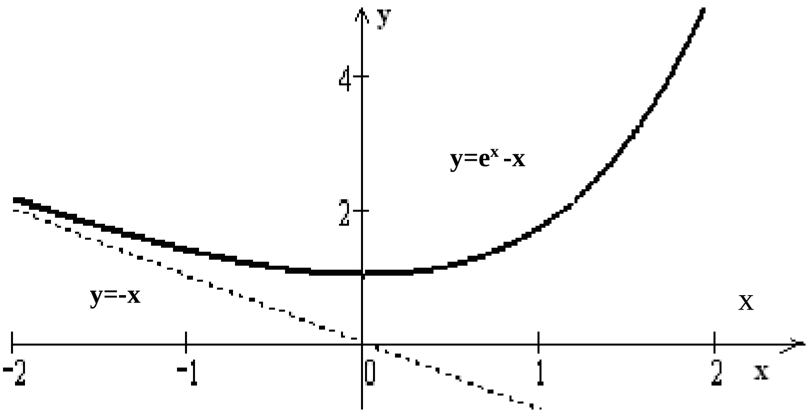

Рис. 11

8. ПОСТРОЕНИЕ ГРАФИКОВ ФУНКЦИЙ С ПОМОЩЬЮ ЭЛЕМЕНТОВ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ИСЧИСЛЕНИЯ

При полном исследовании функции $y=f(x)$ и построении ее графика можно придерживаться следующей схемы:

1) указать ***область определения*** функции;
2) исследовать функцию на ***четность***;
3) найти ***точки пересечения*** графика функции с осями координат;
4) определить ***уравнения асимптот*** графика функции: вертикальные и наклонные;
5) исследовать функцию на ***монотонность*** и ***экстремумы***;
6) определить ***интервалы выпуклости*** функции и точки перегиба;
7) произвести необходимые ***дополнительные*** исследования;
8) ***построить график*** функции.

Дадим пояснения к каждому пункту приведенной схемы.

1) Если каждому элементу $x\in D$ по определенному правилу f поставлен в соответствие единственный элемент y, то говорят, что задана ***функция*** $y=f(x)$, где x называется независимой переменной или аргументом.

Множество D называется ***областью определения функции***. Поэтому, чтобы найти D, нужно определить множество точек x действительной оси, для которых выражение f имеет смысл и определяет действительные значения переменной y.

2) Если для любого x из **симметричной** области определения D выполняется равенство $f(-x)=f(x)$, то функция является четной, если же выполняется равенство $f(-x)=-f(x)$, то функция является нечетной. В том случае, когда $f(-x)\neq f(x)$ и $f(-x)\neq -f(x)$ – функция не является ни четной, ни нечетной. Говорят, что функция является общего вида.

График четной функции симметричен относительно оси Oy, а график нечетной – относительно начала координат. Таким образом, график четной или нечетной функций достаточно построить лишь для $x\geq 0$, а потом, используя симметрию, достроить его на оставшейся части области определения.

3) Точки пересечения графика функции $y=f(x)$ с осью Ox определяются из условия $y=0$, т. е. $f(x)=0$. Точка пересечения с осью Oy определяется из условия $x=0$, значит, $y=f(0)$.

4) Прямая $x=a$ является вертикальной асимптотой графика функции $y=f(x)$, если

$$\lim_{x\to a-0} f(x)=\pm\infty, \text{ или } \lim_{x\to a+0} f(x)=\pm\infty.$$

Прямая $y=kx+b$ является наклонной асимптотой графика функции $y=f(x)$, если существуют конечные пределы

$$k=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x},\ b=\lim_{x\to+\infty}\left[f(x)-kx\right]$$

или

$$k=\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x},\ b=\lim_{x\to-\infty}\left[f(x)-kx\right].$$

В частности, при $k=0$ получаем $b=\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ или $b=\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.

Полученная прямая $y=b$ является горизонтальной асимптотой графика функции $y=f(x)$.

5) Найти производную y' и критические точки (в которых $y'=0$ или не существует), а сама функция непрерывна, и которые лежат внутри области определения функции. Изобразить критические точки на числовой оси и определить знак производной в каждом интервале, слева и справа от каждой критической точки.

Если при переходе аргумента x через критическую точку x_0:

а) y' меняет знак с "+" на "-", то x_0 есть точка максимума;

б) y' меняет знак с "-" на "+", то x_0 есть точка минимума;

в) y' не меняет знака, то в точке x_0 нет экстремума.

В промежутках где $y' > 0$ функция возрастает, где $y' < 0$ функция убывает.

Полученные результаты для наглядности можно оформить в виде таблицы. Эта таблица заполняется следующим образом:

1. В первой строке указываются интервалы, на которые все критические точки разбивают числовую ось и сами точки;

2. Во второй строке указываются знаки первой производной на этих интервалах;

3. В третьей строке описывается поведение функции на каждом интервале (↑ - функция возрастает, ↓- функция убывает).

6) Найти производную y'' и критические точки, в которых $y'' = 0$ или не существует, а сама функция непрерывна, и которые лежат внутри области определения функции. Изобразить критические точки на числовой оси и определить знак производной в каждом интервале, слева и справа от каждой критической точки. Исследуемая точка x будет абсциссой точки перегиба, если по разные стороны от неё y'' имеет разные знаки.

Если на некотором интервале $y'' > 0$, то функция выпукла вниз ($\cup$); если на некотором интервале $y'' < 0$, то функция выпукла вверх ($\cap$).

Результаты, так же как и в п. 5 данного алгоритма для наглядности можно оформить в виде таблицы. Эта таблица заполняется следующим образом:

1. В первой строке указываются интервалы, на которые все критические точки второго рода разбивают числовую ось и сами точки.

2. Во второй строке указываются знаки второй производной на этих интервалах.

3. В третьей строке описать поведение функции на каждом интервале (выпукла или вогнута).

7) Необходимо вычислить значения функции в точках экстремума и в точках перегиба графика функции. Если информации для построения графика недостаточно, найти значения функции в произвольно выбранных вспомогательных точках.

По составленным таблицам нетрудно построить график функции. Для этого нужно данные таблиц перенести в декартову систему координат в подходяще выбранном масштабе.

Пример 8.1. Исследовать методами дифференциального исчисления функцию $y = \dfrac{x^3}{x^2 - 1}$ и построить ее график.

Решение.

1) Областью определения функции является вся числовая ось, за исключением точек, в которых знаменатель дроби обращается в нуль, то есть $x^2-1=0$. Отсюда $(x-1)(x+1)=0$, $x_1=1$, $x_2=-1$. Итак, область определения: $D=(-\infty,-1)\cup(-1,+\infty)$.

2) Т.к. область определения функции симметрична относительно начало координат, то проверим условие четности функции. Найдем $f(-x)$:

$$\mathrm{f}(-\mathrm{x})=\frac{(-\mathrm{x})^3}{(-\mathrm{x})^2-1}=-\frac{\mathrm{x}^3}{\mathrm{x}^2-1}=-\mathrm{f}(\mathrm{x}).$$

Так как $f(-x)=-f(x)$, то функция $y=\dfrac{x^3}{x^2-1}$ является нечетной, и её график симметричен относительно начала координат.

3) Точка пересечения с осью Ox определяется равенством $y=0$, т. е. $\dfrac{x^3}{x^2-1}=0$, $x=0$.

Точка пересечения с осью Oy определяется равенством $x=0$: $f(0)=\dfrac{0^3}{0^2-1}=0$, т. е. $y=0$. Итак, график функции имеет единственную точку пересечения с осями координат – начало координат $O(0,\ 0)$.

4) Так как при $x_1=1$ и $x_2=-1$ не выполняется условие непрерывности функции в точке, то эти точки являются точками разрыва функции $y=\dfrac{x^3}{x^2-1}$. Причем эти точки являются точками разрыва второго рода, так как $\lim\limits_{x\to1-0}\dfrac{x^3}{x^2-1}=-\infty$, $\lim\limits_{x\to1+0}\dfrac{x^3}{x^2-1}=+\infty$

и $\lim\limits_{x\to-1-0}\dfrac{x^3}{x^2-1}=-\infty$, $\lim\limits_{x\to-1+0}\dfrac{x^3}{x^2-1}=+\infty$.

Так как данная функция имеет точки разрыва второго рода (точки бесконечного разрыва функции), то существуют вертикальные асимптоты графика функции и их уравнения: $x=1$ и $x=-1$.

Найдем уравнения невертикальных асимптот. Для этого вычислим коэффициенты в уравнении прямой $y=kx+b$:

$$k=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^3}{x\cdot\left(x^2-1\right)}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^3}{x^3-x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{1}{1-x^{-2}}=1,$$

$$b=\lim_{x\to\pm\infty}\left[f(x)-kx\right]=\lim_{x\to\pm\infty}\left[\frac{x^3}{x^2-1}-x\right]=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^3}{x^2-1}=0.$$

Следовательно, прямая $y=x$ является наклонной асимптотой при $x\to+\infty$ и $x\to-\infty$.

5) Найдем производную $f'(x)$:

$$f'(x)=\left(\frac{x^3}{x^2-1}\right)'=\frac{3x^2\cdot\left(x^2-1\right)-x^3\cdot 2x}{\left(x^2-1\right)^2}=\frac{x^4-3x^2}{\left(x^2-1\right)^2}.$$

Для того чтобы найти критические точки, решим уравнение: $f'(x)=0$ и выясним, в каких точках не существует $f'(x)$. Уравнение $\frac{x^4-3x^2}{\left(x^2-1\right)^2}=0$ равносильно уравнению $x^4-3x^2=0$ или $x^2\cdot\left(x^2-3\right)=0$. Отсюда находим стационарные точки: $x_1=0$, $x_2=\sqrt{3}$, $x_3=-\sqrt{3}$. Производная не существует в том случае, когда знаменатель $\left(x^2-1\right)^2=0$, т. е. при $x_4=1$, $x_5=-1$, т. е. в точках в которых не определена сама функция. Таким образом, получили три критических точки: $x_1=0$, $x_2=\sqrt{3}$, $x_3=-\sqrt{3}$ и две точки $x_4=1$, $x_5=-1$, не принадлежащие ООФ.

Для нахождения экстремумов и интервалов монотонности функции на числовой прямой отметим все критические точки и точки не принадлежащие ООФ и определим знак производной в каждом из получившихся интервалов.

Для этого достаточно взять по одной произвольной точке из каждого интервала и вычислить значения производной (рис. 12).

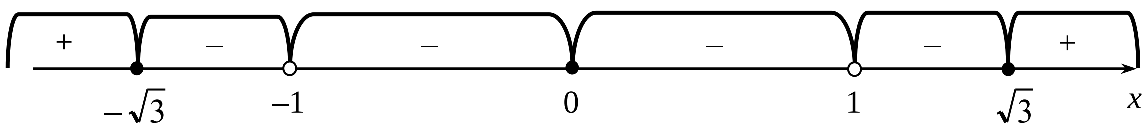

Рис. 12

Например: $f'(-2)=\frac{16-3\cdot 4}{3^2}=\frac{2}{9}>0$; $f'\left(-\sqrt{2}\right)=\frac{4-3\cdot 2}{1}=-2<0$;

$f'\left(-\sqrt{1/2}\right)=\frac{1/4-3\cdot(1/2)}{1/4}=-5<0$; $f'\left(\sqrt{1/2}\right)=-5<0$; $f'\left(\sqrt{2}\right)=-2<0$;

$f'(2)=2/9<0$.

Так как при переходе через критические точки $x = \pm\sqrt{3}$ производная меняет знак, то эти точки являются точками экстремума функции. В частности, при $x = \sqrt{3}$ достигается минимум функции, а при $x = -\sqrt{3}$ – максимум. Кроме того, на интервалах $\left(-\infty,\ -\sqrt{3}\right)$ и $\left(\sqrt{3},\ +\infty\right)$ функция возрастает $(\uparrow)$, а на интервалах $\left(-\sqrt{3},\ -1\right)$, $(-1,\ 1)$ и $\left(1,\ \sqrt{3}\right)$ – убывает$(\downarrow)$.

Полученные данные занесем в таблицу:

Таблица 4

x	$(-\infty;-\sqrt{3})$	$-\sqrt{3}$	$(-\sqrt{3};-1)$	-1	$(-1;0)$	0	$(0;1)$	1	$(1;\sqrt{3})$	$\sqrt{3}$	$(\sqrt{3};+\infty)$
$f'(x)$	+	0	–	∞	–	0	–	∞	–	0	+
$f(x)$	$\uparrow$	-2,6	$\downarrow$	∞	$\downarrow$	0	$\downarrow$	∞	$\downarrow$	2,6	$\uparrow$

6) Найдем $f''(x)$:

$$f''(x) = \left(\frac{x^4 - 3x^2}{\left(x^2 - 1\right)^2}\right)' = \frac{\left(4x^3 - 6x\right)\left(x^2 - 1\right)^2 - \left(x^4 - 3x^2\right)2\left(x^2 - 1\right)2x}{\left(x^2 - 1\right)^4} = \frac{2x^3 + 6x}{\left(x^2 - 1\right)^3}.$$

Определим точки, в которых $f''(x) = 0$ и точки в которых $f''(x)$ не существует

$$\frac{2x^3 + 6x}{\left(x^2 - 1\right)^3} = \frac{2x\left(x^2 + 3\right)}{\left(x^2 - 1\right)^3} = 0.$$

Это уравнение равносильно уравнению $2x\left(x^2 + 3\right) = 0$, откуда $x_1 = 0$.

Производная второго порядка не существует при $x = \pm 1$, т е. точки в которых не определена сама функция.

На числовой оси нанесем точки $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, $x_3 = -1$, и определим знаки второй производной аналогично тому, как это сделано в пункте 7 (рис. 13):

$$f''(-2)=\frac{2\cdot(-8)+3\cdot(-2)}{(4-3)^3}=-\frac{22}{27}<0;$$

$$f''(-0,5)=\frac{2\cdot(-0,125)+3\cdot(-0,5)}{(0,25-1)^3}\approx 4,5>0;$$

$$f''(0,5)\approx -4,4<0,\ f''(2)=22/27>0.$$

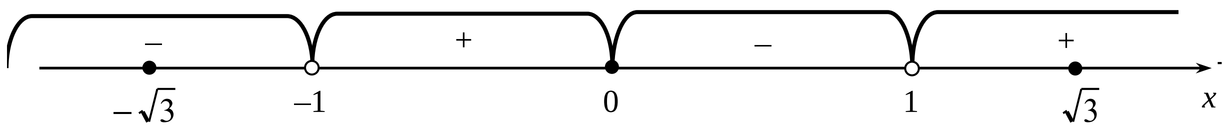

Рис. 13

При переходе через точку $x_1=0$ вторая производная меняет знак, следовательно, x_1 – точка перегиба графика функции. На интервалах $(-\infty,-1)$ и $(0,1)$ график функции является выпуклым вниз, а на интервалах $(-1,\ 0)$ и $(1,\ +\infty)$ – выгнутым вверх. Составим таблицу исследования на выпуклость.

Таблица 5

x	$(-\infty;-1)$	-1	$(-1;0)$	0	$(0;1)$	1	$(1;+\infty)$
$f''(x)$	–	∞	+	0	–	∞	+
$f(x)$	выпуклый вверх	∞	выпуклый вниз	0	выпуклый вверх	∞	вогнутый вниз

8) Вычислим значения функции в точках экстремума и перегиба:

$$f\left(-\sqrt{3}\right)=\frac{3\cdot\sqrt{3}}{3-1}\approx -2,6,\ f(0)=0,\ f\left(\sqrt{3}\right)\approx 2,6.$$

Для более точного построения графика найдем значения функции в дополнительных точках: $f(0,5)=\dfrac{0,125}{0,25-1}\approx -0,2$, $f(-0,5)\approx 0,2$.

Теперь построим график функции (рис. 14).

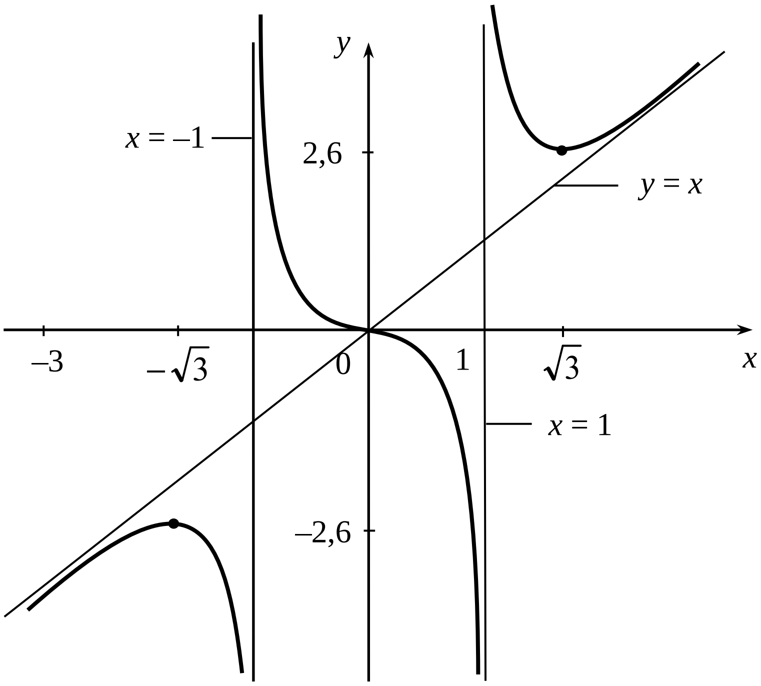

Рис. 14

Пример 8.2. Исследовать методами дифференциального исчисления функцию $y = \dfrac{ln\,x}{\sqrt{x}}$ и построить ее график.

Решение.

1) Исходя из того, что известны области определения элементарных функций $y = ln\,x$ $\left(x > 0\right)$ и $y = \sqrt{x}$ $\left(x \geq 0\right)$, получаем область определения функции: $y = ln\,x / \sqrt{x}$: $D = \left(0, +\infty\right)$.

2) Так как функция определена только для положительных значений x, то ООФ не является симметричной, функция не является ни четной ни нечетной.

3) Найдем точки пересечения с осью Ox: $y = 0$ или $\ln x / \sqrt{x} = 0$, т. е. $\ln x = 0$, откуда $x = 1$. Точки пересечения с осью Oy не существует, так как x никогда не обращается в нуль. Поэтому график функции пересекается с осями координат в единственной точке – $\left(1, 0\right)$.

4) Данная функция непрерывна на всей области определения.

Изучим поведение функции на левом конце области определения, для этого вычислим предел:

$$\lim_{x \to +0} f\left(x\right) = \lim_{x \to +0} \frac{\ln x}{\sqrt{x}} = -\infty .$$

Отсюда прямая $x = 0$ (ось Oy) является вертикальной асимптотой к графику функции.

Найдем уравнения невертикальных асимптот. Для этого вычислим (используя правило Лопиталя) следующие пределы:

$$k=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x\sqrt{x}}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{(\ln x)'}{\left(\sqrt{x^3}\right)'}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{1/x}{\frac{3}{2}\sqrt{x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2}{3x\sqrt{x}}=0,$$

$$b=\lim_{x\to+\infty}\left[f(x)-kx\right]=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{\sqrt{x}}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{(\ln x)'}{\left(\sqrt{x}\right)'}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{1/x}{1/\left(2\sqrt{x}\right)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2}{\sqrt{x}}=0.$$

Полученная прямая $y=0$ (ось Oy) является горизонтальной асимптотой графика функции

5) Найдем $f'(x)$:

$$f'(x)=\left(\frac{\ln x}{\sqrt{x}}\right)'=\frac{(1/x)\sqrt{x}-\ln x/\left(2\sqrt{x}\right)}{x}=\frac{2-\ln x}{2x\sqrt{x}}=\frac{2-\ln x}{2x^{3/2}}.$$

Производная равна нулю, когда $2-ln\,x=0$, то есть при $x=e^2$. Производная существует на всей области определения функции $y=\frac{ln\,x}{\sqrt{x}}$. Следовательно, существует только одна критическая точка.

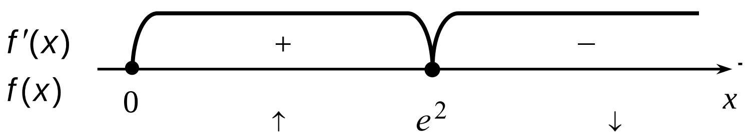

Рис. 15

Нанесем область определения и критическую точку на числовую ось и найдем знаки производной $f'(x)$ на всех интервалах (рис. 15):

$f'(1)=\frac{2-0}{2}=1>0$, $f'(9)=\frac{2-\ln 9}{54}\approx-0{,}004<0$.

Так как при переходе через критическую точку производная меняет знак, то $x=e^2$ – точка экстремума функции (точка максимума). На интервале $\left(0,\,e^2\right)$ функция возрастает, а на интервале $\left(e^2,\,+\infty\right)$ – убывает.

6) Найдем $f''(x)$:

$$f''(x)=\left(\frac{2-\ln x}{2x^{3/2}}\right)'=\frac{-\frac{1}{x}2x^{3/2}-(2-\ln x)2\cdot\frac{3}{2}x^{1/2}}{4x^3}=\frac{\sqrt{x}\,(3\ln x-8)}{4x^3}.$$

Производная второго порядка равна нулю, если $\sqrt{x}\cdot(3\ln x-8)=0$ или $\sqrt{x}=0$, $3\ln x-8=0$. Отсюда получаем: $x_1=0$, $x_2=e^{8/3}$. Так как $x_1=0$ не входит в область определения функции, то существует только одна критическая точка второго рода.

Нанесем область определения функции и критическую точку на числовую ось (рис. 16). Найдем знаки $f''(x)$ на всех полученных интервалах: $f''(1)=\dfrac{1\cdot(0-8)}{4}=-2<0$, $f''\left(e^4\right)=\dfrac{e^2\,(3\cdot 4-8)}{4e^{12}}=\dfrac{1}{e^{10}}>0$.

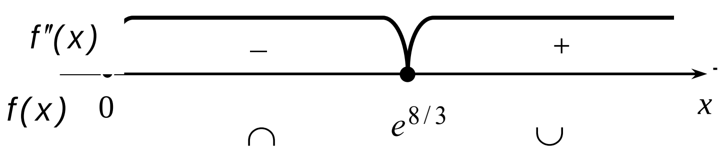

Рис. 16

При переходе через критическую точку $x=e^{8/3}$ производная второго порядка сменила знак, следовательно, это точка перегиба графика функции. На интервале $\left(0,\ e^{8/3}\right)$ график является выпуклым вверх, а на $\left(e^{8/3},\ +\infty\right)$ – выпуклым вниз.

7) Найдем значения функции при $x=e^2$ и $x=e^{8/3}$:

$$f\left(e^2\right)\approx f(7{,}4)\approx 0{,}74,\ f\left(e^{8/3}\right)\approx f(14{,}4)\approx 0{,}7.$$

Для более точного построения графика вычислим значения функции $y=\dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}$ в дополнительной точке: $f\left(e^4\right)\approx f(55)\approx 0{,}07$.

По полученным в пунктах 1-7 данным строим график функции $y=\ln x/\sqrt{x}$ (рис. 17).

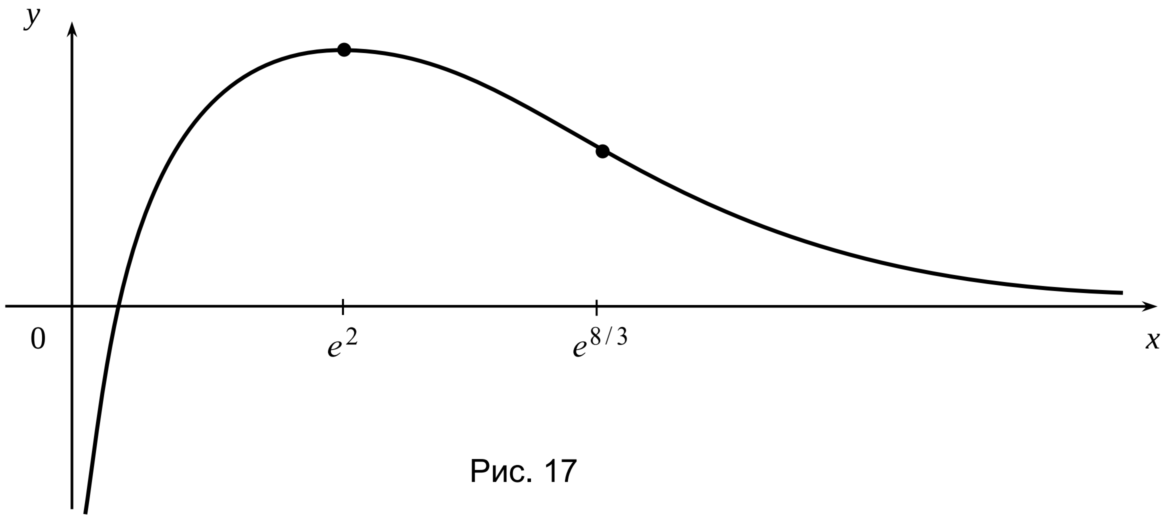

Рис. 17

Замечание. В данном примере при исследовании функции полученные результаты оформлялись не в таблице, а на числовых осях с нанесением на них критических точек о особенностей поведения графика функции.

9. РАСЧЕТНО-ГРАФИЧЕСКОЕ ЗАДАНИЕ

Вариант 1

Задание 1. Вычислить производные заданных функций.

1. $y = \dfrac{\cos x}{x^2 - 3x}$
2. $y = \ln\left(x + \sqrt{x^2 + 1}\right)$
3. $y = \arcsin \dfrac{2x^2}{1 + x^4}$
4. $y = \left(\dfrac{1 - x}{1 + x}\right)^4$
5. $y = \left(x\cos x - \sin x\right)\left[\ln\left(x\cos x - \sin x\right) - 1\right]$
6. $y = 3\sin\left(xe^x - e^x\right) - \sin^3\left(xe^x - e^x\right)$
7. $y = \arccos\left(2x\sqrt{1 - x^2}\right)$

Задание 2. Логарифмическое дифференцирование. Дифференцирование неявной функции. Дифференцирование функции, заданной параметрически.

1. $y = \left(x - 2\right)^{\sin x}$
2. $y = \dfrac{x^2\sqrt{x+1}}{\left(x-1\right)^3 \sqrt[4]{5x-1}}$
3. $x^3 + y^3 = 3xy$
4. $\dfrac{y}{x} + e^{\frac{y}{x}} - \sqrt[3]{\dfrac{y}{x}} = 0$
5. $\begin{cases} x = t^3 + 3t + 1 \\ y = 3t^5 + 5t^3 + 1 \end{cases}$

Задание 3. Найдите производную функции указанного порядка.

1. $y^{(n)}$, если $y = 3^x + 3^{-x}$;
2. $\dfrac{d^2 y}{dx^2}$, если $x = arccos\sqrt{t}, y = \sqrt{t - t^2}$.

Задание 4. Составить уравнение касательной, проведенной к кривой $y = f(x)$, параллельно прямой $Ax + By + C = 0$.

$f(x) = -\frac{1}{6}x^3 + x^2 - 2x - 3, \quad 3x + 6y - 2 = 0$.

Задание 5. Найти пределы функций, используя правило Лопиталя.

1. $\lim\limits_{x\to -1}\frac{x^3 - 3x - 2}{x^2 + 2x + 1}$
2. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2e^x - 2}{x^2 - x}$
3. $\lim\limits_{x\to 0} xctg2x$
4. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^2} - ctg^2 x\right)$
5. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{e^{3x} + 5}{6x^2 + 1}$
6. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{2e^{4x} - 2}{\sin x}$
7. $\lim\limits_{x\to 0}(1 - 6x)^{\frac{1}{x}}$
8. $\lim\limits_{x\to 1} x^{\frac{1}{1-x}}$

Задание 6. Найти наименьшее и наибольшее значение функции в указанных промежутках.

$y = -3x^2 + 4x - 8, \quad x \in [0;1]$

Задание 7. Исследовать функции и построить их графики.

1. $y = x^3 - 3x + 2$
2. $y = \frac{2x - 1}{(x - 1)^2}$
3. $y = \ln(x^2 + x - 2)$

Вариант 2

Задание 1. Вычислить производные заданных функций.

1. $y = \ln tg\frac{x}{2}$
2. $y = 4^{arctg\sqrt{x^2 - 1}}$
3. $y = \left(1 + \sqrt{x^2 + 1}\right)^5$
4. $y = e^{\arcsin\frac{1}{x}}$
5. $y = tg^3 2x\cos^2 2x$
6. $y = \frac{1}{4}tg^4 x - \ln\cos x - \frac{tg^2 x}{2}$
7. $y = x^n a^{-x^2}$

Задание 2. Логарифмическое дифференцирование. Дифференцирование неявной функции. Дифференцирование функции, заданной параметрически.

1. $y = x^x$
2. $y = \frac{(x - 2)^9}{\sqrt{(x - 1)^5 (x - 3)^{11}}}$
3. $tgy = xy$
4. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$
5. $\begin{cases} x = a\cos^3 t \\ y = b\sin^3 t \end{cases}$

Задание 3. Найдите производную функции указанного порядка.

1. $y^{(n)}$, если $y = e^{-x/2}$;

2. $\frac{d^2y}{dx^2}$, если $x = a\cos t,\ y = a\sin t$.

Задание 4. Составить уравнение касательной, проведенной к кривой $y = f(x)$, параллельно прямой $Ax + By + C = 0$.

$f(x) = -2x^3 - 6x^2 + 21,\quad 6x + y + 2 = 0$.

Задание 5. Найти пределы функций, используя правило Лопиталя**.**

1. $\lim\limits_{x\to -1}\frac{x^3-2x-1}{x^4+2x+1}$
2. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x\sin 3x}{1-\cos 4x}$
3. $\lim\limits_{x\to \frac{1}{2}}\sin(2x-1)tg\pi x$
4. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln\sin 2x}{\ln\sin x}$
5. $\lim\limits_{x\to \infty}\frac{e^{5x}+x^2}{x+x^3}$
6. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{2e^x+e^{-x}-3}{x^2}$
7. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}\right)^{\sin x}$
8. $\lim\limits_{x\to 0}(1-2x)^{\frac{1}{x}}$

Задание 6. Найти наименьшее и наибольшее значение функции в указанных промежутках.

$y = x^3 + 3x^2 - 9x - 7,\quad x \in [-4;3]$

Задание 7. Исследовать функции и построить их графики.

1. $y = x^3 + 3x^2 - 9x + 2$
2. $y = \frac{x^3+4}{x^2}$
3. $y = \frac{e^x}{e^x-1}$

Вариант 3

Задание 1. Вычислить производные заданных функций.

1. $y = \ln\left(\sqrt{2\sin x+1}+\sqrt{2\sin x-1}\right)$
2. $y = \left(x^2+2x+2\right)e^{-x}$
3. $y = arctg\frac{\ln x}{3}$
4. $y = x\sin x\cos x + \frac{1}{2}\cos^2 x$
5. $y = log_a\left(x+\sqrt{x^2+9}\right)$
6. $y = \ln tg\frac{x}{2} - \frac{x}{\sin x}$
7. $y = e^{\frac{1}{2}tg^2 x}\cos x$

Задание 2. Дифференцирование неявной функции. Логарифмическое дифференцирование. Дифференцирование функции, заданной параметрически.

1. $y = x^{-x}\cdot 2^x\cdot x^2$
2. $y = \sqrt{\frac{x(x-1)}{x-2}}$
4. $xy = arctg\frac{x}{y}$
5. $\begin{cases} x = \frac{1}{t+1} \\ y = \left(\frac{t}{t+1}\right)^2 \end{cases}$

3. $x^3+y^3=\frac{a^3}{y^2}$

Задание 3. Найдите производную функции указанного порядка.

1. $y^{(n)}$, если $y=ln\,x$; 2. $\frac{d^2y}{dx^2}$, если $x=a(t-sin\,t),\ y=a(1-cos\,t)$.

Задание 4. Составить уравнение касательной, проведенной к кривой $y=f(x)$, параллельно прямой $Ax+By+C=0$

$f(x)=-2x^3-6x^2+12x+21,$ $-6x+y+2=0$.

Задание 5. Найти пределы функций, используя правило Лопиталя.

1. $\lim\limits_{x\to-1}\frac{3x^2+2x-1}{x^2-1}$
2. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{6}}\frac{1-2\sin x}{\cos 3x}$
3. $\lim\limits_{x\to0}xctg7x$
4. $\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{1}{x\sin x}-\frac{1}{x^2}\right)$
5. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{e^x+x+2}{x^4}$
6. $\lim\limits_{x\to2}\frac{e^x-e^2}{x-2}$
7. $\lim\limits_{x\to0}(tgx)^{\frac{1}{2x}}$
8. $\lim\limits_{x\to0}(1-5x)^{\frac{1}{x}}$

Задание 6. Найти наименьшее и наибольшее значение функции в указанных промежутках.

$y=x\ln^2 x,\quad x\in\left[e^{-1};e\right]$

Задание 7. Исследовать функции и построить их графики.

1. $y=-x^3+3x$ 2. $y=\frac{2x}{(x-3)^2}$ 3. $y=e^{-x^2}$

Вариант 4

Задание 1. Вычислить производные заданных функций.

1. $y=\sin^3\frac{x}{3}$
2. $y=\frac{1}{2}tg^2\sqrt{x}+\ln\cos\sqrt{x}$
3. $y=\frac{2^{3x}}{3^{5x}}$
4. $y=\frac{1}{4a}\ln\frac{x-a}{x+a}+\frac{1}{2a}arctg\frac{x}{a}$
5. $y=x^2e^{x^2}\ln x$
6. $y=\arccos\sqrt{1-2^x}$
7. $y=\log_{x^2}2$

Задание 2. **Дифференцирование неявной функции. Логарифмическое дифференцирование. Дифференцирование функции, заданной параметрически.**

1. $y=x^{\ln x}$
4. $x^3+x^2y+y^2=0$

2. $y = x \cdot \sqrt[3]{\dfrac{x^2}{x^2+1}}$

3. $arctg\left(x+y\right) = x$

5. $\begin{cases} x = a\cos^2 t \\ y = b\sin^2 t \end{cases}$

Задание 3. Найдите производную функции указанного порядка.

1. $y^{(n)}$, если $y = 1/(1+2x)$;

2. $\dfrac{d^2y}{dx^2}$, если $x = t^2$, $y = t^3/2$,

Задание 4. Составить уравнение касательной, проведенной к кривой $y = f\left(x\right)$, параллельно прямой $Ax + By + C = 0$

$f\left(x\right) = x^3 + 3x^2 - 6x - 8, \quad 9x - 3y + 13 = 0$

Задание 5. Найти пределы функций, используя правило Лопиталя.

1. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{2x^2+x-10}{x^2-x-2}$

2. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin 5x}{x}$

3. $\lim\limits_{x\to 0} x^2 e^{\frac{1}{x}}$

4. $\lim\limits_{x\to -2}\left(\dfrac{1}{x+2} - \dfrac{1}{x^2+5x+6}\right)$

5. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{e^{4x}+x}{x^3+1}$

6. $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{ctg\,\dfrac{x}{2}}{x-\pi}$

7. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\sin x\right)^{\frac{1}{x-\pi/2}}$

8. $\lim\limits_{x\to 0}\left(1-8x\right)^{\frac{1}{x}}$

Задание 6. Найти наименьшее и наибольшее значение функции в указанных промежутках.

$y = \arccos x^2, \quad x \in \left[-\dfrac{\sqrt{2}}{2}; \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right]$

Задание 7. Исследовать функции и построить их графики.

1. $y = 3x^3 - \dfrac{9}{2}x^2$

2. $y = \dfrac{1-2x^3}{x^2}$

3. $y = \left(3x^2+4\right)e^{-x^2}$

Вариант 5

Задание 1. Вычислить производные заданных функций.

1. $y = \ln tg\,\dfrac{x}{2}$

2. $y = x^2 e^x$

3. $y = \dfrac{\sin x}{\cos^2 x} + \ln\dfrac{1+\sin x}{\cos x}$

4. $y = 2\left(tg\sqrt{x} - \sqrt{x}\right)$

5. $y = \ln\dfrac{\sqrt{x^4+1} - x^2}{\sqrt{x^4+1} + x^2}$

6. $y = arctg\,\dfrac{2x}{1-x^3}$

7. $y = \dfrac{x^2 e^{x^2}}{x^2+1}$

Задание 2. Дифференцирование неявной функции. Логарифмическое дифференцирование. Дифференцирование функции, заданной параметрически.

1. $y=\sqrt{(x+1)(2x+1)^3}\,(3x+1)^2$
2. $y=\sqrt[x]{x}$
3. $e^y=x+y$
4. $\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{y^2}=\sqrt[3]{ay}$
5. $\begin{cases} x=\arccos\dfrac{1}{\sqrt{1+t^2}} \\ y=\arcsin\dfrac{t}{\sqrt{1+t^2}} \end{cases}$

Задание 3. Найдите производную функции указанного порядка.

1. $y^{(n)}$, если $y=sin(2x)$; 2. $\dfrac{d^2y}{dx^2}$**,** если $x=cos^2 t,\ y=sin^3 t$.

Задание 4. Составить уравнение касательной, проведенной к кривой $y=f(x)$, параллельно прямой $Ax+By+C=0$

$f(x)=\frac{1}{6}x^3-x^2+2x+4,\ \ -2x+4y+3=0$

Задание 5. Найти пределы функций, используя правило Лопиталя.

1. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-3x+2}{2x^2-5x+2}$
2. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 4x}{x^2}$
3. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x}e^{-x}\right)$
4. $\lim\limits_{x\to\pi/2}\left(\dfrac{x}{ctgx}-\dfrac{\pi}{2\cos x}\right)$
5. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{e^{4x}+x}{x^3+1}$
6. $\lim\limits_{x\to\pi/2}\dfrac{tg2x}{x-\pi/2}$
7. $\lim\limits_{x\to\pi/2}(\sin x)^{\frac{1}{x-\pi/2}}$
8. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{2}{x}\right)^x$

Задание 6. Найти наименьшее и наибольшее значение функции в указанных промежутках.

$y=\dfrac{1}{\cos x},\quad x\in\left[-\dfrac{\pi}{6};\dfrac{\pi}{4}\right]$

Задание 7. Исследовать функции и построить их графики.

1. $y=x^3-8x^2+7x$
2. $y=\dfrac{x}{1+x^2}$
3. $y=e^{-\frac{5}{x-3}}$

Вариант 6

Задание 1. Вычислить производные заданных функций.

1. $y=x^3arctgx$
2. $y=\dfrac{\sin x-\cos x}{\sin x+\cos x}+2^{3x}$
3. $y=3x^3\ln x-x^3$
5. $y=\left(\sin\dfrac{x}{2}-\cos\dfrac{x}{2}\right)^2$
6. $y=\ln tg\dfrac{2x+1}{4}$
7. $y=tg2x+\dfrac{2}{3}tg^3 2x+\dfrac{1}{5}tg^5 2x$

4. $y = x\arccos\frac{x}{2} - \sqrt{4 - x^2}$

Задание 2. Дифференцирование неявной функции. Логарифмическое дифференцирование. Дифференцирование функции, заданной параметрически.

1. $y = \frac{(x+2)^2}{(x+1)^3(x+3)^4}$
2. $y = x^{\sqrt{x}}$
3. $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{ay^3}$
4. $\ln x + e^{-\frac{y}{x}} = c$
5. $\begin{cases} x = \frac{2at}{1+t^2} \\ y = \frac{a(1-t^2)}{1+t^2} \end{cases}$

Задание 3. Найдите производную функции указанного порядка.

1. $y^{(n)}$, если $y = xe^x$; 2. $\frac{d^2y}{dx^2}$**,** если $x = lnt,\ y = t^2 - 1$.

Задание 4. Составить уравнение касательной, проведенной к кривой $y = f(x)$, параллельно прямой $Ax + By + C = 0$

$f(x) = 2x^3 + 6x^2 - 12x - 23,\quad 12x - 2y + 11 = 0$

Задание 5. Найти пределы функций, используя правило Лопиталя.

1. $\lim\limits_{x\to 4}\frac{2x^2 - 9x + 4}{x^2 + x - 20}$
2. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{arctgx}{arctg2x}$
3. $\lim\limits_{x\to -2}\left(\frac{1}{x+2} - \frac{1}{x^2 + x - 2}\right)$
4. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x^3 + 7x + e^x}{x^2 + 3}$
5. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln\cos 2x}{\sin 2x}$
6. $\lim\limits_{x\to\pi/4}\left(ctgx^{\frac{1}{x-\pi/4}}\right)$
7. $\lim\limits_{x\to 0}(1 - 9x)^{\frac{1}{x}}$
8. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{e^x + 4x}{x^3 - x^2}$

Задание 6. Найти наименьшее и наибольшее значение функции в указанных промежутках.

$y = x^6 - 5x^4 + 5x^3 - 1,\quad x \in [0;2]$

Задание 7. Исследовать функции и построить их графики.

1. $y = x^3 - 3x - 2$ 2. $y = \frac{4x}{4 + x^2}$ 3. $y = \ln(x^2 - 4x + 5)$

Вариант 7

Задание 1. Вычислить производные заданных функций.

1. $y = \ln(2x^3 + 3x^2)$
5. $y = \frac{e^x 2^{5x}}{3^{4x}}$

2. $y=\sqrt{x}\arcsin\sqrt{x}+\sqrt{1-x}$

3. $y=\cos^3\dfrac{x}{3}$

4. $y=\ln\sqrt{\dfrac{1+\sin x}{1-\sin x}}$

6. $y=\ln(\ln x)\cdot(\ln\ln\ln x-1)$

7. $y=\arccos\left(2e^{2x}-1\right)$

Задание 2. Дифференцирование неявной функции. Логарифмическое дифференцирование. Дифференцирование функции, заданной параметрически.

1. $y=\dfrac{\sqrt{x-1}}{\sqrt[3]{x-1}\cdot\sqrt[3]{(x+2)^5}\cdot\sqrt{x+3}^5}$

2. $y=x^{\sin x}$

3. $\ln y+\dfrac{x}{y}=c$

4. $y^3=\dfrac{x-y}{x+y}$

5. $\begin{cases} x=\dfrac{\cos^3 t}{\sqrt{\cos 2t}} \\ y=\dfrac{\sin^3 t}{\sqrt{\cos 2t}} \end{cases}$

Задание 3. Найдите производную функции указанного порядка.

1) $y^{(n)}$, если $y=\sin ax+\cos bx$; 2) $\dfrac{d^2y}{dx^2}$, если $x=a\cos^3 t,\ y=a\sin^2 t$.

Задание 4. Составить уравнение касательной, проведенной к кривой $y=f(x)$, параллельно прямой $Ax+By+C=0$

$f(x)=x^3-\dfrac{15}{2}x^2+9x-10,\quad 18x+2y+15=0$

Задание 5. Найти пределы функций, используя правило Лопиталя.

1. $\lim\limits_{x\to-4}\dfrac{x^2+x-12}{x^2+2x-8}$

2. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{tg\,2x}{\sin 4x}$

3. $\lim\limits_{x\to2}(2-x)\,tg\,\dfrac{\pi x}{4}$

4. $\lim\limits_{x\to1}\left(\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{1}{(x-2)(x-1)}\right)$

5. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{e^{3x}+5}{2x^2}$

6. $\lim\limits_{x\to\pi/4}\dfrac{\sin 2x-\cos 2x-1}{\sin x-\cos x}$

7. $\lim\limits_{x\to1}\left(x^{\frac{1}{x-1}}\right)$

8. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{4}{x}\right)^x$

Задание 6. Найти наименьшее и наибольшее значение функции в указанных промежутках.

$y=x+\dfrac{1}{x},\quad x\in[0,01;100]$

Задание 7. Исследовать функции и построить их графики.

1. $y=2x^3+3x^2+x-6$ 2. $y=\dfrac{4x^2-9}{2x^3}$ 3. $y=x-\ln(x+9)$

Вариант 8

Задание 1. Вычислить производные заданных функций.

1. $y=\frac{1}{3}\sin^3\sqrt{x}-\frac{2}{3}\sin^5\sqrt{x}+\frac{1}{7}\sin^7\sqrt{x}$
2. $y=\ln\left(3x^2+\sqrt{9x^2+1}\right)$
3. $y=\frac{x-e^{2x}}{x+e^{2x}}$
4. $y=2xtg2x+\ln\cos 2x-2x^2$
5. $y=2^{\cos^3 x-3\cos x}$
6. $y=\frac{\ln x}{x^5}+\frac{1}{5x^5}$
7. $y=\frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2}+\frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a}$

Задание 2. Дифференцирование неявной функции. Логарифмическое дифференцирование. Дифференцирование функции, заданной параметрически.

1. $y=(\cos x)^{\sin x}$
2. $y=\frac{2^x(x+1)^3}{(x-1)^2\sqrt{2x+1}}$
3. $arctg\frac{y}{x}=\frac{1}{2}\ln\left(x^2+y^2\right)$
4. $y-0,3\sin y=x$
5. $\begin{cases} x=e^{-t} \\ y=e^{2t} \end{cases}$

Задание 3. Найдите производную функции указанного порядка.

1. $y^{(n)}$, если $y=1/(ax+b)$;
2. $\frac{d^2y}{dx^2}$, если $x=a\cos^3 t,\ y=a\sin^3 t$.

Задание 4. Составить уравнение касательной, проведенной к кривой $y=f(x)$, параллельно прямой $Ax+By+C=0$

$$f(x)=-\frac{x^3}{6}-\frac{x^2}{2}+x+10,\quad 2x+4y+7=0$$

Задание 5. Найти пределы функций, используя правило Лопиталя.

1. $\lim\limits_{x\to -2}\frac{x^2+x-2}{x^2+2x}$
2. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{x}$
3. $\lim\limits_{x\to 4}(4-x)tg\frac{\pi x}{8}$
4. $\lim\limits_{x\to 3}\left(\frac{1}{x-3}-\frac{5}{x^2-x-6}\right)$
5. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{e^x+x}{x^3}$
6. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-e^{-x}}{\sin x\cos x}$
7. $\lim\limits_{x\to\pi/2}\left(tg\frac{x}{2}\right)^{\frac{1}{x-\pi/2}}$
8. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{5}{x}\right)^x$

Задание 6. Найти наименьшее и наибольшее значение функции в указанных промежутках.

$y = x + \sqrt[3]{x-1}, \quad x \in [0;9]$

Задание 7. Исследовать функции и построить их графики.

1. $y = x^3 - 6x^2 + 9x - 4$
2. $y = \frac{1}{x} + 4x^2$
3. $y = 3xe^{-\frac{3x^2}{4}}$

Вариант 9

Задание 1. Вычислить производные заданных функций.

1. $y = -ctg^2 \frac{x}{2} - 2\ln\sin\frac{x}{2}$
2. $y = \ln\frac{\sqrt{4tgx+1} - 2\sqrt{tgx}}{\sqrt{4tgx+1} + 2\sqrt{tgx}}$
3. $y = arctg\sqrt{4x^2 - 1}$
4. $y = e^x - \sqrt{1 - e^{2x}} - \arcsin e^x$
5. $y = \sin x(1 + \ln\cos x)$
6. $y = \ln tg\frac{e^{\sin x}}{4}$
7. $y = \sqrt{1 - 3x^2}$

Задание 2. Дифференцирование неявной функции. Логарифмическое дифференцирование. Дифференцирование функции, заданной параметрически.

1. $y = x^{\arcsin x}$
2. $y = \frac{x^2 + e^{x^2}}{x^2 + 1}$
3. $\sqrt{x^2 + y^2} = c\,arctg\frac{y}{x}$
4. $a\cos^2(x+y) = b$
5. $\begin{cases} x = \frac{3at}{1+t^3} \\ y = \frac{3at}{1+t^3} \end{cases}$

Задание 3. Найдите производную функции указанного порядка.

1. $y^{(n)}$, если $y = e^{ax}$;
2. $\frac{d^2y}{dx^2}$, если $x = at\cos t,\ y = at\sin t$

Задание 4. Составить уравнение касательной, проведенной к кривой $y = f(x)$, параллельно прямой $Ax + By + C = 0$

$f(x) = -\frac{2}{3}x^3 + 4x^2 - 8x - 10, \quad 4x + 2y + 3 = 0$

Задание 5. Найти пределы функций, используя правило Лопиталя.

1. $\lim\limits_{x\to3}\frac{x^2 + x - 12}{x^2 - 5x + 6}$
2. $\lim\limits_{x\to0}\frac{x\sin 2x}{1 - \cos x}$
3. $\lim\limits_{x\to\infty} x\left(e^{\frac{1}{x}} - 1\right)$
4. $\lim\limits_{x\to3}\frac{\arcsin(3-x)}{\sqrt{x^2 - 5x + 6}}$
5. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{e^{2x} + x^2}{x^3}$
6. $\lim\limits_{x\to3}\frac{\ln(4-x)}{x-3}$
7. $\lim\limits_{x\to\pi/4}(\sin 2x)^{\frac{1}{x-\pi/4}}$
8. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1 + \frac{7}{x}\right)^x$

Задание 6. Найти наименьшее и наибольшее значение функции в указанных промежутках.

$$y=\frac{1-x+x^2}{1+x-x^2},\quad x\in[0;1]$$

Задание 7. Исследовать функции и построить их графики.

1. $y=x^3+5x-6$ 2. $y=\dfrac{4x-12}{(x-2)^2}$ 3. $y=\ln\left(x^2-3x\right)$

Вариант 10

Задание 1. Вычислить производные заданных функций.

1. $y=arctg\,\dfrac{x}{\sqrt{a^2-x^2}}$
2. $y=\sqrt{2x+1}\left(\ln(2x+1)-2\right)$
3. $y=tg^3(tgx)+3tg(tgx)$
4. $y=e^x-\sin e^x\cos^3 e^x-\sin^3 e^x\cos e^x$
5. $y=x\left(\ln^3 x-3\ln^2 x+6\ln x-6\right)$
6. $y=\dfrac{x}{\left(1+\sin x^2\right)^{\frac{1}{2}}}$
7. $y=\arcsin e^x+\arcsin\sqrt{1-e^{2x}}$

Задание 2. Дифференцирование неявной функции. Логарифмическое дифференцирование. Дифференцирование функции, заданной параметрически.

1. $y=(arctgx)^x$
2. $y=\sqrt[3]{\dfrac{x-5}{\sqrt[3]{x^3+4}}}$
3. $x^y=y^x$
4. $ye^y=e^{x+1}$
5. $\begin{cases} x=a\left(\ln tg\dfrac{t}{2}+\cos t-\sin t\right)\\ y=a(\sin t+\cos t)\end{cases}$

Задание 3. Найдите производную функции указанного порядка.

1. $y^{(n)}$, если $y=ln(1-3x)$; 2. $\dfrac{d^2y}{dx^2}$, если $x=cos\,2t,\ y=sin\,3t$.

Задание 4. Составить уравнение касательной, проведенной к кривой $y=f(x)$, параллельно прямой $Ax+By+C=0$

$$f(x)=2x^3-3x^2-x+2,\quad 9x+9y-7=0$$

Задание 5. Найти пределы функций, используя правило Лопиталя.

1. $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{x^3-3x-2}{x+x^2}$
2. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}$
3. $\lim\limits_{x\to0}tgx\ln x$
4. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln\sin 5x}{ctgx}$
5. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4e^x+x^2}{x^3}$
6. $\lim\limits_{x\to\pi/4}(tgx)^{\frac{1}{x-\pi/4}}$
7. $\lim\limits_{x\to\pi/4}\dfrac{\sin 2x-1}{\sin x-\cos x}$
8. $\lim\limits_{x\to0}(1+7x)^{\frac{1}{x}}$

Задание 6. Найти наименьшее и наибольшее значение функции в указанных промежутках.

$y=\dfrac{x-1}{x+1},\quad x\in[0;4]$

Задание 7. Исследовать функции и построить их графики.

1. $y=x^3-9x$ 2. $y=\dfrac{8}{x^2-4}$ 3. $y=\dfrac{e^{3x}+e^{-3x}}{6}$

Вариант 11

Задание 1. Вычислить производные заданных функций.

1. $y=arctg\dfrac{1-\sqrt{1-x^2}}{x}$
2. $y=\ln\left(\sin\sqrt{x}\right)tg\sqrt{x}-\sqrt{x}$
3. $y=\ln\dfrac{\sqrt{1+x}-1}{\sqrt{1+x}+1}$
4. $y=3x\sin^3 x+3\cos x-\cos^3 x$
5. $y=e^{\sqrt{2x}}\left(\sqrt{2x}-1\right)$
6. $y=\ln\dfrac{x^5}{x^5+2}$
7. $y=\left(\dfrac{\sin x}{1+\cos x}\right)^2$

Задание 2. Дифференцирование неявной функции. Логарифмическое дифференцирование. Дифференцирование функции, заданной параметрически.

1. $y=\left(tg2x\right)^{ctgx\frac{x}{2}}$
2. $y=\dfrac{xe^x arctgx}{\ln^5 x}$
3. $2^x+2^y=2^{3x-y}$
4. $y=\cos\left(x+y\right)$
5. $\begin{cases}x=\sqrt{t}\\ y=\sqrt[3]{t}\end{cases}$

Задание 3. Найдите производную функции указанного порядка.

1. $y^{(n)}$, если $y=ln(ax+b)$; 2. $\dfrac{d^2y}{dx^2}$, если $x=cos\,t,\ y=sin5t$.

Задание 4. Составить уравнение касательной, проведенной к кривой $y=f\left(x\right)$, параллельно прямой $Ax+By+C=0$.

$f\left(x\right)=-\dfrac{2}{3}x^3-2x^2+4x+3,\quad 8x+4y+11=0$

Задание 5. Найти пределы функций, используя правило Лопиталя.

1. $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{2x^2+5x-7}{3x^2-x-2}$
2. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x\sin x}{1-\cos6x}$
3. $\lim\limits_{x\to0}\left(xctg4x\right)$
4. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\ln x}{x^2}$
5. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{2x}+6x-1}{x^2}$
6. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{2e^x-2}{x^2}$
7. $\lim\limits_{x\to0}\left(\cos x\right)^{\frac{1}{x}}$
8. $\lim\limits_{x\to0}\left(1-3x\right)^{\frac{1}{x}}$

Задание 6. Найти наименьшее и наибольшее значение функции в указанных промежутках.

$y=2x^3+3x^2-12x+1, \quad x\in[-1;5]$

Задание 7. Исследовать функции и построить их графики.

1. $y=4x^3-12x+8$ 2. $y=\dfrac{x^4+3}{2x^2}$ 3. $y=xe^{-x}$

Вариант 12

Задание 1. Вычислить производные заданных функций.

1. $y=\dfrac{arctgx}{x}-\ln\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$
2. $y=x^2+2x\sin x\cos x+\cos^2 x$
3. $y=\arcsin\sqrt{1-\dfrac{x^2}{5}}$
4. $y=\left(x^5+3\right)\left(\ln\left(x^5+3\right)-1\right)$
5. $y=-\cos^2\dfrac{x}{2}$
6. $y=\dfrac{2\ln^2\sin x+3}{\left(2\ln^2\sin x-3\right)^2}$
7. $y=-\ln\left(\sin x+ctgx\right)$

Задание 2. Дифференцирование неявной функции. Логарифмическое дифференцирование. Дифференцирование функции, заданной параметрически.

1. $y=\dfrac{\left(1-x^2\right)e^{3x-1}\cos x}{\left(\arccos x\right)^3}$
2. $y=x^{x^2}$
3. $2y\ln y=x$
4. $x+arctgy=y$
5. $\begin{cases} x=\sqrt{t^2+1} \\ y=\dfrac{t-1}{\sqrt{t^2+1}} \end{cases}$

Задание 3. Найдите производную функции указанного порядка.

1. $y^{(n)}$, если $y=e^{-x}$; 2. $\dfrac{d^2y}{dx^2}$, если $x=t^2\cos t,\ y=t\sin t$.

Задание 4. Составить уравнение касательной, проведенной к кривой $y=f(x)$, параллельно прямой $Ax+By+C=0$

$f(x)=-x^3+\dfrac{3}{2}x^2+9x+2, \quad 15x-5y+4=0$

Задание 5. Найти пределы функций, используя правило Лопиталя.

1. $\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{3x+6}{x^3+8}$
2. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{tg4x}{\sin x}$
3. $\lim\limits_{x\to0}\left(xctg5x\right)$
4. $\lim\limits_{x\to\pi/4}\dfrac{\ln tgx}{x-\pi/4}$
5. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{e^{3x}+4x}{2x^2-x}$
6. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{2x}-1}{\arcsin 3x}$
7. $\lim\limits_{x\to0}\left(\sin x\right)^x$
8. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{3x}\right)^x$

Задание 6. Найти наименьшее и наибольшее значение функции в указанных промежутках.

$y=4x^6-x^3+3, \quad x\in[0;1]$

Задание 7. Исследовать функции и построить их графики.

1. $y=x^3-2x^2+3x+4$
2. $y=\dfrac{x^3}{x^3+8}$
3. $y=x+\ln\left(x^2-4\right)$

Вариант 13

Задание 1. Вычислить производные заданных функций.

1. $y=ctgx\cos x+\ln\left(ctgx+\sin x\right)$
2. $y=\arcsin\dfrac{\sin x}{\sqrt{1+\sin^2 x}}$
3. $y=1-e^{\sin^2 3x}\cos^2 3x$
4. $y=arctg\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}$
5. $y=\arccos\dfrac{9-x^2}{9+x^2}$
6. $y=e^{-x}-\sin\left(e^{-x}\right)\cos\left(e^{-x}\right)$
7. $y=-ctg^2\dfrac{x}{2}-2\ln\sin\dfrac{x}{2}$

Задание 2. Дифференцирование неявной функции. Логарифмическое дифференцирование. Дифференцирование функции, заданной параметрически.

1. $y=x\sqrt{x^2+1}\cdot\sin x$
2. $y=\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x$
3. $y=1+xe^{xy}$
4. $x\sin y-\cos y+\cos 2y=0$
5. $\begin{cases} x=a\left(\cos t+t\sin t\right) \\ y=a\left(\sin t-t\cos t\right)\end{cases}$

Задание 3. Найдите производную функции указанного порядка.

1. $y^{(n)}$, если $y=log_a x$;
2. $\dfrac{d^2y}{dx^2}$, $x=3^t$, $y=t^3\,ln3$.

Задание 4. Составить уравнение касательной, проведенной к кривой $y=f\left(x\right)$, параллельно прямой $Ax+By+C=0$

$f\left(x\right)=\dfrac{2}{3}x^3-4x^2-10x+10, \quad 6x-3y-1=0$

Задание 5. Найти пределы функций, используя правило Лопиталя.

1. $\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{x^2+x-2}{x^2-x-6}$
2. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\arcsin 4x}{x}$
3. $\lim\limits_{x\to0}\left(x^2\ln x\right)$
4. $\lim\limits_{x\to\pi/4}\dfrac{\ln\sin 2x}{x-\pi/4}$
5. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x}{\ln\left(1+x\right)}$
6. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^x+e^{-x}-2}{1-\cos 2x}$
7. $\lim\limits_{x\to0}x^{\sin x}$
8. $\lim\limits_{x\to0}\left(1+5x\right)^{\frac{1}{x}}$

Задание 6. Найти наименьшее и наибольшее значение функции в указанных промежутках.

$y=\sqrt[3]{x^2}-x, \quad x\in[0;1]$

Задание 7. Исследовать функции и построить их графики.

1. $y=x^3-3x^2$
2. $y=\dfrac{x^3}{\left(x^2-4\right)}$
3. $y=\ln\dfrac{x}{x-1}$

Вариант 14

Задание 1. Вычислить производные заданных функций.

1. $y=\ln\left(3x^2+\sqrt{9x^4+1}\right)$
2. $y=\dfrac{1}{64}\left(tg^4\dfrac{x}{2}-ctg^4\dfrac{x}{2}\right)+\dfrac{3}{8}\ln tg\dfrac{x}{2}$
3. $y=-\dfrac{2\cos\dfrac{x}{2}}{\sin\dfrac{x}{2}+3\cos\dfrac{x}{2}}$
4. $y=\arccos\left(2e^{2x}-1\right)$
5. $y=\mathrm{arc}\,tg\dfrac{3x-x^3}{1-3x^2}$
6. $y=\dfrac{a}{2}\sin^2 x+\dfrac{b}{2}\cos^2 x-\dfrac{a+b}{4}\cos 2x$
7. $y=\ln\left(1-\dfrac{1}{x}\right)+\dfrac{1}{x}$

Задание 2. Дифференцирование неявной функции. Логарифмическое дифференцирование. Дифференцирование функции, заданной параметрически.

1. $y=\dfrac{\sqrt{x+2}\,(3-x)^4}{(x+1)^5}$
2. $y=(\cos x)^{\sin x}$
3. $tg\dfrac{y}{2}=\sqrt{y-x}\cdot tg\dfrac{x}{2}$
4. $y\sin x-\cos(x-y)=0$
5. $\begin{cases} x=\ln\left(1+t^2\right) \\ y=t-arctgt \end{cases}$

Задание 3. Найдите производную функции указанного порядка.

1. $y^{(n)}$, если $y=lg(1-2x)$;
2. $\dfrac{d^2y}{dx^2}$,

ели $x=cost-sint$, $y=sint+cost$.

Задание 4. Составить уравнение касательной, проведенной к кривой $y=f(x)$, параллельно прямой $Ax+By+C=0$

$f(x)=\dfrac{1}{3}x^3-2x^2+5x, \quad 6x-3y-11=0$

Задание 5. Найти пределы функций, используя правило Лопиталя**.**

1. $\lim\limits_{x\to-3}\dfrac{x^2+x-6}{2x^2-x-21}$
2. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin 3x}{\sin 5x}$
3. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(x\sin\dfrac{9}{x}\right)$
4. $\lim\limits_{x\to0}x\cdot\ln tgx$
5. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{e^x+4}{x^3}$
6. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{2x}-1}{\sin x}$
7. $\lim\limits_{x\to0}x^{3tgx}$
8. $\lim\limits_{x\to\infty}(1-4x)^{\frac{1}{x}}$

Задание 6. Найти наименьшее и наибольшее значение функции в указанных промежутках.

$y = x^3 e^{-x}, \quad x \in [-1; 4]$

Задание 7. Исследовать функции и построить их графики.

1. $y = (x-1)^2 (x+2)$ 2. $y = \dfrac{x^2+2x-3}{x-5}$ 3. $y = xe^{2x-1}$

Вариант 15

Задание 1. Вычислить производные заданных функций.

1. $y = \ln tg \dfrac{x}{2} + \cos x + \dfrac{1}{3}\cos^2 x$
2. $y = \dfrac{1}{2} tg^2 \sin x + \ln\cos(\sin x)$
3. $y = \ln \dfrac{\sqrt{x^2+2x}}{x+1}$
4. $y = \left(1+\sqrt[3]{x}\right)^3$
5. $y = 3\cos^2 x - \cos^3 x$
6. $y = 5tg\dfrac{x}{5} + tg\dfrac{\pi}{8}$
7. $y = \sin x \cdot e^{\cos x}$

Задание 2. Дифференцирование неявной функции. Логарифмическое дифференцирование. Дифференцирование функции, заданной параметрически.

1. $y = \sqrt{x\sin x\sqrt{1-e^x}}$
2. $y = \left(x^2+1\right)^{\sin x}$
3. $x^3 + y^3 - 3axy = 0$
4. $x - y = \arcsin x - \arcsin y$
5. $\begin{cases} x = a(\varphi - \sin\varphi) \\ y = a(1-\cos\varphi) \end{cases}$

Задание 3. Найдите производную функции указанного порядка.

1. $y^{(n)}$, если $y = a^{2x}$; 2. $\dfrac{d^2y}{dx^2}$, если $x = \pi\, arcsin\, 2t,\ y = arccos\, 2t$.

Задание 4. Составить уравнение касательной, проведенной к кривой $y = f(x)$, параллельно прямой $Ax + By + C = 0$

$f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 6x - 5, \quad 12x + 2y + 15 = 0$

Задание 5. Найти пределы функций, используя правило Лопиталя.

1. $\lim\limits_{x\to 1/2} \dfrac{8x^3-1}{6x^2-5x+1}$
2. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x}{\sin 3x}$
3. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\sqrt[4]{x}\ln x\right)$
4. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln\cos x}{2x}$
5. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{e^{4x}-x}{x^2}$
6. $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2-\sqrt{8x}}{x-2}$
7. $\lim\limits_{x\to\pi/2} (\sin x)^{tgx}$
8. $\lim\limits_{x\to 0} (1+2x)^{\frac{1}{x}}$

Задание 6. Найти наименьшее и наибольшее значение функции в указанных промежутках.

$y = xe^{-x^2/2}, \quad x \in [-2; 2]$

Задание 7. Исследовать функции и построить их графики.

1. $y=\dfrac{(x-2)^2(x+4)}{4}$ 2. $y=\dfrac{x^3}{8-x^3}$ 3. $y=\ln\left(x^2+2x+2\right)$

Вариант 16

Задание 1. Вычислить производные заданных функций.

1. $y=\ln\dfrac{x\ln x-1}{x\ln x+1}$
2. $y=\dfrac{1}{\sqrt[3]{x+\sqrt{x}}}$
3. $y=e^{-x^2}\ln x$
4. $y=arctg\,\dfrac{x+1}{x-1}$
5. $y=\dfrac{tg\,\frac{x}{2}+ctg\,\frac{x}{2}}{x}$
6. $y=\cos 2x+\ln x$
7. $y=\lg\left(x-\cos x\right)$

Задание 2. Дифференцирование неявной функции. Логарифмическое дифференцирование. Дифференцирование функции, заданной параметрически.

1. $y=\sqrt{\dfrac{1-\arcsin x}{1+\arcsin x}}$
2. $y=2x^{\sqrt{x}}$
3. $x^7+y^7=x^2y^2$
4. $\sin\left(xy\right)+\cos\left(xy\right)=tg\left(x+y\right)$
5. $\begin{cases} x=e^t\sin t \\ y=e^t\cos t \end{cases}$

Задание 3. Найдите производную функции указанного порядка.

1. $y=(1+x)^m$, $y^{(n)}-?$;   2. $x=arctg\,2t,\ y=arcctg\,2t$, $\dfrac{d^2y}{dx^2}-?$

Задание 4. Составить уравнение касательной, проведенной к кривой $y=f\left(x\right)$, параллельно прямой $Ax+By+C=0$

$f\left(x\right)=-\dfrac{1}{3}x^3-x^2+2x+1,\quad 7x+7y-4=0$

Задание 5. Найти пределы функций, используя правило Лопиталя.

1. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{3x^2-x-2}{3x^2-4x+1}$
2. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{arctg\,5x}{x}$
3. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(x\,tg\,\dfrac{9}{x}\right)$
4. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\cos x}{\sin x}$
5. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2+5e^x}{2x^2+6}$
6. $\lim\limits_{x\to\infty}ctgx\ln\left(x+e^x\right)$
7. $\lim\limits_{x\to 0}\left(tgx\right)^x$
8. $\lim\limits_{x\to 0}\left(1+4x\right)^{\frac{1}{x}}$

Задание 6. Найти наименьшее и наибольшее значение функции в указанных промежутках.

$y=\frac{4-x^2}{4+x^2}, \quad x\in[-1;3]$

Задание 7. Исследовать функции и построить их графики.

1. $y=(x-2)(x-1)(x+1)$ 2. $y=\frac{x^3}{x^2-4}$ 3. $y=\ln\frac{x-1}{x-2}$

Вариант 17

Задание 1. Вычислить производные заданных функций.

1. $y=\ln(x-\cos x)$
2. $y=x^2\sqrt[3]{x^6-8}$
3. $y=\frac{1}{\sqrt{3}}arctg\frac{x\sqrt{3}}{1-x^2}$
4. $y=\sin^2\frac{x}{3}ctg\frac{x}{2}$
5. $y=\ln\left(x+\sqrt{a^2+x^2}\right)$
6. $y=\frac{\sqrt[3]{4x^5+2}}{3x^4}$
7. $y=x\sqrt{arctgx}$

Задание 2. Дифференцирование неявной функции. Логарифмическое дифференцирование. Дифференцирование функции, заданной параметрически.

1. $y=(\ln x)^x$
2. $y=x^3e^x\sin 2x$
3. $y^3-3y^2+2ax=0$
4. $\cos(xy)=x$
5. $\begin{cases} x=1-t^2 \\ y=t-t^3 \end{cases}$

Задание 3. Найдите производную функции указанного порядка.

1. $y^{(n)}$, если $y=2x/(x^2-1)$; 2. $\frac{d^2y}{dx^2}$, если $x=e^{2t}$, $y=e^{3t}$.

Задание 4. Составить уравнение касательной, проведенной к кривой $y=f(x)$, параллельно прямой $Ax+By+C=0$

$f(x)=-x^3+6x^2-12x+12, \quad 6x+3y-2=0$

Задание 5. Найти пределы функций, используя правило Лопиталя.

1. $\lim\limits_{x\to-1}\frac{x^3-3x-2}{x^2-x-2}$
2. $\lim\limits_{x\to0}\frac{e^{2x}-1}{\sin x}$
3. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(x^4e^{-x}\right)$
4. $\lim\limits_{x\to0}\frac{\ln tg3x}{\ln\sin 6x}$
5. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{e^{5x}+x}{x^2-1}$
6. $\lim\limits_{x\to4}\frac{e^x-e^4}{x-4}$
7. $\lim\limits_{x\to\pi/4}(tgx)^{tg2x}$
8. $\lim\limits_{x\to0}(1-x)^{\frac{1}{x^2+2x}}$

Задание 6. Найти наименьшее и наибольшее значение функции в указанных промежутках.

$y=x^3\cdot\sqrt[3]{(x-1)^2}, \quad x\in[-2;2]$

Задание 7. Исследовать функции и построить их графики.

1. $y = x^3 + 3x^2$ 2. $y = \sqrt[3]{1 - x^3}$ 3. $y = (2x - 3)e^{-\frac{x}{2}}$

Вариант 18

Задание 1. Вычислить производные заданных функций.

1. $y = \sqrt{1 + tg^2 x + tg^4 x}$
2. $y = \dfrac{2}{3} arctg\sqrt{x} + \dfrac{1}{3} arctg\, \dfrac{x}{1 - x^2}$
3. $y = \dfrac{1}{18}\sin^6 3x - \dfrac{1}{24}\sin^8 3x$
4. $y = \log_3\left(x^2 - \sin x\right)$
5. $y = tg\, \dfrac{1 - e^x}{1 + e^x}$
6. $y = x \cdot 10^{\sqrt{x}}$
7. $y = \ln arctg\, \dfrac{1}{1 + x}$

Задание 2. Дифференцирование неявной функции. Логарифмическое дифференцирование. Дифференцирование функции, заданной параметрически.

1. $y = x^{x^3}$
2. $x \cdot \sqrt[3]{\dfrac{x^2}{x^2 + 1}} = y$
3. $tgy = xy$
4. $x^3 + x^2 y + y^2 = 0$
5. $\begin{cases} x = t^3 + 3t^2 + 1 \\ y = 3t^5 + 5t^3 + 1 \end{cases}$

Задание 3. Найдите производную функции указанного порядка.

1. $y^{(n)}$, если $y = x/(x^2 - 1)$; 2. $\dfrac{d^2 y}{dx^2}$, если $x = a(\sin t - t\cos t),\ y = a(\cos t + t\sin t)$.

Задание 4. Составить уравнение касательной, проведенной к кривой $y = f(x)$, параллельно прямой $Ax + By + C = 0$

$f(x) = \dfrac{2}{3}x^3 + 2x^2 - 4x - 5,\quad 10x - 5y + 13 = 0$

Задание 5. Найти пределы функций, используя правило Лопиталя.

1. $\lim\limits_{x \to -4} \dfrac{x^2 + x - 12}{x^2 + 2x - 8}$
2. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin 2x}{xtgx}$
3. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1 - \cos x}{x \ln(1 + x)}$
4. $\lim\limits_{x \to 0} xe^{\frac{1}{x}}$
5. $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{e^x - x}{x^2}$
6. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln\cos 6x}{x}$
7. $\lim\limits_{x \to 0} (1 - 4x)^{\frac{1}{x}}$
8. $\lim\limits_{x \to \infty} \cos x^{\sin x}$

Задание 6. Найти наименьшее и наибольшее значение функции в указанных промежутках.

$y = x^3(8 - x),\quad x \in [0; 7]$

Задание 7. Исследовать функции и построить их графики.

1. $y=(x+1)(x+2)(x+3)$ 2. $y=\dfrac{x^2-5x+6}{x+2}$ 3. $y=\ln\left(2x^2+3\right)$

Вариант 19

Задание 1. Вычислить производные заданных функций.

1. $y=\arcsin\sqrt{\sin x}$
2. $y=x-\sqrt{1-x^2}\cdot\arcsin x$
3. $y=\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}$
4. $y=\sin^2\left(\dfrac{1-\ln x}{x}\right)$
5. $y=\cos x\cdot\sqrt{1+\sin^2 x}$
6. $y=e^{\frac{1}{\ln x}}$
7. $y=\ln\dfrac{1-e^x}{e^x}$

Задание 2. Дифференцирование неявной функции. Логарифмическое дифференцирование. Дифференцирование функции, заданной параметрически.

1. $y=x^{-x}\cdot 5^x\cdot x^3$
2. $y=\dfrac{(x-2)^{10}}{\sqrt{(x-1)^5(x-3)^{11}}}$
3. $\dfrac{y}{x}+e^{\frac{y}{x}}-\sqrt[3]{\dfrac{y}{x}}=0$

4 $arctg\,(x+y)=x$

5. $\begin{cases} x=a\cos^3 t \\ y=b\sin^3 t \end{cases}$

Задание 3. Найдите производную функции указанного порядка.

1. $y^{(n)}$, если $y=2\sin x$; 2. $\dfrac{d^2y}{dx^2}$, если $x=e^t$, $y=arc\,sint$.

Задание 4. Составить уравнение касательной, проведенной к кривой $y=f(x)$, параллельно прямой $Ax+By+C=0$

$f(x)=x^3-6x^2+12x-12,\quad 6x-5y+5=0$

Задание 5. Найти пределы функций, используя правило Лопиталя.

1. $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^2+x-2}{x^2+2x}$
2. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tg4x}{x}$
3. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x}\ln x\right)$
4. $\lim\limits_{x\to 1}\left(\ln x-\ln(x-1)\right)$
5. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{e^{\frac{x}{2}}+x}{4x^2-1}$
6. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x^2}-1}{\cos x-1}$
7. $\lim\limits_{x\to 0}(\cos 2x)^{\frac{1}{x^2}}$
8. $\lim\limits_{x\to 0}(1-9x)^{\frac{1}{x}}$

Задание 6. Найти наименьшее и наибольшее значение функции в указанных промежутках.

$y = 2\sin x - \sin 2x, \quad x \in \left[0; \frac{3\pi}{2}\right]$

Задание 7. Исследовать функции и построить их графики.

1. $y = 3x^3 + 6x^2$ 2. $y = \frac{x}{(x-1)^2}$ 3. $y = \ln\left(x^2 + 5x\right)$

Вариант 20

Задание 1. Вычислить производные заданных функций.

1. $y = \cos\frac{\arcsin x}{2}$
2. $y = \arccos\sqrt{1-3x}$
3. $y = \ln\frac{x + \sqrt{1-x^2}}{x}$
4. $y = 0,4\left(\cos\frac{2x+1}{2} - \sin 0,8x\right)^2$
5. $y = \sqrt[3]{1 + x\sqrt{x+3}}$
6. $y = \frac{\ln\sin x}{\ln\cos x}$
7. $y = 2^{\frac{x}{\ln x}}$

Задание 2. Дифференцирование неявной функции. Логарифмическое дифференцирование. Дифференцирование функции, заданной параметрически.

1. $y = (\cos x)^{\sin x}$
2. $y = \frac{(x+2)^2}{(x+1)^3(x+3)^4}$
3. $e^y = x + y$
4. $arctg\frac{y}{x} = \frac{1}{2\ln\left(x^2 + y^2\right)}$
5. $\begin{cases} x = \dfrac{\cos^2 t}{\sqrt{\cos 2t}} \\ y = \dfrac{\sin^3 t}{\sqrt{\cos 2t}} \end{cases}$

Задание 3. Найдите производную функции указанного порядка.

1. $y^{(n)}$, если $y = ln(x+1)$; 2. $\frac{d^2y}{dx^2}$, если $x = e^t\,cos\,t,\ y = e^t\,sin\,t$.

Задание 4. Составить уравнение касательной, проведенной к кривой $y = f(x)$, параллельно прямой $Ax + By + C = 0$

$f(x) = x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 3x + 5, \quad 15x + 5y - 1 = 0$

Задание 5. Найти пределы функций, используя правило Лопиталя.

1. $\lim\limits_{x\to 4}\frac{x^2 - 5x + 4}{x^2 - 2x - 8}$
2. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1 - \cos 10x}{x^2}$
3. $\lim\limits_{x\to\infty}(\sin x \ln x)$
4. $\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{x}{x-1} - \frac{1}{\ln x}\right)$
5. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^4}{e^x}$
6. $\lim\limits_{x\to a}\frac{e^x - e}{x - a}$
7. $\lim\limits_{x\to 1}(1-x)^{\cos\frac{\pi x}{2}}$
8. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}\right)^{tgx}$

Задание 6. Найти наименьшее и наибольшее значение функции в указанных промежутках.

$y = 3x^4 - 16x^3 + 2, \quad x \in [-3;1]$

Задание 7. Исследовать функции и построить их графики.

1. $y = x^3 - 4x$
2. $y = \dfrac{x^4}{x^3 - 27}$
3. $y = \dfrac{e^x}{e^x - 1}$

Вариант 21

Задание 1. Вычислить производные заданных функций.

1. $y = \ln \dfrac{1}{x + \sqrt{x^2 - 1}}$
2. $y = x^2 \sqrt{1 + \sqrt{x}}$
3. $y = x^3 arctgx^3$
4. $y = \arcsin x + \sqrt{1 - x^2}$
5. $y = \dfrac{\arcsin 4x}{1 - 4x}$
6. $y = \sin^2 x \cdot \sin x^2$
7. $y = e^{\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}}$

Задание 2. Дифференцирование неявной функции. Логарифмическое дифференцирование. Дифференцирование функции, заданной параметрически.

1. $y = \dfrac{\sqrt{x-1}}{\sqrt[3]{(x+2)^2}\sqrt{(x+3)^3}}$
2. $y = \sqrt[y]{(x-3)}$
3. $\ln y + \dfrac{x}{y} = c$
4. $y = 0,5 \sin y + x$
5. $\begin{cases} x = e^{-2t} \\ y = e^{2t} \end{cases}$

Задание 3. Найдите производную функции указанного порядка.

1. $y^{(n)}$, если $y = cos^2 x$;
2. $\dfrac{d^2 y}{dx^2}$**,** если $x = lnt,\ y = t^3$.

Задание 4. Составить уравнение касательной, проведенной к кривой $y = f(x)$, параллельно прямой $Ax + By + C = 0$

$f(x) = -x^3 - 3x^2 + 6x + 10, \quad 6x + 2y + 9 = 0$

Задание 5. Найти пределы функций, используя правило Лопиталя.

1. $\lim\limits_{x \to 5} \dfrac{x^2 - 2x - 15}{2x^2 - 7x - 15}$
2. $\lim\limits_{x \to \pi/2} \dfrac{tgx}{tg3x}$
3. $\lim\limits_{x \to 0} tg2x \ln x$
4. $\lim\limits_{x \to \pi/2} (tgx - \sec x)$
5. $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{2x^2 + 7}{x^2 + 1 + e^x}$
6. $\lim\limits_{x \to 4} \dfrac{\ln(x-3)}{x - 4}$
7. $\lim\limits_{x \to 1} x^{\frac{1}{1-x}}$
8. $\lim\limits_{x \to \infty} \left(1 + \dfrac{6}{x}\right)^x$

Задание 6. Найти наименьшее и наибольшее значение функции в указанных промежутках.

$$y=\frac{x}{\sqrt{x^2+4}},\quad x\in[-4;4]$$

Задание 7. Исследовать функции и построить их графики.

1. $y=x^2+6x-7$
2. $y=\frac{3x^3}{x^2-9}$
3. $y=(3x+5)e^{-x^2}$

Вариант 22

Задание 1. Вычислить производные заданных функций.

1. $y=\frac{2\cos x}{\sqrt{\cos 2x}}$
2. $y=x\cdot\sqrt{\frac{1-x}{1+x^2}}$
3. $y=\frac{1}{4}\ln\frac{1+x}{1-x}+\frac{1}{2}arctgx$
4. $y=\sqrt{a^2-x^2}-a\arccos\frac{x}{a}$
5. $y=\sqrt{x^2+1}-\ln\left(\frac{1}{x}+\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}\right)$
6. $y=xe^{1-\cos x}$
7. $y=\frac{1}{arctge^{-2x}}$

Задание 2. Дифференцирование неявной функции. Логарифмическое дифференцирование. Дифференцирование функции, заданной параметрически.

1. $y=\frac{x^2e^{x^2}}{x^2-1}$
2. $y=(tg2x)^{ctg\frac{x}{2}}$
3. $2y\ln y=x^2$
4. $a\cos^2(x+y)=b$
5. $\begin{cases}x=\sqrt{t}\\ y=\sqrt[3]{t}\end{cases}$

Задание 3. Найдите производную функции указанного порядка.

1. $y^{(n)}$, если $y=lg\,x$;
2. $\frac{d^2y}{dx^2}$, если $x=a\,rctgt,\ y=ln(1+t^2)$.

Задание 4. Составить уравнение касательной, проведенной к кривой $y=f(x)$, параллельно прямой $Ax+By+C=0$

$$f(x)=-\frac{2}{3}x^3+x^2-2x+3,\quad 14x-7y+3=0$$

Задание 5. Найти пределы функций, используя правило Лопиталя.

1 $\lim\limits_{x\to1}\frac{3x^2-4x+1}{x^2-3x+2}$

2. $\lim\limits_{x\to0}\frac{tg2x}{x}$

3. $\lim\limits_{x\to3}(3-x)tg\frac{\pi x}{6}$

4. $\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{1}{\sin x}-\frac{1}{x}\right)$

5. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{e^x-3x-1}{x^3+x}$

6. $\lim\limits_{x\to0}\frac{\ln\cos 4x}{x}$

7. $\lim\limits_{x\to0}x^x$

8. $\lim\limits_{x\to0}(1+5x)^{\frac{1}{x}}$

Задание 6. Найти наименьшее и наибольшее значение функции в указанных промежутках.

$$y=\frac{\sqrt{3}}{2}x+\cos x,\quad x\in\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$$

Задание 7. Исследовать функции и построить их графики.

1. $y=x^3-12x+3$ 2. $y=\dfrac{3x}{x^2+5}$ 3. $y=xe^{-x}$

Вариант 23

Задание 1. Вычислить производные заданных функций.

1. $y=\dfrac{\sin 3x}{2\sin^2 x\cos x}$
2. $y=\ln\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)-\dfrac{x}{\sqrt{x^2-1}}$
3. $y=\dfrac{\sin^2 x}{1+ctgx}+\dfrac{\cos^2 x}{1+tgx}$
4. $y=e^{ax}\left(a\sin x-\cos x\right)$
5. $y=e^{x}\left(\sin 3x-3\cos 3x\right)$
6. $y=3x^3\arcsin x+\left(x^2+2\right)\sqrt{1-x^2}$
7. $y=\dfrac{1}{\sqrt{1+e^{-\sqrt{x}}}}$

Задание 2. Дифференцирование неявной функции. Логарифмическое дифференцирование. Дифференцирование функции, заданной параметрически.

1. $y=x^{\arcsin x}$
2. $y=\sqrt[3]{\dfrac{x-5}{\sqrt[5]{x^2+4}}}$
3. $2^x+2^y=2^{x+y}$
4. $y=x+arctgy$
5. $\begin{cases} x=a\left(\ln tg\dfrac{t}{2}+\cos t-\sin t\right) \\ y=a\left(\sin t+\cos t\right) \end{cases}$

Задание 3. Найдите производную функции указанного порядка.

1. $y^{(n)}$, если $y=xe^x$;
2. $\dfrac{d^2y}{dx^2}$, если $x=cos^2 t,\ y=sin 2t$.

Задание 4. Составить уравнение касательной, проведенной к кривой $y=f\left(x\right)$, параллельно прямой $Ax+By+C=0$

$$f\left(x\right)=\frac{2}{3}x^3-5x^2+6x-2,\quad 12x+2y+11=0$$

Задание 5. Найти пределы функций, используя правило Лопиталя.

1. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2+4x-21}{2x^2-7x+3}$
2. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tgx-\sin x}{x-\sin x}$
3. $\lim\limits_{x\to 0}\left(tg3x\ln x\right)$
4. $\lim\limits_{x\to 4}\left(\dfrac{1}{x-4}-\dfrac{1}{x^2-5x+4}\right)$
5. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{e^{3x}-x}{x^3}$
6. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\ln\left(2-x\right)}{1-x}$
7. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\cos x\right)^{\frac{1}{x}}$
8. $\lim\limits_{x\to 0}\left(1-7x\right)^{\frac{1}{x}}$

Задание 6. Найти наименьшее и наибольшее значение функции в указанных промежутках.

$y=\frac{5x}{1+x^2}$, $x\in[-2;2]$

Задание 7. Исследовать функции и построить их графики.

1. $y=(x-3)^2(x+1)$
2. $y=\frac{4x^2}{6+x^2}$
3. $y=e^{\frac{1}{2-x}}$

Вариант 24

Задание 1. Вычислить производные заданных функций.

1. $y=2\arcsin\frac{x-2}{\sqrt{6}}-\sqrt{2+4x-x^2}$
2. $y=\ln\left(e^x\cos x+e^{-x}\sin x\right)$
3. $y=\frac{1+xarctgx}{\sqrt{x^2+1}}$
4. $y=e^x\sin x\cos^3 x$
5. $y=\sqrt[11]{9+6\sqrt[5]{x^9}}$
6. $y=\ln tg\frac{x}{2}-ctgx\ln(1+\sin x)-x$
7. $y=e^{arctg\sqrt{1+\ln(2x+3)}}$

Задание 2. Дифференцирование неявной функции. Логарифмическое дифференцирование. Дифференцирование функции, заданной параметрически.

1. $y=\sqrt{x\sin x\sqrt{1-e^x}}$
2. $y=\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$
3. $x^3+y^3-3axy=0$
4. $y\sin x=\cos(x-y)$
5. $\begin{cases} x=a(\cos t+t\sin t) \\ y=a(\sin t-t\cos t) \end{cases}$

Задание 3. Найдите производную функции указанного порядка.

1. $y^{(n)}$, если $y=sin^4 x+cos^4 x$;
2. $\frac{d^2y}{dx^2}$, если $x=arctgt,\ y=t^2/2$.

Задание 4. Составить уравнение касательной, проведенной к кривой $y=f(x)$, параллельно прямой $Ax+By+C=0$

$f(x)=\frac{1}{6}x^3+\frac{1}{2}x^2-x+2,\quad 3x-6y+4=0$

Задание 5. Найти пределы функций, используя правило Лопиталя.

1. $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}}\frac{2x^2-7x+3}{4x-2}$
2. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-x-1}{\sin 2x}$
3. $\lim\limits_{x\to 1}(x-1)\ln(x-1)$
4. $\lim\limits_{x\to 3}\left(\frac{1}{x-3}-\frac{1}{x^2-5x+6}\right)$
5.. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{e^{4x}+x^2+x}{x^3+1}$
6. $\lim\limits_{x\to a}\frac{x^2-\sqrt{a^3x}}{\sqrt{ax}-x}$
7. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x^2}\right)^x$
8. $\lim\limits_{x\to 0}(\cos 2x)^{\frac{5}{x^2}}$

Задание 6. Найти наименьшее и наибольшее значение функции в указанных промежутках.

$$y = 2x + \cos 2x, \quad x \in \left[-\frac{3\pi}{4}; \pi\right]$$

Задание 7. Исследовать функции и построить их графики.

1. $y = (x+2)(x+3)^2$
2. $y = \dfrac{8x^3+1}{3x^2}$
3. $y = (x+4)e^{2x}$

Вариант 25

Задание 1. Вычислить производные заданных функций.

1. $y = \dfrac{1}{\cos(x - \cos x)}$
2. $y = x - \ln\left(2e^x + 1 + \sqrt{e^{2x} + 4e^x + 1}\right)$
3. $y = \dfrac{e^{x^2}}{e^x + e^{-x}}$
4. $y = 2\ln\left(2x - 3\sqrt{1-4x^2}\right) - 6\arcsin 2x$
5. $y = \dfrac{3x^2 - 1}{3x^3} + \ln\sqrt{x^2+1} + arctgx$
6. $y = x\sqrt{x^2+1} \cdot \sin x$
7. $y = \sqrt[6]{\left(1 + xe^{\sqrt{x}}\right)^3}$

Задание 2. Дифференцирование неявной функции. Логарифмическое дифференцирование. Дифференцирование функции, заданной параметрически.

1. $y = \dfrac{\sqrt{x+2} \cdot (3-x)^4}{(x+1)^5}$
2. $y = \left(x^2+1\right)^{\sin 2x}$
3. $y = 1 + xe^y$
4. $\cos(xy) = x$
5. $\begin{cases} x = \ln\left(1+t^2\right) \\ y = t - arctgt \end{cases}$

Задание 3. Найдите производную функции указанного порядка.

1. $y^{(n)}$, если $y = e^{-\frac{x}{2}}$;
2. $\dfrac{d^2y}{dx^2}$, если $x = a\,cos\,t,\ y = a\,sin\,t$.

Задание 4. Составить уравнение касательной, проведенной к кривой $y = f(x)$, параллельно прямой $Ax + By + C = 0$

$$f(x) = 3x^3 - 12x^2 + 10x - 2, \quad 24x + 12y - 5 = 0$$

Задание 5. Найти пределы функций, используя правило Лопиталя.

1. $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^3 - 3x - 2}{x - 2}$
2. $\lim\limits_{x\to \pi/4} \dfrac{1 - tgx}{x - 2}$
3. $\lim\limits_{x\to 0} \sqrt{x}\ln x$
4. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\ln x}{1 - x^3}$
5. $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{x^2 + 4x}{e^{3x}}$
6. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{3e^{4x} - 3}{x^3}$
7. $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{1}{x}\right)^{tgx}$
8. $\lim\limits_{x\to 0} (1+8x)^{\frac{1}{x}}$

Задание 6. Найти наименьшее и наибольшее значение функции в указанных промежутках.

$$y=\frac{1}{\sin x},\quad x\in\left[\frac{\pi}{2};\frac{3\pi}{2}\right]$$

Задание 7. Исследовать функции и построить их графики.

1. $y=(x-1)(x+2)(x-3)$
2. $y=\dfrac{-3}{x^2-6x+9}$
3. $y=x^2e^{-2x}$

Вариант 26

Задание 1. Вычислить производные заданных функций.

1. $y=\dfrac{x^2-3x}{x^3}$
2. $y=\ln\left(x-2\sqrt{x^4+1}\right)$
3. $y=3\cos\left(e^x-xe^x\right)-\cos^2\left(xe^x-e^x\right)$
4. $y=\arcsin\left(4x\sqrt{1-x^2}\right)$
5. $y=(\sin x-x\cos x)\left[\ln(\sin x-x\cos x)-1\right]$
6. $y=\arcsin\dfrac{2+x^2}{x}$
7. $y=\left(\dfrac{1+2x}{1-2x}\right)^4$

Задание 2. Дифференцирование неявной функции. Логарифмическое дифференцирование. Дифференцирование функции, заданной параметрически.

1. $y=(x+1)^{x^2}$
2. $y=\dfrac{x^4\sqrt{x+1}}{(x-1)^2\sqrt[4]{x-1}}$
3. $x^3-2y^3=3x^2y$
4. $4\dfrac{y}{x}-2e^{\frac{y}{x}}+\sqrt[3]{\dfrac{y}{x}}=0$
5. $\begin{cases}x=t^3-2t+3\\ y=3t^5-4t^3+3\end{cases}$

Задание 3. Найдите производную функции указанного порядка.

1. $y^{(n)}$, если $y=sin\,x+cos\,x$;
2. $\dfrac{d^2y}{dx^2}$, если $x=e^{-t}$, $y=t^3$.

Задание 4. Составить уравнение касательной, проведенной к кривой $y=f(x)$, параллельно прямой $Ax+By+C=0$

$$f(x)=-2x^3-6x^2+12x+21,\quad 6x+y-2=0$$

Задание 5. Найти пределы функций, используя правило Лопиталя.

1. $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^4-1}{2x^4-x^2-1}$
2. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x-\sin x}{x^3}$
3. $\lim\limits_{x\to0}\sqrt[3]{x}\ln x$
4. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{2x}-1}{\ln(1+2x)}$
5. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2-1}{e^x}$
6. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^x+e^{-x}-2}{\sin x}$
7. $\lim\limits_{x\to0}\left(e^x+x\right)^{\frac{1}{x}}$
8. $\lim\limits_{x\to0}(tg4x)^{2x}$

Задание 6. Найти наименьшее и наибольшее значение функции в указанных промежутках.

$$y = \sin 3x - 3\sin x, \quad x \in \left[0; \frac{3\pi}{2}\right]$$

Задание 7. Исследовать функции и построить их графики.

1. $y = x^3 - 6x^2$ 2. $y = \dfrac{x^2+6}{x^2-9}$ 3. $y = \ln\left(x^2 - 5x + 4\right)$

Вариант 27

Задание 1. Вычислить производные заданных функций.

1. $y = \dfrac{\cos 2x}{x^3 + 2x^2}$
2. $y = \ln(x + \sqrt[3]{x^2} - 1)$
3. $y = \arccos \dfrac{1 + X^4}{3X}$
4. $y = \left(\dfrac{1-x}{1+x}\right)^4$
5. $y = \left(x\cos x - \sin x\right)\left[\ln\left(x\cos x - \sin x\right) - 1\right]$
6. $y = 3\sin\left(xe^x - e^x\right) - \sin^3\left(xe^x - e^x\right)$
7. $y = \arccos\left(2x\sqrt{1-x^2}\right)$

$y = (\sin x\text{-}x\cos\dfrac{1}{\sqrt{x}})$

Задание 2. Дифференцирование неявной функции. Логарифмическое дифференцирование. Дифференцирование функции, заданной параметрически.

1. $y = \left(x-2\right)^{\sin x}$
2. $y = \dfrac{x^2\sqrt{x+1}}{\left(x-1\right)^3 \sqrt[4]{5x-1}}$
3. $x^3 + y^3 = 3xy$
4. $\dfrac{y}{x} + e^{\frac{y}{x}} - \sqrt[3]{\dfrac{y}{x}} = 0$
5. $\begin{cases} x = t^3 + 3t + 1 \\ y = 3t^5 + 5t^3 + 1 \end{cases}$

Задание 3. Найдите производную функции указанного порядка.

1. $y^{(n)}$, если $y = e^{\frac{x}{2}}$; 2. $\dfrac{d^2y}{dx^2}$, если $x = a(t - \sin t),\ y = a(1 - \cos t)$.

Задание 4. Составить уравнение касательной, проведенной к кривой $y = f(x)$, параллельно прямой $Ax + By + C = 0$

$f(x) = \dfrac{1}{3}x^3 - x^2 + 1$, $y + 4x = 1$

Задание 5. Найти пределы функций, используя правило Лопиталя.

1. $\lim\limits_{x\ 5} \dfrac{x^3 + 5x + 3x + 15}{2x^2 + 6x - 20}$
2. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2e^x - 2}{x^2 - x}$
3. $\lim\limits_{x\to 0} xctg2x$
5. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{e^{3x} + 5}{6x^2 + 1}$
6. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2e^{4x} - 2}{\sin x}$
7. $\lim\limits_{x\to 0} \left(1 - 6x\right)^{\frac{1}{x}}$

4. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^2}-ctg^2x\right)$

8. $\lim\limits_{x\to 1} x^{\frac{1}{1-x}}$

Задание 6. Найти наименьшее и наибольшее значение функции в указанных промежутках.

$y = x + \ln(-x)$, $[-4; -0{,}5]$

Задание 7. Исследовать функции и построить их графики.

1. $y = x^3 + 3x + 2$
2. $y = \frac{2x-1}{(x-1)^2}$
3. $y = \ln\left(x^2 + x - 2\right)$

Вариант 28

Задание 1. Вычислить производные заданных функций.

1. $y = \ln tg\frac{x}{2}$
2. $y = 4^{arctg\sqrt{x^2-1}}$
3. $y = \left(1+\sqrt{x^2+1}\right)^5$
4. $y = e^{\arcsin\frac{1}{x}}$
5. $y = tg^3 2x\cos^2 2x$
6. $y = \frac{1}{4}tg^4x - \ln\cos x - \frac{tg^2x}{2}$
7. $y = x^n a^{-x^2}$

Задание 2. Дифференцирование неявной функции. Логарифмическое дифференцирование. Дифференцирование функции, заданной параметрически.

1. $y = x^x$
2. $y = \frac{(x-2)^9}{\sqrt{(x-1)^5(x-3)^{11}}}$
3. $tgy = xy$
4. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$
5. $\begin{cases} x = a\cos^3 t \\ y = b\sin^3 t \end{cases}$

Задание 3. Найдите производную функции указанного порядка.

1. $y^{(n)}$ $y = e^{-\sqrt{2}x}$;
2. $\frac{d^2y}{dx^2}$, если $x = arc\cos t,\ y = (1-t^2)^3$.

Задание 4. Составить уравнение касательной, проведенной к кривой $y = f(x)$, параллельно прямой $Ax + By + C = 0$

$f(x) = \frac{1}{9}x^3 + x^2\text{-}3x$, $3y - 7x = 1$

Задание 5. Найти пределы функций, используя правило Лопиталя.

1. $\lim\limits_{x\to -1}\frac{x^3-2x-1}{x^4+2x+1}$
2. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x\sin 3x}{1-\cos 4x}$
3. $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}}\sin(2x-1)tg\pi x$
5. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{e^{5x}+x^2}{x+x^3}$
6. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{2e^x+e^{-x}-3}{x^2}$
7. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}\right)^{\sin x}$

4. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\sin 2x}{\ln\sin x}$

8. $\lim\limits_{x\to 0}(1-2x)^{\frac{1}{x}}$

Задание 6. Найти наименьшее и наибольшее значение функции в указанных промежутках.

$y = x + e^{-x}$, $[-\ln 4;\ \ln 2]$.

Задание 7. Исследовать функции и построить их графики.

1. $y = x^2 - 4x$
2. $y = \dfrac{x^3+8}{3x}$
3. $y = \dfrac{e^x}{e^x - 1}$

Вариант 29

Задание 1. Вычислить производные заданных функций.

1. $y = \ln\left(\sqrt{2\sin x + 1} + \sqrt{2\sin x - 1}\right)$
2. $y = \left(x^2 + 2x + 2\right)e^{-x}$
3. $y = arctg\,\dfrac{\ln x}{3}$
4. $y = x\sin x\cos x + \dfrac{1}{2}\cos^2 x$
5. $y = log_a\left(x + \sqrt{x^2+9}\right)$
6. $y = \ln tg\,\dfrac{x}{2} - \dfrac{x}{\sin x}$
7. $y = e^{\frac{1}{2}tg^2 x}\cos x$

Задание 2. Дифференцирование неявной функции. Логарифмическое дифференцирование. Дифференцирование функции, заданной параметрически.

1. $y = x^{-x}\cdot 2^x \cdot x^2$
2. $y = \sqrt{\dfrac{x(x-1)}{x-2}}$
3. $x^3 + y^3 = \dfrac{a^3}{y}$
4. $xy = arctg\,\dfrac{x}{y}$
5. $\begin{cases} x = \dfrac{1}{t+1} \\ y = \left(\dfrac{t}{t+1}\right)^2 \end{cases}$

Задание 3. Найдите производную функции указанного порядка.

1. $y^{(n)}$, если $y = a/x^n$;
2. $\dfrac{d^2y}{dx^2}$, если $x = at\,cos\,t,\ y = at\,sin\,t$.

Задание 4. Составить уравнение касательной, проведенной к кривой $y = f(x)$, параллельно прямой $Ax + By + C = 0$

$f(x) = \dfrac{1}{6}x^3 + 2x^2 - 2x$, $2y + 20x = 2$.

Задание 5. Найти пределы функций, используя правило Лопиталя**.**

1. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{3x^2+2x-1}{x^2-1}$
2. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{6}}\dfrac{1-2\sin x}{\cos 3x}$
3. $\lim\limits_{x\to 0} x\,ctg\,7x$
5. $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{e^x+x+2}{x^4}$
6. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{e^x-e^2}{x-2}$
7. $\lim\limits_{x\to 0}(tgx)^{2x-\pi}$

4. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x\sin x}-\dfrac{1}{x^2}\right)$

8. $\lim\limits_{x\to 0}(1-5x)^{\frac{1}{x}}$

Задание 6. Найти наименьшее и наибольшее значение функции в указанных промежутках**.**

$y=x\ln^2 x,\quad x\in\left[e^{-1};e\right]$.

Задание 7. Исследовать функции и построить их графики.

1. $y=x^2-12x+21$
2. $y=\dfrac{2x}{(x-3)^2}$
3. $\mathrm{y}=\mathrm{xe}^{\frac{-\mathrm{x}^2}{2}}$

Вариант 30

Задание 1. Вычислить производные заданных функций**.**

1. $y=\sin^3\dfrac{x}{3}$
2. $y=\dfrac{1}{2}tg^2\sqrt{x}+\ln\cos\sqrt{x}$
3. $y=\dfrac{2^{3x}}{3^{5x}}$
4. $y=\dfrac{1}{4a}\ln\dfrac{x-a}{x+a}+\dfrac{1}{2a}arctg\,\dfrac{x}{a}$
5. $y=x^2e^{x^2}\ln x$
6. $y=\arccos\sqrt{1-2^x}$
7. $y=\log_{x^2}2$

Задание 2. Дифференцирование неявной функции. Логарифмическое дифференцирование. Дифференцирование функции, заданной параметрически.

1. $y=x^{\ln x}$
2. $y=x\cdot\sqrt[3]{\dfrac{x^2}{x^2+1}}$
3. $arctg\,(x+y)=x$
4. $x^3+x^2y+y^2=0$
5. $\begin{cases}x=a\cos^2 t\\ y=b\sin^2 t\end{cases}$

Задание 3. Найдите производную функции указанного порядка.

1. $y^{(n)}$, если $y=arctgx$;
2. $\dfrac{d^2y}{dx^2}$, если $x=a\,log_b\,t,\ y=a\ln t$.

Задание 4. Составить уравнение касательной, проведенной к кривой $y=f(x)$, параллельно прямой $Ax+By+C=0$

$f(x)=\dfrac{1}{12}x^3\text{-}x^2-4x$**,** $2y+14x=2$

Задание 5. Найти пределы функций, используя правило Лопиталя.

1. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{2x^2+x-10}{x^2-x-2}$
2. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin 5x}{x}$
3. $\lim\limits_{x\to 0}x^2e^{\frac{1}{x}}$
5. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{e^{4x}+x}{x^3+1}$
6. $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{ctg\,\frac{x}{2}}{x-\pi}$
7. $\lim\limits_{x\to\pi/2}(\sin x)^{\frac{1}{x-\pi/2}}$

4. $\lim\limits_{x\to -2}\left(\frac{1}{x+2}-\frac{1}{x^2+5x+6}\right)$ 8. $\lim\limits_{x\to 0}(1-8x)^{\frac{1}{x}}$

Задание 6. Найти наименьшее и наибольшее значение функции в указанных промежутках.

$y=\arccos x^2,\quad x\in\left[-\sqrt{2}/2;\sqrt{2}/2\right]$

Задание 7. Исследовать функции и построить их графики.

1. $y=x^3+6x+14$ 2. $y=\frac{4x^2}{x^3-1}$ 3. $y=\left(3x^2+4\right)e^{-x^2}$

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Данко, П.Г. Высшая математика в упражнениях и задачах / П.Г. Данко, А.Г. Попов, Т.Я. Кожевникова. – М.: ОНИКС 21 век, 2002. – 304 с.

2. Запорожец, Г.И. Руководство к решению задач по математическому анализу / Г.И. Запорожец. – М. : Высшая школа,1966. – 459 с.

3. Мышкис, А.Д. Лекции по высшей математике / А.Д. Мышкис. – М. : Наука,1967. – 639 с.

4. Пискунов, Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисления / Н.С. Пискунов. – М. : Наука, 1978. – 452 с.

5. Шипачев, В.С. Высшая математика / В.С. Шипачев. – М.: Высшая школа, 1990. – 479 с.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Учебное издание

Якунина Маргарита Ивановна
Гамалей Вероника Геннадьевна

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИЙ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

Методическое пособие

2-е издание, исправленное

Технический редактор *О.В. Сенчихина*

Отпечатано методом прямого репродуцирования

План 2011 г. Поз. 9.7. Подписано в печать 3.11.2011 г.
Формат $60\times84^{1}/_{16}$. Гарнитура «Arial». Уч.-изд. л. 5,1.
Усл. печ. л. 4,8. Зак. 318. Тираж 50 экз. Цена 73 руб.

Издательство ДВГУПС
680021, г. Хабаровск, ул. Серышева, 47.