Министерство транспорта Российской Федерации
Федеральное агентство железнодорожного транспорта
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Дальневосточный государственный университет путей сообщения»

Кафедра «Физика»

Н.А. Кравцова, Д.С. Фалеев

КОЛЕБАНИЯ И ВОЛНЫ

Сборник задач по физике

Рекомендовано
Методическим советом ДВГУПС
в качестве учебного пособия

Хабаровск
Издательство ДВГУПС
2013

УДК 537.86 (075.8) + 534.1 (075.8)
ББК В 336я73 + В 236.35я73
К 771

Рецензенты:

Кафедра «Физика» ДВГГУ (заведующий кафедрой
доктор физико-математических наук,
профессор *В.И. Крылов*)

Доцент кафедры «Физика» ТОГУ,
кандидат физико-математических наук
Ю.И. Щербаков

Кравцова, Н.А.
К 771 Колебания и волны : сборник задач по физике / Н.А. Кравцова, Д.С. Фалеев. – Хабаровск : Изд-во ДВГУПС, 2013. – 131 с.

Сборник задач разработан в соответствии с профессиональной образовательной программой. Даны краткие теоретические сведения по разделу «Колебания и волны», приведены примеры решения задач и задания для самостоятельной работы.

Предназначен для студентов 1–2-го курсов инженерно-технических специальностей и направлений бакалавриата.

УДК 537.86 (075.8) + 534.1 (075.8)
ББК В 336я73 + В 236.35я73

ВВЕДЕНИЕ

Задачи по физике позволяют проверить глубину понимания сущности физических законов и явлений, умения применять знания в конкретной физической ситуации.

Цель данного пособия – помочь студентам обобщить и закрепить знания об основных методах решения задач по разделу курса общей физики «Колебания и волны».

В начале каждого раздела дается краткая теория в виде перечня основных законов и формул, необходимых для решения задач, методические рекомендации, в которых обсуждаются особенности предлагаемых задач, методы и приемы их решения. Далее предлагаются примеры решения различных типов задач данной темы и задачи для самостоятельного решения.

Часть первая
КОЛЕБАНИЯ

1. СВОБОДНЫЕ ГАРМОНИЧЕСКИЕ КОЛЕБАНИЯ

1.1. Механические колебания

Основные законы и формулы

• Гармонические колебания – колебания, при которых колеблющаяся величина меняется со временем по закону синуса или косинуса

$$x = A\sin\left(\omega_0\, t + \varphi_0\right); \tag{1.1}$$

$$x = A\cos\left(\omega_0\, t + \varphi_0\right), \tag{1.2}$$

где ω_0 – циклическая частота свободных колебаний; φ_0 – начальная фаза колебаний; $\varphi = \left(\omega_0 t + \varphi_0\right)$ – фаза колебаний.

• Дифференциальное уравнение свободных гармонических колебаний

$$\ddot{x} + \omega_0^2\, x = 0. \tag{1.3}$$

• Период колебаний

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0}. \tag{1.4}$$

• Циклическая частота

$$\omega_0 = 2\pi\nu, \tag{1.5}$$

где ν – собственная частота колебательной системы.

• Скорость колеблющейся точки

$$\upsilon = \dot{x} = -A\,\omega_0\,\sin\left(\omega_0 t + \varphi_0\right) = A\,\omega_0\,\cos\left(\omega_0 t + \varphi_0 + \frac{\pi}{2}\right). \tag{1.6}$$

• Ускорение колеблющейся точки

$$a = \ddot{x} = -A\,\omega_0^2\,\cos\left(\omega_0 t + \varphi_0\right) = A\,\omega_0^2\,\cos\left(\omega_0 t + \varphi_0 + \pi\right). \tag{1.7}$$

• Кинетическая энергия точки, совершающей колебания

$$W_k = \frac{m\,\upsilon^2}{2} = \frac{m\,\omega_0^2\,A^2}{2}\sin^2\left(\omega_0 t + \varphi_0\right). \tag{1.8}$$

• Потенциальная энергия точки, совершающей колебания под действием квазиупругой силы $F = -ma = -m\,\omega_0^2\ x$:

$$W_p = -\int_0^x F\,dx = \frac{m\,\omega_0^2\ x^2}{2} = \frac{m\,\omega_0^2\ A^2}{2}\cos^2\left(\omega_0 t + \varphi_0\right). \qquad (1.9)$$

• Полная энергия колеблющейся точки

$$W = W_k + W_p = \frac{m\omega_0^2 A^2}{2}. \qquad (1.10)$$

• Циклическая частота и период колебаний осциллятора (классический осциллятор – механическая колебательная система).

1. Пружинный маятник

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}; \qquad (1.11)$$

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}, \qquad (1.12)$$

где k – жесткость пружины; m – масса груза.

2. Математический маятник

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{\ell}}; \qquad (1.13)$$

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}, \qquad (1.14)$$

где ℓ – длина нити; g – ускорение свободного падения.

3. Физический маятник

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{mg\ell}{J}}; \qquad (1.15)$$

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{J}{mg\ell}}, \qquad (1.16)$$

где J – момент инерции маятника относительно оси, проходящей через точку подвеса.

Величина $L = \dfrac{J}{m\ell}$ называется ***приведенной длиной физического маятника***.

- При сложении двух одинаково направленных гармонических колебаний одинаковой частоты амплитуда результирующего колебания

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos\left(\varphi_2 - \varphi_1\right)} \qquad (1.17)$$

и начальная фаза

$$tg\varphi = \frac{A_1\sin\varphi_1 + A_2\sin\varphi_2}{A_1\cos\varphi_1 + A_2\cos\varphi_2}, \qquad (1.18)$$

где A_1, A_2 – амплитуды слагаемых колебаний; φ_1, φ_2 – их начальные фазы.

- При сложении колебаний в двух взаимно перпендикулярных направлениях с одинаковой частотой ω, но разными амплитудами A, B и начальными фазами φ_1, φ_2

$$x = A\cos\left(\varphi t + \varphi_1\right); \;\; y = B\cos\left(\varphi t + \varphi_2\right), \qquad (1.19)$$

уравнение траектории результирующего колебания будет иметь вид:

$$\frac{x^2}{A^2} - \frac{2xy}{AB}\cos\left(\varphi_2 - \varphi_1\right) + \frac{y^2}{B^2} = \sin^2\left(\varphi_2 - \varphi_1\right). \qquad (1.20)$$

Это уравнение эллипса, оси которого ориентированы произвольным образом относительно координатных осей (рис. 1.1).

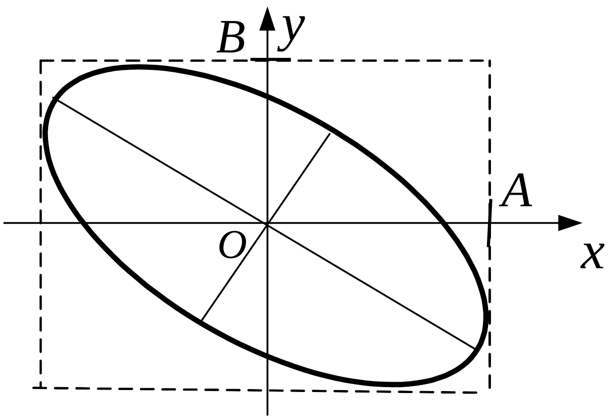


Рис. 1.1

1.1.1. Кинематика гармонических колебаний

Методические рекомендации

1. Величины, характеризующие колебательное движение (амплитуда, частота, циклическая частота, период, фаза) могут быть найдены путем сопоставления уравнения колебаний (1.1) или (1.2) и заданного в задаче уравнения.

2. Начальная фаза φ_0 колебаний характеризует начальное состояние колебательной системы и определяется выбором начала отсчета времени: если в начальный момент времени система находится на максималь-

ном расстоянии от положения равновесия, то уравнение колебаний будет $x = A\cos(\omega_0 t)$.

В случае, когда начало отсчета времени совпадает с моментом прохождения системой положения равновесия, колебания будут синусоидальными, уравнение колебаний $x = A\sin(\omega_0 t)$.

В обоих случаях начальная фаза равна нулю.

Если начало отсчета времени совпадает с каким-либо промежуточным положением колебательной системы, то при решении задачи пользуемся уравнениями (1.1) или (1.2) (уравнения равноправны и какое из них применять не имеет значения).

3. Обратите внимание, что частота ν и циклическая частота ω_0 имеют разные единицы измерения:

$$[\nu] = 1 \text{ Гц}; \; [\omega_0] = 1 \text{ рад/с} = 1 \text{ с}^{-1}.$$

4. В случае гармонических колебаний максимальному смещению соответствует минимальная скорость $\upsilon = 0$ и максимальное ускорение $a = a_{\max}$, направленное в сторону, противоположную смещению колеблющейся точки. Когда тело находится в положении равновесия, то его скорость максимальна $\upsilon = \upsilon_{\max}$, а ускорение минимально $a = 0$.

5. Написать уравнение гармонических колебаний – значит найти функциональную зависимость смещения x колеблющейся точки от времени t ($x = f(t)$).

6. Кинематические характеристики гармонических колебаний можно определять графически (рис. 1.2).

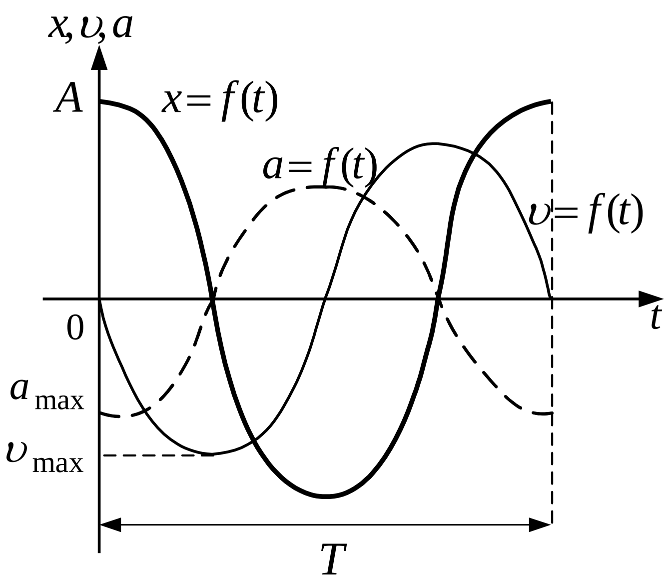


Рис. 1.2

Примеры решения задач

Задача 1. Материальная точка совершает гармонические колебания с амплитудой A = 10 см. Запишите уравнение таких колебаний, если начальная фаза φ_0 = 60° и за t = 2,5 мин точка совершает N = 300 колебаний.

Решение.

Запишем уравнение гармонических колебаний в общем виде:

$$x = A\cos\left(\omega_0 t + \varphi_0\right), \tag{1}$$

где x – смещение материальной точки от положения равновесия; A – амплитуда колебаний; ω_0 – циклическая частота; φ_0 – начальная фаза.

По условию задачи амплитуда и начальная фаза колебаний известны. Циклическую частоту можно найти из соотношения $\omega_0 = \dfrac{2\pi}{T}$, где T – период колебаний.

Зная время t и число колебаний N, найдем период колебаний $T = t/N$, тогда $\omega_0 = 2\pi N/t$,

$$t = 2{,}5 \text{ мин} = 150 \text{ с}; \quad \omega_0 = \frac{2\pi \cdot 300}{150\, c} = 4\pi\ c^{-1}.$$

Подставив значения A, ω_0 и φ_0 в уравнение (1), получим искомое уравнение гармонических колебаний, м,

$$x = 0{,}1\cos\left(4\,\pi t + \frac{\pi}{3}\right).$$

Ответ: $x = 0{,}1\cos\left(4\pi t + \dfrac{\pi}{3}\right)$ м.

Задача 2. Материальная точка совершает колебания по закону

$$x = A\cos\left(\omega_0 t + \varphi_0\right),$$

где A = 0,2 м; φ_0 = 0°. Определите циклическую частоту ω_0, скорость υ и ускорение a колеблющейся точки за t = 100 мс, если период колебаний T = 0,05 с.

Решение.

Циклическую частоту находим из соотношения

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T}, \quad \omega_0 = 2\pi/0{,}05\, c = 40\pi\ c^{-1}.$$

Скорость колеблющейся точки определяется первой производной координаты по времени:

$$\upsilon = \dot{x} = -A\,\omega_0 \sin\left(\omega_0 t + \varphi_0\right).$$

По условию φ_0 = 0°, поэтому $\upsilon = \dot{x} = -A\,\omega_0 \sin\left(\omega_0 t\right)$.

t = 100 мс = 0,1 с.

$\upsilon = -0{,}2 \cdot 40 \cdot 3{,}14 \sin\left(40\pi \cdot 0{,}1\right) = 0$ м/с.

Ускорение определяется первой производной скорости по времени, т. е. $a = \dot{\upsilon} = -A\,\omega_0^2 \cos\left(\omega_0 t\right)$.

a = –0,2 $(40 \cdot 3{,}14)^2$ cos $(40\pi \cdot 0{,}1) \approx 3{,}2 \cdot 10^3$ м/с^2.

Ответ: ω_0 = 40π с$^{-1}$; υ = 0 м/с; $a \approx 3{,}2 \cdot 10^3$ м/с^2.

Задача 3. Материальная точка начинает колебательное движение из положения x_0 = 2 см с частотой ν = 5 Гц и амплитудой A = 4 см. Запишите уравнение колебаний точки, считая их гармоническими.

Решение.

Уравнение гармонических колебаний имеет вид:

$$x = A\cos\left(\omega_0 t + \varphi_0\right), \qquad (1)$$

где x – смещение материальной точки от положения равновесия; A – амплитуда колебаний; ω_0 – циклическая частота; φ_0 – начальная фаза.

Циклическая частота ω_0 и частота ν колебаний связаны соотношением $\omega = 2\pi\nu$; $\omega_0 = 2\pi \cdot 5 = 10\,\pi\,c^{-1}$.

Для начального момента времени $\left(t = 0\right)$ из уравнения (1) получаем $x_0 = A\cos\varphi_0$, откуда находим начальную фазу

$$\cos\varphi_0 = \frac{x_0}{A},\quad \varphi_0 = \arccos\left(\frac{x_0}{A}\right),\ \varphi_0 = \arccos\left(\frac{2}{4}\right) = \frac{\pi}{3}.$$

Следовательно, искомое уравнение колебаний, м, будет

$$x = 0{,}04\cos\left(10\pi t + \frac{\pi}{3}\right).$$

Ответ: $x = 0{,}04\cos\left(10\pi t + \dfrac{\pi}{3}\right)$ м.

Задача 4. Уравнение колебаний материальной точки имеет вид (все величины выражены в единицах СИ):

$$x = 0{,}1\cos\left(50\pi t\right).$$

Найти зависимость скорости и ускорения колеблющейся точки от времени. Чему равны максимальная $\upsilon_{\max}$ скорость и максимальное $a_{\max}$ ускорение точки? Определите среднюю $<\upsilon>$ скорость и среднее $<a>$ ускорение за время прохождения точкой пути от ее крайнего положения до положения равновесия.

Решение.

Общий вид уравнения гармонических колебаний:

$$x = A\cos\left(\omega_0 t + \varphi_0\right), \tag{1}$$

где x – смещение материальной точки от положения равновесия; A – амплитуда колебаний; ω_0 – циклическая частота; φ_0 – начальная фаза.

Из сравнения уравнения (1) с заданным в условии задачи получаем следующие данные:

$$A = 0{,}1\text{м};\ \omega_0 = 50\ \pi\ c^{-1};\ \varphi_0 = 0^\circ.$$

Скорость, м/с, колеблющейся точки

$$\upsilon = \dot{x} = -0{,}1\cdot 50\ \pi\sin\left(50\ \pi t\right),$$

или

$$\upsilon = -15{,}7\sin\left(50\ \pi t\right),\ \text{м/с} \tag{2}$$

Ускорение точки:

$$a = \dot{\upsilon} = -15{,}7\cdot 50\ \pi\cos\left(50\ \pi t\right)$$

или

$$a = -2{,}46\cdot 10^3\cos\left(50\pi t\right),\ \text{м/с}^2. \tag{3}$$

Зная, что максимальные значения синуса и косинуса: $\sin\varphi = \pm 1$; $\cos\varphi = \pm 1$, получаем максимальные значения скорости и ускорения из уравнений (2) и (3):

$$\upsilon_{\max} = 15{,}7\ \text{м/с};\ a_{\max} = 2{,}46\cdot 10^3\ \text{м/с}^2.$$

Средняя скорость за время t определяется соотношением $<\upsilon> = S/t$, где S – пройденный путь.

При движении точки от крайнего положения до положения равновесия $S = A$, а время $t = T/4$, где T – период колебаний, определяемый как $T = 2\pi/\omega_0$, следовательно,

$$<\upsilon> = \frac{4A}{T} = \frac{4A\omega_0}{2\pi} = \frac{2A\omega_0}{\pi};$$

$$<\upsilon> = \frac{2\cdot 0{,}1\,\text{м}\cdot 50\pi\, c^{-1}}{\pi} = 10\ \text{м/с}.$$

Среднее ускорение

$$<a> = \frac{\Delta\upsilon}{t},$$

где $\Delta\upsilon = (\upsilon - \upsilon_0)$ – изменение скорости за время t.

В крайнем положении скорость точки $\upsilon = 0$ м/с, а в положении равновесия $\upsilon = \upsilon_{\max}$.

Тогда

$$<a> = \frac{\upsilon_{\max}}{t} = \frac{4\,\upsilon_{\max}}{T} = \frac{2\,\upsilon_{\max}\,\omega_0}{\pi};$$

$$<a> = \frac{2\cdot 15{,}7\cdot 50\pi}{\pi} = 1{,}57\cdot 10^3\ \text{м/с}^2.$$

Ответ: $\upsilon = -15{,}7\sin(50\pi t)$ м/с; $a = -2{,}46\cdot 10^3\cos(50\pi t)$, м/с^2; $\upsilon_{\max}$ = = 15,7 м/с; $a_{\max} = 2{,}46\cdot 10^3$ м/с^2; $<\upsilon> = 10$ м/с; $<a> = 1{,}57\cdot 10^3$ м/с^2.

Задача 5. Материальная точка совершает гармонические колебания по закону $x = 0{,}8\sin\left(5\pi t + \frac{\pi}{2}\right)$ (все величины выражены в единицах СИ). Определите смещение точки x_1 и фазу колебаний φ_1 в момент времени t_1 = 1,5 с от начала колебаний. Найдите минимальный промежуток времени после начала колебаний, когда она пройдет положение равновесия.

Решение.

Сопоставляя заданное уравнение

$$x = 0{,}8\sin\left(5\pi t + \frac{\pi}{2}\right) \tag{1}$$

с уравнением гармонических колебаний в общем виде:

$$x = A\sin\left(\omega_0 t + \varphi_0\right), \qquad (2)$$

получаем характеристики данного гармонического колебания: амплитуда $A = 0{,}8$ м, циклическая частота $\omega_0 = 5\pi$ с$^{-1}$, начальная фаза $\varphi_0 = \dfrac{\pi}{2}$.

Период колебаний T и циклическая частота ω_0 связаны соотношением $T = 2\pi/\omega_0$; $T = \left(2\pi/5\pi\right) = 0{,}4$ с.

Фаза колебаний $\varphi = \left(\omega_0 t + \varphi_0\right)$, через время t_1 = 1,5 с она будет равна $\varphi_1 = \left(5\pi \cdot 1{,}5 + \dfrac{\pi}{2}\right) = 8\pi$ рад.

Смещение x_1 материальной точки в момент времени t_1: $x_1 = A\sin\varphi_1$, $x_1 = 0{,}8\sin 8\pi = 0$, т. е. точка проходит положение равновесия.

При прохождении материальной точкой положения равновесия уравнение (1) примет вид:

$$0 = 0{,}8\sin\left(5\pi t + \frac{\pi}{2}\right),$$

откуда следует:

$$\sin\left(5\pi t + \frac{\pi}{2}\right) = 0; \quad 5\pi t + \frac{\pi}{2} = n\pi \quad \Rightarrow \quad t = \frac{1}{5}\left(n - \frac{1}{2}\right),$$

где $n = 1, 2, 3...$ – целые числа.

Минимальный промежуток времени, через который материальная точка первый раз пройдет положение равновесия, находим при $n = 1$:

$$t_2 = \frac{1}{5}\left(1 - \frac{1}{2}\right) = 0{,}1 \text{ с.}$$

Ответ: $x_1 = 0$; $\varphi_1 = 8\pi$ рад; $t_2 = 0{,}1$ с.

Задача 6. Запишите уравнение гармонического колебания, график которого представлен на рис. 1.3.

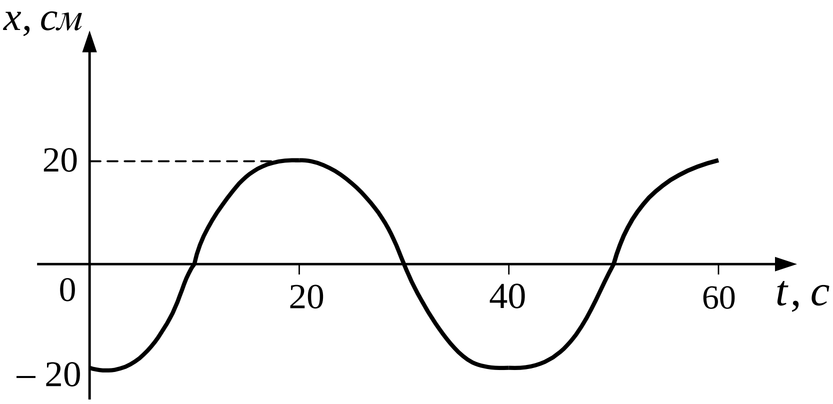


Рис. 1.3

Решение.

Общий вид уравнения гармонических колебаний:

$$x = A\sin\left(\omega_0\, t + \varphi_0\right), \tag{1}$$

где x – смещение материальной точки от положения равновесия; A – амплитуда колебаний; ω_0 – циклическая частота; φ_0 – начальная фаза.

Из графика находим амплитуду A (максимальное смещение от положения равновесия) и период колебаний T (минимальный промежуток времени, через который колебания повторяются): A = 20 см = 0,2 м; T = 40 с.

Циклическая частота $\omega_0 = \dfrac{2\pi}{T}$, $\omega_0 = \dfrac{2\pi}{40\text{ с}} = 0{,}05\text{ с}^{-1}$.

В начальный момент времени (t = 0) координата равна амплитуде колебаний $x = -0{,}2$ м $= -A$ тогда из уравнения колебаний получаем $-A = A\sin\varphi_0$,

откуда следует $\sin\varphi_0 = -1$; $\varphi_0 = \arcsin\left(-1\right) = -\dfrac{\pi}{2}$.

Подставим значения A, ω_0, φ_0, м, в уравнение (1):

$$x = 0{,}2\sin\left(0{,}05\,\pi t - \frac{\pi}{2}\right).$$

Ответ: $x = 0{,}2\sin\left(0{,}05\pi t - \dfrac{\pi}{2}\right)$, м.

Задача 7. Колебания материальной точки происходят согласно уравнению (все величины заданы в единицах СИ):

$$x = 0{,}1\cos \pi\left(0{,}5t + 1\right).$$

Построить график ее движения за промежуток времени от t_1 = 0 до t_2 = 8 с.

Решение.

Из сопоставления уравнения

$$x = 0{,}1\cos \pi\left(0{,}5t + 1\right) = 0{,}1\cos\left(0{,}5\pi t + \pi\right)$$

с уравнением гармонических колебаний в общем виде

$$x = A\cos\left(\omega_0 t + \varphi_0\right),$$

получаем А = 0,1 м; $\omega_0 = 0{,}5\,\pi\, c^{-1}$; $\varphi_0 = \pi$ рад.

Период колебаний $T = \dfrac{2\pi}{\omega_0}$; $T = \dfrac{2\pi}{0{,}5\,\pi\, c^{-1}} = 4$ с.

По условию задачи нужно построить косинусоиду в пределах двух периодов (от $t_1 = 0$ до $t_2 = 8$ с), причем график будет смещен на π, т. е. в начальный момент времени $x = -A$ (рис. 1.4).

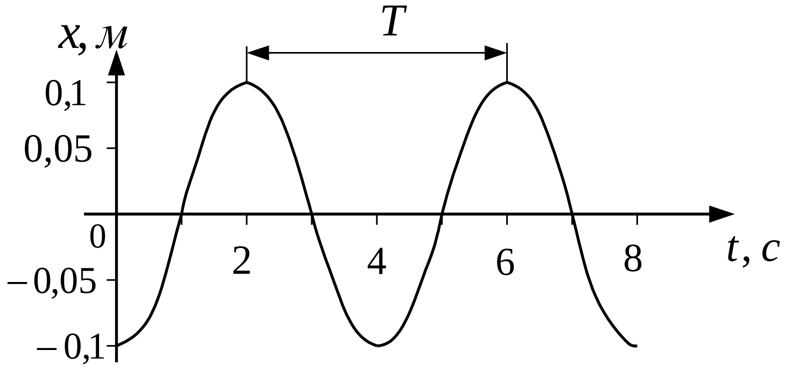


Рис. 1.4

Задача 8. За какую часть периода точка, совершающая гармоническое колебание, пройдет путь, равный: 1) половине амплитуды, если в начальный момент времени она находилась в положении равновесия; 2) одной трети амплитуды, если в начальный момент она находилась в крайнем положении?

Решение.

1. Свяжем начало координат с положением равновесия, укажем расстояние, равное амплитуде A (рис. 1.5).

Уравнение гармонических колебаний имеет вид:

$$x = A\sin\left(\omega_0 t + \varphi_0\right), \qquad (1)$$

где x – смещение материальной точки от положения равновесия; A – амплитуда колебаний; ω_0 – циклическая частота; φ_0 – начальная фаза.

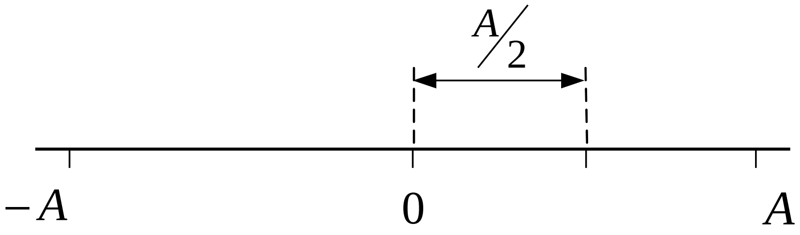


Рис. 1.5

Из начальных условий $x_0 = 0$ при $t_0 = 0$ следует, что $\varphi_0 = 0^\circ$.

Тогда уравнение (1) примет вид:

$$x = A\sin\left(\omega_0 t\right); \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{T},$$

откуда получаем: $x = A\sin\left(\dfrac{2\pi}{T}t\right)$.

По условию задачи путь $\ell_1 = x = \dfrac{A}{2}$, поэтому $\dfrac{A}{2} = A\sin\left(\dfrac{2\pi}{T}t\right)$, откуда получаем $\sin\left(\dfrac{2\pi}{T}t_1\right) = \dfrac{1}{2}$; $\dfrac{2\pi}{T}t_1 = \arcsin\left(\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{\pi}{6} \Rightarrow t_1 = \dfrac{\pi}{12}$.

2. В начальный момент времени $\left(t_0 = 0\right)$: $x = A$, тогда уравнение (1) примет вид: $A = A\sin\varphi_0 \Rightarrow \sin\varphi_0 = 1; \varphi_0 = \dfrac{\pi}{2}$.

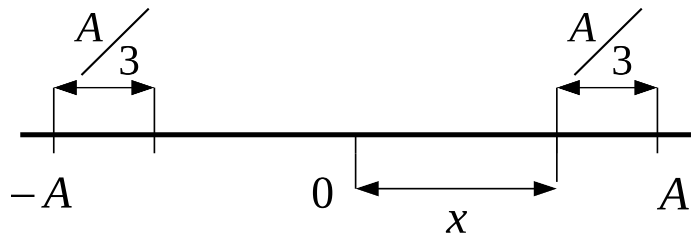


Рис. 1.6

Уравнение колебаний станет $x = A\sin\left(\frac{2\pi}{T}t_2 + \frac{\pi}{2}\right) = A\cos\left(\frac{2\pi}{T}t_2\right)$.

По условию задачи $\ell_2 = \frac{A}{3}$, из чертежа (рис. 1.6) видно, что $x = A - \frac{A}{3} = \frac{2}{3}A$, тогда получаем $\frac{2}{3}A = A\cos\left(\frac{2\pi}{T}t_2\right)$, откуда следует $\cos\left(\frac{2\pi}{T}t_2\right) = \frac{2}{3}$;

$\frac{2\pi}{T}t_2 = \arccos\frac{2}{3} = 0{,}27\pi$, поэтому $t_2 \approx 0{,}14\,T$.

Ответ: 1) $t_1 = \frac{T}{12}$; 2) $t_2 \approx 0{,}14\,T$.

Задачи для самостоятельного решения

1. Запишите уравнение гармонических колебаний материальной точки, амплитуда которых A = 15 см частота ν = 50 Гц Каковы максимальная скорость и максимальное ускорение колеблющейся точки? Начальная фаза колебаний φ_0 = 75°.

(Ответ: $\upsilon_{\max}$ = 47,1 м/с; $a_{\max}$ = 14,8·10^3 м/с^2).

2. Точка совершает колебания по закону $x = A\cos(\omega_0 t + \varphi_0)$. Начальная фаза колебаний $\varphi_0 = -\frac{9}{10}\pi$. Известно, что через время t = 1250 мс скорость точки была υ = 29,86 м/с. Период колебаний T = 1 с. Какова амплитуда колебаний? Определите смещение точки от положения равновесия и её ускорение через этот промежуток времени?

(Ответ: A = 5 м; x = 1545 м; a = –60,93 м/с^2).

3. Материальная точка совершает колебания по закону $x = 0{,}2\sin\left(\pi t + \frac{\pi}{2}\right)$.

Чему равен период T и начальная фаза колебаний φ_0? Каково смещение x_1 точки в момент времени $t_1 = 1$ с с момента начала колебаний? Через какой минимальный промежуток времени t_2 от начала колебаний материальная точка пройдет положение равновесия?

(Ответ: T = 2 с; $\varphi_0 = \frac{\pi}{2}$ рад; x_1 = –0,2 м; t_2 = 0,5 с).

4. Через какой минимальный промежуток времени t, считая от начала колебаний, смещение колеблющейся материальной точки составит одну треть амплитуды? Период колебаний T = 48 с, амплитуда колебаний A = 1,2 м. Какова средняя скорость точки $<\upsilon>$ за это время?

(Ответ: t = 9,6 с; $<\upsilon>$ = 0,04 м/с).

5. Запишите уравнение гармонического колебания материальной точки, амплитуда которого A = 5 см, если за t = 2 мин совершается N = 300 колебаний. Начальная фаза колебаний φ_0 = 45°. Начертите график этого колебания.

(Ответ: $x = 5\sin\left(5\pi t + \dfrac{\pi}{4}\right)$ см).

6. Материальная точка совершает гармонические колебания, амплитуда которых A = 5 см, период колебаний T = 4 с и начальная фаза $\varphi_0 = \pi/4$. Запишите уравнение колебаний. Чему равно смещение точки от положения равновесия при t_1 = 0 и t_2 = 1,5 с. Начертите график этого движения.

(Ответ: x_1 = 3,52 см; x_2 = 0).

7. Начертите на одном графике два гармонических колебания с одинаковыми амплитудами $A_1 = A_2 =$ 3 см и одинаковыми периодами $T_1 = T_2 =$ 8 с, начальные фазы которых $\varphi_{0_1} = \pi/4$ и $\varphi_{0_2} = \pi$. Запишите уравнения этих колебаний. Определите максимальную скорость и максимальное ускорение для каждого колебания.

(Ответ: $\upsilon_{\max_1} = \upsilon_{\max_2} =$ 0,024 м/с; $a_{\max_1} = a_{\max_2} =$ 0,018 м/с^2).

8. Через сколько времени от начала колебаний точка сместится от положения равновесия на одну четверть амплитуды? Период колебаний T = 24 с, начальная фаза равна нулю. Через какую долю периода скорость точки будет равна половине ее максимальной скорости?

(Ответ: t_1 = 0,96 с; t_2 = 4 с).

9. Материальная точка совершает колебания по закону $x = 7\sin\left(\dfrac{\pi}{2}t\right)$, см.

Через какой промежуток времени от начала движения точка проходит путь от положения равновесия до максимального смещения? Чему равны ее скорость и ускорение в этот момент времени?

(Ответ: t = 1 с; υ = 0; a = –17,3 м/с^2).

10. Уравнение движения точки $x = 2\sin\left(\frac{\pi}{2}t + \frac{\pi}{4}\right)$, см.

Чему равен период колебаний? Каковы максимальная скорость точки и максимальное ускорение? Постройте график этого движения.

(Ответ: T = 4 с; $\upsilon_{\max}$ = 3,14·10^{-2} м/с; $a_{\max}$ = 4,93·10^{-2} м/с^2).

11. Материальная точка совершает гармоническое колебание. Амплитуда колебаний A = 5 см, период колебаний T = 2 с и начальная фаза $\varphi_0 = \frac{\pi}{6}$. Найти скорость точки и ускорение её в момент времени, когда смещение точки от положения равновесия равно x = 2,5 см.

(Ответ: υ = 0,14 м/с; a = – 0,25 м/с^2).

12. Написать уравнение гармонических колебаний точки, если максимальное ускорение точки $a_{\max}$ = 0,493 м/с^2, период колебаний T = 2 с, смещение точки от положения равновесия в начальный момент времени x = 2,5 см.

(Ответ: $x = 0{,}05\sin\left(\pi t + \pi/6\right)$).

13. Материальная точка совершает гармонические колебания. При смещении точки от положения равновесия на x_1 = 2,4 см её скорость υ_1 = 3 см/с а при смещении, равном x_2 = 2,8 см скорость равна υ_2 = 2 см/с. Найти амплитуду и период этого колебания. Начальная фаза равна нулю.

(Ответ: A = 0,031 м; T = 4,1 с).

14. Точка совершает колебания по закону $x = A\cos\left(\omega_0 t + \varphi_0\right)$. Период колебаний T = 0,1 с, начальная фаза равна нулю. Смещение точки от положения равновесия через t = 13 мс равно x = 7 мм. Определите скорость и ускорение в этот момент времени.

(Ответ: υ = –0,46 м/с; a = –27,0 м/с^2).

15. Материальная точка совершает гармонические колебания по закону $x = A\sin\left(\omega_0 t + \varphi_0\right)$. Амплитуда колебаний A = 0,2 м, период равен T = 0,4 с. Запишите закон изменения скорости и ускорения точки, если известно, что через время t = 50 мс она сместилась от положения равновесия на максимальное расстояние. Определите максимальную скорость и максимальное ускорение точки.

(Ответ: υ = 3,14 cos (5πt + π/4) м/с; a = –49,3 sin (5πt + π/4) м/с^2; $\upsilon_{\max}$ = 3,14 м/с; $a_{\max}$ = 49,3 м/с^2).

16. Запишите уравнение движения точки, совершающей гармонические колебания с амплитудой A = 3 см и частотой ν = 5 Гц. Точка начинает движение из положения x_0 = 1,5 см. Найдите её положение в момент времени t = 2 с. Постройте график движения.

(Ответ: x = 1,5 см).

17. Определить начальную фазу колебаний тела, если через t = 0,25 с от начала движения смещение было равно половине амплитуды. Период колебаний T = 6 с.

(Ответ: $\varphi_0 = \pi/6$).

18. Точка совершает колебания по закону $x = A\sin(\omega_0 t + \varphi_0)$, где A = 4 см, $\omega_0 = \pi$ рад. Определите начальную фазу, если x_0 = 2 см и $\upsilon_0 < 0$. Построить график движения.

(Ответ: $\varphi_0 = \frac{5}{6}\pi$).

19. Материальная точка совершает колебания по закону $x = A\cos(\omega_0 t + \varphi_0)$, где $A = 2$ см; $\omega_0 = \pi$ рад; $\varphi_0 = \pi/4$. Определить максимальную скорость и максимальное ускорение точки. Построить графики зависимости от времени: 1) смещения $x(t)$; 2) скорости $\upsilon(t)$; 3) ускорения $a(t)$.

(Ответ: $\upsilon_{\max}$ = 6,28 см/с; $a_{\max}$ = 19,72 см/с^2).

20. Материальная точка совершает колебания согласно уравнению $x = A\sin(\omega_0 t + \varphi_0)$. В какой-то момент времени смещение точки x_1 = 15 см. При возрастании фазы колебаний в два раза смещение оказалось равным x_2. = 24 см. Определить амплитуду A колебаний.

(Ответ: A = 25 см).

21. Материальная точка, совершающая гармонические колебания с частотой ν = 1 Гц в момент времени t = 0 проходит положение, определяемое координатой x_0 = 5 см, со скоростью υ_0 = 15 см/с. Определить амплитуду A колебаний.

(Ответ: A = 5,54 см).

22. Скорость материальной точки, совершающей гармонические колебания, задается уравнением $\upsilon(t) = -6\sin 2\pi t$. Записать зависимость смещения этой точки от времени.

(Ответ: $x(t) = \frac{3}{\pi}\cos 2\pi t$).

23. Написать уравнение гармонического колебания точки, если его амплитуда A = 15 см, максимальная скорость колеблющейся точки $\upsilon_{\max}$ = 30 см/с, начальная фаза $\varphi_0 = 10°$.

(Ответ: $x = 0{,}15\cos\left(2t + \frac{\pi}{18}\right)$, м).

24. Гармонические колебания описываются уравнением $x = 0{,}05\cos\left(5\pi t + \frac{\pi}{3}\right)$, м.

Определить: 1) период колебаний; 2) максимальную скорость; 3) максимальное ускорение.

(Ответ: T = 0,4 с; $\upsilon_{\max}$ = 31,4 см/с; $a_{\max}$ = 4,8 м/с^2).

25. Записать уравнение гармонического колебательного движения точки, совершающей колебания с амплитудой A = 8 см, если за время t = 1 мин происходит n = 20 колебаний и начальная фаза колебаний $\varphi_0 = 45°$. Начертить график этого движения в пределах двух периодов.

26. Точка совершает гармонические колебания с периодом T = 6 с и начальной фазой, равной нулю. Определить, за какое время, считая от начала движения, точка сместится от положения равновесия на 0,25 A (A – амплитуда колебаний).

(Ответ: t = 0,24 с).

27. Уравнение колебаний материальной точки имеет вид: $x = A\cos\omega_0(t+\tau)$, где A = 4 см; $\omega_0 = \pi$ рад; τ = 0,2 с. Определить период T и начальную фазу φ_0 колебаний. Начертите график колебательного движения в пределах двух периодов.

(Ответ: T = 2 с; $\varphi_0 = 36°$).

29. Точка совершает гармонические колебания с амплитудой A = 4 см и периодом T = 2 с. Написать уравнение колебаний, считая, что в начальный момент времени смещение $x_0 = 0$ и $\upsilon_0 < 0$. Определить фазу φ колебаний для случая, когда смещение $x = 1$см и $\upsilon_0 > 0$.

(Ответ: $\varphi = 5\pi/3$ рад).

30. Точка совершает гармонические колебания с амплитудой A = 4 см и периодом T = 2 с. Написать уравнение колебаний, считая, что в начальный момент времени смещение $x_0 = 0$ и $\upsilon_0 < 0$. Определить фазу φ колебаний для случая, когда скорость υ = –6 см/с и $x < 0$.

(Ответ: $\varphi = 0{,}842$ рад).

1.1.2. Динамика гармонических колебаний

Методические рекомендации

1. При колебательных процессах на материальную точку действует, согласно второму закону Ньютона, возвращающая сила $F=-ma=-m\omega_0^2 x$, модуль которой пропорционален смещению точки из положения равновесия, а направление силы противоположно смещению. Такая сила называется ***квазиупругой***.

Независимо от природы этой силы циклическая частота и период колебаний определяются по формулам.

2. Колебания кинетической и потенциальной энергии происходят по гармоническому закону с амплитудой $\frac{m\omega_0^2 A^2}{4}$ и частотой $2\omega_0$ (учитывая формулы математики $\sin^2(\omega_0 t+\varphi_0)=\frac{1}{2}\left[1-\cos 2(\omega_0 t+\varphi_0)\right]$, $\cos^2(\omega_0 t+\varphi_0)=$ $=\frac{1}{2}\left[1+\cos 2(\omega_0 t+\varphi_0)\right]$). Эти колебания зависят от времени.

3. Гармонические колебания кинетической и потенциальной энергии происходят в противоположных фазах. Полная энергия (сумма кинетической и потенциальной) с течением времени не меняется и равна максимальным значениям кинетической и потенциальной энергий $\frac{m\omega_0^2 A^2}{2}$.

4. Средние за период значения кинетической и потенциальной энергий совпадают. Они равны

$$<W_k>=<W_p>=\frac{1}{2}W,$$

где W – полная механическая энергия.

5. Формула (1.14) периода колебаний математического маятника используется только в том случае, если он покоится или движется горизонтально или вертикально равномерно и прямолинейно. Если маятник движется вниз с ускорением a (или вверх с замедлением) период колебаний будет определяться соотношением

$$T=2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g-a}}.$$

При движении вверх с ускорением a (или вниз с замедлением) период колебаний маятника

$$T=2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g+a}}.$$

В случае движения математического маятника с ускорением a в горизонтальном направлении, период его колебаний

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{\sqrt{g^2 + a^2}}}.$$

6. Если маятник не является ни математическим, ни пружинным, то решение задачи лучше всего начать с записи равнодействующей всех сил, действующих на него, и применения второго закона Ньютона. Если равнодействующая является квазиупругой силой, то, применяя формулу $F = -ma = -m\omega_0^2 x$, можно определить циклическую частоту ω_0. Кроме того, для решения задачи можно также использовать закон сохранения механической энергии.

Примеры решения задач

Задача 1. Груз массой m = 0,25 кг, подвешенный к пружине, совершает колебания по закону $x = 0{,}1\cos 2\pi t$ (все величины выражены в единицах СИ). Определить: 1) коэффициент жесткости k пружины; 2) смещение груза в момент времени t = 0,1 с; 3) силу F, действующую на груз в этот момент времени; 4) полную энергию W колеблющейся системы.

Решение.

1. Коэффициент жесткости пружины определяется соотношением $k = m\omega_0^2$, где m – масса груза; ω_0 – циклическая частота.

Уравнение гармонических колебаний груза на пружине в общем виде $x = A\cos\left(\omega_0 t + \varphi_0\right)$ сравним с заданным в условии задачи и определим амплитуду A = 0,1 м и циклическую частоту $\omega_0 = 2\pi$ с$^{-1}$.

Тогда k = 0,25 (2·3,14)^2 = 9,86 Н/м.

2. Смещение груза найдем, подставляя в заданное уравнение числовые значения величин: $x = 0{,}1\cos\left(2\pi \cdot 0{,}1\right) = 0{,}08$ м.

3. На пружинный маятник действует сила упругости, определяемая по закону Гука: $F = -kx$. Следовательно, $F = -9{,}86 \cdot 0{,}08 = 0{,}79$ Н.

4. Полная механическая энергия колеблющейся системы определяется выражением

$$W = \frac{m\omega_0^2 A^2}{2} = \frac{kA^2}{2}; \quad W = \frac{9{,}86 \cdot 0{,}01}{2} = 0{,}05 \text{ Дж.}$$

Ответ: 1) k = 9,86 Н/м; 2) x = 0,08 м; 3) F = –0,79 Н; 4) W = 0,05 Дж.

Задача 2. Математический маятник массой m = 0,2 кг совершает гармонические колебания с амплитудой A = 0,1 м. Длина маятника ℓ = 1 м, начальная фаза колебаний φ_0 = 0°. Записать уравнение гармонических колебаний. Определить смещение груза от положения равновесия в тот момент времени, когда на него действует сила F = 0,1 Н.

Решение.

Общий вид уравнения гармонических колебаний

$$x = A\cos\left(\omega_0 t + \varphi_0\right),$$

где x – смещение материальной точки от положения равновесия; A – амплитуда колебаний; ω_0 – циклическая частота; φ_0 – начальная фаза.

По условию задачи A = 0,1 м, φ_0 = 0°. Циклическая частота колебаний математического маятника определяется соотношением $\omega_0 = \sqrt{\dfrac{g}{\ell}}$, где g – ускорение свободного падения, g = 9,8 м/с^2;

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{9{,}8\ \text{м/с}^2}{1\text{м}}} \approx 3{,}14\ \text{с}^{-1} = \pi\ \text{с}^{-1}.$$

Уравнение колебаний принимает следующий вид:

$$x = 0{,}1\cos \pi t.$$

Определим момент времени, когда F = 0,1 Н. По второму закону Ньютона ускорение равно $a = F/m$, с другой стороны,

$$a = \ddot{x} = -0{,}1\pi^2 \cos \pi t.$$

Из последних двух формул получаем

$$F/m = -0{,}1\pi^2 \cos \pi t$$

или, подставляя числовые значения,

$$0{,}1/0{,}2 = -0{,}1\pi^2 \cos \pi t,$$

откуда получаем

$$\cos \pi t = -0{,}5 \quad \Rightarrow \quad t = \frac{2}{3}\ \text{с}.$$

Смещение груза

$$x = 0{,}1\cos\frac{2\pi}{3} = -0{,}05\ \text{м}.$$

Ответ: $x = 0{,}1\cos\frac{2\pi}{3} = -0{,}05$ м.

Задача 3. Определить частоту ν колебаний материальной точки массой m = 10 г, если максимальная сила, действующая на точку, равна $F_{\max}$ = 0,01 Н. Амплитуда колебаний A = 10 см.

Решение.

Общий вид уравнения гармонических колебаний

$$x = A\cos\left(\omega_0 t + \varphi_0\right),$$

где x – смещение материальной точки от положения равновесия; A – амплитуда колебаний; ω_0 – циклическая частота; φ_0 – начальная фаза.

Сила, действующая на точку, определяется по второму закону Ньютона

$$F = ma,$$

где

$$a = \ddot{x} = -A\omega_0^2\cos\left(\omega_0 t + \varphi_0\right) = -\omega_0^2 x,$$

тогда

$$F = -mA\omega_0^2\cos\left(\omega_0 t + \varphi_0\right),$$

максимальное значение сила будет иметь при $\cos\left(\omega_0 t + \varphi_0\right) = \pm 1$, т. е. $F_{\max} = mA\omega_0^2$, откуда получаем

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{F_{\max}}{mA}}.$$

Частота

$$\nu = \frac{\omega_0}{2\pi}; \quad \nu = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{F_{\max}}{mA}}.$$

$$\nu = \frac{1}{6{,}28}\sqrt{\frac{0{,}01\,\text{Н}}{0{,}01\,\text{кг}\cdot 0{,}1\,\text{м}}} = 0{,}5\ \text{Гц}.$$

Ответ: $\nu = 0{,}5$ Гц.

Задача 4. Математический маятник длиной ℓ = 49 см совершает колебания вблизи вертикальной стенки. Под точкой подвеса маятника на расстоянии $\ell/4$ (рис. 1.7) от неё в стенку забит гвоздь. Найти период колебаний маятника.

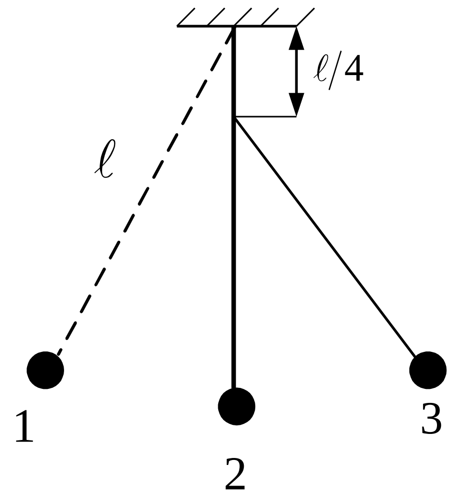


Рис. 1.7

Решение.

Период колебаний маятника (время одного полного колебания) определяется как $T = t_1 + t_2$, где t_1 – время движения маятника слева от вертикали, а t_2 – время его движения справа от вертикали.

Время движения маятника из т. 1 в т. 2 равно $t_1 = T_1/2$, где T_1 – период колебаний математического маятника длиной ℓ; $T_1 = 2\pi\sqrt{\dfrac{\ell}{g}}$.

Справа от вертикали маятник имеет длину $\ell_2 = \dfrac{3}{4}\ell$ и его время движения будет $t_2 = T_2/2$, где

$$T_2 = 2\pi\sqrt{\frac{\ell_2}{g}} = 2\pi\sqrt{\frac{3\ell}{4g}} = \pi\sqrt{\frac{3\ell}{g}}; \quad t_2 = \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{3\ell}{g}}.$$

Тогда

$$T = \pi\sqrt{\frac{\ell}{g}} + \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{3\ell}{g}} = \pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}\left(1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\right).$$

$$T = 3{,}14\sqrt{\frac{0{,}49\text{ м}}{9{,}8\text{ м/с}^2}}\left(1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \approx 1{,}3\text{ с}.$$

Ответ: $T \approx 1{,}3$ с.

Задача 5. Секундный маятник совершает колебания в движущемся с ускорением лифте. Куда движется лифт и чему равно его ускорение a, если за время $t = 15$ с маятник делает $N = 10$ колебаний?

Решение.

По условию задачи период колебаний маятника в неподвижном лифте $T_0 = 1$ с, а в движущемся лифте $T = \dfrac{t}{N}$, $T = \dfrac{15}{10} = 1{,}5$ с, т. е. $T > T_0$.

Так как длина маятника не меняется, то из формул:

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g_0}} \qquad (1)$$

и

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}} \qquad (2)$$

следует, что $g < g_0$. Лифт движется с ускорением, причем, $g_0 - g = a$, поэтому

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g_0 - a}}\,, \qquad (3)$$

где g_0 = 9,8 м/с^2.

Поделим (1) на (3), из полученного выражения находим ускорение a:

$$\frac{T_0}{T} = \sqrt{\frac{g_0 - a}{g_0}} \quad \Rightarrow \quad a = g_0\left(1 - \left(\frac{T_0}{T}\right)^2\right);$$

$$a = 9{,}8\left(1 - \left(\frac{1}{1{,}5}\right)^2\right) = 5{,}4 \text{ м/с}^2.$$

Ответ: $a = 5{,}4$ м/с^2.

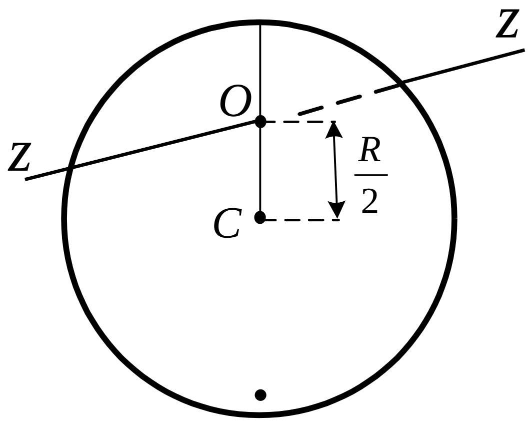


Рис. 1.8

Задача 6. Определить период T простых гармонических колебаний диска радиусом R = 20 см около горизонтальной оси, проходящей через середину радиуса диска перпендикулярно его плоскости (рис. 1.8).

Решение.

Диск, совершающий колебания около горизонтальной оси zz, представляет собой физический маятник, период колебаний которого определяется соотношением

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{J}{mgd}}\,,$$

где J – момент инерции маятника относительно оси, проходящей через точку подвеса; m – масса диска; g – ускорение свободного падения на поверхности Земли (g_0 = 9,8 м/с^2); d – расстояние от оси вращения (т. О) до центра инерции (т. С), $d = R/2$.

По теореме Штейнера

$$J = J_C + md^2,$$

где J_C – момент инерции диска (сплошного цилиндра) относительно центра инерции, $J_C = \frac{mR^2}{2}$.

Следовательно,

$$J = \frac{mR^2}{2} + \frac{mR^2}{4} = \frac{3}{4}mR^2.$$

Тогда период колебаний равен

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{3mR^2}{4mg\left(R/2\right)}} = 2\pi\sqrt{\frac{3R}{2g}};$$

$$T = 2\cdot 3{,}14\sqrt{\frac{3\cdot 0{,}2\text{ м}}{2\cdot 9{,}8\text{ м/с}^2}} = 1{,}1\text{ с}.$$

Ответ: $T = 1{,}1$ с.

Задача 7. На стержне длиной ℓ = 30 см укреплены два одинаковых грузика: один – в середине стержня, другой – на одном из его концов (рис. 1.9). Стержень с грузами колеблется около горизонтальной оси, проходящей через свободный конец стержня. Определить приведенную длину L и период T простых гармонических колебаний данного физического маятника. Массой стержня пренебречь.

Решение.

Приведенная длина L физического маятника определяется соотношением

$$L = \frac{J}{Md},$$

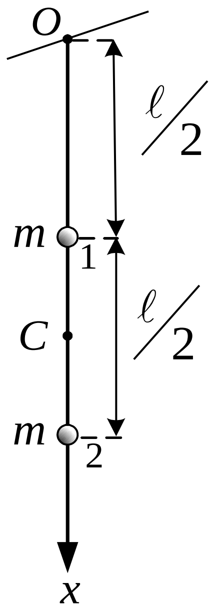


Рис. 1.9

где J – момент инерции системы, $J = J_1 + J_2$ (J_1, J_2 – моменты инерции первого и второго грузов соответственно относительно оси вращения (т. О); $M = 2m$ – суммарная масса грузиков (m – масса одного грузика); d – расстояние от оси вращения до центра инерции (центра масс).

Моменты инерции грузов определяем как для материальных точек:

$$J_1 = m\left(\frac{\ell}{2}\right)^2; \quad J_2 = m\ell^2.$$

Следовательно,

$$J = \frac{m\ell^2}{4} + m\ell^2 = \frac{5}{4}m\ell^2.$$

Определим положение центра инерции системы. Для этого проведем вдоль стержня вниз ось ох с началом в т. О.

Координаты грузиков будут равны: $x_1 = \ell/2$; $x_2 = \ell$.

Координата центра инерции

$$x_C = \frac{m_1x_1 + m_2x_2}{2m} = \frac{m\left(x_1 + x_2\right)}{2m} = \frac{x_1 + x_2}{2};$$

$$x_C = \frac{0{,}5\ell + \ell}{2} = \frac{3}{4}\ell \quad \Rightarrow \quad d = \frac{3}{4}\ell.$$

Приведенная длина

$$L = \frac{5m\ell^2/4}{2m\left(3\ell/4\right)} = 5\ell/6.$$

Период колебаний физического маятника

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{J}{mgd}} = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}.$$

Вычисления дают:

$$L = 0{,}25\text{ м}; \quad T \approx 1\text{с}.$$

Ответ: $L = 0{,}25$ м; $T \approx 1$с.

Задача 8. Деревянный брусок массой m с площадью основания S плавает в воде. Брусок слегка погрузили в воду глубже и отпустили (рис. 1.10). Найти частоту колебаний бруска. Силой трения пренебречь. Плотность воды ρ.

Решение.

Условие плавания бруска

$$F_A = mg\,, \tag{1}$$

где F_A – архимедова (выталкивающая) сила, действующая на плавающий в воде брусок,

$$F_A = \rho g V\,, \tag{2}$$

где V – объём погруженной части бруска.

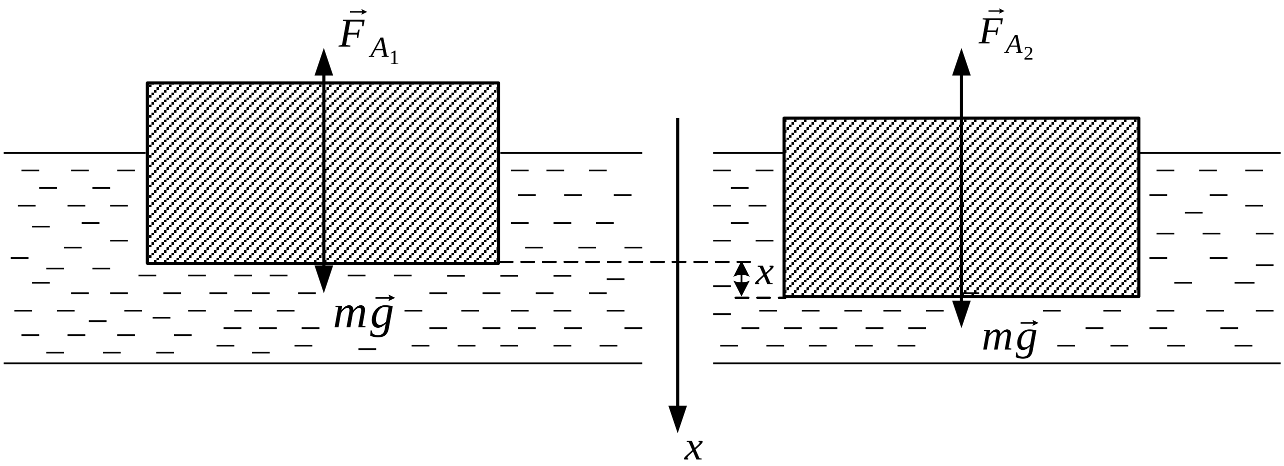


Рис. 1.10

При дополнительном погружении бруска на глубину $h = x$ объём погруженной части увеличится на $\Delta V = xS$ и станет равным $V_1 = V + xS$.

Соответственно увеличится выталкивающая сила, она примет значение

$$F_{A_1} = \rho g V_1 = \rho g\left(V + xS\right), \tag{3}$$

т. е. $F_{A_1} > mg$, поэтому равновесие нарушится, результирующая двух сил будет (в проекциях на ось ох)

$$F_X = mg - F_{A_1} = mg - \rho g\left(V + xS\right). \tag{4}$$

Равнодействующая сила направлена вверх и выталкивает брусок из воды. Под действием этой силы брусок начнет совершать колебания.

Из формул (1), (2) и (4) получаем

$$F_X = \rho g V - \rho g\left(V + xS\right) = -\rho g S x\,. \tag{5}$$

Введем обозначение

$$\rho g S = k \tag{6}$$

(эта величина для данной системы постоянна), тогда соотношение (5) принимает следующий вид:

$$F_X = -kx, \tag{7}$$

т. е. брусок совершает движения под действием квазиупругой силы. Следовательно, период его колебаний можно вычислить по формуле

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} \tag{8}$$

или, подставив значение k из формулы (6), получим

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{\rho g S}}\,. \tag{9}$$

Частота ν и период T связаны обратно пропорциональной зависимостью, поэтому

$$\nu = \frac{1}{2\pi}\frac{\rho g S}{m}.$$

Ответ: $\nu = \dfrac{1}{2\pi}\dfrac{\rho g S}{m}$.

Задача 9. Чему равно отношение кинетической энергии точки, совершающей гармонические колебания, к её потенциальной энергии для моментов времени: 1) $t = (T/12)$ с; 2) $t = (T/4)$ с; 3) $t = (T/6)$ с. Начальная фаза $\varphi_0 = 60°$.

Решение.

Уравнение гармонических колебаний материальной точки

$$x = A\cos(\omega_0 t + \varphi_0),$$

где x – смещение материальной точки от положения равновесия; A – амплитуда колебаний; ω_0 – циклическая частота; φ_0 – начальная фаза.

Кинетическая энергия точки определяется соотношением

$$W_k = \frac{m\upsilon^2}{2},$$

где m – масса точки; υ – скорость точки.

По определению

$$\upsilon = \dot{x} = A\omega_0\sin(\omega_0 t + \varphi_0),$$

тогда

$$W_k = \frac{m\upsilon^2}{2} = \frac{m\omega_0^2 A^2}{2}\sin^2\left(\omega_0 t + \varphi_0\right).$$

Потенциальная энергия колеблющейся точки:

$$W_p = -\int_0^x F\,dx = \frac{m\omega_0^2 x^2}{2} = \frac{m\omega_0^2 A^2}{2}\cos^2\left(\omega_0 t + \varphi_0\right).$$

Отношение энергий будет

$$\frac{W_k}{W_p} = \frac{\sin^2\left(\omega_0 t + \varphi_0\right)}{\cos^2\left(\omega_0 t + \varphi_0\right)} = tg^2\left(\omega_0 t + \varphi_0\right).$$

Циклическая частота ω_0 и период T связаны соотношением

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T},$$

тогда

$$\frac{W_k}{W_p} = tg^2\left(\frac{2\pi}{T}t + \frac{\pi}{4}\right).$$

Вычисления:

1) $\frac{W_k}{W_p} = tg^2\left(\frac{2\pi}{T}\frac{T}{12} + \frac{\pi}{4}\right) = tg^2\left(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{4}\right) = tg^2\left(\frac{5\pi}{12}\right) = 0{,}33;$

2) $\frac{W_k}{W_p} = tg^2\left(\frac{2\pi}{T}\frac{T}{4} + \frac{\pi}{4}\right) = tg^2\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4}\right) = tg^2\left(\frac{3\pi}{4}\right) = 1;$

3) $\frac{W_k}{W_p} = tg^2\left(\frac{2\pi}{T}\frac{T}{6} + \frac{\pi}{4}\right) = tg^2\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4}\right) = tg^2\left(\frac{7\pi}{12}\right) = 14.$

Ответ: 1) $\frac{W_k}{W_p} = 0{,}33$; 2) $\frac{W_k}{W_p} = 1$; 3) $\frac{W_k}{W_p} = 14$.

Задача 10. На идеально гладком горизонтальном столе лежит шар массой M = 3 кг, прикрепленный к упругой пружине жесткостью k = 10^3 Н/м. В шар попадает пуля массой m = 8 г, имеющая в момент удара скорость υ_0 = 500 м/с, направленную вдоль оси пружины (рис. 1.11). Считая удар абсолютно неупругим и пре-

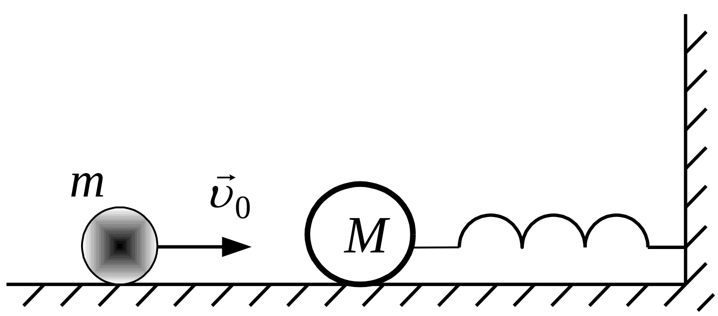


Рис. 1.11

небрегая сопротивлением и массой пружины, определить амплитуду колебаний шара.

Решение.

Для решения задачи воспользуемся законами сохранения импульса и энергии.

После попадания пули в шар, он вместе с пулей начинает двигаться со скоростью υ, т. е. приобретает кинетическую энергию

$$W_k = \frac{(m+M)\,\upsilon^2}{2},$$

которая при движении шара переходит в потенциальную энергию упруго-деформированной пружины

$$W_p = \frac{kA^2}{2}.$$

По закону сохранения механической энергии

$$\frac{(m+M)\,\upsilon^2}{2} = \frac{kA^2}{2},$$

откуда выразим амплитуду колебаний

$$A = \upsilon\sqrt{\frac{m+M}{k}}.$$

Скорость υ найдем из закона сохранения импульса для неупругого удара

$$m\upsilon_0 = (m+M)\,\upsilon \Rightarrow \upsilon = \frac{m\,\upsilon_0}{m+M},$$

тогда амплитуда будет

$$A = \frac{m\upsilon_0}{m+M}\sqrt{\frac{m+M}{k}} = \frac{m\upsilon_0}{\sqrt{k(m+M)}}.$$

Вычисления дают: A = 7,29 см.

Ответ: A = 7,29 см.

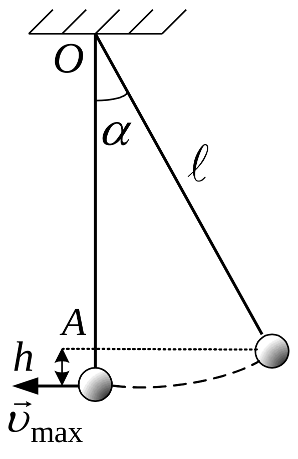


Рис. 1.12

Задача 11. Математический маятник массой m = 200 г отклонили от положения равновесия на угол α = 5° и отпустили (рис. 1.12). При этом он стал совершать колебания с частотой ν = 0,5 Гц. Найти запас потенциальной энергии $W_{p_{\max}}$, которую ему сообщили при отклонении, и максимальную скорость $\upsilon_{\max}$, с которой он проходит через положение равновесия. Сопротивление колебаниям отсутствует.

Решение.

Потенциальная энергия тела, поднятого на высоту h, определяется соотношением

$$W_{p_{\max}} = mgh.$$

Из рис. 1.12 следует:

$$h = \ell - |OA| = \ell - \ell\cos\alpha = \ell(1-\cos\alpha),$$

тогда

$$W_{p_{\max}} = mg\ell(1-\cos\alpha).$$

Длина маятника находится из формулы периода колебаний

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}} \Rightarrow \ell = \frac{gT^2}{4\pi^2}.$$

С другой стороны, период колебаний находится соотношением

$$T = \frac{1}{\nu} \Rightarrow \ell = \frac{g}{4\pi^2\nu^2} = \frac{g}{(2\pi\nu)^2}.$$

Следовательно,

$$W_{p_{\max}} = \frac{mg^2(1-\cos\alpha)}{(2\pi\nu)^2} = m\ (1-\cos\alpha)\left(\frac{g}{2\pi\nu}\right)^2.$$

По закону сохранения механической энергии

$$W_{k_{\max}} = W_{p_{\max}}; \qquad W_{k_{\max}} = \frac{m\upsilon_{\max}^2}{2} \Rightarrow \upsilon_{\max} = \sqrt{\frac{2W_{k_{\max}}}{m}},$$

или

$$\upsilon_{\max} = \frac{g}{2\pi\nu}\sqrt{2\ (1-\cos\alpha)}.$$

Ответ: $W_{p_{\max}} = m(1-\cos\alpha)\left(\frac{g}{2\pi\nu}\right)^2$; $\upsilon_{\max} = \frac{g}{2\pi\nu}\sqrt{2(1-\cos\alpha)}.$

Задачи для самостоятельного решения

1. Груз массой m = 0,5 кг, подвешенный к пружине, совершает колебания по закону $x = A\cos\omega t$. Определить смещение груза x в тот момент времени, когда сила, действующая на груз, достигает значения F = –5 Н. Амплитуда колебаний A = 0,1 м, коэффициент жесткости пружины k = 150 Н/м.

(Ответ: x = –0,033 м).

2. Материальная точка массой m = 100 г совершает колебания, уравнение которых имеет вид: $x = A\cos\omega t$, где A = 10 см, ω = 5 с$^{-1}$. Найти силу F, действующую на точку, для двух моментов времени: 1) когда фаза колебаний $\varphi = \pi/3$; 2) когда смещение точки равно максимальному значению.

3. Колебания материальной точки происходят согласно уравнению $x = A\cos\omega t$, где A = 8 см, ω = 5 с$^{-1}$. В момент, когда возвращающая сила в первый раз достигла значения F = 5 мН, потенциальная энергия точки стала равной W_p = 100 мкДж. Найти этот момент времени и соответствующую ему фазу колебаний.

4. К спиральной пружине подвесили груз, в результате чего пружина растянулась на x = 9 см. Каков будет период колебаний груза, если его немного оттянуть вниз и затем отпустить?

(Ответ: T = 0,6 с).

5. Материальная точка массой m = 10 г движется под действием силы $F = 2\cos\omega t$, мН, где $\omega = 2\pi$ с$^{-1}$. Определите максимальную кинетическую энергию материальной точки.

(Ответ: $T_{\max} \approx$ 5 мДж).

6. Груз, подвешенный к упругой пружине, колеблется по вертикали с амплитудой A = 8 см. Определить жесткость пружины, если известно, что максимальная кинетическая энергия груза $W_{k_{\max}}$ = 1 Дж. С какой частотой происходят колебания? Чему равна максимальная сила, действующая на груз? Масса груза m = 100 г.

(Ответ: k = 400 Н/м; ν = 101 Гц; $F_{\max}$ = 40 Н).

7. Маятниковые часы, точно идущие на уровне моря, подняты на высоту h = 500 м. На сколько отстанут они за время t_0 = 1 сут? Средний радиус Земли R = 6370 км. Маятник считать математическим.

(Ответ: Δt = 6,8 с).

8. Математический маятник состоит из шарика массой m = 50 г, подвешенного на нити длиной ℓ = 1 м. Определить наименьшую силу натяже-

ния нити, если шарик проходит через положение равновесия со скоростью υ = 1,4 м/с.

(Ответ: F = 0,4 Н).

9. Математический маятник, состоящий из стального шарика, диаметр которого d = 4 см и нити длиной ℓ = 2,43 м, совершает гармонические колебания с амплитудой A = 10 см. Определить скорость шарика при прохождении положения равновесия и наибольшее значение возвращающей силы. Плотность стали ρ = 7800 кг/м^3.

(Ответ: $\upsilon_{\max}$ = 0,2 м/с; $F_{\max}$ = 0,1 Н).

10. Ареометр массой m состоит из закрытого стеклянного сосуда с грузом и цилиндрической трубки, площадь поперечного сечения которой равна S. Он помещен в жидкость плотностью ρ. Ареометр погружают в жидкость несколько глубже, чем это нужно для его равновесия, и затем отпускают. Найти период свободных колебаний ареометра. Трением пренебречь.

(Ответ: $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{m}{\rho g S}}$).

11. На гладком горизонтальном столе находится в покое брусок массой M = 20 г, прикрепленный пружиной жесткостью k = 50 Н/м к стене (рис. 1.13). В брусок ударяется шарик массой m = 10 г, движущийся по столу со скоростью υ_0 = 30 м/с, направленной вдоль пружины. Считая соударение шарика и бруска абсолютно упругим, найти амплитуду колебаний бруска после удара. Время удара пренебрежимо мало по сравнению с периодом колебаний бруска.

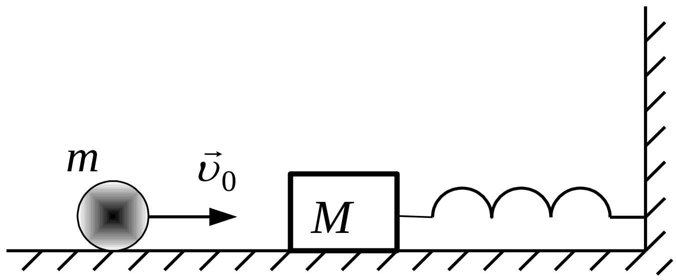


Рис. 1.13

(Ответ: A = 0,40 м).

12. На концах тонкого стержня длиной ℓ = 1 м и массой M = 200 г укреплены шарики малых размеров массами m_1 = 100 г и m_2 = 150 г. Стержень совершает колебания около горизонтальной оси, перпендикулярной стержню и проходящей через его середину. Определить период T колебаний стержня.

(Ответ: T = 3,5 с).

13. Однородный диск радиусом R = 30 см колеблется около горизонтальной оси, проходящей через одну из образующих цилиндрической поверхности диска. Каков период T его колебаний?

(Ответ: T = 3,5 с).

14. Тонкий однородный стержень длиной ℓ = 60 с может свободно вращаться вокруг горизонтальной оси, отстоящей на расстоянии x = 15 см от

его середины. Определить период T колебаний стержня, если он совершает малые колебания.

(Ответ: T = 3,5 с).

15. Если увеличить массу груза, подвешенного к спиральной пружине, на Δm = 600 г, то период колебаний груза возрастает в 2 раза. Определить массу первоначально подвешенного груза.

(Ответ: m = 0,2 кг).

16. К резиновому шнуру длиной ℓ = 40 см и радиусом r = 1 мм подвешено тело массой m = 500 г, которое совершает вертикальные колебания. Найти период T этих колебаний. Модуль Юнга резины E = 5 МПа.

(Ответ: T = 0,93 с).

17. Материальная точка совершает гармонические колебания, двигаясь без трения в поле сил тяжести по внутренней поверхности полусферы объемом V (рис. 1.14). Найти частоту ν колебаний точки.

(Ответ: $\nu = \dfrac{1}{2\pi}\sqrt{g\sqrt[3]{\dfrac{2\pi}{3V}}}$).

18. В U-образную трубку, площадь поперечного сечения которой S = 10 см^2, налита вода массой m = 200 г. Если воду вывести из положения равновесия (рис. 1.15), то она будет колебаться. Найти частоту ν колебаний. Плотность воды ρ.

(Ответ: ν = 2 Гц).

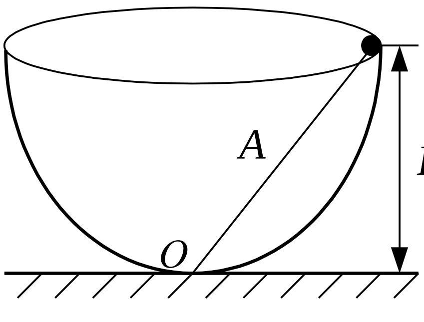


Рис. 1.14

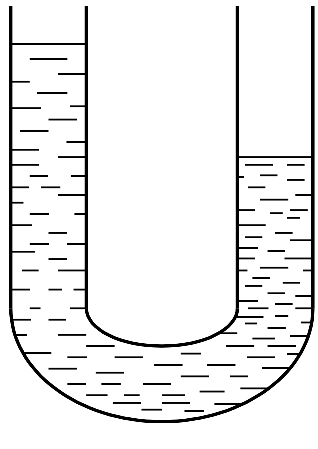


Рис. 1.15

19. Однородный сплошной деревянный цилиндр плавает в воде в вертикальном положении. Если цилиндр притопить и отпустить, то он будет совершать колебания, период которых T = 1 с. Определить высоту цилиндра. Плотность воды ρ_1 = 1000 кг/м^3, плотность дерева ρ_2 = 800 кг/м^3. Силу трения не учитывать.

(Ответ: h = 0,3 м).

20. На чашку, подвешенную на пружине жесткостью k (рис. 1.16), с высоты h падает груз массой m и остается на чашке (удар абсолютно неупругий). Определить амплитуду A колебаний. Массой чашки и пружины пренебречь.

(Ответ: $A = \frac{1}{k}\sqrt{(mg)^2 + 2mghk}$).

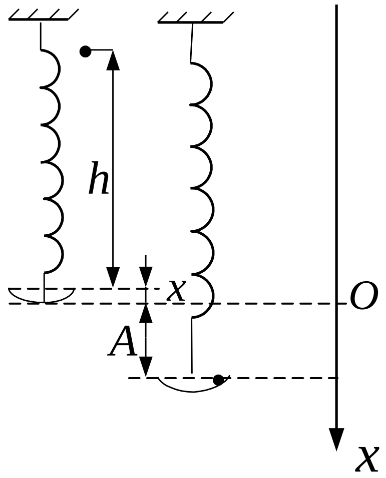


Рис. 1.16

21. Жесткость пружин рессоры вагона k = 4,81·10^5 Н/м. Масса вагона с грузом m = 6,4·10^4 кг. Вагон имеет n = 4 рессоры. При какой скорости υ вагон начнет сильно раскачиваться вследствие толчков на стыках рельсов, если длина рельса ℓ = 12,8 м?

(Ответ: υ = 11,2 м/с).

22. Маленький шарик на нити помещен в вертикальное электрическое поле и совершает колебания с периодом T = 0,314 с. С какой силой F действовало электрическое поле на шарик, если его масса m = 1 г, а период свободных колебаний T_0 = 0,626 с? Какова длина нити ℓ, на которой подвешен шарик?

(Ответ: F = 0,029 Н; ℓ = 0,098 м).

23. Медный стержень с диаметром поперечного сечения d подвешен за середину к пружине и совершает гармонические колебания в однородном магнитном поле индукцией $\vec{B}$. Вектор $\vec{B}$ направлен перпендикулярно плоскости колебаний. Полная механическая энергия колебаний стержня равна W. Определить максимальное значение эдс электромагнитной индукции $E_{\max}$, возбуждаемое в стержне в процессе его колебаний. Длина стержня ℓ.

(Ответ: $E_{\max} = \frac{B}{d}\sqrt{\frac{8W\ell}{\pi\rho}}$).

24. Математический маятник массой m, подвешенный на нити длиной ℓ, совершает гармонические колебания в однородном электрическом поле плоского воздушного конденсатора ($\varepsilon = 1$) с зарядом q на обкладках. Обкладки расположены вертикально, площадь обкладок S. Найти частоту колебаний ν этого маятника. Заряд маятника q_0.

(Ответ: $\nu = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{1}{\ell}\sqrt{g^2 + \left(\frac{qq_0}{\varepsilon\varepsilon_0 mS}\right)^2}}$).

25. Математический маятник массой m = 200 г отклонили от положения равновесия на угол α = 5° и отпустили (рис. 1.17). При этом он стал совершать колебания с частотой ν = 0,5 Гц. Найти запас потенциальной энергии $W_{p_{\max}}$, которую ему сообщили при отклонении, и максимальную кинетическую энергию $W_{k_{\max}}$, с которой он проходит через положение равновесия. Сопротивление колебаниям не учитывать.

(Ответ: $W_{k_{\max}}$ = $W_{p_{\max}}$ = 7,4·10^{-3} Дж).

26. Небольшой шарик массой m подвешенный на длинной нити, совершает колебания. Во сколько раз изменится частота колебаний шарика, если ему сообщить положительный заряд q и поместить в однородное электрическое поле плоского конденсатора, обкладки которого расположены горизонтально (рис. 1.18)? Расстояние между обкладками d , на них подано напряжение U .

(Ответ: $\frac{\nu_2}{\nu_1} = \sqrt{1 + \frac{qU}{mgd}}$).

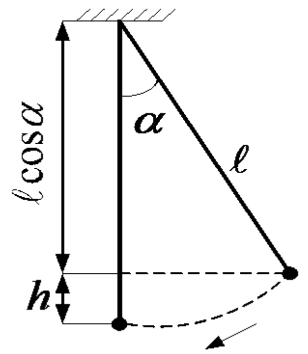


Рис. 1.17

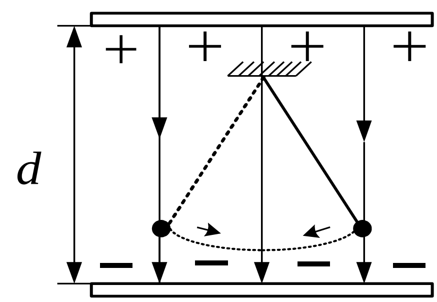


Рис. 1.18

27. Математический маятник массой m = 10 г колеблется согласно уравнению $x = 5\cos\left(\frac{\pi}{3}t + \frac{\pi}{4}\right)$. Найти максимальную силу $F_{\max}$, действующую на него, и его полную механическую энергию W . Чему равна длина маятника ℓ? Все величины выражены в единицах СИ.

(Ответ: $F_{\max}$ = 55 мН; W = 0,14 Дж; ℓ = 8,9 м).

28. Шарик радиусом r скатывается по сферической поверхности из точки A

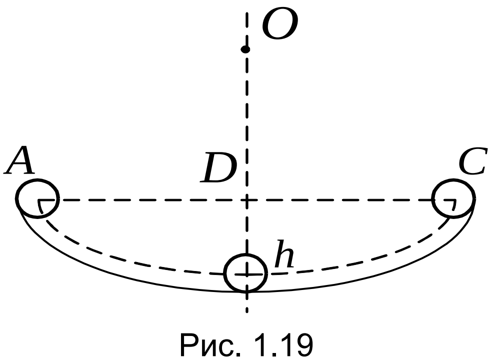


Рис. 1.19

(рис. 1.19). Определить радиус R кривизны поверхности, если $AD = a$, период колебаний шарика T.

(Ответ: $R = \frac{5}{7}\left(\frac{gT^2}{4\pi^2}\right) + \frac{a^2}{4\left(\frac{5gT^2}{74\pi^2}\right)^2} + r$).

29. Груз, неподвижно висящий на спиральной пружине, растянул её на x = 6,2 см. Затем груз оттянули вниз и отпустили, в результате чего он начал колебаться вдоль вертикальной линии. Определить период T колебаний груза.

(Ответ: T = 0,5 с).

30. Физический маятник в виде тонкого однородного стержня совершает гармонические колебания вокруг неподвижной оси, проходящей через точку подвеса O, находящуюся от центра масс C на расстоянии x = 28,9 см (рис. 1.20). Определите длину стержня, если циклическая частота колебаний максимальна.

(Ответ: ℓ = 1 м).

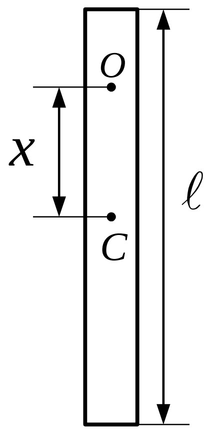


Рис. 1.20

1.1.3. Сложение колебаний

Методические рекомендации

1. При сложении колебаний для определения амплитуды и начальной фазы результирующего колебания применяются различные способы: аналитический (с применением формул тригонометрии), геометрический (метод векторных диаграмм), путем использования комплексной формы записи колебаний и др.

При сложении n ($n > 2$) колебаний одинакового направления и одинаковой частоты наиболее эффективным является метод векторных диаграмм, согласно которому амплитуду и начальную фазу результирующего колебания находят путем сложения векторов. Для этого из произвольной т. О на горизонтальной оси (рис. 1.21) откладываются вектора $\vec{A}_1, \vec{A}_2, \ldots$, модули которых равны амплитудам складываемых колебаний, под углами φ_1, φ_2, ... к оси Ox, равными начальным фазам этих колебаний. Амплитуда A результирующего колебания равна длине результирующего вектора $\vec{A}$, а угол φ определяется углом наклона этого вектора к оси (формулы (1.17), (1.18)).

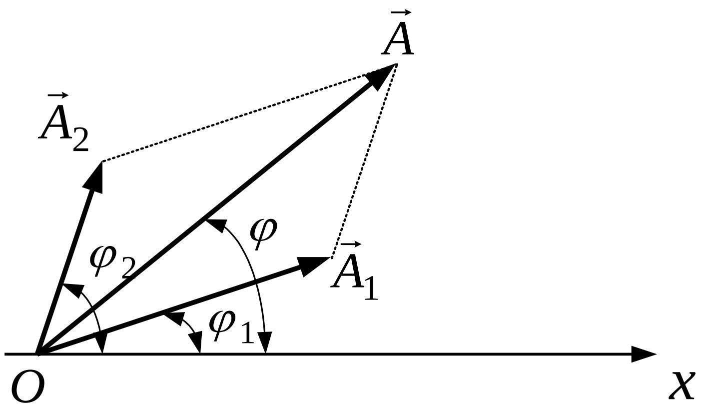


Рис. 1.21

2. Применение комплексной формы записи уравнений складывемых колебаний удобно в том случае, если тригонометрические преобразования достаточно громоздки, например, при сложении или дифференцировании. Действия над показательными функциями более просты, нежели с тригонометрическими.

Уравнения колебаний в комплексной форме имеют вид:

$$x_1 = A_1 e^{i(\omega_0 t + \varphi_1)};\quad x_2 = A_2\ e^{i(\omega_0 t + \varphi_2)}.$$

При сложении колебаний получаем

$$x = x_1 + x_2 = A_1\ e^{i(\omega_0 t + \varphi_1)} + A_2\ e^{i(\omega_0 t + \varphi_2)}.$$

Квадрат амплитуды результирующего колебания

$$A^2 = \left(A_1\ e^{i(\omega_0 t + \varphi_1)} + A_2\ e^{i(\omega_0 t + \varphi_2)}\right)\left(A_1\ e^{-i(\omega_0 t + \varphi_1)} + A_2\ e^{-i(\omega_0 t + \varphi_2)}\right) =$$

$$= A_1^2 + A_2^2 + A_1 A_2\ \left(e^{i(\varphi_2 - \varphi_1)} + e^{-i(\varphi_2 - \varphi_1)}\right).$$

По формуле Эйлера

$$e^{i\phi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$$

учитывая, что физический смысл имеет только действительная часть комплексного числа, получаем далее

$$A^2 = A_1^2 + A_2^2 + A_1 A_2 \cos\left(\varphi_2 - \varphi_1\right)t.$$

3. Если складываются колебания одного направления и одинаковыми начальными фазами, но с разными частотами, то амплитуда результирующего колебания будет определяться соотношением

$$A^2 = A_1^2 + A_2^2 + A_1 A_2 \cos\left(\omega_2 - \omega_1\right)t\ ,$$

т. е. она изменяется с течением времени, а, значит, результирующее колебание не является гармоническим.

4. При сложении гармонических колебаний с близкими частотами ω_1 и ω_2 ($\omega_2 = \omega_1 - \Delta\omega$, причем $\Delta\omega << \omega_1, \omega_2$) уравнение результирующего колебания будет

$$x = \left(2A\cos\frac{\Delta\omega}{2}t\right)\cos\omega_1 t$$

(предполагается, что амплитуды колебаний одинаковы и $\Delta\omega << \omega_1$).

Колебания амплитуды с частотой $\Delta\omega$ при сложении колебаний с близкими частотами называются ***биениями***. Амплитуда биений

$$A_б = \left|2A\cos\frac{\Delta\omega}{2}t\right|.$$

Период биений

$$T_б = \frac{2\pi}{\Delta\omega}.$$

5. Для определения траектории точки, участвующей в двух взаимно перпендикулярных колебаниях, необходимо из уравнений складываемых колебаний

$$x = A\sin(\omega_1 t + \varphi_1);\;\; y = B\sin(\omega_2 t + \varphi_2)$$

исключить время t.

❖ Если $\omega_1 = \omega_2$, то результирующей траекторией движения является эллипс, уравнение которого

$$\frac{x^2}{A^2} - \frac{2xy}{AB}\cos(\varphi_2 - \varphi_1) + \frac{y^2}{B^2} = \sin^2(\varphi_2 - \varphi_1).$$

При решении задач возможны частные случаи.

1. Разность фаз $(\varphi_2 - \varphi_1) = 0$.

Уравнение траектории

$$\left(\frac{x}{A} - \frac{y}{B}\right)^2 = 0 \;\;\Rightarrow\;\; y = \frac{B}{A}x.$$

Это уравнение прямой, проходящей через начало координат под углом α к оси ох ($tg\,\alpha = B/A$). Амплитуда колебаний определяется соотношением $C = \sqrt{A^2 + B^2}$.

2. Разность фаз $(\varphi_2 - \varphi_1) = \pm\pi$. Уравнение траектории – уравнение прямой – имеет вид:

$$\left(\frac{x}{A} + \frac{y}{B}\right)^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad y = -\frac{B}{A}x.$$

3. Разность фаз $(\varphi_2 - \varphi_1) = \pm\dfrac{\pi}{2}$.

Уравнение траектории – уравнение эллипса, оси которого совпадают с осями координат, а его полуоси равны амплитудам складываемых колебаний

$$\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} = 1.$$

Если $A = B$, то траекторией движения точки будет окружность, уравнение которой $x^2 + y^2 = A^2$.

❖ Если $\omega_1 \neq \omega_2$, то результирующее колебание может быть довольно сложным, оно не будет периодическим. Но в случае, если частоты складываемых колебаний относятся как целые числа, результирующее движение оказывается периодическим. В этом случае замкнутые кривые, описываемые точкой, называются фигурами Лиссажу (рис. 1.22–1.25).

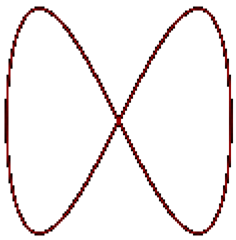


Рис. 1.22

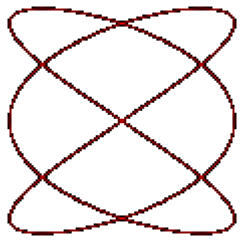


Рис. 1.23

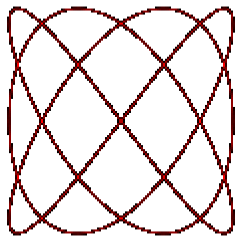


Рис. 1.24

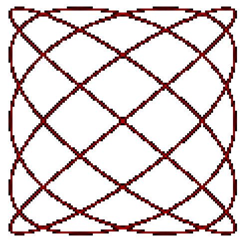


Рис. 1.25

Примеры решения задач

Задача 1. Складываются два гармонических колебания одного направления:

$$x_1 = \cos\pi t; \quad x_2 = \cos\pi\,(t + 0{,}5).$$

Найти амплитуду A и начальную фазу φ_0 результирующего колебания. Написать уравнение результирующего колебания.

Решение.

Уравнение гармонических колебаний имеет вид:

$$x = A\cos\left(\omega t + \varphi\right), \quad (1)$$

где A – амплитуда колебаний; ω – циклическая частота; φ – начальная фаза колебаний.

Преобразуем уравнения, заданные в условии задачи, к такому же виду:

$$x_1 = \cos \pi t; \; x_2 = \cos\left(\pi t + 0{,}5\pi\right). \quad (2)$$

Из сравнения уравнений (1) и (2) находим амплитуды колебаний, циклическую частоту и начальные фазы: $A_1 = A_2 = 1$ см; $\omega = \pi$ рад/с; $\varphi_1 = 0$; $\varphi_2 = 0{,}5\pi$ рад.

Амплитуду результирующего колебания найдем из векторной диаграммы (рис. 1.22) по теореме косинусов:

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos\left(\varphi_2 - \varphi_1\right)}. \quad (3)$$

Подставив в формулу (3) числовые значения, получим $A \approx 1{,}4$ см. Из векторной диаграммы также следует

$$tg\,\varphi_0 = \frac{A_1\sin\varphi_1 + A_2\sin\varphi_2}{A_1\cos\varphi_1 + A_2\cos\varphi_2},$$

откуда получаем начальную фазу результирующего колебания:

$$\varphi_0 = arctg\,\frac{A_1\sin\varphi_1 + A_2\sin\varphi_2}{A_1\cos\varphi_1 + A_2\cos\varphi_2}.$$

Произведя вычисления, получаем $\varphi_0 = arctg\,1 = \pi/4$.

Складываемые колебания имеют одинаковую циклическую частоту, поэтому результирующее колебание будет иметь ту же частоту.

Уравнение результирующего колебания: $x = 1{,}4\cos\left(\pi t + \pi/4\right)$ см.

Ответ: $A \approx 1{,}4$ см; $\varphi_0 = \pi/4$; $x = 1{,}4\cos\left(\pi t + \pi/4\right)$, см.

Задача 2. При сложении двух одинаково направленных гармонических колебаний с одной и той же частотой и амплитудами A_1 = 1 см и A_2 = 4 см, получается гармоническое колебание с амплитудой A = 5 см. Найти разность фаз $\Delta\varphi$ складываемых колебаний.

Решение.

Амплитуда результирующего колебания находится из векторной диаграммы (рис. 1.22) по теореме косинусов:

$$A=\sqrt{A_1^2+A_2^2+2A_1A_2\cos(\varphi_2-\varphi_1)}$$

откуда следует

$$\cos(\varphi_2-\varphi_1)=\frac{A^2-A_1^2-A_2^2}{2A_1A_2}=0{,}3125;\quad \Delta\varphi=\varphi_2-\varphi_1\approx 71{,}7°.$$

Ответ: $\Delta\varphi\approx 71{,}7°$.

Задача 3. Движение точки задано уравнениями

$$x=10\sin 2t,\text{ см и } y=5\sin\left[2\left(t+\frac{\pi}{4}\right)\right].$$

Найти уравнение траектории и скорость точки в момент времени t_1 = 0,5 с.

Решение.

Преобразуем второе уравнение, данное в условии задачи, к следующему виду: $y=5\sin\left(2t+\frac{\pi}{2}\right)=5\cos 2t$.

Для нахождения уравнения траектории необходимо исключить время из уравнений движения. Для этого запишем данные уравнения в виде: $\sin 2t=\frac{x}{10}$; $\cos 2t=\frac{y}{5}$. Возводим оба уравнения в квадрат и складываем их, получаем уравнение траектории

$$\frac{x^2}{100}+\frac{y^2}{25}=1.$$

Полученное уравнение является уравнением эллипса.

Скорость точки определяется первой производной радиус-вектора по времени

$$\vec{\upsilon}=\frac{d\vec{r}}{dt},$$

где $\vec{r}=x\vec{i}+y\vec{j}=(10\sin 2t)\vec{i}+(5\cos 2t)\vec{j}$ ($\vec{i},\vec{j}$ – орты осей ох и оу соответственно), тогда скорость точки

$$\vec{\upsilon} = \left(20\cos 2t\right)\vec{i} - \left(10\sin 2t\right)\vec{j}\ .$$

Из последнего соотношения видно, что проекции скорости на оси координат

$$\upsilon_x = 20\cos 2t;\quad \upsilon_y = 10\sin 2t,$$

следовательно, модуль скорости будет

$$\upsilon = \sqrt{\upsilon_x^2 + \upsilon_y^2} = \sqrt{400\cos^2 2t + 100\sin^2 2t} = 10\sqrt{4\cos^2 2t + \sin^2 2t}\ .$$

В момент времени $t_1 = 0{,}5$ с: $\upsilon = 10\sqrt{4\cos^2(2\cdot 0{,}5) + \sin^2(2\cdot 0{,}5)}$; $\upsilon \approx 14$ см/с.

Ответ: $\upsilon \approx 14$ см/с.

Задача 4. Материальная точка участвует одновременно в двух взаимно перпендикулярных колебаниях, выражаемых уравнениями:

$$x = 2\cos\omega_0 t,\quad y = \cos 2\omega_0 t\ .$$

Найти уравнение траектории, построить её и указать направление движения точки (величины x и y выражены в сантиметрах).

Решение.

Выразим из первого уравнения $\cos\omega_0 t = x/2$, второе уравнение представим в виде $y = 2\cos^2\omega_0 t - 1$, воспользовавшись формулой $\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$ ($\alpha = \omega_0 t$).

Тогда получаем уравнение траектории: $y = 0{,}5x^2 - 1$. Полученное выражение представляет собой уравнение параболы, ось которой совпадает с осью Оу.

Для построения траектории найдем значения y, соответствующие ряду значений x, и составим таблицу:

x, см	–2	–1	0	1	2
y, см	1	–1/2	–1	–1/2	1

Построим параболу, начертив координатные оси, указав масштаб и нанеся найденные точки на плоскость хОу (рис. 1.26).

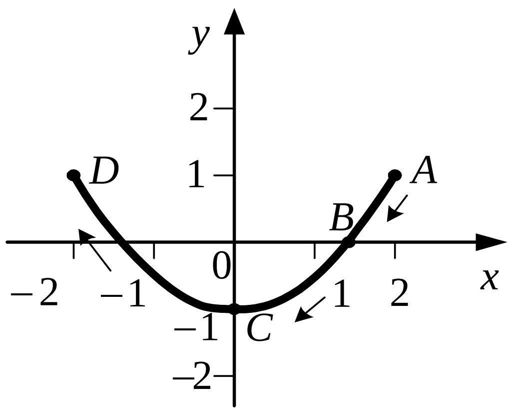


Рис. 1.26

Задачи для самостоятельного решения

1. Написать уравнение движения, получающегося в результате сложения двух одинаково направленных гармонических колебаний с одинаковым периодом T = 8 с и одинаковой амплитудой A = 2 см. Разность фаз между этими колебаниями равна $(\varphi_2 - \varphi_1) = \pi/4$. Начальная фаза одного из этих колебаний равна нулю.

(Ответ: $x = 3{,}7 \cdot 10^{-2} \sin\left(\frac{\pi}{4}t + \frac{\pi}{8}\right)$, м).

2. Складываются два гармонических колебания одинакового направления $x_1 = 0{,}02 \sin\left(5\pi t + \frac{\pi}{2}\right)$, м; $x_2 = 0{,}03 \sin\left(5\pi t + \frac{\pi}{4}\right)$, м. Определите амплитуду и начальную фазу полученного колебания.

(Ответ: A = 4,6 см; φ = 62,8°).

3. Найти амплитуду и начальную фазу гармонического колебания, полученного от сложения одинаково направленных колебаний, уравнения которых $x_1 = 4 \sin \pi t$, см; $x_2 = 3 \sin\left(\pi t + \frac{\pi}{2}\right)$, см. Записать уравнение результирующего колебания. Построить векторную диаграмму сложения амплитуд.

(Ответ: $x = 5 \sin(\pi t + 0{,}2\pi)$, см).

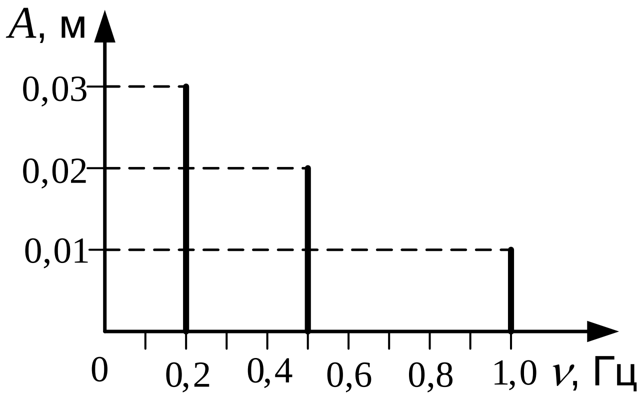


Рис. 1.27

4. Пользуясь спектром сложного колебания, изображенного на рис. 1.27, записать уравнения колебаний, из которых составлено сложное колебание. Начертить графики этих колебаний, считая разность фаз между ними равной нулю в момент времени t = 0. Начертить график результирующего сложного колебания.

5. Построить на одном графике два гармонических колебания, описываемых уравнениями $x_1 = 3 \sin 4\pi t$, см; $x_2 = 6 \sin 10\pi t$, см. Построить график результирующего колебания, сложив графически гармонические колебания. Начертить спектр полученного сложного колебания.

6. Складываются два взаимно перпендикулярных колебания с одинаковой частотой $\nu_1 = \nu_2 = 10$ Гц и с одинаковой начальной фазой

$\varphi_1 = \varphi_2 = \frac{\pi}{3}$. Амплитуды колебаний $A_1 = 10$ см; $A_2 = 5$ см. Написать уравнение результирующего колебания и построить его график.

(Ответ: $x = 11{,}2\sin\left(20\pi t + \frac{\pi}{3}\right)$, см).

7. Материальная точка участвует в двух взаимно перпендикулярных колебаниях одинаковой частоты $\nu = 5$ Гц и с одинаковой начальной фазой $\varphi_1 = \varphi_2 = \pi/3$. Амплитуды этих колебаний равны $A_1 = 3$ см и $A_2 = 4$ см. Чему равна амплитуда A результирующего колебания? Найти траекторию движения точки.

(Ответ: $A = 5$ см; $y = \frac{4}{3}x$).

8. Точка одновременно участвует в двух взаимно перпендикулярных колебаниях, уравнения которых $x = 2\sin\omega t$, м; $y = 2\cos\omega t$, м. Найти траекторию движения точки, начертить её и указать направление движения.

(Ответ: $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{4} = 1$).

9. Материальная точка одновременно участвует в двух взаимно перпендикулярных колебаниях $x = \sin\pi t$; $y = 4\sin(\pi t + \pi)$. Найти траекторию движения точки, начертить её и указать направление движения.

(Ответ: $y = -0{,}75x$).

10. Даны два гармонических колебания:

$$x_1 = 0{,}5\cos\left(\pi t + \frac{\pi}{6}\right), \text{ м}; \; x_2 = 0{,}5\cos\left(\pi t + \frac{\pi}{3}\right), \text{ м}.$$

Сложить эти колебания методом векторных диаграмм и записать уравнение результирующего колебания.

(Ответ: $x = 0{,}97\cos\left(\pi t + \frac{\pi}{4}\right)$, м).

11. Результирующее колебание, получающееся при сложении двух гармонических колебаний одного направления, мало отличающихся по частоте, описывается уравнением $x = A\cos t\cos 50t$. Определить циклические частоты складываемых колебаний, период и циклическую частоту биений.

(Ответ: $\omega_1 = 51$ с$^{-1}$; $\omega_2 = 49$ с$^{-1}$; $\omega_б = 2$ с$^{-1}$; $T = 3{,}14$ с).

12. Точка участвует одновременно в двух взаимно перпендикулярных колебаниях, описываемых уравнениями $x = 3\sin 5t$; $y = 2\sin\left(5t + \frac{\pi}{2}\right)$.

Найти уравнение траектории и показать, в каком направлении происходит движение.

(Ответ: $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$).

13. Два одинаково направленных гармонических колебания одного периода с амплитудами $A_1 = 10$ см и $A_2 = 6$ см складываются в одно колебание с амплитудой $A = 14$ см. Найти разность фаз $\Delta\varphi$ складываемых колебаний.

(Ответ: $\Delta\varphi = \pi/3$ рад).

14. Два камертона звучат одновременно. Частоты ν_1 и ν_2 соответственно равны 440 Гц и 440,5 Гц. Определить период $T_б$ биений.

(Ответ: $T_б = 2$ с).

15. Движение точки, м, задано уравнениями $x = 0{,}1\sin\omega t$ м; $y = 0{,}05\sin\omega(t + \tau)$ м, где $\tau = \pi/4$ с. Найти уравнение траектории и скорости точки в момент времени $t = 0{,}5$ с.

(Ответ: $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$; $\upsilon = 13{,}7$ м/с).

16. Точка участвует в двух одинаково направленных колебаниях: $x_1 = 0{,}01\sin\omega t$; $x_2 = 0{,}02\cos\omega t$, где $\omega = 1\,с^{-1}$. Определить амплитуду A, частоту ν и начальную фазу φ результирующего колебания. Найти уравнение этого движения.

(Ответ: $A = 2{,}24$ см; $\nu = 0{,}16$ Гц; $\varphi = 0{,}35\pi$ рад; $x = 2{,}24\cos(t + 0{,}35\pi)$).

17. Складываются два гармонических колебания одного направления с одинаковыми периодами $T_1 = T_2 = 1{,}5$ с и амплитудами $A_1 = A_2 = 2$ см. Начальные фазы колебаний $\varphi_1 = \pi/2$ и $\varphi_2 = \pi/3$. Определить амплитуду и начальную фазу результирующего колебания. Найти его уравнение и построить с соблюдением масштаба векторную диаграмму сложения амплитуд.

(Ответ: $A = 3{,}86$ см; $\varphi = 0{,}42\pi$ рад; $x = 3{,}86\cos\,(4{,}2t + 0{,}42\pi)$, см).

18. Складываются три гармонических колебания одного направления с одинаковыми амплитудами $A_1 = A_2 = A_3 = 3$ см и периодами $T_1 = T_2 = T_3 = 2$ с. Начальные фазы колебаний $\varphi_1 = 0$, $\varphi_2 = \pi/3$, $\varphi_3 = 2\pi/3$. Построить вектор-

ную диаграмму сложения амплитуд. Определить из чертежа амплитуду A и начальную фазу φ результирующего колебания. Записать его уравнение.

(Ответ: $A = 6$ см; $\varphi = \pi/3$ рад; $x = 6\cos\left(\pi t + \pi/3\right)$, см).

19. Материальная точка одновременно участвует в двух взаимно перпендикулярных колебаниях, описываемых уравнениями $x = 2\cos\left(0{,}5\pi t\right)$ и $y = -\cos\pi t$. Записать уравнение траектории точки. Построить траекторию и указать направление движения.

(Ответ: $0{,}5x^2 + y = 1$).

20. Уравнение колебаний имеет вид: $x = A\sin 2\pi\nu_1 t$, где амплитуда A изменяется со временем по закону $A = A_0\left(1 + \cos 2\pi\nu_2 t\right)$. Из каких гармонических колебаний состоит данное колебание? Построить график слагаемых и результирующего колебаний для $A_0 = 4$ см, $\nu_1 = 2$ Гц, $\nu_2 = 1$ Гц. Начертить спектр результирующего колебания.

21. Амплитуда результирующего колебания, получающегося при сложении двух одинаково направленных гармонических колебаний одинаковой частоты, равна $A = 6$ см. Определить амплитуду A_2 второго колебания, если амплитуда колебаний первого $A_1 = 5$ см и разность фаз складываемых колебаний $\Delta\varphi = 60°$.

(Ответ: $A_2 = 1{,}65$ см).

22. Определить разность фаз $\Delta\varphi$ двух одинаково направленных гармонических колебаний одинаковых частоты и амплитуды, если амплитуда их результирующего колебания равна амплитудам складываемых колебаний.

(Ответ: $\Delta\varphi = 120°$).

23. Разность фаз $\Delta\varphi$ двух одинаково направленных гармонических колебаний одинакового периода $T_1 = T_2 = 8$ с и одинаковой амплитуды $A_1 = A_2 = 5$ см составляет 45°. Написать уравнение движения, получающегося в результате сложения этих колебаний, если начальная фаза одного из них равна нулю.

(Ответ: $x = 9{,}24\cos\left(\dfrac{\pi}{4}t + \dfrac{\pi}{8}\right)$).

24. В результате сложения двух колебаний, период одного из которых $T_1 = 0{,}02$ с, получают биения с периодом $T_б = 0{,}2$ с. Определить период T_2 второго складываемого колебания

(Ответ: $T_2 = 22{,}2$ с).

25. Определить период результирующего колебания, получающегося при сложении двух гармонических колебаний одного направления с оди-

наковыми амплитудами и одинаковыми начальными фазами, имеющими периоды $T_1 = 2$ с и $T_2 = 2{,}05$ с. Чему равен период биений?

26. Складываются два гармонических колебания одного направления. Уравнение результирующего колебания имеет вид: $x = A\cos t \cos 45t$.

Найти циклические частоты складываемых колебаний и период биений результирующего колебания.

(Ответ: $\omega_1 = 46$ с$^{-1}$; $\omega_2 = 45$ с$^{-1}$; $T = 6{,}28$ с).

27. Точка участвует одновременно в двух гармонических колебаниях, происходящих во взаимно перпендикулярных направлениях и описываемых уравнениями: $x = A\sin\,\omega t$ и $y = A\sin\,2\omega t$. Найти уравнение траектории точки и вычертить её с нанесением масштаба.

(Ответ: $y^2 = 4x^2\left(1 - x^2/A^2\right)$).

28. Точка участвует одновременно в двух гармонических колебаниях одинаковой частоты, происходящих во взаимно перпендикулярных направлениях и описываемых уравнениями $x = A\sin(\omega t + \pi/2)$ и $y = A\sin\,\omega t$. Записать уравнение траектории точки и вычертить её с нанесением масштаба, указав направление её движения по этой траектории.

(Ответ: $x^2 + y^2 = A^2$).

29. Точка участвует одновременно в двух взаимно перпендикулярных колебаниях, описываемых уравнениями: $x = \cos 0{,}5\pi t$ и $y = \cos\pi t$. Найти уравнение траектории точки и вычертить её с нанесением масштаба, указав направление движения.

(Ответ: $y = 2x^2 - 1$).

30. Точка участвует одновременно в двух взаимно перпендикулярных колебаниях, описываемых уравнениями: $x = 4\sin\pi t$ и $y = 2\cos 2\,\pi t$. Найти уравнение траектории точки и вычертить её с нанесением масштаба, указав направление движения.

(Ответ: $y = 2 - x^2/4$).

1.2. Свободные незатухающие колебания в колебательном контуре

Колебательный контур – это электрическая цепь, состоящая из соединенных последовательно катушек индуктивности L, конденсатора ёмкостью C и резистора сопротивлением R (RLC-контур), в котором могут возникать и поддерживаться электрические колебания.

Основные законы и формулы

• Дифференциальное уравнение незатухающих колебаний в колебательном контуре

$$\frac{d^2q}{dt^2} + \omega_0^2\ q = 0\,, \tag{1.21}$$

где q – заряд на обкладках конденсатора; ω_0 – циклическая частота свободных колебаний в контуре.

• Решение дифференциального уравнения

$$q = q_m \cos\left(\omega_0 t + \varphi_0\right), \tag{1.22}$$

где q_m – амплитудное значение заряда; φ_0 – начальная фаза колебаний.

• Сила тока в колебательном контуре

$$i = \frac{dq}{dt} = -\omega_0 q_m \sin\left(\omega_0 t + \varphi_0\right) = I_m \cos\left(\omega_0 t + \varphi_0 + \frac{\pi}{2}\right), \tag{1.23}$$

где $I_m = \omega_0 q_m$ – амплитудное значение силы тока.

• Закон изменения напряжения на конденсаторе

$$u_C = \frac{q}{C} = \frac{q_m}{C}\cos\left(\omega_0 t + \varphi_0\right) = U_m \cos\left(\omega_0 t + \varphi_0\right), \tag{1.24}$$

где $U_m = \dfrac{q_m}{C}$ – амплитуда напряжения.

• Энергия электрического поля конденсатора

$$W_C = \frac{q^2}{2C} = \frac{q_m^2}{2C}\cos^2\left(\omega_0 t + \varphi_0\right). \tag{1.25}$$

• Энергия магнитного поля катушки

$$W_M = \frac{Li^2}{2}\frac{LI_m^2}{2}\sin^2\left(\omega_0 t + \varphi_0\right). \tag{1.26}$$

• Полная энергия электромагнитных колебаний

$$W = \frac{q_m^2}{2C} = \frac{LI_m^2}{2} = \frac{CU_m^2}{2}. \tag{1.27}$$

- Собственная частота электромагнитных колебаний

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}. \quad (1.28)$$

- Период свободных незатухающих колебаний (формула Томсона)

$$T = 2\pi\sqrt{LC}. \quad (1.29)$$

Методические рекомендации

1. Методы решения задач на электромагнитные колебания сходны с методами решения задач на механические колебания.

2. Формулами (1.21)–(1.29) пользуются в случае незатухающих колебаний в *идеальном* колебательном контуре ($R \approx 0$).

3. Значения q_m и φ_0 определяются начальными условиями задачи, а значение ω_0 – свойствами колебательного контура (электроемкостью C конденсатора и индуктивностью L катушки).

4. Формула (1.23) показывает, что колебания силы тока опережают колебания заряда на 90°.

5. Из формул: $I_m = \omega_0 q_m$, $U_m = \dfrac{q_m}{C}$ и $\omega_0 = \dfrac{1}{\sqrt{LC}}$ получаем $I_m = U_m\sqrt{\dfrac{C}{L}}$, где $\sqrt{\dfrac{L}{C}}$ – волновое сопротивление колебательного контура.

6. Многие задачи на электромагнитные колебания решаются наиболее просто при применении закона сохранения энергии (формула (1.27)).

Кроме того, можно воспользоваться формулами:

$$W = W_C + W_M = \frac{q^2}{2C} + \frac{Li^2}{2} = \frac{q_m^2}{2C} = \frac{LI_m^2}{2} = \frac{CU_m^2}{2}$$

или

$$W = \frac{Cu^2}{2} + \frac{Li^2}{2}.$$

7. В задачах на колебания в колебательном контуре могут пригодиться формулы электроемкости плоского конденсатора

$$C=\frac{q}{U};\quad C=\frac{\varepsilon\varepsilon_0 S}{d}$$

и индуктивности соленоида

$$L=\mu\mu_0\frac{N^2}{\ell}S.$$

Примеры решения задач

Задача 1. Разность потенциалов, В, на обкладках конденсатора изменяется по закону:

$$u(t)=50\cos 10^4\pi t. \qquad (1)$$

Электроемкость конденсатора C = 100 нФ. Чему равна индуктивность катушки? Найти закон изменения силы тока в контуре.

Решение.

Уравнение колебаний напряжения на обкладках конденсатора в общем виде:

$$u=U_m\cos\left(\omega_0 t+\varphi_0\right). \qquad (2)$$

Сравнивая выражения (1) и (2), находим значения следующих величин: $U_m=50$ В; $\omega_0=10^4\pi$ рад/с; $\varphi_0=0°$.

Так как циклическая частота определяется из выражения $\omega_0=\dfrac{1}{\sqrt{LC}}$, то индуктивность катушки $L=\dfrac{1}{\omega_0^2 C}$; $L=\dfrac{1}{10^8\cdot(3{,}14)^2\cdot 10^{-7}}\approx 0{,}01$Гн.

Заряд на обкладках конденсатора меняется по закону:

$$q(t)=Cu(t)=CU_m\cos\left(\omega_0 t+\varphi_0\right). \qquad (3)$$

Используя условие задачи, уравнение (3) запишем в виде:

$$q(t)=10^{-7}\cdot 50\cos 10^4\pi t=5\cdot 10^{-6}\cos 10^4\pi t \text{ Кл}.$$

Сила тока, А, в контуре:

$$i(t)=\frac{dq(t)}{dt}=-5\cdot 10^{-6}\cdot 10^4\pi\sin 10^4\pi t.$$

или

$$i(t)=-0{,}157\sin 10^4\pi t.$$

Ответ: $L = 0{,}01$Гн; $i(t) = -0{,}157\sin 10^4 \pi t$.

Задача 2. Катушка индуктивностью $L = 1$мГн и воздушный конденсатор, состоящий из двух круглых пластин диаметром $D = 20$ см каждая, соединены параллельно. Расстояние между пластинами равно $d = 1$см. Определить период T колебаний в колебательном контуре.

Решение.

Период T свободных колебаний в колебательном контуре определяется по формуле Томсона

$$T = 2\pi\sqrt{LC},$$

где C – электроемкость конденсатора.

Электроемкость плоского конденсатора определяется из соотношения

$$C = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 S}{d},$$

где $\varepsilon = 1$ – диэлектрическая проницаемость воздуха; ε_0 – электрическая постоянная ($\varepsilon_0 = 8{,}85 \cdot 10^{-12}$ Ф/м); S – площадь пластин конденсатора; d – расстояние между пластинами.

Учитывая, что $S = \dfrac{\pi D^2}{4}$, получаем для периода колебаний

$$T = 2\pi\sqrt{L\frac{\varepsilon\varepsilon_0}{d}\frac{\pi D^2}{4}} = \pi D\sqrt{\frac{L\varepsilon\varepsilon_0\pi}{d}}$$

Произведем вычисления, предварительно выразив все величины в единицах СИ: $L = 10^{-2}$ Гн; $D = 0{,}2$ м; $d = 10^{-2}$ м.

Вычисления дают $T = 1$мкс.

Ответ: $T = 1$мкс.

Задача 3. Колебательный контур состоит из конденсатора ёмкостью $C = 1$мкФ и катушки индуктивности $L = 4$Гн. Амплитуда колебаний заряда на конденсаторе $q_m = 100$ мкКл. Написать законы изменения с течением времени заряда, силы тока и напряжения. Принять начальную фазу, равной $\varphi_0 = \pi/6$.

Решение.

Закон изменения электрического заряда на обкладках конденсатора:

$$q = q_m \cos(\omega_0 t + \varphi_0),$$

где q_m – амплитудное значение заряда; ω_0 – циклическая частота свободных колебаний в контуре; φ_0 – начальная фаза; $q_m = 100$ мкКл $= 10^{-4}$ Кл.

Циклическая частота

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}; \ \omega_0 = \frac{1}{10^{-4} \cdot 10^{-6}} = 500 \text{ рад/с}.$$

Тогда

$$q(t) = 10^{-4} \cos(500t + \pi/6), \text{ Кл}.$$

Сила тока

$$i(t) = \frac{dq(t)}{dt} = -500 \cdot 10^{-4} \sin(500t + \pi/6), \ \ A = -0{,}05 \sin(500\ t + \pi/6\ ).,\ \text{А}.$$

Напряжение на обкладках конденсатора меняется по закону:

$$u(t) = \frac{q(t)}{C} = 100 \cos(500t + \pi/6), \text{ В}.$$

Ответ: $q(t) = 10^{-4} \cos(500t + \pi/6)$, Кл; $i(t) = -0{,}05 \sin(500t + \pi/6)$, А; $u(t) = 100 \cos(500t + \pi/6)$, В.

Задача 4. Амплитуда напряжения на конденсаторе колебательного контура равна $U_{\max} = 220$ В, амплитуда силы тока в катушке $I_{\max} = 2$ мА. Определить силу тока i и напряжение u в тот момент, когда энергия электрического поля конденсатора равна энергии магнитного поля катушки.

Решение.

Полная энергия колебаний в колебательном контуре $W = W_C + W_M$, где W_C – энергия заряженного конденсатора в момент времени t; W_M – энергия магнитного поля катушки, причем

$$W_C = \frac{Cu^2}{2}; \ \ W_M = \frac{Li^2}{2}.$$

По условию $W_C = W_M$, тогда можно записать:

$$W = 2W_C = Cu^2; \tag{1}$$

$$W = 2W_M = Li^2. \tag{2}$$

Полная энергия также может быть найдена из соотношений:

$$W = W_{C_{\max}} = \frac{CU_{\max}^2}{2}; \tag{3}$$

$$W = W_{M_{\max}} = \frac{LI_{\max}^2}{2}. \tag{4}$$

Из (1) и (3) получаем $\frac{CU_{\max}^2}{2} = Cu^2 \Rightarrow u = \frac{U_{\max}}{\sqrt{2}}$, а из соотношений (2) и (4) следует $\frac{LI_{\max}^2}{2} = Li^2 \Rightarrow i = \frac{I_{\max}}{\sqrt{2}}$.

Произведем вычисления, получим $u = 156$ В; $i = 1{,}4 \cdot 10^{-3}$ А.

Ответ: $u = 156$ В; $i = 1{,}4 \cdot 10^{-3}$ А.

Задача 5. Определить, через какое минимальное время, считая от начала колебаний, энергия магнитного поля катушки станет равной половине энергии электрического поля заряженного конденсатора. Период колебаний в контуре $T = 2$ мкс, начальная фаза $\varphi_0 = 0°$.

Решение.

Энергия электрического поля конденсатора

$$W_C = \frac{Cu^2}{2}. \tag{1}$$

Максимальная электрическая энергия

$$W_{C_{\max}} = \frac{CU_{\max}^2}{2}. \tag{2}$$

По закону сохранения энергии

$$W = W_C + W_M = W_{C_{\max}}, \tag{3}$$

где W_M – энергия магнитного поля катушки.

По условию

$$W_M = W_C / 2. \tag{4}$$

Из уравнений (1)–(4) получаем

$$\frac{CU_{\max}^2}{2} = \frac{3}{4}Cu^2 \quad \text{или} \quad U_{\max}^2 = \frac{3}{2}u^2,$$

откуда следует

$$u = \sqrt{\frac{2}{3}}U_{\max}. \tag{5}$$

Уравнение колебаний напряжения

$$u = U_m \cos\left(\omega_0 t\right). \tag{6}$$

Подставим (5) в (6):

$$\sqrt{\frac{2}{3}}U_{\max} = U_m \cos\left(\omega_0 t\right) \Rightarrow \sqrt{\frac{2}{3}} = \cos\left(\omega_0 t\right),$$

где $\omega_0 = \dfrac{2\pi}{T}$ – циклическая частота.

Минимальное время

$$t = \frac{1}{\omega_0}\arccos\sqrt{\frac{2}{3}} = \frac{T}{2\pi}\arccos\sqrt{\frac{2}{3}}.$$

Подставив T = 2 мкс = $2 \cdot 10^{-6}$ с, после вычисления получаем: $t = 2 \cdot 10^{-7}$ с = = 0,2 мкс.

Ответ: $t = 2 \cdot 10^{-7}$ с $=$ 0,2 мкс.

Задача 6. Колебательный контур состоит из конденсатора ёмкостью $C = 25$ нФ и катушки, индуктивность которой $L = 1{,}015$ Гн. Максимальный заряд на обкладках конденсатора $q_m = 2{,}5$ мкКл. 1. Написать уравнение изменения разности потенциалов на обкладках конденсатора и силы тока в цепи в зависимости от времени. 2. Найти значения разности потенциалов на обкладках конденсатора и силу тока в цепи в моменты времени $T/8$; $T/4$; $T/2$. 3. Построить графики этих зависимостей в пределах одного периода. Активным сопротивлением контура пренебречь. Начальная фаза колебаний $\varphi_0 = 0°$.

Решение.

Циклическая частота колебаний в контуре

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}; \quad \omega_0 = \frac{1}{1{,}015 \cdot 25 \cdot 10^{-9}} = 6{,}28 \cdot 10^3 \text{ рад/с} = 2 \cdot 10^3 \pi \text{ рад/с}.$$

Разность потенциалов на обкладках конденсатора меняется по закону

$$u = U_m \cos\left(\omega_0 t + \varphi_0\right).$$

Максимальное значение напряжения

$$U_m = \frac{q_m}{C}; \quad U_m = \frac{2{,}5 \cdot 10^{-6} \text{ Кл}}{25 \cdot 10^{-9} \text{ Ф}} = 100 \text{ В} \Rightarrow u = 100 \cos\left(2 \cdot 10^3 \pi t\right), \text{ В}.$$

Закон изменения силы тока

$$i = \frac{dq}{dt} = -\omega_0 q_m \sin\left(\omega_0 t + \varphi_0\right),$$

подставим числовые значения:

$$i = -2{,}5 \cdot 10^{-6} \cdot 10^3 \sin\left(2 \cdot 10^3 \pi t\right) = -0{,}0157 \sin\left(2 \cdot 10^3 \pi t\right), \text{ А}.$$

Найдем значения разности потенциалов и силы тока в моменты времени, указанные в условии задачи:

1) $t_1 = \dfrac{T}{8}; T = \dfrac{2\pi}{\omega_0} \Rightarrow t_1 = \dfrac{2\pi}{8\omega_0} = \dfrac{\pi}{4\omega_0};$

$$u_1 = 100 \cos\left(\omega_0 \frac{\pi}{4\omega_0}\right) = 100 \cos\frac{\pi}{4} = 70{,}7 \text{ В};$$

$$i_1 = -0{,}0157 \sin\left(\omega_0 \frac{\pi}{4\omega_0}\right) = -0{,}0157 \sin\frac{\pi}{4} = -11 \cdot 10^{-3} \text{ А} = -11 \text{ мА}.$$

2) $t_1 = \dfrac{T}{4}; T = \dfrac{2\pi}{\omega_0} \Rightarrow t_1 = \dfrac{2\pi}{4\omega_0} = \dfrac{\pi}{2\omega_0};$

$$u_2 = 100 \cos\left(\omega_0 \frac{\pi}{2\omega_0}\right) = 100 \cos\frac{\pi}{2} = 0;$$

$$i_2 = -0{,}0157 \sin\left(\omega_0 \frac{\pi}{2\omega_0}\right) = -0{,}0157 \sin\frac{\pi}{2} = -15{,}7 \cdot 10^{-3} \text{ А} = -15{,}7 \text{ мА}.$$

3) $t_3 = \dfrac{T}{2}; T = \dfrac{2\pi}{\omega_0} \Rightarrow t_1 = \dfrac{2\pi}{2\omega_0} = \dfrac{\pi}{\omega_0};$

$$u_3 = 100\cos\left(\omega_0 \frac{\pi}{\omega_0}\right) = 100\cos\pi = -100 \text{ В};$$

$$i_1 = -0{,}0157\sin\left(\omega_0 \frac{\pi}{\omega_0}\right) = -0{,}0157\sin\pi = 0.$$

Построим графики зависимости $u(t)$ и $i(t)$, используя полученные значения силы тока и разности потенциалов.

Задача 7

На вертикально отклоняющие пластины осциллографа подаются переменные напряжения $U_{y_1} = 10\sin\left(\omega t - \frac{\pi}{6}\right)$ и $U_{y_2} = 5\cos\omega t$, на горизонтально отклоняющие – напряжение $U_x = 866\cos\omega t$. Определить траекторию луча на экране осциллографа.

Решение.

Для определения траектории луча из уравнений $U_y(t)$ и $U_x(t)$ исключим время t, но предварительно необходимо сложить колебания одного направления $U_{y_1}(t)$ и $U_{y_2}(t)$, происходящие с одинаковой частотой ω.

Уравнения U_{y_1} и U_{y_2} представим в виде:

$$U_{y_1} = 10\sin\left(\omega t - \frac{\pi}{6}\right); \quad U_{y_2} = 5\sin\left(\omega t - \frac{\pi}{6}\right).$$

Из данных уравнений находим амплитуды складываемых колебаний и начальные фазы: $A_1 = 10$ В; $A_2 = 5$ В; $\varphi_1 = -\frac{\pi}{6}$; $\varphi_2 = \frac{\pi}{2}$.

Амплитуда результирующего колебания определяется соотношением

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos(\varphi_2 - \varphi_1)}.$$

Начальная фаза результирующего колебания

$$tg\,\varphi = \frac{A_1\sin\varphi_1 + A_2\sin\varphi_2}{A_1\cos\varphi_1 + A_2\cos\varphi_2};$$

$$A=\sqrt{100+25+2\cdot 10\cdot 5\cos\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{6}\right)}=8{,}66\ \text{В};$$

$$tg\,\varphi=\frac{10\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)+5\sin\frac{\pi}{2}}{10\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)+5\cos\frac{\pi}{2}}=0\ \Rightarrow\ \varphi=0\,.$$

Уравнение результирующего колебания в вертикальном направлении

$$U_y=A\sin\omega t=8{,}66\sin\omega t\,.$$

При подаче одновременно напряжения на вертикальные и горизонтальные пластины, согласно уравнениям:

$$U_x=866\cos\omega t;\quad U_y=8{,}66\sin\omega t\,,$$

складываются два взаимно перпендикулярных колебания.

Выразим из уравнений

$$\sin\omega t=\frac{U_y}{8{,}66}\quad \text{и}\quad \cos\omega t=\frac{U_x}{8{,}66}\,.$$

Возведем в квадрат обе части выражений и сложим полученные соотношения:

$$\sin^2\omega t+\cos^2\omega t=\frac{U_y^2}{(8{,}66)^2}+\frac{U_x^2}{(8{,}66)^2}\,.$$

Так как

$$\sin^2\omega t+\cos^2\omega t=1,$$

то получаем $\frac{U_y^2}{(8{,}66)^2}+\frac{U_x^2}{(8{,}66)^2}=1$ или $U_y^2+U_x^2=75$ – уравнение окружности.

Ответ: $U_y^2+U_x^2=75$ – уравнение окружности.

Задачи для самостоятельного решения

1. Сила тока в колебательном контуре меняется с течением времени по закону: $I=-0{,}02\sin 400\pi t$ А. Индуктивность контура $L=1$Гн. Определить емкость конденсатора, максимальную разность потенциалов, макси-

мальную энергию электрического поля конденсатора и энергию магнитного поля катушки.

(Ответ: $C = 0{,}63$ мкФ; $U_{\max} = 25{,}2$ В; $W_э = W_м = 0{,}2$ мДж).

2. Колебательный контур состоит из соленоида длиной $\ell = 3$ см, площадью поперечного сечения $S_1 = 1\,см^2$ и плоского конденсатора с площадью пластин $S_2 = 30\,см^2$. Расстояние между пластинами конденсатора $d = 0{,}1$ см, число витков соленоида $N = 1000$. Найти частоту собственных колебаний в контуре.

(Ответ: ν = 477 Гц).

3. Катушка индуктивностью $L = 5$ мГн и воздушный конденсатор, состоящий из двух круглых пластин диаметром $D = 10$ см каждая, соединены последовательно. Расстояние между пластинами равно $d = 2$ см. Определить период T колебаний и максимальный заряд на пластинах конденсатора, если максимальное напряжение $U_{\max} = 100$ В. Записать уравнение изменения заряда с течением времени, считая начальную фазу равной $\varphi_0 = 60°$.

(Ответ: $T = 3{,}7 \cdot 10^{-7}$ с; $q_{\max} = 3{,}47 \cdot 10^{-10}$ Кл;

$q = 3{,}47 \cdot 10^{-10} \cos(5 \cdot 10^6 \pi t + \pi/3)$).

4. Колебательный контур состоит из катушки индуктивностью $L = 0{,}2$ мГн и двух конденсаторов $C_1 = C_2 = 4$ мкФ, соединенных последовательно. Определить максимальное напряжение на каждом конденсаторе. Максимальный ток в контуре $I_{\max} = 0{,}1$ А.

(Ответ: $U_{\max 1} = U_{\max 2} = 0{,}5$ В).

5. Колебательный контур состоит из катушки индуктивностью $L = 0{,}2$ мГн и конденсатора емкостью $C = 10$ мкФ. Конденсатор зарядили до напряжения $U_{\max} = 2$ В, и он начинает разряжаться. Каким будет ток в момент, когда энергия контура окажется поровну распределенной между электрическим и магнитным полем?

(Ответ: $i = 0{,}01$ А).

6. Амплитуда силы тока увеличилась в 3 раза при увеличении амплитуды напряжения на конденсаторе колебательного контура на $\Delta U_m = 40$ В. Определить амплитуду напряжения до и после его увеличения. Активное напряжение считать пренебрежимо малым.

(Ответ: $U_{m1} = 20$ В; $U_{m2} = 60$ В).

7. Амплитудное значение напряжения на конденсаторе колебательного контура равно $U_{\max} = 220$ В, а амплитуда силы тока в катушке $I_{\max} = 2$ мА.

Определить силу тока i и напряжение u в тот момент, когда энергия электрического поля конденсатора составляет три четверти энергии магнитного поля катушки.

(Ответ: $i = 1{,}5$ мА; $u = 144$ В).

8. В колебательном контуре с индуктивностью $L = 0{,}4$ Гн и емкостью $C = 20$ мкФ сила тока достигает максимального значения $I_{\max} = 100$ мА. Найти максимальное значение напряжения на конденсаторе и значение напряжения при силе тока $i = 55$ мА.

(Ответ: $U_{\max} = 14$ В; $u = 11{,}8$ В).

9. Колебательный контур, состоящий из катушки индуктивности и конденсатора емкостью $C = 1$ пФ, имеет частоту колебаний $\nu = 5$ МГц. Найти максимальную силу тока $I_{\max}$, протекающего по катушке, если полная энергия контура $W = 0{,}5$ мкДж.

(Ответ: $I_{\max} = 31{,}4$ мА).

10. Конденсатор емкостью $C = 50$ мкФ сначала подключили к источнику тока с эдс $\varepsilon = 3$ В, а затем – к катушке с индуктивностью $L = 5{,}1$ мкГн. Чему равно максимальное значение силы тока в контуре? Определить энергию электрического и магнитного полей в момент, когда энергия электрического поля $W_{эл} = 0{,}4\ W_{м}$ ($W_{м}$ – энергия магнитного поля).

(Ответ: $I_{\max} = 9$ мА; $W_{эл} = 6{,}6 \cdot 10^{-11}$ Дж; $W_{м} = 1{,}6 \cdot 10^{-10}$ Дж).

11. Колебательный контур состоит из конденсатора емкостью $C = 12$ мкФ и катушки. Чему равна индуктивность катушки, если при переключении конденсатора от источника постоянного напряжения $U = 200$ В на катушку сила тока в контуре равна $i = 0{,}2$ А, а напряжение на конденсаторе в это время $u = 100$ В? Сопротивление контура не учитывать.

(Ответ: $L = 9$ Гн).

12. Конденсатор емкостью $C = 2$ мкФ зарядили от источника тока напряжением $U_{\max} = 100$ В, а затем замкнули на катушку индуктивностью $L = 5$ мГн. Определить заряд и напряжение на конденсаторе через $t = 0{,}0257$ с после замыкания цепи.

(Ответ: $q = 177$ мкКл; $u = 58{,}5$ В).

13. Колебательный контур состоит из конденсатора, площадь пластин которого $S = 200$ см^2, а расстояние между ними $d = 5$ мм, и катушки индуктивностью $L = 4$ Гн. Амплитуда колебаний заряда на конденсаторе $q_{\max} = 150$ нКл. Написать уравнения колебаний заряда $q = q(t)$, напряжения

$u = u(t)$ и силы тока $i = i(t)$. Начальная фаза колебаний равна $\varphi_0 = 90°$.

(Ответ: $q = 1{,}5 \cdot 10^{-7} \cos\left(7 \cdot 10^4 t + \pi/2\right)$, Кл; $u = 4{,}2 \cdot 10^3 \cos\left(7 \cdot 10^4 t + \pi/2\right)$, В; $i = -10{,}5 \cdot 10^{-3} \sin\left(7 \cdot 10^4 t + \pi/2\right)$).

14. Емкость конденсатора идеального колебательного контура $C = 100$ пФ. Заряд на обкладках конденсатора меняется согласно уравнению $q = 2 \cdot 10^{-9} \cos 10^6 \pi t$. Записать уравнения колебаний силы тока $i = i(t)$ и напряжения $u = u(t)$. Определить амплитуды колебаний заряда $q_{\max}$, силы тока $I_{\max}$ и напряжения $U_{\max}$, а также индуктивность L катушки.

(Ответ: $i = -6{,}28 \cdot 10^{-3} \sin 10^6 \pi t$ А; $u = 20 \cos 10^6 \pi t$; $q_{\max} = 2$ нКл; $I_{\max} = 6{,}28$ мА; $U_{\max} = 20$ В; $L = 3{,}2$ мГн).

15. Какой процент амплитудного напряжения, считая от начала колебаний, составит напряжение u на обкладках конденсатора в тот момент, когда энергия электрического поля $W_{эл}$ будет в 2 раза больше энергии магнитного поля $W_{м}$? Через какую долю периода это произойдет? Активным сопротивлением контура пренебречь.

(Ответ: $u/U_{\max} = 81{,}6$ %; $t/T = 0{,}1$).

16. Конденсатор емкостью C и две катушки с индуктивностями L_1 и L_2 образуют колебательный контур (рис. 1.28). Определить максимальную силу тока $I_{\max}$ в этом контуре. Известно, что максимальная разность потенциалов на обкладках конденсатора равна $U_{\max}$. Активное сопротивление контура пренебрежимо мало.

(Ответ: $I_{\max} = U_{\max} \sqrt{\dfrac{C\left(L_1 + L_2\right)}{L_1 L_2}}$).

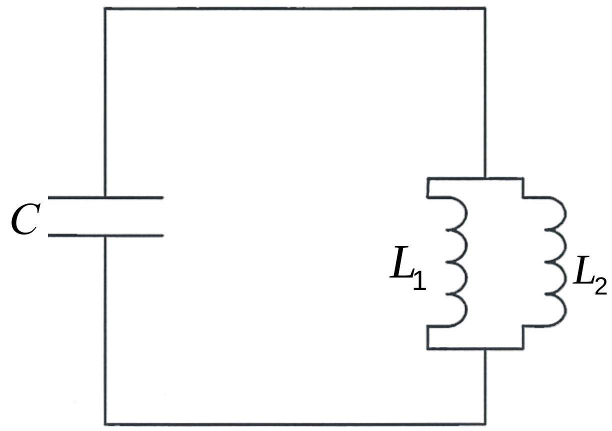


Рис. 1.28

17. Колебательный контур состоит из конденсатора емкостью $C = 2$ мкФ и катушки индуктивностью $L = 5$ мГн. Амплитуда напряжения на обкладках конденсатора $U_{\max} = 200$ В. Построить графики колебаний электрического и магнитного полей в пределах одного периода. Активным сопротивлением контура пренебречь.

18. Идеальный колебательный контур содержит конденсатор емкостью $C = 40$ нФ и катушку индуктивностью $L = 1$ Гн. Максимальный заряд на об-

кладках конденсатора $q_{\max} = 2$ мкКл. Построить графики колебаний заряда $q = q(t)$, силы тока $i = i(t)$ и напряжения $u = u(t)$ в этом контуре в пределах одного периода.

19. При увеличении амплитуды силы тока в катушке идеального колебательного контура на $\Delta I_{\max} = 10$ А амплитудное значение напряжения на обкладках конденсатора увеличилось в 3 раза. Определить начальную амплитуду силы тока.

(Ответ: $I_{\max 1} = 5$ А).

20. В идеальном колебательном контуре максимальный заряд на обкладках конденсатора равен $q_{\max} = 2$ нКл, а максимальная сила тока в катушке $I_{\max} = 3$ мА. Определить силу тока в катушке в тот момент, когда энергия электрического поля конденсатора вдвое превышает энергию магнитного поля катушки.

(Ответ: $i = 1{,}7$ А).

21. Собственная частота колебаний в колебательном контуре, содержащем катушку индуктивностью L и конденсатор емкостью C_1 была $\nu_1 = 30$ кГц, а в колебательном контуре с такой же катушкой и конденсатором емкостью C_2 стала $\nu_2 = 40$ кГц. Определить собственную частоту колебаний контура, если конденсаторы соединить: 1) параллельно; 2) последовательно.

(Ответ: 1) $\nu = 24$ кГц; 2) $\nu = 50$ кГц).

22. Колебательный контур состоит из конденсатора емкостью $C = 400$ нФ и катушки индуктивности. Частота собственных колебаний в нем $\nu = 24$ МГц. Найти амплитуду напряжения $U_{\max}$ на обкладках конденсатора, если амплитуда силы тока в катушке $I_{\max} = 5$ мА.

(Ответ: $U_{\max} = 8{,}3$ мВ).

23. Колебательный контур состоит из двух одинаковых конденсаторов, соединенных друг с другом параллельно, и катушке индуктивности. Собственная частота колебаний в этом контуре $\nu = 50$ кГц. Во сколько раз изменится частота, если конденсаторы соединить последовательно друг с другом?

(Ответ: уменьшится в два раза).

24. В идеальном колебательном контуре индуктивность катушки равна $L = 0{,}2$ Гн, а амплитуда силы тока $I_{\max} = 40$ мА. Найти энергию электрического поля $W_{эл}$ конденсатора и магнитного поля $W_{м}$ катушки в тот момент, когда мгновенное значение силы тока будет меньше амплитудного значения силы тока вдвое.

(Ответ: $W_{эл} = 120$ мкДж; $W_{м} = 40$ мкДж).

25. На вертикально и горизонтально отклоняющие пластины осциллографа поданы напряжения $U_y = a\sin\omega t$ и $U_x = b\cos 2\omega t$. Определить траекторию луча на экране осциллографа.

(Ответ: $\dfrac{U_x}{b} = 1 - \dfrac{2U_y^2}{a^2}$).

26. На вертикально и горизонтально отклоняющие пластины осциллографа поданы напряжения $U_y = a\sin\omega t$ и $U_x = b\sin 3\omega t$. Определить траекторию луча на экране осциллографа.

(Ответ: $\dfrac{U_x}{b} = \dfrac{3U_y}{a} - 4\left(\dfrac{U_y}{a}\right)^3$).

27. На вертикально отклоняющие пластины осциллографа подаются напряжения $U_{y1} = 5\sin\left(\omega t + \dfrac{\pi}{3}\right)$ и $U_{y2} = 10\sin\left(\omega t + \dfrac{\pi}{6}\right)$, на горизонтально отклоняющие пластины $U_x = 15\cos\omega t$. Определить траекторию луча на экране осциллографа.

28. Батарею из двух одинаковых конденсаторов емкостью $C = 10$ нФ каждый, заряженную от источника постоянного напряжения, подключают к катушке индуктивностью $L = 8$ мкГн. Найти период T и частоту ν возникающих в контуре электромагнитных колебаний, если конденсаторы в батарее соединены: а) последовательно; б) параллельно. Какова максимальная сила тока $I_{\max}$ в контуре, если напряжение источника $U_{\max} = 200$ В?

(Ответ: а) $T = 1{,}26$ мкс; $\nu = 800$ кГц; $I_{\max} = 5$ А;

б) $T = 2{,}5$ мкс; $\nu = 400$ кГц; $I_{\max} = 10$ А).

29. Батарею из двух одинаковых конденсаторов емкостью $C = 10$ нФ каждый, заряженную от источника постоянного напряжения, подключают к катушке индуктивностью $L = 8$ мкГн. Найти период T и частоту ν возникающих в контуре электромагнитных колебаний, если конденсаторы в батарее соединены параллельно. Определить силу тока в колебательном контуре через $t = 0{,}31$ с после подключения батареи конденсаторов к катушке. Напряжение источника $U_{\max} = 200$ В.

(Ответ: $T = 2{,}5$ мкс; $\nu = 400$ кГц; $i = 7$ А).

30. Батарею из двух одинаковых конденсаторов емкостью $C = 10$ нФ каждый, заряженную от источника постоянного напряжения, подключают к катушке индуктивностью $L = 8$ мкГн. Найти период T и частоту ν возни-

кающих в контуре электромагнитных колебаний, если конденсаторы в батарее соединены параллельно. Определить силу тока в колебательном контуре в момент, когда напряжение на батарее конденсаторов $u = 100$ В. Напряжение источника $U_{\max} = 200$ В.

(Ответ: $T = 2{,}5$ мкс; $\nu = 400$ кГц; $i = 8{,}7$ А).

2. ЗАТУХАЮЩИЕ КОЛЕБАНИЯ В МЕХАНИЧЕСКИХ И ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ КОЛЕБАТЕЛЬНЫХ СИСТЕМАХ

Основные законы и формулы

- Дифференциальное уравнение затухающих механических колебаний

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\delta\frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0, \tag{2.1}$$

где δ – коэффициент затухания; ω_0 – циклическая частота свободных незатухающих колебаний (собственная частота колебаний).

- Коэффициент затухания пружинного маятника

$$\delta = \frac{r}{2m}, \tag{2.2}$$

где r – коэффициент сопротивления.

- Закон движения маятника (решение дифференциального уравнения)

$$x = A_0 e^{-\delta t}\cos(\omega t + \varphi), \tag{2.3}$$

где A_0 – начальная амплитуда; φ_0 – начальная фаза; ω – циклическая частота затухающих колебаний, определяемая соотношением

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}. \tag{2.4}$$

- Собственная частота колебаний пружинного маятника

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}. \tag{2.5}$$

- Собственная частота колебаний математического маятника

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{\ell}}. \tag{2.6}$$

- Амплитуда затухающих колебаний

$$A = A_0 e^{-\delta t}. \tag{2.7}$$

- Период затухающих колебаний

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}}. \tag{2.8}$$

- Время релаксации (интервал времени, в течение которого амплитуда затухающих колебаний уменьшается в e раз)

$$\tau = \frac{1}{\delta}. \tag{2.9}$$

- Логарифмический декремент затухания

$$\Theta = \ln\frac{A(t)}{A(t+T)} = \delta T = \frac{T}{\tau} = \frac{1}{N_e}, \tag{2.10}$$

где $A(t)$ и $A(t+T)$ – амплитуды двух последовательных колебаний, соответствующих промежуткам времени, отстоящих друг от друга на период; τ – время релаксации; N_e – число колебаний, совершаемых за время релаксации.

- Добротность колебательной системы

$$Q = \frac{\pi}{\Theta} = \pi N_e. \tag{2.11}$$

- Добротность пружинного маятника

$$Q = \frac{\sqrt{km}}{r}, \tag{2.12}$$

где k – жесткость пружины.

- Дифференциальное уравнение затухающих колебаний в электрическом колебательном контуре

$$\frac{d^2 q}{dt^2} + 2\delta\frac{dq}{dt} + \omega_0^2 q = 0, \tag{2.13}$$

где q – электрический заряд на обкладках конденсатора; δ – коэффициент затухания; ω_0 – циклическая частота свободных незатухающих колебаний (собственная частота колебаний колебательного контура).

- Собственная частота колебаний в контуре

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}, \tag{2.14}$$

где L – индуктивность катушки; C – емкость конденсатора.

- Решение дифференциального уравнения

$$q = q_m e^{-\delta t} \cos\left(\omega t + \varphi_0\right), \tag{2.15}$$

где q_m – начальная амплитуда заряда; φ_0 – начальная фаза; ω – циклическая частота затухающих колебаний.

- Коэффициент затухания

$$\delta = \frac{R}{2L}, \tag{2.16}$$

где R – активное сопротивление колебательного контура.

- Амплитуда затухающих колебаний

$$q_0 = q_m e^{-\delta t}. \tag{2.17}$$

- Частота затухающих колебаний в колебательном контуре

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2} = \sqrt{\frac{1}{LC} - \left(\frac{R}{2L}\right)^2}. \tag{2.18}$$

- Период затухающих колебаний

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{1}{LC} - \left(\frac{R}{2L}\right)^2}}. \tag{2.19}$$

- Добротность колебательного контура

$$Q = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}. \tag{2.20}$$

Методические указания

1. Циклическая частота ω всегда меньше собственной частоты ω_0 колебаний (формула (2.4)) из-за сопротивления среды. В случае малого сопротивления его влиянием можно пренебречь и рассчитывать частоту по формулам (2.5), (2.6) и (2.14). Это можно делать при выполнении следующих неравенств:

$$\delta^2 << \omega_0^2 \quad \text{или} \quad \Theta^2 << 4\pi^2.$$

2. Величины A_0, ω_0, φ_0 и q_m находятся из начальных условий.

3. Затухающие колебания, описываемые уравнениями (2.1), (2.13) или уравнениями (2.3), (2.15), не являются периодическими, а тем более гармоническими. Но в случае малого затухания можно условно пользоваться понятием периода затухающих колебаний как интервала времени между соседними максимумами (минимумами) колебаний и рассчитывать его по формуле (2.8).

4. В случае увеличения сопротивления среды (усиления затухания колебаний) процесс перестает быть периодическим. Период колебаний растет и при $\delta = \omega_0$ он становится бесконечно большим, т. е. после однократного колебания система останавливается. Такой процесс называется апериодическим. В таком случае пользоваться формулами, указанными в пп. 3 нельзя.

5. Добротность колебательной системы является характеристикой быстроты затухания: чем больше величина Q, тем меньше затухание. Уравнение гармонических колебаний можно применять в том случае, если добротность колебательной системы $Q >> 1$.

6. Согласно формулам (1.10) и (1.27), полная энергия в колеблющейся системе прямо пропорциональна квадрату амплитуды. При слабых затуханиях ($\delta << \omega_0$) для определения полной энергии можно применить соотношение: $W = W_0\, e^{-2\delta t}$, где W_0 – полная энергия колеблющейся системы в начальный момент времени. Из этого выражения следует, что убыль энергии за один период T имеет вид:

$$-\Delta W = W \cdot 2\delta T \quad \text{или} \quad \frac{W}{\left(-\Delta W\right)} = \frac{Q}{2\pi},$$

т. е. добротность контура с точностью до постоянного множителя равна отношению полной энергии, запасенной в колебательной системе в данный момент времени, к убыли энергии за один период колебаний.

Примеры решения задач

Задача 1. Записать уравнение затухающих колебаний материальной точки, если в момент времени $t = T/4$ её смещение составляет $x_0 = 5$ см. Период затухающих колебаний $T = 4$ с, логарифмический декремент затуханий $\Theta = 0{,}4$, начальная фаза колебаний $\varphi_0 = 0°$.

Решение.

Запишем уравнение затухающих колебаний в общем виде с учетом условия $\varphi_0 = 0°$:

$$x = A_0\, e^{-\delta t} \cos \omega t,$$

где A_0 – начальная амплитуда; ω – циклическая частота затухающих колебаний; δ – коэффициент затухания.

Циклическая частота ω и период колебаний T связаны соотношением: $\omega = \dfrac{2\pi}{T}$, поэтому $\omega = \dfrac{2\pi}{4\,c} = \dfrac{\pi}{2}$ с$^{-1}$.

Коэффициент затухания находим из соотношения: $\Theta = \delta T$, т. е. $\delta = \dfrac{\Theta}{T} = \dfrac{0{,}4}{4\,c} = 0{,}1$ с$^{-1}$.

По условию смещение точки для момента времени $t = T/4$ равно $x_0 = 5$ см, поэтому уравнение затухающих колебаний для этого момента времени примет вид:

$$5 = A_0\, e^{-0{,}1\,\frac{4}{6}} \cos\left(\frac{\pi}{2}\,\frac{4}{6}\right) \quad \text{или} \quad 5 = A_0\, e^{-0{,}067} \cos\frac{\pi}{3},$$

откуда получаем

$$A_0 = \frac{5}{e^{-0{,}067} \cos\dfrac{\pi}{3}} = 10{,}6 \text{ см}.$$

Искомое уравнение затухающих колебаний можно записать в виде:

$$x = 10{,}6\, e^{-0{,}1t} \cos \frac{\pi}{2}\, t, \text{ см}.$$

Ответ: $x = 10{,}6\, e^{-0{,}1t} \cos \dfrac{\pi}{2}\, t$, см.

Задача 2. Математический маятник длиной $\ell = 50$ см совершает небольшие колебания в среде с коэффициентом затухания $\delta = 0{,}9$ с$^{-1}$. Определить время t_1 и число полных колебаний N, по истечении которых амплитуда маятника уменьшится в пять раз.

Решение.

При малых углах отклонения маятника его колебания будут гармоническими. Собственная частота этих колебаний определяется соотношением $\omega_0 = \sqrt{\dfrac{g}{\ell}}$.

Вследствие трения колебания маятника являются затухающими, уравнения которых

$$\alpha = \alpha_0\, e^{-\delta t} \sin \omega t,$$

где α – угол отклонения нити маятника от положения равновесия; δ – коэффициент затухания; ω – циклическая частота затухающих колебаний.

Частота затухающих колебаний

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2},$$

Тогда период колебаний будет

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}} = \frac{2\pi}{\sqrt{\dfrac{g}{\ell} - \delta^2}}.$$

Вычисления дают $T = 1{,}44$ с.

Амплитуда колебаний в момент времени t равна $A_1 = \alpha_0\, e^{-\delta t}$, а в момент времени t_1: $A_2 = \alpha_0 e^{-\delta(t+t_1)}$.

По условию $\dfrac{A_1}{A_2} = 5$, т. е. $\dfrac{\alpha_0 e^{-\delta t}}{\alpha_0 e^{-\delta(t+t_1)}} = 5$, откуда получаем: $e^{\delta t_1} = 5$ и $t_1 = \dfrac{\ln 5}{\delta} = \dfrac{\ln 5}{0{,}9\text{ с}^{-1}} = 1{,}79$ с.

Число полных колебаний определяется соотношением: $N = \dfrac{t_1}{T} = \dfrac{1{,}79}{1{,}44} = 1$.

Ответ: $t_1 = 1{,}79$ с; $N = 1$.

Задача 3. Энергия затухающих колебаний маятника, происходящих в некоторой среде, за время $t_1 = 2$ мин уменьшилась в $N = 10$ раз. Определить коэффициент сопротивления r, если масса маятника $m = 100$ г.

Решение.

Коэффициент сопротивления среды определяется из соотношения:

$$\delta = \frac{r}{2m} \quad \Rightarrow \quad r = 2\delta m,$$

где δ – коэффициент затухания.

Полная энергия затухающих колебаний пропорциональна квадрату амплитуды, т. е. $\frac{W_1}{W_2} = \frac{A_1^2}{A_2^2} = \left(\frac{A_1}{A_2}\right)^2$, откуда следует $\frac{A_1}{A_2} = \sqrt{\frac{W_1}{W_2}}$, где A_1, A_2 – амплитуды колебаний в моменты времени t и $F_{\max}$ соответственно; $A_1 = A_0\ e^{-\delta t}$; $A_2 = A_0\ e^{-\delta(t+t_1)}$.

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{A_0 e^{-\delta t}}{A_0 e^{-\delta(t+t_1)}} = e^{\delta t_1} \Rightarrow \delta = \frac{\ln\frac{A_1}{A_2}}{t_1} = \frac{\ln N}{t_1}, \text{ следовательно, } r = 2m\frac{\ln N}{t_1}.$$

Вычисления дают $r = 0{,}0038$ кг/с $= 3{,}8 \cdot 10^{-3}$ кг/с.

Ответ: $r = 3{,}8 \cdot 10^{-3}$ кг/с.

Задача 4. Колебательный контур состоит из конденсатора емкостью $C = 0{,}5$ мкФ, катушки индуктивностью $L = 20$ мГн и резистора сопротивлением $R = 44$ Ом. Определить во сколько раз уменьшится напряжение на обкладках конденсатора за один период.

Решение.

Напряжение на обкладках конденсатора в случае затухающих колебаний изменяется по следующему закону:

$$u = U_m\ e^{-\delta t}\cos\omega t.$$

В момент времени $t = 0$ напряжение $u_1 = U_m$, а через время $t = T$ оно станет равным $u_2 = U_m\ e^{-\delta T}\ (\cos\omega T = 1)$. Следовательно, отношение напряжений $\frac{u_1}{u_2} = e^{\delta T}$, где δ – коэффициент затухания; $\delta = \frac{R}{2L}$.

При небольших значениях сопротивления R период колебаний можно определить по формуле Томсона: $T = 2\pi\sqrt{LC}$, тогда отношение напряжений $\frac{u_1}{u_2} = e^{\frac{R}{2L} 2\pi\sqrt{LC}} = e^{\pi R\sqrt{\frac{C}{L}}}$; $\frac{u_1}{u_2} = e^{3{,}14\cdot 44\sqrt{\frac{5\cdot 10^{-7}}{0{,}02}}} = 2$, т. е. напряжение уменьшится в два раза.

Ответ: напряжение уменьшится в 2 раза.

Задача 5. Частота колебаний в колебательном контуре $\nu = 1\text{МГц}$, а индуктивность катушки $L = 2\,\text{Гн}$. Катушка изготовлена из медного провода, диаметр сечения которого $d = 0{,}2\,\text{мм}$ и состоит из $N = 1000$ витков. Диаметр витка $D = 4\,\text{см}$. Найти добротность Q колебательного контура. Удельное сопротивление меди $\rho = 1{,}7\cdot 10^{-8}\,\text{Ом}\cdot\text{м}$. Колебания считать медленно затухающими.

Решение.

Добротность контура определяется соотношением:

$$Q = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}, \tag{1}$$

где R – активное сопротивление контура; C – электроемкость контура.

Сопротивление контура определяется по формуле $R = \rho\frac{\ell}{S}$, где $\ell = N\pi D$ – длина проводника; $S = \frac{\pi d^2}{4}$ – площадь его поперечного сечения. Тогда сопротивление контура

$$R = \frac{4\rho DN}{d^2}. \tag{2}$$

Частота медленно затухающих колебаний определяется соотношением

$$\nu = \frac{1}{T} = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}},$$

откуда следует

$$C = \frac{1}{(2\pi\nu)^2 L}. \qquad (3)$$

Из формул (1)–(3) получаем

$$Q = \frac{\pi \nu L d^2}{2\rho D N}.$$

Переведем все единицы в СИ и произведем вычисления:

$$Q = \frac{3{,}14 \cdot 10^6 \cdot 4 \cdot 10^{-8} \cdot 2}{2 \cdot 1{,}7 \cdot 10^{-8} \cdot 0{,}04 \cdot 1000} = 2 \cdot 10^5.$$

Ответ: $Q = 2 \cdot 10^5$.

Задача 6. Колебательный контур состоит из конденсатора емкостью $C = 7$ мкФ и катушки индуктивностью $L = 0{,}23$ Гн и сопротивлением $R = 40$ Ом. Максимальный заряд на обкладках конденсатора $q_m = 0{,}56$ мКл. Найти период T колебаний контура и логарифмический декремент затухания Θ. Написать уравнение изменения со временем разности потенциалов на обкладках конденсатора.

Решение.

Период колебаний определяется соотношением $T = \frac{2\pi}{\omega}$, где ω – циклическая частота затухающих колебаний, $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$.

Собственная частота колебаний ω_0 в контуре определяется по формуле $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$. Коэффициент затухания $\delta = \frac{R}{2L}$.

Следовательно,

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{1}{LC} - \left(\frac{R}{2L}\right)^2}}. \qquad (1)$$

Логарифмический декремент затухания

$$\Theta = \delta T = \frac{\pi R}{L\sqrt{\frac{1}{LC} - \left(\frac{R}{2L}\right)^2}}. \qquad (2)$$

Переведем единицы всех величин в СИ и выполним вычисления по формулам (1) и (2), получаем следующий результат: $T = 8 \cdot 10^{-3}$ с $=$ 8 мс; $\Theta = 0{,}7$.

Разность потенциалов на обкладках конденсатора меняется со временем по закону:

$$u = U_m \; e^{-\delta t} \cos \omega t.$$

Циклическая частота

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{8 \cdot 10^{-3}\ \text{с}} = 250\pi\ \text{с}^{-1}.$$

Амплитуда напряжения

$$U_m = \frac{q_m}{C} = \frac{0{,}56 \cdot 10^{-3}}{7 \cdot 10^{-6}} = 80\ \text{В}.$$

Коэффициент затухания

$$\delta = \frac{R}{2L} = \frac{40}{2 \cdot 0{,}23} = 87\ \text{с}^{-1}.$$

Закон изменения разности потенциалов на обкладках конденсатора со временем будет иметь вид: $u = 80 e^{-87t} \cos 250\pi t$.

Ответ: $T = 8 \cdot 10^{-3}$ с $=$ 8 мс; $\Theta = 0{,}7$; $u = 80 e^{-87t} \cos 250\pi t$.

Задача 7. Колебательный контур состоит из конденсатора ёмкостью $C = 2{,}22$ нФ и катушки длиной $\ell = 20$ см, изготовленной из медной проволоки диаметром $d = 0{,}5$ мм. Найти логарифмический декремент затухания. Колебания считать медленно затухающими.

Решение.

Логарифмический декремент затухания определяется соотношением

$$\Theta = \delta T, \qquad (1)$$

где δ – коэффициент затухания; T – период колебаний.

Период можно найти по формуле Томсона:

$$T = 2\pi\sqrt{LC}\ , \qquad (2)$$

где L – индуктивность колебательного контура.

Коэффициент затухания определяется соотношением:

$$\delta = \frac{R}{2L}\ , \qquad (3)$$

где R – активное сопротивление контура, определяемое по формуле

$$R = \rho\,\frac{\ell_{пр}}{S_{пр}}\ , \qquad (4)$$

где ρ – удельное сопротивление меди ($\rho = 1{,}7\cdot10^{-8}$ Ом·м); $\ell_{пр}$ – длина проволоки; $S_{пр}$ – площадь сечения проволоки.

Из формул (1)–(4) получаем

$$\Theta = \frac{\pi\rho\ell_{пр}}{S_{пр}}\sqrt{\frac{C}{L}}\ . \qquad (5)$$

Длина проволоки

$$\ell_{пр} = N\ell_{вит} = N\pi D, \qquad (6)$$

где $\ell_{вит} = \pi D$ – длина витка катушки; D – диаметр витка; N – число витков катушки.

Площадь сечения проволоки

$$S_{пр} = \frac{\pi d^2}{4}\ . \qquad (7)$$

Подставим (6) и (7) в формулу (5), получим

$$\Theta = \frac{4\rho\pi ND}{d^2}\sqrt{\frac{C}{L}}\ . \qquad (8)$$

Индуктивность катушки определяется соотношением

$$L = \mu_0 n^2 \ell S\ , \qquad (9)$$

где $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}\ \frac{\text{Гн}}{\text{м}}$ – магнитная постоянная; $n = \frac{N}{\ell}$ – число витков на единице длины катушки; $S = \frac{\pi D^2}{4}$ – площадь сечения витка катушки.

Тогда формула (9) примет вид:

$$L = \frac{\mu_0\ N^2\ \pi\ D^2}{4\ell}. \tag{10}$$

Учитывая, что число витков N определяется по формуле $N = \frac{\ell}{d}$, из формул (8) и (10) получим:

$$\Theta = \frac{8\rho}{d^2}\sqrt{\frac{\pi\ell C}{\mu_0}}.$$

Проверим размерность величин:

$$[\Theta] = \frac{[\text{Ом}\cdot\text{м}]}{[\text{м}^2]}\sqrt{\frac{[\text{м}][\Phi]}{\left[\frac{\text{Гн}}{\text{м}}\right]}} = [\text{Ом}]\sqrt{\frac{\left[\frac{\text{Кл}}{\text{В}}\right]}{\left[\frac{\text{В}\cdot\text{с}}{\text{А}}\right]}} = [\text{Ом}]\sqrt{\frac{[\text{А}]^2}{[\text{В}]^2}} = [\text{Ом}]\frac{1}{[\text{Ом}]} = 1.$$

Вычисления дают: $\Theta = 0{,}018$.

Ответ: $\Theta = 0{,}018$.

Задачи для самостоятельного решения

1. Тело массой m = 0,6 кг, подвешенное к пружине жесткостью k = 30 Н/м, совершает в некоторой среде упругие колебания. Логарифмический декремент затухания Θ = 0,01. Определить время t, за которое амплитуда колебаний уменьшится в 3 раза, и число полных колебаний N, которое должно совершить тело за это время.

(Ответ: t = 110 мин; N = 123).

2. Математический маятник длиной ℓ = 1,5 м совершает затухающие колебания. Определить логарифмический декремент затухания, если за время t = 2 мин амплитуда колебаний маятника уменьшается вдвое.

(Ответ: Θ = 0,014).

3. Амплитуда затухающих колебаний маятника за t = 5 мин уменьшилась вдвое. За какое время t_1, считая от начала колебаний, она уменьшится в 8 раз?

(Ответ: t_1 = 15 мин).

4. Математический маятник совершает затухающие колебания. Во сколько раз уменьшится амплитуда ускорения маятника, если логарифмический декремент затухания Θ = 0,2?

(Ответ: в 1,22 раза).

5. Амплитуда затухающих колебаний маятника за t = 2 мин уменьшилась в 2 раза. Определить коэффициент затухания δ.

(Ответ: $\delta = 5{,}78 \cdot 10^{-3}$ $с^{-1}$).

6. Тело массой m = 100 г совершает затухающие колебания и за время t_1 = 1 мин теряет 60 % своей энергии. Чему равен коэффициент сопротивления r?

(Ответ: r = $1{,}5 \cdot 10^{-3}$ кг/с).

7. Период затухающих колебаний T = 1 с, логарифмический декремент затухания Θ = 0,3, начальная фаза равна нулю. Смещение точки в момент времени $t = 2T$ составляет x = 5 см. Записать уравнение движения этого колебания.

(Ответ: $x = 9{,}1\, e^{-0{,}3t} \cos 2\pi t$ см).

8. Добротность колебательного контура Q = 2. Во сколько раз отличается частота ω свободных затухающих колебаний от собственной частоты ω_0 колебательного контура.

(Ответ: $\dfrac{\omega_0}{\omega}$ = 1,03).

9. Найти время, за которое амплитуда колебаний тока в контуре с добротностью Q = 10 000 уменьшится в три раза, если частота колебаний ν = 1 мГц.

(Ответ: t = 33 с).

10. В контуре, добротность которого Q = 100 и собственная частота колебаний ν_0 = 10 кГц, возбуждаются затухающие колебания. Через сколько времени энергия, запасенная в контуре, уменьшится в два раза?

(Ответ: $t \approx 1{,}1$ мс).

11. Колебательный контур состоит из конденсатора ёмкостью C = 0,2 мкФ и катушки индуктивностью L = 5,07 мГн. При каком логарифмическом декременте затухания Θ разность потенциалов на обкладках конденсатора за t = 1 мс уменьшится в три раза? Чему при этом равно сопротивление R контура?

(Ответ: Θ = 0,22; $R \approx$ 11 Ом).

12. В колебательно контуре, содержащем катушку индуктивностью L = 10 мГн, конденсатор ёмкостью C = 405 нФ и резистор сопротивлением R = 2 Ом, возбуждаются затухающие колебания. Во сколько раз умень-

шится разность потенциалов на обкладках конденсатора за время, равное одному периоду?

(Ответ: в 1,04 раза).

13. Колебательный контур состоит из катушки индуктивностью L = 5 мГн и конденсатора ёмкостью C = 1,1 нФ. Логарифмический декремент затухания равен Θ = 0,005. За какое время будет потеряно 99 % энергии контура?

(Ответ: t = 6,8 мс).

14. Колебательный контур состоит из катушки индуктивностью L = 10 мГн, конденсатора ёмкостью C = 0,1 мкФ и резистора сопротивлением R = 20 Ом. Определить, через сколько полных колебаний амплитуда тока в контуре уменьшится в e раз.

(Ответ: N = 5).

15. На сколько процентов отличается частота ω свободных колебаний тока в колебательном контуре с добротностью Q = 5 от собственной частоты ω_0 колебаний в этом контуре?

(Ответ: $\Delta\omega/\omega_0$ = 0,5 %).

16. Колебательный контур состоит из конденсатора ёмкостью C = 4 мкФ и катушки индуктивностью L = 2 мГн и активным сопротивлением R = 10 Ом. Найти отношение энергии магнитного поля катушки к энергии электрического поля конденсатора в момент максимума тока.

(Ответ: $\dfrac{W_L}{W_C}$ = 5).

17. В контуре, добротность которого Q = 50 и собственная частота колебаний ν_0 = 5,5 кГц, возбуждаются затухающие колебания. Через сколько времени энергия, запасенная в контуре, уменьшится в n = 2 раза?

(Ответ: $t \approx$ 1 мс).

18. В колебательном контуре ёмкостью C и индуктивностью L происходят свободные затухающие колебания, при которых ток меняется со временем по закону $i = I_m\, e^{-\delta t} \sin\omega t$. Найти закон изменения с течением времени напряжения $u\,(t)$ на конденсаторе.

(Ответ: $u(t) = I_m\, Ce^{-\delta t} \sin\left(\omega t + \alpha\right); \alpha = arctg\dfrac{\omega}{\delta}$).

19. Определить период T затухающих колебаний, если период собственных незатухающих колебаний системы равен T_0 = 1 с и логарифмический декремент затухания Θ = 0,628.

20. За время t_1 = 10 с амплитуда свободных колебаний уменьшается в n_1 = 10 раз. За какое время τ амплитуда уменьшится в n_2 = 100 раз?

(Ответ: τ = 20 с).

21. За время t = 16,1 с амплитуда колебаний уменьшается в пять раз. Найти коэффициент затухания δ и время τ, за которое амплитуда уменьшается в e раз.

(Ответ: δ = 0,1; τ = 10 с).

22. За время t = 100 с система успевает совершить N = 100 колебаний. За это время амплитуда колебаний уменьшается в n = 2,718 раз. Чему равны коэффициент затухания δ и логарифмический декремент затухания Θ?

23. За время t = 100 с система успевает совершить N = 100 колебаний. За это время амплитуда колебаний уменьшается в e раз. Найти относительную убыль энергии системы $\Delta W/W$ за период колебаний.

24. Через сколько времени энергия колебаний камертона с частотой ν = 600 Гц уменьшится в $n = 10^6$ раз, если логарифмический декремент затухания равен $\Theta = 8\cdot 10^{-4}$?

25. Логарифмический декремент затухания камертона, колеблющегося с частотой ν = 100 Гц, равен Θ = 0,002. Через сколько времени амплитуда колебаний конца ножки камертона уменьшится до 0,01 от начальной величины?

26. Логарифмический декремент затухания маятника равен Θ = 0,01. Определить число полных колебаний маятника до уменьшения его амплитуды в три раза.

27. Найти время, за которое амплитуда колебаний тока в колебательном контуре с добротностью Q уменьшится в n раз, если циклическая частота затухающих колебаний равна ω.

(Ответ: $t = 2Q\ln(n)| / \omega$).

28. За какое время в колебательном контуре теряется 99 % энергии, если он содержит катушку индуктивностью L = 2 мГн и конденсатор ёмкостью C = 0,75 мкФ? Логарифмический декремент затухания равен Θ = 0,01.

(Ответ: t = 56,5 мс).

29. Начальная амплитуда затухающих колебаний маятника A_0 = 3 см. По истечении t_1 = 10 с стала A_1 = 1 см. Определить, через сколько времени амплитуда колебаний станет равна A_2 = 0,3 см.

(Ответ: t_2 = 21 с).

30. Колебательный контур состоит из катушки индуктивностью L = 5 мГн и конденсатора ёмкостью C = 0,2 мкФ. При каком логарифмическом декременте Θ и сопротивлении R цепи энергия уменьшится в n = 10 раз за три полных колебания?

(Ответ: Θ = 0,38; R = 19 Ом).

3. ВЫНУЖДЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ. ПЕРЕМЕННЫЙ ТОК. РЕЗОНАНС

Основные законы и формулы

• Дифференциальное уравнение вынужденных колебаний механической системы

$$\ddot{s} + 2\delta\dot{s} + \omega_0^2 s = \frac{F_{\max}}{m}\cos\omega t, \tag{3.1}$$

где s – колеблющаяся величина; $\delta = \dfrac{r}{2m}$ – коэффициент затухания; ω_0 – собственная частота колебательной системы; ω – частота вынуждающей силы; $F_{\max}$ – амплитуда вынуждающей силы.

• Уравнение установившихся вынужденных колебаний:

$$s = A\cos\left(\omega t - \varphi\right), \tag{3.2}$$

где A – амплитуда вынужденных колебаний; φ – сдвиг фаз между смещением и вынуждающей силой.

• Амплитуда вынужденных колебаний

$$A = \frac{F_{\max}}{m\sqrt{\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2 + 4\delta^2\omega^2}}. \tag{3.3}$$

• Сдвиг фаз

$$\varphi = arctg\,\frac{2\delta\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}. \tag{3.4}$$

• Резонансная частота

$$\omega_{рез} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\delta^2}. \tag{3.5}$$

• Резонансная амплитуда

$$A_{рез} = \frac{F_{\max}/m}{2\delta\sqrt{\omega_0^2 + \delta^2}}. \tag{3.6}$$

• Дифференциальное уравнение вынужденных электромагнитных колебаний

$$\ddot{q}+2\delta\dot{q}+\omega_0^2 q=\frac{\mathrm{E}_{\max}}{L}\cos\omega t, \tag{3.7}$$

где q – заряд на обкладках конденсатора; δ – коэффициент затухания; ω_0 – собственная частота колебательного контура; ω – частота вынуждающей силы; L – индуктивность колебательного контура; $\mathrm{E}_{\max}$ – амплитуда эдс.

- Уравнение установившихся вынужденных колебаний заряда

$$q=q_{\max}\cos(\omega t-\alpha), \tag{3.8}$$

где $q_{\max}$ – амплитуда заряда на конденсаторе; α – разность фаз между колебаниями заряда и внешней эдс.

- Амплитуда заряда

$$q_{\max}=\frac{\mathrm{E}_{\max}}{L\sqrt{\left(\omega_0^2-\omega^2\right)^2+4\delta^2\omega^2}}. \tag{3.9}$$

- Разность фаз между колебаниями заряда и эдс

$$\alpha=arctg\frac{R}{\dfrac{1}{\omega C}-\omega L}, \tag{3.10}$$

где R – активное сопротивление контура; C – электроёмкость конденсатора.

- Вынужденные колебания силы тока

$$i=\dot{q}=-\omega q_{\max}\sin(\omega t-\alpha)=I_{\max}\cos\left(\omega t-\alpha+\frac{\pi}{2}\right)=I_{\max}\cos(\omega t-\varphi), \tag{3.11}$$

где $I_{\max}=\omega q_{\max}$ – амплитуда силы тока; φ – сдвиг фаз между колебаниями тока и внешней эдс.

- Сдвиг фаз между током и внешней эдс

$$\varphi=\alpha-\frac{\pi}{2}=arctg\frac{\omega L-\dfrac{1}{\omega C}}{R}. \tag{3.12}$$

- Резонансная частота для силы тока

$$\omega_{рез}=\omega_0=\frac{1}{LC}. \tag{3.13}$$

- Закон Ома для цепи переменного тока (для RLC-контура)

$$I_{\max} = \frac{U_{\max}}{Z}, \qquad (3.14)$$

где $I_{\max}, U_{\max}$ – амплитуды силы тока и напряжения; Z – полное сопротивление цепи переменного тока, определяемое как

$$Z = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}. \qquad (3.15)$$

- Реактивное индуктивное сопротивление

$$R_L = \omega L. \qquad (3.16)$$

- Реактивное ёмкостное сопротивление

$$R_C = \frac{1}{\omega C}. \qquad (3.17)$$

- Действующие значения
  – силы тока

$$I = \frac{I_{\max}}{\sqrt{2}}; \qquad (3.18)$$

  – напряжения

$$U = \frac{U_{\max}}{\sqrt{2}}; \qquad (3.19)$$

  – эдс

$$\mathrm{E} = \frac{\mathrm{E}_{\max}}{\sqrt{2}}. \qquad (3.20)$$

- Мгновенная мощность в цепи переменного тока

$$p(t) = I_{\max}\ U_{\max}\ \cos\omega t \cos\left(\omega t - \varphi\right). \qquad (3.21)$$

- Средняя мощность

$$< P > = \frac{U_{\max} I_{\max}}{2} \cos\varphi = UI \cos\varphi, \qquad (3.22)$$

где $\cos\varphi$ – коэффициент мощности.

Методические рекомендации

1. Вынужденные механические колебания происходят под действием внешней силы. Если сила меняется по гармоническому закону

$$F = F_{\max}\cos\omega t,$$

($F_{\max}$ – амплитуда вынуждающей силы; ω – ее частота), то общее решение уравнения (3.1) равно сумме двух уравнений: общего решения соответствующего однородного уравнения: $s = A_0 e^{-\delta t}\cos(\omega t+\varphi)$ (уравнение затухающих колебаний) и частного решения неоднородного уравнения (3.2). Первое уравнение играет роль только в начальной стадии, когда колебания только устанавливаются (по прошествии времени $t >> 1/\delta$ им можно пренебречь), а второе – при установившихся колебаниях, в этом случае они являются гармоническими незатухающими колебаниями. Частота таких колебаний равна частоте вынуждающей силы.

2. При резонансных явлениях в случае малого затухания ($\delta^2 << \omega_0^2$) амплитуду вынужденных колебаний можно определять по формуле

$$A \approx \frac{F_{\max}}{2m\delta\omega_0}.$$

3. При отсутствии затухания ($\delta = 0$) смещение и вынуждающая сила имеют одинаковые фазы (это следует из уравнения (3.4).

4. При резонансе ($\omega = \omega_0$) сдвиг фаз равен $\varphi = \dfrac{\pi}{2}$ (независимо от величины затухания). Это означает, что сила опережает смещение по фазе на $\dfrac{\pi}{2}$. При увеличении частоты вынуждающей силы ($\omega >> \omega_0$) сдвиг фаз $\varphi \to \pi$.

5. Вынужденные электромагнитные колебания в колебательном контуре происходят под действием внешней периодически изменяющейся электродвижущей силы (эдс) $\mathrm{E} = \mathrm{E}_{\max}\cos\omega t$ или переменного напряжения $U = U_{\max}\cos\omega t$, где $\mathrm{E}_{\max}, U_{\max}$ – амплитуды эдс и напряжения соответственно. Уравнение (3.8) является частным решением дифференциального уравнения (3.7) для установившихся незатухающих колебаний заряда.

Максимальное значение заряда на обкладках конденсатора определяется не только формулой (3.9), но и уравнением, содержащим характеристики колебательного контура:

$$q_{\max} = \frac{\mathrm{E}_{\max}}{\omega\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \dfrac{1}{\omega C}\right)^2}}$$

(учитываем, что $\omega_0 = \dfrac{1}{\sqrt{LC}}$; $\delta = \dfrac{R}{2L}$).

Амплитуда силы тока соответственно определяется соотношением

$$I_{\max} = \frac{\mathrm{E}_{\max}}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \dfrac{1}{\omega C}\right)^2}}.$$

6. При рассмотрении цепей переменного тока мгновенные значения силы тока i и напряжения u складываются по правилу сложения векторов с учетом разности фаз между ними.

7. Полное сопротивление цепи переменного тока определяется по формуле (3.15), которое состоит из активного сопротивления R и двух реактивных сопротивлений: ёмкостного R_C и индуктивного R_L. Обратите внимание на то, что отсутствие в цепи конденсатора или катушки означает отсутствие емкостного или индуктивного сопротивлений.

8. В случае одинаковой фазы колебаний силы тока и напряжения в цепи переменного тока мгновенная мощность определяется по формуле

$$p = I_{\max}\, U_{\max} \cos^2 \omega t.$$

Среднее значение $<\cos^2 \omega t> = \dfrac{1}{2}$, поэтому

$$p = \frac{I_{\max} U_{\max}}{2}.$$

Примеры решения задач

Задача 1. Определить, на какую величину $\Delta \nu$ резонансная частота отличается от частоты $\nu_0 = 1$ кГц собственных колебаний системы, характеризуемой коэффициентом затухания $\delta = 400$ с$^{-1}$.

Решение.

Циклическая частота при резонансе определяется выражением

$$\omega_{рез} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\delta^2},$$

где ω_0 – циклическая частота собственных колебаний системы.

Частота колебаний ν и циклическая частота ω связаны соотношением $\omega = 2\pi\nu$, поэтому $\omega_0 = 2\pi\nu_0$, $\omega_{рез} = 2\pi\nu_{рез}$. Отсюда следует:

$$2\pi\nu_{рез} = \sqrt{4\pi^2\nu_0^2 - 2\delta^2},$$

тогда

$$\nu_{рез} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{4\pi^2\nu_0^2 - 2\delta^2}.$$

Резонансная частота меньше собственной частоты колебаний на величину

$$\Delta\nu = \nu_0 - \frac{1}{2\pi}\sqrt{4\pi^2\nu_0^2 - 2\delta^2}.$$

Выразим величину ν_0 в единицах СИ: ν_0 = 1000 Гц и произведем вычисления. Получим $\Delta\nu$ = 4,06 Гц.

Ответ: $\Delta\nu$ = 4,06 Гц.

Задача 2. Пружинный маятник (жесткость пружины равна k = 10 Н/м, масса груза m = 100 г) совершает вынужденные колебания в вязкой среде с коэффициентом сопротивления $r = 2\cdot10^{-2}$ кг/с. Определить коэффициент затухания δ и резонансную амплитуду $A_{рез}$, если амплитудное значение вынуждающей силы $F_{\max}$ = 10 мН.

Решение.

Коэффициент затухания определяется по формуле

$$\delta = \frac{r}{2m}. \quad (1)$$

Резонансную амплитуду колебаний находим из соотношения:

$$A_{рез} = \frac{F_{\max}/m}{2\delta\sqrt{\omega_0^2 + \delta^2}}, \quad (2)$$

где ω_0 – собственная частота колебаний пружинного маятника, определяемая выражением $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$.

С учетом последней формулы выражение (2) примет вид:

$$A_{рез} = \frac{F_{\max}/m}{2\delta\sqrt{\frac{k}{m} + \delta^2}}.$$

Выразим все величины в единицах СИ и произведем вычисления:

$$\delta = \frac{2 \cdot 10^{-2} \text{ кг/с}}{2 \cdot 0{,}1 \text{кг}} = 0{,}1 \text{с}^{-1};$$

$$A_{рез} = \frac{10^{-2} \text{ Н}}{0{,}1 \text{кг} \cdot 2 \cdot 0{,}1 \text{с}^{-1} \sqrt{\frac{10 \text{ Н/м}}{0{,}1 \text{кг}} + 0{,}01 \text{с}^{-2}}} = 0{,}05 \text{ м}.$$

Ответ: $\delta = 0{,}1 \text{с}^{-1}$; $A_{рез} = 0{,}05$ м.

Задача 3. Определить резонансную частоту $\nu_{рез}$ колебательной системы, если собственная частота колебаний ν_0 = 300 Гц а логарифмический декремент затухания Θ = 0,2.

Решение.

Резонансная частота колебаний определяется соотношением:

$$\nu_{рез} = \frac{\omega_{рез}}{2\pi}, \tag{1}$$

где $\omega_{рез}$ – циклическая резонансная частота, $\omega_{рез} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\delta^2}$; δ – коэффициент затухания, который определяется по формуле $\delta = \frac{\Theta}{T}$.

Период колебаний $T = \frac{2\pi}{\omega_0}$, следовательно, $\delta = \frac{\Theta\omega_0}{2\pi}$, тогда формула (1) примет вид:

$$\nu_{рез} = \frac{\omega_0}{2\pi}\sqrt{1 - \frac{\Theta^2}{2\pi^2}} = \nu_0\sqrt{1 - \frac{\Theta^2}{2\pi^2}}.$$

Подставив числовые значения, получим $\nu_{рез}$ = 299,7 Гц.

Ответ: $\nu_{рез}$ = 299,7 Гц.

Задача 4. Колебательный контур, состоящий из последовательно соединенных резистора сопротивлением R = 50 Ом и конденсатора, подключен к источнику внешнего напряжения, закон изменения которого $u = U_{\max}\cos\omega t$. Определить разность фаз φ между током и внешним напряжением, если амплитуда напряжения $U_{\max}$ = 200 В и амплитуда установившегося тока в цепи составляет $I_{\max}$ = 2 А.

Решение.

Сила тока установившихся вынужденных колебаний меняется согласно уравнению

$$i = I_{\max}\cos(\omega t - \varphi),$$

где ω – циклическая частота колебаний внешнего напряжения; φ – сдвиг фаз между током и внешним напряжением.

Разность фаз определяется из соотношения:

$$tg\,\varphi = \frac{\omega L - \dfrac{1}{\omega C}}{R}.$$

По условию задачи, катушка индуктивности в цепи отсутствует, поэтому индуктивное сопротивление $R_L = \omega L = 0$. Тогда $tg\,\varphi = -\dfrac{1}{\omega CR}$.

Амплитуда силы тока установившихся вынужденных колебаний определяется выражением

$$I_{\max} = \frac{U_{\max}}{\sqrt{R^2 + \left(\dfrac{1}{\omega C}\right)^2}},$$

откуда получаем

$$C = \frac{1}{\omega\sqrt{\left(\dfrac{U_{\max}}{I_{\max}}\right)^2 - R^2}}.$$

Следовательно,

$$tg\varphi = -\sqrt{\left(\frac{U_{\max}}{RI_{\max}}\right)^2 - 1}.$$

Подставим числовые значения, получим $tg\varphi$ = –1,518. Сдвиг фаз $\varphi = arctg(-1{,}518) = -60°$, т. е. ток опережает по фазе внешнее напряжение на –60°.

Ответ: φ = –60°.

Задача 5. Цепь, состоящая из последовательно соединенных резистора сопротивлением R = 10 Ом, катушки индуктивностью L = 1 мГн и конденсатора емкостью C = 10 мкФ, подключена к источнику эдс $e = \mathrm{E}_{\max}\cos\omega t$. Определить: 1) частоту $\omega_{рез}$, при которой наступает резонанс; 2) действующие значения силы тока I и напряжений U_R, U_L, U_C на всех элементах цепи. Действующее значение эдс равно E = 50 В.

Решение.

Данная электрическая цепь представляет собой колебательный контур, в котором под действием переменной эдс возникают вынужденные электромагнитные колебания частотой ω. Сила тока в цепи будет изменяться по закону: $i = I_{\max}\cos(\omega t - \varphi)$. Амплитуда установившихся колебаний силы тока $I_{\max}$ определяется соотношением:

$$I_{\max} = \frac{\mathrm{E}_{\max}}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}}. \quad (1)$$

Амплитудные и действующие значения тока и эдс связаны соотношениями: $I_{\max} = I\sqrt{2}; \mathrm{E}_{\max} = \mathrm{E}\sqrt{2}$, поэтому выражение (1) можно записать в виде:

$$I = \frac{\mathrm{E}}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}}. \quad (2)$$

Из формулы (2) следует, что максимальное значение силы тока при резонансе будет достигнуто при условии $\left(\omega L - 1/(\omega C)\right) = 0$, откуда получаем резонансную частоту $\omega = \omega_{рез} = \dfrac{1}{\sqrt{LC}}$. Резонансная сила тока будет $I = \dfrac{\mathrm{E}}{R}$.

Действующие значения напряжений на каждом элементе цепи находятся по закону Ома для участка цепи:

$$U_R = IR = \mathrm{E}; \quad U_C = IR_C = I/(\omega C); \quad U_L = IR_L = I\omega L,$$

где $R_C = \dfrac{1}{\omega C}$ – емкостное сопротивление; $R_L = \omega L$ – индуктивное сопротивление цепи.

Выразим все величины в единицах СИ и произведем вычисления.

$$\omega_{рез} = \frac{1}{\sqrt{10^{-3}\ \text{Гн} \cdot 10^{-5}\ \text{Ф}}} = 10^4\ \frac{\text{рад}}{\text{с}};$$

$$I = \frac{50\ \text{В}}{10\ \text{Ом}} = 5\ \text{А}; \ U_R = 50\ \text{В}; \ U_C = \frac{5\ \text{А}}{10^4\ \dfrac{\text{рад}}{\text{с}} \cdot 10^{-5}\ \text{Ф}} = 50\ \text{В};$$

$$U_L = 5\ \text{А} \cdot 10^4\ \frac{\text{рад}}{\text{с}} \cdot 10^{-3}\ \text{Гн} = 50\ \text{В}.$$

Ответ: $\omega_{рез} = 10^4\ \dfrac{\text{рад}}{\text{с}}; \quad U_R = U_L = U_C = 50\ \text{В}.$

Задача 6. В цепь переменного тока стандартной частоты (ν = 50 Гц) включены последовательно конденсатор емкостью C = 5 мФ и катушка длиной ℓ = 25 см, диаметром D = 4 см, содержащая N = 1000 витков медной проволоки площадью поперечного сечения S = 1 мм^2. Определить, какую часть полного сопротивления цепи составляют реактивные сопротивления катушки R_L и конденсатора R_C. Чему равно действующее значение силы тока в цепи, если амплитуда внешнего напряжения $U_{\max}$ = 110 В?

Решение.

Полное сопротивление последовательной RLC-цепи определяется соотношением:

$$Z = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2},$$

где R – активное сопротивление катушки; $\omega L = R_L$ – её реактивное сопротивление; $\dfrac{1}{\omega C} = R_C$ – реактивное сопротивление конденсатора; ω – циклическая частота внешнего напряжения.

Активное сопротивление катушки (медного провода) определяется по формуле $R = \rho \dfrac{\ell_{пр}}{S}$, где $\ell_{пр}$ – длина проволоки, $\ell_{пр} = N\pi D$; ρ – удельное сопротивление меди (ρ = 1,7·10^{-8} Ом·м). Тогда

$$R = \rho \frac{N\pi D}{S}.$$

Циклическая частота

$$\omega = 2\,\pi\,\nu.$$

Индуктивность катушки

$$L = \frac{\mu_0\,N^2\,S_к}{\ell},$$

где μ_0 – магнитная постоянная (μ_0 = 4π·10^{-7} Гм/м); $S_к = \dfrac{\pi D^2}{4}$ – площадь сечения катушки.

Следовательно, реактивное сопротивление катушки

$$R_L = \frac{2\,\pi\,\nu\,\mu_0\,N^2\,\pi\,D^2}{4\ell} = \frac{\mu_0\,\nu\,(\pi ND)^2}{2\ell}.$$

Реактивное сопротивление конденсатора

$$R_C = \frac{1}{2\,\pi\,\nu\,C}.$$

Доля реактивного сопротивления катушки от общего сопротивления цепи:

$$\frac{R_L}{Z} = \frac{\mu_0\,\nu\,(\pi ND)^2}{2\ell\sqrt{\left(\rho\dfrac{N\pi D}{S}\right)^2 + \left(\dfrac{\mu_0\,\nu\,(\pi ND)^2}{2\ell} - \dfrac{1}{2\pi\nu C}\right)^2}}.$$

Подставляя числовые значения величин в единицах СИ и вычисляя, получаем $\dfrac{R_L}{Z} = 0{,}79$.

Реактивное сопротивление конденсатора составляет от общего сопротивления

$$\frac{R_C}{Z} = \frac{1}{2\pi\nu C\sqrt{\left(\rho\,\dfrac{N\pi D}{S}\right)^2 + \left(\dfrac{\mu_0\;\nu\;(\pi ND)^2}{2\ell} - \dfrac{1}{2\pi\nu C}\right)^2}}.$$

Вычисления дают $\dfrac{R_C}{Z} = 0{,}25$.

Действующее значение силы тока связано с его амплитудным значением соотношением $I = I_{\max}/\sqrt{2}$. По закону Ома для цепи переменного тока

$$I_{\max} = \frac{U_{\max}}{Z} = \frac{U_{\max}}{\sqrt{\left(\rho\dfrac{N\pi D}{S}\right)^2 + \left(\dfrac{\mu_0\nu(\pi ND)^2}{2\ell} - \dfrac{1}{2\pi\nu C}\right)^2}},$$

тогда

$$I = \frac{U_{\max}}{\sqrt{2\left[\left(\rho\,\dfrac{N\pi D}{S}\right)^2 + \left(\dfrac{\mu_0\;\nu\;(\pi ND)^2}{2\ell} - \dfrac{1}{2\pi\nu C}\right)^2\right]}}.$$

Вычисления дают $I = 30{,}9$ А.

Ответ: $\dfrac{R_L}{Z} = 0{,}79$; $\dfrac{R_C}{Z} = 0{,}25$; $I = 30{,}9$ А.

Задача 7. Параллельный RLC-контур подключен к источнику эдс (E = 30 В) как показано на рис. 3.1. Определить действующие значения
силы тока на всех участках данной цепи, если R = 1 Ом, L = 1 мГн, C = 0,11 мкФ и циклическая часто-

2

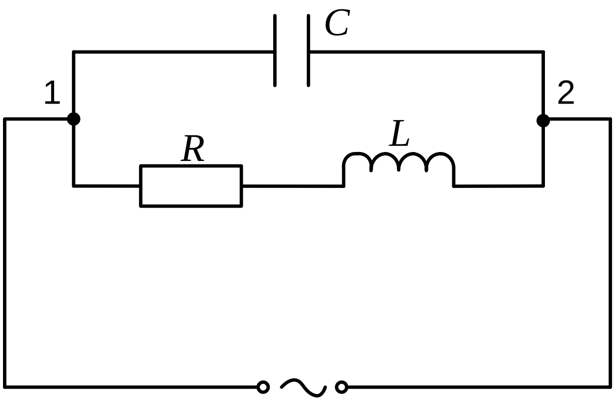


Рис. 3.1

та колебаний внешнего напряжения ω = 10^5 рад/с.

Решение.

Каждая параллельная ветвь данной цепи образует с источником тока неполный колебательный контур. Учитывая, что при параллельном соединении напряжение в каждой ветви одинаково и равно напряжению источника тока, запишем на основании закона Ома для цепи переменного тока следующие выражения:

$$I_1 = \frac{\mathrm{E}}{\sqrt{R^2 + R_L^2}} = \frac{\mathrm{E}}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}} \approx \frac{\mathrm{E}}{\omega L}. \tag{1}$$

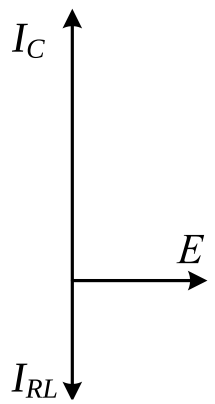
(учитываем, что $I = I_{\max}/\sqrt{2}, \mathrm{E} = \mathrm{E}_{\max}/\sqrt{2}$ и $R^2 << (\omega L)^2$)

$$I_2 = \frac{\mathrm{E}}{R_C} = \omega C \mathrm{E}. \tag{2}$$

Вычисления дают следующий результат: $I_1 = 0{,}30$ А; $I_2 = 0{,}33$ А. Полученные токи имеют разные фазы колебаний, между каждой силой тока и эдс существует разность фаз, определяемая выражениями:

$$tg\,\varphi_1 = \frac{\omega L}{R} = 100 \left(\frac{1}{\omega C} = 0 \right) \Rightarrow \varphi_1 \approx \frac{\pi}{2};$$

$$tg\,\varphi_2 = -\infty \; (R = 0, L = 0) \Rightarrow \varphi_2 = -\frac{\pi}{2}.$$



Полученный результат говорит о том, что ток, текущий через конденсатор, опережает по фазе эдс источника на $\frac{\pi}{2}$, а ток, проходящий через последовательно соединенные между собой резистор и катушку, – отстает от эдс на $\frac{\pi}{2}$ (рис. 3.2). По правилу сложения векторов находим ток в неразветвленной части цепи: $I = I_2 - I_1 = 0{,}03$ А.

Ответ: $I_1 = 0{,}3$ А; $I_2 = 0{,}33$ А; $I = 0{,}03$ А.

Задача 8. В цепи переменного тока стандартной частоты (рис. 3.3), амплитуда силы

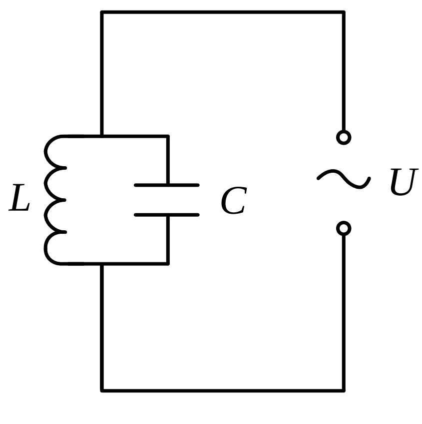


Рис. 3.3

тока неразветвленной части цепи равна нулю. Найти индуктивность катушки, если емкость конденсатора C = 10 мкФ.

Решение.

На рис. 3.3 изображен параллельный RLC-контур, в котором наблюдается резонанс токов, так как выполняется условие: $I_{\max} = \left| I_L - I_C \right| = 0$ (I_L, I_C – амплитудные значения силы тока через катушку и конденсатор соответственно). Из данной формулы получаем

$$I_L = I_C . \tag{1}$$

По закону Ома для каждой ветви цепи (с учетом того, что при параллельном соединении напряжения на всех участках одинаковы и равны внешнему напряжению) запишем соотношения:

$$I_L = \frac{U_{\max}}{\omega L}; \quad I_C = \omega\, C\, U_{\max} ,$$

или, учитывая формулу (1),

$$\frac{U_{\max}}{\omega L} = \omega\, C\, U_{\max} ,$$

откуда получаем

$$L = \frac{1}{\omega^2\, C} = \frac{1}{4\, \pi^2\, \nu^2\, C} , \tag{2}$$

где $\omega L = R_L$ – индуктивное сопротивление; $\dfrac{1}{\omega C} = R_C$ – емкостное сопротивление; $\omega = 2\pi\nu$ – циклическая частота колебаний внешнего напряжения.

Подставляя в выражение (2) числовые значения величин в единицах СИ и производя вычисления, получаем L = 1,05 Гн.

Ответ: L = 1,05 Гн.

Задача 9. Катушка с активным сопротивлением R = 10 Ом и индуктивностью L включена в цепь переменного тока стандартной частоты и напряжением U = 127 В. Определить индуктивность катушки, если известно, что она поглощает мощность P = 400 Вт и разность фаз между током и напряжением составляет φ = 60°.

Решение.

Катушка обладает как активным сопротивлением R, так и реактивным сопротивлением $R_L = \omega L = 2\pi\nu L$. Полное сопротивление катушки:

$$Z=\sqrt{R^2+R_L^2}=\sqrt{R^2+4\ \pi^2\ \nu^2\ L^2}\ .$$

По закону Ома для цепи переменного тока:

$$I_{\max}=\frac{U_{\max}}{Z},$$

или, учитывая взаимосвязь действующего и амплитудного значений силы тока и напряжения ($I=I_{\max}/\sqrt{2}, U=U_{\max}/\sqrt{2}$),

$$I=\frac{U}{Z}=\frac{U}{\sqrt{R^2+4\ \pi^2\ \nu^2\ L^2}}\ .$$

Мощность, поглощаемая катушкой, определяется по формуле

$$P=IU\cos\varphi=\frac{U^2\cos\varphi}{\sqrt{R^2+4\ \pi^2\ \nu^2\ L^2}},$$

откуда выразим индуктивность L катушки:

$$L=\frac{\sqrt{U^4\cos^2\varphi-P^2R^2}}{2\ \pi\ \nu\ R}\ .$$

Вычисления дают L = 55 мГн.

Ответ: L = 55 мГн.

Задача 10. Диэлектрик, диэлектрическая проницаемость которого равна $\varepsilon=2{,}8$, используется в конденсаторе в качестве изолятора. Конденсатор, находясь под напряжением, поглощает некоторую мощность, причем при частоте $\nu=50$ Гц коэффициент мощности $\cos\varphi=0{,}1$. Определить удельное сопротивление диэлектрика.

Решение.

Конденсатор в цепи переменного тока обладает активным R и реактивным $R_C=\dfrac{1}{\omega C}$ сопротивлениями. Полное сопротивление конденсатора

$$Z=\sqrt{R^2+R_C^2}=\sqrt{R^2+\frac{1}{\omega^2C^2}}, \qquad (1)$$

где $\omega=2\pi\nu$ – циклическая частота колебаний внешнего напряжения; C – электроемкость конденсатора.

Активное сопротивление конденсатора определим по формуле

$$R=\rho\frac{\ell}{S}, \tag{2}$$

где ℓ – длина диэлектрика, равная расстоянию d между обкладками конденсатора; S – площадь сечения диэлектрика, равная площади пластины конденсатора.

Электроемкость плоского конденсатора определяется соотношением

$$C=\frac{\varepsilon\varepsilon_0 S}{d}, \tag{3}$$

где $\varepsilon_0=8{,}85\cdot10^{-12}\,\frac{\text{Ф}}{\text{м}}$ – электрическая постоянная.

Коэффициент мощности определяется по формуле

$$\cos\varphi=\frac{R}{Z}=\frac{R}{\sqrt{R^2+\frac{1}{\omega^2 C^2}}}=\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{\omega^2 C^2 R^2}}}. \tag{4}$$

С учетом (2) и (3) формула (4) принимает вид:

$$\cos\varphi=\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{4\pi^2\nu^2\rho^2\varepsilon^2\varepsilon_0^2}}},$$

откуда получаем

$$\rho=\frac{\cos\varphi}{2\pi\nu\varepsilon\varepsilon_0\sqrt{1-\cos\varphi}}.$$

Вычисления дают $\rho=12{,}9$ МОм$\cdot$м.

Ответ: $\rho=12{,}9$ МОм$\cdot$м.

Задачи для самостоятельного решения

1. Маятник совершает затухающие колебания, начальная амплитуда которых A_0 = 10 см, а начальная фаза φ_0 = 0. Коэффициент затухания δ = 1,5 с$^{-1}$. На маятник действует внешняя периодически изменяющаяся сила, в результате чего устанавливаются вынужденные колебания, урав-

нение которых имеет вид: $x = 4\sin\left(10\pi t - 0{,}75\pi\right)$ см. Написать уравнение $x_1(t)$ собственных колебаний маятника.

(Ответ: x_1 = 10 $e^{-1,5t}\sin 10{,}4\pi t$ см).

2. Гиря массой m = 400 г, подвешенная на спиральной пружине жесткостью k = 40 Н/м, опущена в масло. Коэффициент сопротивления движению в этой системе r = 0,5 кг/с. На верхний конец пружины действует периодическая сила, изменяющаяся по закону: $F = \cos\,\omega t$. Определить: 1) амплитуду A вынужденных колебаний, если частота вынуждающей силы в два раза меньше собственной частоты колебаний; 2) частоту ω вынуждающей силы, при которой амплитуда вынужденных колебаний максимальна; 3) резонансную амплитуду $A_{рез}$.

(Ответ: A = 3,32 см; ω = 9,96 с$^{-1}$; $A_{рез}$ = 0,2 м).

3. Маленький шарик подвешен на нити длиной ℓ = 1 м к потолку вагона. При какой скорости вагона шарик будет особенно сильно колебаться под действием ударов колес о стыки рельсов? Длина рельса S = 12,5 м.

(Ответ: $\upsilon \approx$ 6,2 м/с $\approx$ 22,3 км/ч).

4. Амплитуды скоростей вынужденных колебаний при частотах вынуждающей силы x_1 = 200 Гц и x_1 = 300 Гц равны между собой. Принимая, что амплитуда вынуждающей силы в обоих случаях одинакова, определить частоту ν, соответствующую максимуму скорости.

(Ответ: ν = 245 Гц).

5. Амплитуды смещений вынужденных колебаний при частотах вынуждающей силы x_1 = 200 Гц и x_1 = 300 Гц равны между собой. Определить частоту ν, соответствующую максимуму смещения.

(Ответ: ν = 255 Гц).

6. Тело подвешено на пружине и имеет собственный период колебаний T_0 = 0,5 с. На тело действует направленная вертикально вынуждающая сила с амплитудой $F_{\max}$ = 10^{-3} Н и сила сопротивления, пропорциональная скорости движения. Определить коэффициент сопротивления r среды, если амплитуда колебаний смещения при резонансе $A_{рез}$ = 5 см.

(Ответ: r = 1,06·10^{-3} кг/с).

7. Вагон массой m = 8·10^4 кг имеет четыре рессоры. Жесткость пружин каждой рессоры равна k = 500 кН/м. При какой скорости υ вагон начнет сильно раскачиваться вследствие толчков на стыках рельс, если длина рельса равна S = 12,8 м?

(Ответ: υ = 10,2 м/с).

8. Шарик массой k = 50 г подвешен на невесомой пружине жесткостью k = 20 Н/м. Под действием вынуждающей вертикальной гармонической

силы с частотой ω = 25 рад/с шарик совершает установившиеся колебания с амплитудой $y_{\max}$ = 1,3 см. При этом смещение шарика отстает по фазе от вынуждающей силы на φ = 0,75 π. Определить добротность данного осциллятора и работу вынуждающей силы за один период.

(Ответ: Q = 0,35; $A = 6 \cdot 10^{-3}$ Дж).

9. Собственная частота колебаний колебательной системы ν_0 = 10 кГц. Определить логарифмический декремент затухания Θ данной системы, для которой резонанс наблюдается при частоте, меньше собственной на $\Delta\nu$ = 2 Гц.

(Ответ: Θ = 0,089).

10. Тело совершает вынужденные колебания в среде с коэффициентом сопротивления k = 1 г/с. Считая затухание малым, определить амплитудное значение вынуждающей силы $F_{\max}$, если резонансная амплитуда $A_{рез}$ = 0,5 см и частота собственных колебаний ν_0 = 10 Гц.

(Ответ: $F_{\max}$ = 0,314 мН).

11. Колебательный контур, состоящий из последовательно соединенных конденсатора емкостью C = 40 мкФ и катушки индуктивностью L = 0,2 Гн, имеющей активное сопротивление R = 9,7 Ом, подключен к источнику внешнего напряжения, амплитуда которого $U_{\max}$ = 180 В. Определить: 1) амплитудное значение силы тока $I_{\max}$ в цепи; 2) разность фаз φ между силой тока и внешним напряжением; 3) амплитудное значение напряжения U_{L_m} на катушке; 4) амплитудное значение напряжения U_{C_m} на конденсаторе.

(Ответ: 1) $I_{\max}$ = 9,27 А; 2) φ = –60°; 3) U_{L_m} = 589 В; 4) U_{C_m} = 738 В).

12. Генератор, частота которого составляет ν = 32 кГц и амплитудное значение напряжения $U_{\max}$ = 120 В, включен в резонирующую цепь, емкость которой C = 1 нФ. Определить амплитудное значение напряжения на конденсаторе U_{C_m}, если активное сопротивление цепи R = 5 Ом.

(Ответ: U_{C_m} = 119 кВ).

13. Плоский конденсатор залит нитробензолом, удельное сопротивление и диэлектрическая проницаемость которого равны соответственно $\rho = 10^7$ Ом·м и ε = 32. Найдите разность фаз φ_1 и φ_2 между силой тока и напряжением, если частота колебаний тока равна: а) ν_1 = 50 Гц; б) ν_2 = 1000 Гц.

(Ответ: φ_1 = 41,7°; φ_2 = 86,8°).

14. Последовательно соединенные конденсатор, катушка индуктивностью L = 0,1 Гн и резистор сопротивлением R = 2 Ом подключены к источнику переменного напряжения. Какую емкость должен иметь конденсатор, чтобы при частоте ν = 50 Гц сила тока в цепи имела наибольшее значение? Какое максимальное напряжение $U_{\max}$ можно подать на эту цепь без опасности пробоя конденсатора, если он выдерживает напряжение $U_C \leq$ 400 В?

(Ответ: C = 100 мкФ; $U_{\max}$ = 25 В).

15. Катушка с активным сопротивлением R = 10 Ом и индуктивностью L включена в цепь переменного тока с действующим значением напряжения U = 127 В и частотой ν = 50 Гц. Определить индуктивность катушки L и ее импеданс Z, если известно, что она поглощает мощность P = 400 Вт. Постройте векторную диаграмму.

(Ответ: L = 55 мГн; Z = 20 Ом).

16. Цепь, состоящая из последовательно соединенных резистора сопротивлением R = 100 Ом и катушки с активным сопротивлением, включена в сеть с действующим напряжением U = 300 В. Воспользовавшись векторной диаграммой, определить тепловую мощность P, выделяемую на катушке, если действующие значения напряжения на сопротивлении и катушке соответственно равны U_R = 150 В и U_L = 250 В.

(Ответ: P = 25 Вт).

17. Коэффициент мощности в цепи с последовательно соединенными конденсатором и резистором равен $\cos\varphi_1$ = 0,6. Определить коэффициент мощности $\cos\varphi_2$, если те же элементы включить параллельно.

(Ответ: $\cos\varphi_2$ = 0,8).

18. Катушка индуктивностью L = 0,7 Гн и активным сопротивлением R_1 = 20 Ом соединена последовательно с резистором сопротивлением R_2. К концам этой цепи приложено переменное напряжение с действующим значением U = 220 В стандартной частоты. При каком значении R_2 в цепи будет выделяться максимальная мощность? Чему она равна?

(Ответ: R_2 = 200 Ом; $P_{\max}$ = 110 Вт).

19. Последовательно соединенные резистор сопротивлением R_1 = 15 Ом и катушка индуктивностью L = 0,1 Гн и активным сопротивлением R_2 = 10 Ом подключены к источнику переменного напряжения стандартной частоты, действующее значение которого U = 220 В. Какая мощность P потребляется участком цепи, содержащем указанные элементы, если последовательно

подсоединить конденсатор, при котором разность фаз между силой тока и напряжением равна нулю? Какую емкость должен иметь конденсатор?

(Ответ: P = 1936 Вт; C = 101 мкФ).

20. К сети с действующим напряжением U = 100 В подключили катушку, индуктивное сопротивление которой R_L = 30 Ом и полное сопротивление (импеданс) Z = 50 Ом. Найти разность фаз φ между током и напряжением, а также тепловую мощность P, выделяемую в катушке.

(Ответ: $\varphi \approx$ 37°; P = 0,16 кВт).

21. В цепь переменного тока напряжением U = 220 В и частотой ν = 50 Гц включены последовательно резистор сопротивлением R = 100 Ом, конденсатор емкостью C = 35,4 мкФ и катушка индуктивностью L = 0,7 Гн. Найти силу тока I в цепи и падение напряжения на конденсаторе U_C, резисторе U_R и катушке U_L.

(Ответ: I = 1,34 А; U_C = 121 В; U_R = 134 В; U_L = 295 В).

22. Конденсатор емкостью C = 1 мкФ и катушка с активным сопротивлением R = 0,1 Ом и индуктивностью L = 1 мГн подключили параллельно к источнику синусоидального напряжения с действующим значением U = 31 В. Найти частоту $\omega_{рез}$, при которой наступает резонанс, действующее значение подводимого тока I при резонансе и силу тока через катушку I_L и конденсатор I_C.

(Ответ: $\omega_{рез}$ = 30 кГц; I = 3 мА; I_L = 1 А; I_C = 1 А).

23. Колебательный контур содержит конденсатор емкостью C = 1,2 нФ и катушку индуктивностью L = 6 мкГн и активным сопротивлением R = 0,5 Ом. Какую среднюю мощность нужно подводить к контуру, чтобы поддержать в нем незатухающие гармонические колебания с амплитудой напряжения на конденсаторе U_{C_m} = 10 В.

(Ответ: $\langle P \rangle$ = 5 мВт).

24. Цепь переменного тока образована последовательно включенным активным сопротивлением R = 800 Ом, индуктивностью L = 1,27 Гн и емкостью C = 1,59 мкФ. На зажимы цепи подано переменное напряжение частотой ν = 50 Гц с действующим значением U = 220 В. Найти: а) действующее значение силы тока I в цепи; б) сдвиг фаз φ между током и напряжением; в) действующие значения напряжения на зажимах каждого из элементов цепи (U_R, U_L, U_C); г) среднюю мощность $\langle P \rangle$, выделяющуюся в цепи за один период колебаний.

(Ответ: а) I = 0,12 А; б) φ = –63,5°; в) U_R = 98,5 В; U_L = 49 В; U_C = 246 В; г) $\langle P \rangle$ = 12,1 Вт).

25. Колебательный контур содержит катушку индуктивностью L = 1 мкГн и конденсатор электроемкостью C = 40 нФ. Для поддержания в колебательном контуре незатухающих гармонических колебаний с амплитудным значением напряжения на катушке U_L = 1,5 В необходимо подводить среднюю мощность $\langle P \rangle$ = 1,5 мВт. Определить добротность колебательного контура.

(Ответ: Q = 150).

26. В цепь переменного тока стандартной частоты напряжением U = 220 В включена катушка с активным сопротивлением. Сдвиг фаз между напряжением и током составляет φ = 30°. Определить индуктивность катушки L, если известно, что она поглощает мощность $\langle P \rangle$ = 445 Вт.

(Ответ: L = 0,15 Гн).

27. В колебательный контур, содержащий последовательно соединенные конденсатор и катушку с активным сопротивлением, подключено внешнее переменное напряжение, частоту которого можно менять, не меняя его амплитуды. При частотах внешнего напряжения φ_1 = 400 с$^{-1}$ и φ_2 = 600 с$^{-1}$ амплитуды силы тока в цепи оказались одинаковыми. Определить резонансную частоту тока.

(Ответ: ω = 490 с$^{-1}$).

28. В цепь переменного тока стандартной частоты включена катушка длиной ℓ = 30 см и площадью поперечного сечения S = 10 см^2, содержащая N = 1000 витков. Определить активное сопротивление R катушки, если известно, что сдвиг фаз между напряжением и силой тока φ = 30°.

(Ответ: R = 2,28 Ом).

29. В цепь колебательного контура, содержащего последовательно соединенные резистор сопротивлением R = 40 Ом, катушку индуктивностью L = 0,36 Гн и конденсатор емкостью C = 28 мкФ, подключено внешнее переменное напряжение, амплитудное значение которого $U_{\max}$ = 180 В и частотой ω = 314 рад/с. Определить амплитудное значение силы тока $I_{\max}$ в цепи и сдвиг фаз φ между током и внешним напряжением.

(Ответ: $I_{\max}$ = 4,5 А; φ = –1° (ток опережает напряжение)).

30. Колебательный контур содержит конденсатор, емкость которого C = 10 нФ, катушку индуктивностью L = 0,1 мГн и резистор сопротивлением R = 3 Ом. Определить среднюю мощность, потребляемую контуром, необходимую для поддержания в нем незатухающих колебаний с амплитудным значением напряжения на конденсаторе U_{C_m} = 2 В.

(Ответ: <P> = 0,6 мВт).

Часть вторая
ВОЛНЫ

4. УПРУГИЕ ВОЛНЫ

Основные законы и формулы

- Волновое уравнение

$$\frac{\partial^2\xi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\xi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\xi}{\partial z^2}=\frac{1}{\upsilon^2}\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2} \quad \text{или} \quad \Delta\xi=\frac{1}{\upsilon^2}\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2}, \qquad (4.1)$$

где υ – фазовая скорость; $\Delta=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}$ – оператор Лапласа.

- Волновое уравнение для плоской волны

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = \frac{1}{\upsilon^2} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}. \tag{4.2}$$

- Уравнение плоской волны

$$\xi(x,t) = A\cos\omega\,(t - x/\upsilon), \text{ или } \xi(x,t) = A\cos\,(\omega t - kx), \tag{4.3}$$

где $\xi(x,t)$ – смещение точек среды с координатой x в момент времени t; ω – циклическая частота; υ – скорость распространения колебаний в среде (фазовая скорость); k – волновое число, $k = 2\,\pi/\lambda$; λ – длина волны.

- Длина волны

$$\lambda = \upsilon T = \upsilon / \nu, \tag{4.4}$$

где T – период колебаний; ν – частота.

- Разность фаз колебаний двух точек среды, расстояние между которыми равно Δx

$$\Delta\varphi = (2\pi/\lambda)\,\Delta x. \tag{4.5}$$

- Уравнение стоячей волны

$$\xi = 2\,A\cos\frac{2\pi x}{\lambda}\cos\omega t, \tag{4.6}$$

где $\left|2\,A\cos\frac{2\pi x}{\lambda}\right| = A_{ст}$ – амплитуда стоячей волны.

- Координаты пучностей стоячей волны

$$x_n = \pm\, m\frac{\lambda}{2}, \; (m = 0,\, 1,\, 2,\, \ldots). \tag{4.7}$$

- Координаты узлов стоячей волны

$$x_{узл} = \pm\left(m + \frac{1}{2}\right)\frac{\lambda}{2}, \; (m = 0,\, 1,\, 2,\, \ldots). \tag{4.8}$$

- Фазовая скорость

$$\upsilon = \frac{\omega}{k} = \frac{\omega\lambda}{2\pi}, \tag{4.9}$$

где $k = \dfrac{2\pi}{\lambda}$ – волновое число.

- Фазовая скорость продольных волн в упругой среде:
  - в газах

$$\upsilon = \sqrt{\frac{\gamma RT}{M}}, \tag{4.10}$$

где $\gamma = \dfrac{C_P}{C_V}$ – отношение теплоемкостей газа при постоянных давлении и объеме; R – молярная газовая постоянная; T – термодинамическая температура; M – молярная масса;

  - в изотропных твердых телах

$$\upsilon_{прод} = \sqrt{\frac{E}{\rho}}; \quad \upsilon_{попер} = \sqrt{\frac{G}{\rho}}, \tag{4.11}$$

где ρ – плотность твердого тела; E – модуль упругости; G – модуль сдвига;

  - в жидкостях

$$\upsilon = \sqrt{\frac{K}{\rho}}. \tag{4.12}$$

- Поток энергии, переносимой волнами через некоторую поверхность за единицу времени

$$\Phi = \frac{dW}{dt}. \tag{4.13}$$

- Плотность потока энергии

$$U = \frac{d\Phi}{dS} = w\upsilon, \text{ или } \vec{U} = \vec{w}\vec{\upsilon}, \tag{4.14}$$

где w – объемная плотность энергии колебательного движения; υ – фазовая скорость.

- Интенсивность звука

$$I = \left| < \vec{U} > \right|. \tag{4.15}$$

- Уровень интенсивности звука (в децибелах)

$$L = 10\lg\frac{I}{I_0}, \qquad (4.16)$$

где I – интенсивность данного звука, I_0 = 10^{-12} Вт/м^2 – интенсивность звука на пороге слышимости при частоте $\nu = 1000$ *Гц*.

- Уровень громкости (в фонах)

$$L_N = 10\lg\frac{I_N}{I_0}, \qquad (4.17)$$

где I_N – интенсивность звука частоты ν = 1000 Гц имеющего одинаковую громкость с исследуемым звуком.

- Эффект Доплера

$$\nu = \nu_0 \frac{\upsilon \pm \upsilon_{np}}{\upsilon \mp \upsilon_{ucm}}, \qquad (4.18)$$

где ν_0 – частота звука, испускаемого источником; ν – воспринимаемая частота звука; υ – скорость звука; υ_{np} – скорость движения приемника звука; υ_{ucm} – скорость движения источника звука.

Методические указания

1. Уравнение (4.3) применяется в случае распространения волны вдоль положительного направления оси x в среде, не поглощающей энергии. Если волна распространяется вдоль прямой противоположно положительному направлению оси x, то перед волновым числом k ставится знак «плюс»:

$$\xi(x,t) = A\cos(\omega t + kx).$$

2. При распространении плоской волны амплитуда смещения всех частиц на пути волны одинакова. В случае распространения сферических волн во всех направлениях от источника амплитуда смещения частиц среды зависит от расстояния до источника колебаний.

Уравнение гармонической сферической волны

$$\xi(r,t) = \frac{A_0}{r}\cos(\omega t - kr + \varphi_0),$$

где r – расстояние от центра от центра волны до рассматриваемой точки.

3. При рассмотрении задач на отражение волн необходимо помнить, что если бегущая волна отражается от более плотной среды, то фаза волны меняется на противоположную (на π) и на границе отражения наблюдается

узел. При отражении волны от менее плотной среды изменения фазы не происходит и на границе отражения будет наблюдаться пучность.

4. Согласно уравнениям (4.7) и (4.8) расстояние между двумя соседними узлами или двумя соседними пучностями равно $\pi/2$, а между соседними узлом и пучностью – $\pi/4$.

Колебания во всех точках между соседними узлами происходят в одинаковой фазе, но с разными амплитудами; по разные стороны узла – в противофазе.

5. При решении задач на звуковые волны необходимо различать понятия «уровень интенсивности звука» (формула (4.16)) и «уровень громкости» (формула (4.17)). Уровень интенсивности звука – объективная его характеристика, не зависящая от звукового ощущения. Уровень громкости звука является субъективной характеристикой. Он зависит как от интенсивности звука I, так и от частоты ν (ухо человека имеет разную чувствительность к звукам разной частоты). Уровень интенсивности звука, выраженный в децибелах, и уровень громкости, измеренный в фонах, совпадают только при стандартной частоте ν = 1000 Гц, при остальных частотах они имеют разные значения. Особенно сильно они отличаются при низких частотах.

Для расчета уровня громкости звука необходимо воспользоваться кривыми равной громкости (можно найти в справочниках).

6. При применении формулы (4.18) необходимо учитывать, что верхний знак в числителе и знаменателе берется в том случае, если при движении источника или приемника звука происходит их сближение, нижний знак – в случае их взаимного удаления.

Примеры решения задач

Задача 1. Поперечная волна распространяется вдоль упругого шнура со скоростью υ = 20 м/с. Период колебаний точек шнура равен T = 1,25 с, амплитуда A = 1,5 м. Определить: 1) длину волны λ; 2) фазу колебаний φ и скорость точки ξ', отстоящей на расстоянии x = 45 м от источника волн в момент времени t = 4 с.

Решение.

1. Длина волны определяется из соотношения: $\lambda = \upsilon T$. Подставив числовые значения, получим λ = 25 м.

2. Уравнение волны имеет вид:

$$\xi(x,t) = A\cos\omega(t - x/\upsilon),$$

где ξ – смещение колеблющейся точки; x – расстояние точки от источника волн; υ – скорость распространения волны.

Выражение, стоящее под знаком косинуса, есть фаза колебаний, т. е.

$$\varphi = \omega\left(t - \frac{x}{\upsilon}\right),$$

где ω – циклическая частота, $\omega = \frac{2\pi}{T}$, тогда

$$\varphi = \frac{2\pi}{T}\left(t - \frac{x}{\upsilon}\right).$$

Подставим числовые значения после вычисления, получим φ = 2,8 π рад = = 504°.

Скорость точки определяется как первая производная от смещения по времени:

$$\xi' = -A\omega \sin \omega\left(t - \frac{x}{\upsilon}\right) = -\frac{2\pi A}{T} \sin \omega\left(t - \frac{x}{\upsilon}\right).$$

Вычисления дают: ξ' = –4,4 м/с.

Ответ: 1) λ = 25 м; 2) φ = 2,8 π рад = 504°; 3) ξ' = –4,4 м/с.

Задача 2. Плоская волна распространяется вдоль прямой, совпадающей с положительным направлением оси x в среде, не поглощающей энергии, со скоростью υ = 200 м/с. Определить разность фаз колебаний частиц среды, отстоящих от источника колебаний на расстояниях x_1 = 6 м и x_1 = 12 м. Период колебаний T = 0,04 с.

Уравнение колебаний частицы среды, отстоящей от источника волн на расстоянии x:

$$\xi(x, t) = A\cos \omega(t - x/\upsilon),$$

где A – амплитуда колебаний; ω – циклическая частота; υ – скорость распространения колебаний; $\varphi = \omega\left(t - \frac{x}{\upsilon}\right)$ – фаза колебаний.

Для двух частиц среды имеем:

$$\varphi_1 = \omega\left(t - \frac{x_1}{\upsilon}\right) \text{ и } \varphi_2 = \omega\left(t - \frac{x_2}{\upsilon}\right).$$

Разность фаз колебаний двух точек среды:

$$\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1 = \frac{\omega}{\upsilon}\Delta x,$$

где $\Delta x = x_2 - x_1$.

Так как $\omega = \frac{2\pi}{T}$, то $\Delta\varphi = \frac{2\pi}{\upsilon T}\Delta x$.

Вычисления дают $\Delta\varphi = \frac{3}{2}\pi$ рад.

Ответ: $\Delta\varphi = \frac{3}{2}\pi$ рад.

Задача 3. Колебания вибратора – источника плоской волны, м, – происходят по закону

$$x = 0{,}5 \cos 10\,\pi t.$$

Запишите уравнение волны $\xi(x, t)$, распространяющейся вдоль положительного направления оси x в среде, не поглощающей энергии. Чему равно смещение ξ_1, ξ_2 точек среды, находящихся на расстояниях x_1 = 15 м и x_1 = 40 м от вибратора через время t = 2 с после начала колебаний? Скорость распространения колебаний υ = 20 м/с.

Решение.

Частицы среды совершают колебания по тому же закону, по которому колеблется вибратор. Однако колебания частиц среды отстают по времени от колебаний вибратора на время, которое необходимо для прохождения расстояния x.

Уравнение, описывающее смещение частиц среды, находящихся на прямой ox, вдоль которой распространяется волна, имеет вид:

$$\xi(x, t) = A\cos\omega(t - x/\upsilon).$$

Из уравнения колебания вибратора находим амплитуду A = 0,5 м и циклическую частоту ω = 10 π рад/с.

Уравнение волны примет вид:

$$\xi(x,t) = 0{,}5 \cos 10\,\pi\left(t - \frac{x}{20}\right) = 0{,}5 \cos\left(10\pi t - \frac{\pi}{2}x\right), \text{ м.}$$

Произведем вычисления:

$$\xi_1 = 0{,}5 \cos\left(10\pi \cdot 2 - \frac{\pi}{2}15\right) = 0;\quad \xi_2 = 0{,}5 \cos\left(10\pi \cdot 2 - \frac{\pi}{2}40\right) = 0{,}5 \text{ м;}$$

Ответ: $\xi(x,t)$ = 0,5 $\cos\left(10\pi t - \frac{\pi}{2}x\right)$ м; ξ_1 = 0; ξ_2 = 0,5 м;

Задача 4. Задано уравнение плоской волны: $\xi(x, t) = A\cos(\omega t - kx)$, где $A =$ 0,5 см; $\omega =$ 628 с$^{-1}$; $k =$ 2 м$^{-1}$. Определить: 1) частоту ν колебаний и длину волны λ; 2) фазовую скорость υ; 3) максимальные значения скорости $\xi'_{\max}$ и ускорения $\xi''_{\max}$ колебаний.

Решение.

1. После подстановки числовых значений уравнение плоской волны принимает вид:

$$\xi(x,t) = 0{,}005 \cos (628\, t - 2\, x) = 0{,}005 \cos (200\, \pi t - 2\, x), \text{ м}.$$

Циклическая частота ω = 2 $\pi\nu$, откуда получаем

$$\nu = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{200\pi}{2\pi} = 100 \text{ Гц}.$$

Длина волны λ находится из соотношения

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} \Rightarrow \lambda = \frac{2\pi}{\lambda};\ \ \lambda = \frac{2\cdot 3{,}14}{2\text{ м}^{-1}} = 3{,}14 \text{ м}.$$

2. Фазовая скорость υ, длина волны λ и частота ν связаны соотношением: $\upsilon = \lambda\nu$; υ = 3,14 м · 100 Гц = 314 м/с.

3. Скорость колебаний частиц среды находим путем дифференцирования:

$$\xi' = -0{,}005 \cdot 628 \sin (628\, t - 2\, x).$$

Максимальное значение скорости:

$$\xi'_{\max} = -0{,}005 \text{ м} \cdot 628 \text{ с}^{-1} = 3{,}14 \text{ м/с}\ \ [\sin (628\, t - 2\, x) = 1].$$

Ускорение колебаний частиц среды:

$$\xi'' = -0{,}005 \cdot (628)^2 \cos (628\, t - 2\, x).$$

Максимальное значение ускорения:

$$\xi''_{\max} = 0{,}005 \text{ м} \cdot (628 \text{ с}^{-1})^2 \approx 1{,}97\cdot 10^3 \text{ м/с}^2\ \ [\cos (628\, t - 2\, x) = 1].$$

Ответ: 1) ν = 100 Гц; λ = 3,14 м; 2) υ = 314 м/с; 3) $\xi'_{\max}$ = 3,14 м/с; $\xi''_{\max}$ = = 1,97·10^3 м/с^2

Задача 5. Звуковые колебания частотой ν = 500 Гц, имеющие амплитуду A = 0,25 мм, распространяются в воздухе. Найти скорость распространения волны $\upsilon_в$ и максимальную скорость $\upsilon_{\max}$ колебаний частиц воздуха. Длина волны λ = 70 см.

Решение.

Скорость распространения волны определяется по формуле

$$\upsilon_в = \lambda\nu,$$

где $\upsilon_в$ = 0,7 м · 500 Гц = 350 м/с.

Для определения максимальной скорости колебаний частиц среды найдем производную от смещения x по времени. Смещение частиц происходит по закону:

$$x = A\cos(\omega t + \varphi_0),$$

поэтому

$$\upsilon = x' = -A\omega\sin(\omega t + \varphi_0).$$

Скорость колебаний частиц будет максимальна, при условии: $\sin(\omega t + \varphi_0) = \pm 1$, т. е. $\upsilon_{\max} = A\omega$.

Циклическая частота ω и частота ν связаны соотношением: $\omega = 2\pi\nu$, поэтому $\upsilon_{\max} = 2\pi\nu A$.

Вычисления дают $\upsilon_{\max}$ = 0,8 м/с.

Ответ: $\upsilon_в$ = 350 м/с; $\upsilon_{\max}$ = 0,8 м/с.

Задача 6. Определить длину λ бегущей волны, если известно, что расстояние между первой и пятой пучностями стоячей волны ℓ = 30 см.

Решение.

Расстояние между соседними пучностями (точками, в которых амплитуда максимальна), т. е. первой и второй, равно $\frac{\lambda}{2}$, следовательно, расстояние между первой и пятой пучностями будет равно $\ell = 2\lambda$, тогда длина волны будет $\lambda = \frac{\ell}{2}$ = 15 см.

Ответ: λ = 15 см.

Задача 7. Определить скорость звука $\upsilon_{зв}$ в азоте при температуре T = 300 К.

Решение.

Скорость звука в газе определяется соотношением:

$$\upsilon = \sqrt{\frac{\gamma RT}{M}},$$

где $\gamma = \frac{C_p}{C_V} = \frac{i+2}{i}$ – показатель адиабаты, i – число степеней свободы; C_p, C_V – молярные теплоемкости при постоянном давлении и постоянном объеме соответственно; R = 8,31 Дж/(моль·К) – молярная газовая постоянная; M = 0,028 кг/моль – молярная масса азота.

Молекула азота – двухатомная, поэтому число степеней свободы i = 5, тогда λ = 7/5 = 1,4.

Подставляя числовые данные и вычисляя, получаем: υ = 353 м/с.

Ответ: υ = 353 м/с.

Задача 8. Ружейная пуля летит со скоростью υ = 200 м/с. Определить, во сколько раз изменится высота тона свиста пули для неподвижного наблюдателя, мимо которого пролетает пуля. Скорость звука принять $\upsilon_{зв}$ = 335 м/с.

Решение.

Согласно эффекту Доплера, частота звука, воспринимаемого приемником (наблюдателем) при приближении к нему пули (источника звука) определяется по формуле

$$\nu_1 = \nu_0 \frac{\upsilon_{зв}}{\upsilon_{зв} - \upsilon},$$

где ν_0 – частота звука, испускаемого неподвижным источником.

Частота звука, воспринимаемого неподвижным наблюдателем при удалении от него пули, будет определяться соотношением

$$\nu_2 = \nu_0 \frac{\upsilon_{зв}}{\upsilon_{зв} + \upsilon}.$$

Найдем отношение частот

$$\frac{\nu_1}{\nu_2} = \frac{\upsilon_{зв} + \upsilon}{\upsilon_{зв} - \upsilon}.$$

Вычисления дают $\frac{\nu_1}{\nu_2} = 4$.

Ответ: $\frac{\nu_1}{\nu_2} = 4$.

Задача 9. Неподвижный источник испускает монохроматический звук. К нему приближается стенка со скоростью υ = 33 см/с. Скорость распространения звука в среде $\upsilon_{зв}$ = 330 м/с. Как и на сколько процентов изменяется длина волны звука при отражении от стенки?

Решение.

Согласно эффекту Доплера, частота звука при приближении стенки к источнику будет определяется соотношением

$$\nu = \nu_0 \frac{\upsilon_{зв} + \upsilon}{\upsilon_{зв}},$$

где ν_0 – частота звука, испускаемого неподвижным источником.

Частота отраженного звука будет

$$\nu' = \nu \frac{\upsilon_{зв}}{\upsilon_{зв} - \upsilon} = \nu_0 \frac{\upsilon_{зв} + \upsilon}{\upsilon_{зв} - \upsilon},$$

Длина волны звука при неподвижном источнике

$$\lambda_0 = \frac{\upsilon_{зв}}{\nu_0}.$$

Длина волны звука при отражении

$$\lambda' = \frac{\upsilon_{зв}}{\nu'} = \frac{\upsilon_{зв}}{\nu_0}\left(\frac{\upsilon_{зв} - \upsilon}{\upsilon_{зв} + \upsilon}\right).$$

Изменение длины волны

$$\Delta\lambda = \lambda_0 - \lambda' = \frac{\upsilon_{зв}}{\nu_0} \frac{2\upsilon}{(\upsilon_{зв} + \upsilon)}.$$

Тогда $\dfrac{\Delta\lambda}{\lambda_0}$ = $\dfrac{2\upsilon}{\upsilon_{зв}+\upsilon}$; $\dfrac{\Delta\lambda}{\lambda_0}$ = $\dfrac{2\cdot 0{,}33}{330{,}33}$ ≈ 0,002 = 0,2 %, т. е. уменьшается на 0,2 %.

Ответ: уменьшается на 0,2 %.

Задача 10. На расстоянии r = 100 м от точечного изотропного источника звука частоты ν = 200 Гц уровень громкости L = 50 дБ. Порог слышимости на этой частоте соответствует интенсивности звука I_0 = 0,1 нВт/м^2. Коэффициент затухания звуковой волны γ = 5,0 м$^{-1}$. Найти звуковую мощность источника.

Решение.

Мощность точечного изотропного источника звука P и интенсивность звука I связаны соотношением

$$P = I\cdot 4\pi r^2. \quad (1)$$

Уровень интенсивности звука определяется по формуле

$$L = 10\lg\frac{I_0}{I}, \quad (2)$$

Откуда получаем $I = I_0\cdot 10^L$, или с учетом затухания

$$I = e^{2\gamma r} I_0\cdot 10^L. \quad (3)$$

Из формул (1)–(3) получаем

$$P = 4\pi r^2 e^{2\gamma r} I_0\cdot 10^L.$$

Вычисления дают P ≈ 1,4 Вт.

Ответ: P ≈ 1,4 Вт.

Задачи для самостоятельного решения

1. Определить разность фаз $\Delta\varphi$ колебаний двух точек, лежащих на луче и отстоящих друг от друга на расстоянии $\Delta\ell$ = 1 м, если длина волны равна λ = 0,5 м.

(Ответ: $\Delta\varphi$ = 4π).

2. Волна распространяется в упругой среде со скоростью υ = 150 м/с. Определить частоту ν колебаний, если минимальное расстояние между точками среды, фазы колебаний которых противоположны, равно Δx = 0,75 м.

(Ответ: ν = 100 Гц).

3. Во сколько раз изменяется длина звуковой волны при переходе звука из воды в воздух? Скорость звука в воздухе υ_1 = 330 м/с, в воде υ_2 = 1450 м/с.

(Ответ: $\dfrac{\lambda_2}{\lambda_1}$ = 4,4).

4. Плоская синусоидальная волна распространяется вдоль прямой, совпадающей с положительным направлением оси x в среде, не поглощающей энергию. Разность фаз колебаний двух точек среды, находящихся на этой прямой на расстояниях x_1 = 3 м и x_2 = 4,5 м от источника колебаний, равна $\Delta\varphi$ = π/4. Записать уравнение волны $\xi(x,t)$. Определить длину волны λ и смещение ξ_2 второй точки в момент времени t = 2 с. Скорость распространения волны υ = 15 м/с, амплитуда волны A = 2 см.

(Ответ: $\xi(x,t)$ = 0,02 cos $\left(\dfrac{5}{2}\pi t - \dfrac{\pi}{6}x\right)$; ξ_2 = 1,4 см).

5. Звуковые колебания, имеющие частоту ν = 350 Гц и амплитуду A = 0,5 мм, распространяются в упругой среде. Длина волны равна λ = 35 см. Найти: 1) скорость υ распространения волн; 2) максимальную скорость $\xi'_{\max}$ частиц среды.

(Ответ: 1) υ = 122,5 м/с; 2) $\xi'_{\max} \approx$ 1,1 м/с).

6. От источника колебаний распространяется волна вдоль прямой линии. Амплитуда колебаний A = 10 см. Как велико смещение точки, удаленной от источника на расстояние x = 3λ/4, в момент времени t = 0,9 Т от начала колебаний.

(Ответ: ξ = 5,88 см).

7. Поперечная волна распространяется вдоль упругого шнура со скоростью υ = 10 м/с. Записать уравнение волны и определить: 1) длину волны λ; 2) фазу колебаний φ; 3) смещение ξ, скорость ξ' и ускорение ξ'' точки, расположенной на расстоянии x = 9 м от источника колебаний в момент времени t = 2,5 с. Период колебаний точек шнура T = 1 с, амплитуда колебаний A = 5 см.

(Ответ: $\xi(x,t)$ = 5 cos $\left(2\pi t - \frac{\pi}{5}x\right)$, см).

8. Бегущая плоская волна описывается уравнением $\xi(x,t)$ = 6 · 10^{-5} cos × × (1800 t – 5,3 x) м.

Определить: 1) отношение $\frac{A}{\lambda}$ амплитуды смещения частиц среды к длине волны; 2) отношение $\frac{\xi'_{\max}}{\upsilon}$ амплитуды колебаний скорости частиц среды к скорости распространения волны.

(Ответ: 1) $\frac{A}{\lambda}$ = 5,06 · 10^{-5}; 2) $\frac{\xi'_{\max}}{\upsilon}$ = 3,18 · 10^{-4}).

9. Тонкий стержень длиной L закреплен с обоих концов. Определить возможные собственные частоты ν_n продольных колебаний.

(Ответ: $\nu_n = n\frac{\upsilon}{2L}$ (n = 1, 2, 3, …)).

10. Смещение от положения равновесия точки, находящейся на расстоянии x = 4 см от источника колебаний, в момент $n = T/6$ равно половине амплитуды. Найти длину λ бегущей волны.

(Ответ: λ = 0,48 м).

11. Найти положение узлов и пучностей и начертить график стоячей волны для двух случаев: 1) отражение происходит от менее плотной среды; 2) отражение происходит от более плотной среды. Длина бегущей волны λ = 12 см.

(Ответ: 1) $x_{узл}$ = 3, 9, 15, … см; $x_{узл}$ = 0, 6, 12, 18, … см; 2) $x_{узл}$ = 0, 6, 12, 18, … см; $x_{пучн}$ = 3, 9, 15, … см).

12. Определить длину волны колебаний, если расстояние между первой и четвертой пучностями стоячей волны равно ℓ = 15 см.

(Ответ: λ = 0,1 м).

13. Стальной стержень длиной ℓ = 1 м, закрепленный посередине, натирают суконкой, посыпанной канифолью. Определить частоту ν возникающих при этом собственных продольных колебаний стержня и скорость $\upsilon_{пр}$ продольных волн в стали.

(Ответ: ν = 2,52 кГц; $\upsilon_{пр}$ = 5,04·10^3 м/с).

14. Поезд проходит мимо станции со скоростью υ = 40 м/с. Частота тона гудка электровоза ν_0 = 300 Гц. Определить частоту ν звука, воспринимаемого человеком, стоящем на платформе, в двух случаях: 1) поезд приближается; 2) поезд удаляется.

(Ответ: 1) ν = 341 Гц; 2) ν = 268 Гц).

15. Когда поезд проходит мимо неподвижного наблюдателя, высота тона звукового сигнала меняется скачком. Определить относительное изменение частоты $\frac{\Delta\nu}{\nu}$, если скорость поезда υ = 54 км/ч.

(Ответ: $\frac{\Delta\nu}{\nu}$ = 0,09).

16. Скорый поезд приближается к стоящему на путях электропоезду со скоростью υ = 72 км/ч. Электропоезд подает звуковой сигнал частотой ν_0 = 600 Гц. Определить кажущуюся частоту ν звукового сигнала, воспринимаемого машинистом скорого поезда.

(Ответ: ν = 636 Гц).

17. Источник звука частотой ν = 18 кГц приближается к неподвижно установленному резонатору, настроенному на акустическую волну длиной λ = 1,7 см. С какой скоростью должен двигаться источник звука, чтобы возбуждаемые им звуковые волны вызвали колебания резонатора? Температуру воздуха принять T = 290 К.

(Ответ: $\upsilon_{ист}$ = 36 м/с).

18. Наблюдатель, находящийся на расстоянии ℓ = 800 м от источника звука, слышит звук, пришедший по воздуху, на Δt = 1,78 м позднее, чем звук, пришедший по воде. Найти скорость звука $\upsilon_{зв}$ в воде, приняв температуру воздуха равной T = 350 К.

(Ответ: $\upsilon_{зв}$ = 1,45 км/с).

19. Температура воздуха у поверхности земли равна T = 300 К; при увеличении высоты она понижается на ΔT = 7 мК на каждый метр высоты. За какое время звук, распространяясь, достигнет высоты h = 8 км?

(Ответ: t = 24,3 с).

20. Найти отношение скоростей $\frac{\upsilon_{зв_1}}{\upsilon_{зв_2}}$ звука в водороде и углекислом газе при одинаковой температуре газов.

(Ответ: $\frac{\upsilon_{зв_1}}{\upsilon_{зв_2}}$ = 4,8).

21. Скорость распространения звука в двухатомном газе при некоторых условиях равна υ = 353 м/с. Определить среднюю квадратичную скорость $\langle\upsilon_{кв}\rangle$ молекул этого газа при тех же условиях.

(Ответ: $<\upsilon_{кв}>$ = 517 м/с).

22. Неподвижный приемник при приближении источника звука, излучающего волны частотой ν_0 = 300 Гц, регистрирует звуковые колебания с частотой ν = 400 Гц. Определить скорость $\upsilon_{ист}$ движения источника звука. Принять температуру воздуха T = 290 К.

(Ответ: $\upsilon_{ист}$ = 85,3 м/с).

23. Интенсивность звука I = 1 Вт/м^2. Определить среднюю объемную плотность $<w>$ энергии звуковой волны, если звук распространяется в сухом воздухе при нормальных условиях.

(Ответ: $<w>$ = 3,01 мДж/м^3).

24. Найти мощность N точечного источника звука, если на расстоянии r = 25 м от него интенсивность звука I = 20 мВт/м^2. Какова средняя объемная плотность $<w>$ энергии на этом расстоянии?

(Ответ: N = 157 Вт; $<w>$ = 60,2 мкДж/м^3).

25. Звук частотой ν = 400 Гц распространяется в азоте при температуре T = 290 К и давлении p = 104 кПа. Амплитуда звукового давления p_0 = 0,5 Па. Определить амплитуду A колебаний частиц азота.

(Ответ: A = 475 нм).

26. Точечный изотропный источник испускает звуковые колебания с частотой ν = 1,45 кГц. На расстоянии r_0 = 0,5 м от источника амплитуда смещения частиц среды A_0 = 50 мкм, а в точке С, находящейся на расстоянии r = 10 см от источника амплитуда смещения в n = 3 раза меньше A_0. Найдите: а) коэффициент затухания волны γ; б) амплитуду колебаний скорости $\upsilon_{\max}$ частиц в точке С.

(Ответ: а) γ = 0,08 м$^{-1}$; б) $\upsilon_{\max}$ = 0,15 м/с).

27. Плоская звуковая волна распространяется вдоль оси x. Коэффициент затухания волны γ = 0,0023 м$^{-1}$. В точке, соответствующей началу координат, уровень интенсивности равен L = 60 дб. Найти: а) уровень интенсивности L звука в точке с координатой x = 5 см; б) координату x_1 точки, в которой звук уже не слышен.

(Ответ: а) L = 50 дб; б) x_1 = 300 м).

28. На пути плоской звуковой волны, распространяющейся в воздухе, находится шар радиусом R = 50 см. Длина звуковой волны λ = 20 см, ча-

стота ν = 1700 Гц, амплитуда колебаний давления в воздухе $(\Delta p)_m$ = 3,5 Па. Определить средний за период поток энергии $<P>$, падающей на шар.

(Ответ: $<P>$ = 11 МВт).

29. Неподвижный наблюдатель воспринимает звуковые колебания от двух камертонов, один из которых приближается, а другой – удаляется с такой же скоростью. При этом наблюдатель слышит биения с частотой ν = 2 Гц. Определить скорости u движения камертонов, если их собственная частота колебаний ν_0 = 680 Гц и скорость звука в воздухе υ = 340 м/с.

(Ответ: u = 0,5 м/с).

30. На расстоянии r_0 = 100 м от точечного изотропного источника звука уровень громкости при частоте ν_0 = 680 Гц равен L_n = 20 дБ. Определить мощность N источника звука.

(Ответ: N = 40 мкВт).

5. ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ ВОЛНЫ

Основные законы и формулы

• Фазовая скорость электромагнитной волны, распространяющейся в непроводящей среде,

$$\upsilon = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \varepsilon \mu_0 \mu}} = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu}}, \tag{5.1}$$

где ε_0, μ_0 – электрическая и магнитная постоянные соответственно; ε, μ – электрическая и магнитная проницаемости среды; $c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}}$ – скорость распространения электромагнитных волн в вакууме (скорость света в вакууме), c = $3 \cdot 10^8$ м/с.

• Волновое уравнение электромагнитной волны

$$\Delta\vec{E} = \frac{1}{\upsilon^2}\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}, \quad \Delta\vec{H} = \frac{1}{\upsilon^2}\frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2}, \tag{5.2}$$

где υ – фазовая скорость; $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ – оператор Лапласа;

$\vec{E}, \vec{H}$ – векторы напряженностей соответственно электрического и магнитного полей волны.

- Уравнения плоской электромагнитной волны

$$\vec{E} = \vec{E}_0 \cos(\omega t - kx + \varphi), \quad \vec{H} = \vec{H}_0 \cos(\omega t - kx + \varphi), \tag{5.3}$$

где $\vec{E}_0, \vec{H}_0$ – амплитуды напряженностей электрического и магнитного полей волны; ω – циклическая частота; $k = \dfrac{\omega}{\upsilon} = \dfrac{2\pi}{\lambda}$ – волновое число; φ – начальная фаза колебаний.

- Составляющие векторов $\vec{E}$ и $\vec{H}$ плоской монохроматической линейно поляризованной волны, распространяющейся в непроводящей среде в положительном направлении оси Z

$$E_x = E_{0x} \cos(\omega t - kz), \quad E_y = E_{0y} \cos(\omega t - kz); \tag{5.4}$$

$$H_x = -\sqrt{\frac{\varepsilon_0 \varepsilon}{\mu_0 \mu}} E_y, \quad H_y = \sqrt{\frac{\varepsilon_0 \varepsilon}{\mu_0 \mu}} E_x, \tag{5.5}$$

где ε_0, μ_0 – электрическая и магнитная постоянные соответственно; ε, μ – электрическая и магнитная проницаемости среды.

- Амплитуда напряженности электрического поля

$$E_0 = \sqrt{E_{0x}^2 + E_{0y}^2}. \tag{5.6}$$

- Амплитуда напряженности магнитного поля

$$H_0 = \sqrt{\frac{\varepsilon_0 \varepsilon}{\mu_0 \mu}} E_0. \tag{5.7}$$

- Связь между мгновенными значениями напряженностей электрического и магнитного полей электромагнитной волны

$$\sqrt{\varepsilon_0 \varepsilon} E = \sqrt{\mu_0 \mu} H. \tag{5.8}$$

- Вектор Умова-Пойнтинга (вектора плотности потока электромагнитной энергии)

$$\vec{S} = \left[\vec{E}\vec{H}\right]. \tag{5.9}$$

- Модуль плотности потока энергии

$$S = w\upsilon = EH, \tag{5.10}$$

где w – объемная плотность энергии электромагнитной волны.

- Модуль вектора Умова-Пойнтинга для плоской линейно-поляризованной волны

$$S=\sqrt{\frac{\varepsilon_0\varepsilon}{\mu_0\mu}}E_0^2\cos^2\left(\omega t-kz\right). \tag{5.11}$$

- Интенсивность плоской монохроматической, линейно-поляризованной электромагнитной волны

$$I=\left|<S>\right|=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\varepsilon_0\varepsilon}{\mu_0\mu}}E_0^2. \tag{5.12}$$

- Объемная плотность энергии электромагнитного поля

$$w=\frac{\varepsilon_0\varepsilon E^2}{2}+\frac{\mu_0\mu H^2}{2}. \tag{5.13}$$

- Законы изменения векторов напряженностей электрического и магнитного полей плоской электромагнитной волны при ее распространении в проводящей среде (электрическая проводимость $\gamma\neq 0$)

$$E=E_0\,e^{-\alpha z}\cos\left(\omega t-\beta z\right), \tag{5.14}$$

$$H=H_0\,e^{-\alpha z}\cos\left(\omega t-\beta z+\varphi\right), \tag{5.15}$$

где E_0, H_0 – начальные амплитуды; α (м$^{-1}$) – коэффициент затухания волны; β (м$^{-1}$) – фазовая постоянная; φ – разность фаз колебаний векторов $\vec{E}$ и $\vec{H}$.

- Эффект Доплера для электромагнитных волн

$$\nu=\nu_0\,\frac{\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}}{1-\frac{\upsilon}{c}\cos\alpha},$$

где ν_0 – частота волны, испускаемой источником; υ – скорость движения источника; α – угол между вектором скорости и направлением наблюдения; c – скорость света; ν – частота, воспринимаемая наблюдателем.

- Эффект Доплера в нерелятивистском случае $\left(\upsilon<<c\right)$

$$\frac{\Delta\nu}{\nu} = \frac{\upsilon}{c}\cos\alpha,$$

где $\Delta\nu = \nu - \nu_0$ – сдвиг наблюдаемой частоты по сравнению с частотой ν_0, испускаемой источником.

Методические рекомендации

1. Электромагнитная волна – это процесс распространения в пространстве электромагнитного поля. Простейший вид волнового движения – плоская электромагнитная волна. Все задачи этого раздела составлены для различных случаев распространения плоских электромагнитных волн, которые распространяются в однородных изотропных средах (свойства таких сред не зависят от пространственных координат и направлений в пространстве).

2. В проводящей среде напряженности электрического и магнитного полей убывают по экспоненциальному закону (формулы (5.14) и (5.15)) в направлении распространения. Коэффициент затухания α и фазовая постоянная β, входящие в данные уравнения, зависят от величины

$$\eta = \frac{j_{пр}}{j_{см}} = \frac{\gamma}{\omega\varepsilon_0\varepsilon}, \tag{5.16}$$

где $j_{пр}$ – плотность тока проводимости; $j_{см}$ – плотность тока смещения при заданной частоте волны.

При решении задач на распространение электромагнитных волн величину η используют в качестве критерия того, что среда является хорошим диэлектриком или проводником.

Для хорошего диэлектрика

$$\eta \ll 1; \quad \alpha \approx \frac{\gamma}{2}\sqrt{\frac{\mu_0\mu}{\varepsilon_0\varepsilon}}; \quad \beta \approx \omega\sqrt{\varepsilon_0\varepsilon\mu_0\mu}.$$

Для среды с хорошей проводимостью (при малой циклической частоте)

$$\eta \gg 1; \quad \alpha \approx \beta \approx \sqrt{\frac{\mu_0\mu\omega\gamma}{2}}.$$

Фазовую скорость и длину волны в проводящей среде можно определить из формул:

$$\upsilon = \frac{\omega}{\beta}; \quad \lambda = \frac{2\pi}{\beta}.$$

Величина $\delta=\dfrac{1}{\alpha}=\sqrt{\dfrac{2}{\mu_0\mu\omega\gamma}}$ – называется глубиной проникновения волны в хорошо проводящую среду. Глубина проникновения равна расстоянию, на котором амплитуда электромагнитной волны уменьшается в $e=2{,}718\ldots$ раза.

Примеры решения задач

Задача 1. Электромагнитная волна с частотой ν = 5 МГц переходит из немагнитной среды с диэлектрической проницаемостью ε = 2 в вакуум. Определить изменение $\Delta\lambda$ ее длины волны.

Решение.

Изменение длины волны определяется соотношением

$$\Delta\lambda=\lambda_0-\lambda,$$

где $\lambda_0=\dfrac{c}{\nu}$ – длина волны в вакууме, а $\lambda=\dfrac{\upsilon}{\nu}$ – длина волны в среде. Фазовая скорость $\upsilon=\dfrac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu}}$, где $c=3\cdot10^8$ м/с – скорость электромагнитной волны в вакууме; μ – магнитная проницаемость среды, $\mu=1$ (среда немагнитная).

Подставляя значения λ_0 и λ в формулу, получаем:

$$\Delta\lambda=\frac{c}{\nu}\left(1-\frac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu}}\right).$$

Вычисления дают $\Delta\lambda=$ 17,6 м.

Ответ: $\Delta\lambda=$ 17,6 м.

Задача 2. Вдоль оси x в вакууме распространяется плоская электромагнитная волна. Амплитуда напряженности электрического поля волны равна $E_0=$ 100 В/м. Определить амплитуду напряженности H_0 магнитного поля волны.

Решение.

Мгновенные значения напряженностей электрического E и магнитного H полей электромагнитной волны связаны соотношением

$$\sqrt{\varepsilon_0\varepsilon}E=\sqrt{\mu_0\mu}H,$$

где ε_0, μ_0 – электрическая и магнитная постоянные соответственно; ε, μ – электрическая и магнитная проницаемости среды. По условию волна распространяется в вакууме, поэтому $\varepsilon = 1$ и $\mu = 1$.

Поскольку вектора $\vec{E}$ и $\vec{H}$ в электромагнитной волне совершают колебания в одинаковой фазе, то выражение (1) можно записать и для амплитудных значений этих векторов, т. е.

$$\sqrt{\varepsilon_0 \varepsilon} E_0 = \sqrt{\mu_0 \mu} H_0 \text{ или } \sqrt{\varepsilon_0} E_0 = \sqrt{\mu_0} H_0,$$

откуда получаем

$$H_0 = \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}} E_0.$$

Подставим числовые значения: $E_0 =$ 100 В/м; $\varepsilon_0 =$ 8,85·10^{-12} Ф/м; $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ Гн/м.

Вычисления дают $H_0 =$ 265 мА/м.

Ответ: $H_0 =$ 265 мА/м.

Задача 3. Плоская электромагнитная волна распространяется в вакууме вдоль оси x и падает по нормали на поверхность тела, полностью ее поглощающего. Давление, оказываемое волной на поверхность, равно $p =$ 8,85 пПа. Какова амплитуда напряженности E_0 электрического поля волны?

Решение.

В случае, если тело полностью поглощает падающую на него энергию, давление численно равно среднему значению объемной плотности энергии в падающей электромагнитной волне, т. е.

$$p = \langle w \rangle. \quad (1)$$

Объемная плотность энергии электромагнитной волны

$$w = w_{эл} + w_м \quad (2)$$

где $w_{эл} = \dfrac{\varepsilon_0 \varepsilon E^2}{2}$ – объемная плотность энергии электрического поля; $w_м = \dfrac{\mu_0 \mu H^2}{2}$ – объемная плотность энергии магнитного поля волны.

В бегущей электромагнитной волне в каждый момент времени мгновенные значения напряженностей электрического и магнитного полей связаны соотношением

$$\sqrt{\varepsilon_0\varepsilon}\,E = \sqrt{\mu_0\mu}\,H\,. \tag{3}$$

Из соотношения (3) следует, что $w_{эл} = w_{м}$, поэтому уравнение (2) примет вид:

$$w = 2w_{эл} = \varepsilon_0\varepsilon E^2. \tag{4}$$

Напряженность электрического поля меняется по закону

$$E = E_0\cos(\omega t - kx), \tag{5}$$

где E_0 – амплитуда напряженности электрического поля электромагнитной волны; ω – циклическая частота; $k = \dfrac{\omega}{\upsilon}$ – волновое число.

С учетом выражения (5) для мгновенного значения объемной плотности энергии можно записать

$$w = \varepsilon_0\varepsilon E_0^2\cos^2(\omega t - kx). \tag{6}$$

Учитывая, что среднее значение $<\cos^2(\omega t - kx)> = \dfrac{1}{2}$, получаем для среднего значения объемной плотности энергии

$$<w> = \frac{1}{2}\varepsilon_0\varepsilon E_0^2\,. \tag{7}$$

При распространении электромагнитной волны в вакууме ($\varepsilon = 1$, $\mu = 1$) имеем

$$<w> = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E_0^2\,, \tag{8}$$

тогда

$$p = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E_0^2\,, \tag{9}$$

откуда получаем

$$E_0 = \sqrt{\frac{2p}{\varepsilon_0}}\,. \tag{10}$$

Вычисления дают $E_0 = 2$ В/м.

Ответ: $E_0 = 2$ В/м.

Задача 4. Интенсивность плоской монохроматической, линейно-поляризованной волны, распространяющейся в вакууме, равна $I = 1$ Вт/м^2. Определить амплитуды напряженностей электрического и магнитного полей электромагнитной волны.

Решение.

Интенсивность электромагнитной волны определяется соотношением

$$I = |< S >| = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\varepsilon_0\varepsilon}{\mu_0\mu}}E_0^2,$$

где ε_0, μ_0 – электрическая и магнитная постоянные соответственно; ε, μ – электрическая и магнитная проницаемости среды.

Выразим амплитуду электромагнитной волны

$$E_0 = \sqrt{2I\sqrt{\frac{\mu_0\mu}{\varepsilon_0\varepsilon}}}.$$

Подставим числовые значения и учтем, что волна распространяется в вакууме ($\varepsilon = 1$, $\mu = 1$), после вычисления получаем: $E_0 \approx 27{,}5$ В/м.

Амплитуда напряженности магнитного поля

$$H_0 = \sqrt{\frac{\varepsilon_0\varepsilon}{\mu_0\mu}}E_0.$$

Вычисления дают $H_0 = 0{,}073$ А/м.

Ответ: $E_0 \approx 27{,}5$ В/м ; $H_0 = 0{,}073$ А/м.

Задача 5. Плоская электромагнитная волна распространяется в среде с диэлектрической проницаемостью $\varepsilon = 60$, магнитной проницаемостью $\mu = 1$ и удельной электрической проводимостью $\gamma = 3$ См/м^3. Определить коэффициент затухания α, фазовую постоянную β и длину λ электромагнитной волны, если частота колебаний $\nu = 1$ МГц.

Решение.

Коэффициент затухания α, фазовая постоянная β и длина λ электромагнитной волны в среде с электрической проводимостью γ зависят от величины $\eta = \frac{j_{пр}}{j_{см}} = \frac{\gamma}{\omega\varepsilon_0\varepsilon}$, где ω – циклическая частота, $\omega = 2\pi\nu$.

Подставим числовые значения и вычислим $\eta = \frac{3}{2\pi \cdot 10^6 \cdot 8{,}85 \cdot 10^{-12} \cdot 60}$.

Так как $\eta >> 1$, то при заданной частоте среду следует считать проводящей, тогда

$$\alpha \approx \beta \approx \sqrt{\frac{\mu_0 \mu \omega \gamma}{2}}.$$

Длина волны определяется по формуле

$$\lambda = \frac{2\pi}{\beta}.$$

Вычисления дают $\alpha \approx \beta \approx 3{,}44$ м$^{-1}$; $\lambda = 1{,}83$ м.

Ответ: $\alpha \approx \beta \approx 3{,}44$ м$^{-1}$; $\lambda = 1{,}83$ м.

Задача 6. Источник монохроматического излучения с длиной волны $\lambda_0 = 600$ нм движется по направлению к наблюдателю со скоростью $\upsilon = 0{,}1$ с (c – скорость света). Определить длину волны излучения, которую зарегистрирует спектральный прибор наблюдателя.

Решение.

При движении источника по направлению к наблюдателю спектральный прибор зарегистрирует электромагнитное излучение частотой, определяемой по формуле

$$\nu = \nu_0 \frac{\sqrt{1 - \frac{\upsilon^2}{c^2}}}{1 - \frac{\upsilon}{c}} \quad (\alpha = 0).$$

Собственная частота излучения источника

$$\nu_0 = \frac{c}{\lambda_0}.$$

Длина волны, которую зарегистрирует спектральный прибор наблюдателя при сближении его с источником излучения

$$\lambda = \frac{c}{\nu} = \lambda_0 \sqrt{\frac{1 - \frac{\upsilon}{c}}{1 + \frac{\upsilon}{c}}}.$$

После подстановки числовых данных получаем $\lambda = 543$ нм.

Задачи для самостоятельного решения

1. Скорость распространения электромагнитных волн в некоторой среде составляет υ = 250 Мм/с. Определить длину электромагнитных волн в этой среде, если их частота в вакууме ν_0 = 1 МГц.

(Ответ: λ = 250 м).

2. В вакууме вдоль оси x распространяется плоская электромагнитная волна. Амплитуда напряженности магнитного поля волны равна H_0 = 1 мА/м. Определить амплитуду напряженности E_0 электрического поля волны.

(Ответ: E_0 = 0,377 В/м).

3. Плоская электромагнитная волна распространяется в вакууме. Расстояние, на котором фаза волны меняется на $\Delta\varphi$ = 1200° равно Δx = 10 м. Найти частоту ν и длину волны λ.

(Ответ: ν = 100 МГц; λ = 3 м).

4. Определить длину λ и фазовую скорость υ плоской электромагнитной волны, распространяющейся в диэлектрической среде с относительными проницаемостями ε = 5; μ = 3. Частота волны ν = 500 МГц.

(Ответ: λ = 1,55 м; υ = 77,5 Мм/с).

5. При переходе электромагнитной волны из немагнитной среды с диэлектрической проницаемостью ε = 4 в вакуум длина волны увеличилась на $\Delta\lambda$ = 50 м. Определить частоту ν колебаний.

(Ответ: ν = 3 МГц).

6. Плоская электромагнитная волна распространяется в однородной и изотропной среде с диэлектрическими проницаемостями ε = 2; μ = 1. Амплитуда напряженности электрического поля волны E_0 = 20 В/м. Определить фазовую скорость и амплитуду напряженности магнитного поля волны.

(Ответ: υ = $2{,}12\cdot10^8$ м/с; H_0 = 75 мА/м).

7. В вакууме вдоль оси x распространяется плоская электромагнитная волна. Интенсивность волны составляет I = 21,2 мкВт/м^2. Определить амплитуду напряженности E_0 электрического поля волны.

(Ответ: E_0 = 126 мВ/м).

8. В вакууме вдоль оси x распространяется плоская электромагнитная волна и падает по нормали на поверхность тела, полностью ее поглощающего. Амплитуда напряженности магнитного поля волны равна H_0 = 0,15 А/м. Определить давление, оказываемое волной на тело.

(Ответ: p = 17,7 пПа).

9. В вакууме вдоль оси x распространяется плоская электромагнитная волна. Амплитуда напряженности электрического поля волны составляет E_0 = 50 мВ/м. Определить интенсивность I волны.

(Ответ: I = 3,32 мкВт/м^2).

10. Плоская монохроматическая электромагнитная волна распространяется вдоль оси x. Амплитуда напряженности электрического поля волны E_0 = 5 мВ/м, амплитуда напряженности магнитного поля волны H_0 = 1 мА/м. Определить энергию, перенесенную волной за время t = 10 мин через площадку, расположенную перпендикулярно оси x, площадью поверхностью S = 15 см^2. Период волны $T << t$.

(Ответ: W = 2,25 мкДж).

11. Смещение ξ_1 из положения равновесия частицы среды, находящейся на расстоянии x_1 = 5 см от источника колебаний через промежуток времени t = T/3, равно половине амплитуды. Определить длину волны.

(Ответ: λ = 0,3 м).

12. Длина электромагнитной волны, распространяющейся в диэлектрической среде с проницаемостями ε = 4,5; μ = 2, равна длине волны, распространяющейся в вакууме. Во сколько раз отличаются частоты этих волн?

(Ответ: частота волны в вакууме в 3 раза выше).

13. Импульсная мощность излучения оптического квантового генератора равна P = 500 кВт. При каком диаметре d пучка излучения может произойти электрический пробой воздуха, если напряженность электрического поля, обеспечивающего пробой, равна E = 30 кВ/ч. Воздух считать диэлектриком с параметрами ε = μ = 1. Пренебречь отличием излучения лазера от плоской волны в пределах пучка.

(Ответ: d = 7,3 мм).

14. Определить толщину алюминиевого экрана, обеспечивающего ослабление амплитуды электромагнитного поля в 1000 раз на частотах ν_1 = 100 Гц и ν_2 = 100 МГц. Удельное электрическое сопротивление алюминия ρ = 0,028 Ом·мм^2/м, относительная магнитная проницаемость μ = 1.

(Ответ: d_1 = 58 мм; d_2 = 58 мкм).

15. Во сколько раз отличаются длины электромагнитных волн одинаковой частоты в меди и олове? Медь и олово считать немагнитными средами с удельным электрическим сопротивлением соответственно ρ_1 = 17,5 нОм·м; ρ_2 = 115 нОм·м.

(Ответ: длина волны в меди в 2,56 раза меньше, чем в олове).

16. Как изменится глубина проникновения электромагнитной волны в медь при нагревании от T_1 = 0 °С до T_2 = 100 °С. Температурный коэффициент сопротивления меди σ = 0,0039 К$^{-1}$.

(Ответ: увеличится в 1,18 раза).

17. Морская волна имеет параметры ε = 78, μ = 1, γ = 5 См/м. Во сколько раз отличается длина электромагнитной волны в такой среде от длины волны в идеальном диэлектрике с теми же значениями ε и μ. Частота волны ν = 1 МГц.

(Ответ: меньше в 24 раза).

18. Морская волна имеет параметры ε = 78, μ = 1, γ = 5 См/м. Определить коэффициент затухания и длину плоской электромагнитной волны с частотой ν = 10 МГц, распространяющейся в такой среде.

(Ответ: α = 14,05 м$^{-1}$; λ = 0,447 м).

19. Морская волна имеет параметры ε = 78, μ = 1, γ = 5 См/м. Можно ли морскую воду считать хорошим диэлектриком при распространении в ней плоской электромагнитной волны с частотой ν = 1 МГц.

(Ответ: на данной частоте морская волна не является хорошим диэлектриком).

20. Плотность мощности плоской электромагнитной волны, распространяющейся в вакууме, в момент времени t = 1 мкс в плоскости Z = 1 м равна 1 Вт/м^2. Циклическая частота волны ω = 10^8 с$^{-1}$. Волна распространяется в положительном направлении оси Z. Определить амплитуды напряженностей электрического E_0 и магнитного H_0 полей волны.

(Ответ: E_0 = 29,9 В/м; H_0 = 79 мА/м).

21. В вакууме распространяется плоская гармоническая линейно-поляризованная электромагнитная волна частоты ω. Интенсивность волны равна I. Найти амплитудное значение плотности тока смещения в этой волне.

(Ответ: $j_{см\,\max} = \omega\sqrt{2\varepsilon_0 I / c}$).

22. Оценить скорость υ, с которой должна была бы двигаться машина, чтобы красный сигнал светофора ($\lambda_{кр}$ = 650 нм) воспринимался как зеленый ($\lambda_{зел}$ = 550 нм).

(Ответ: υ = 0,17 с ≈ 50 000 км/с).

23. Плоская электромагнитная волна $\vec{E} = \vec{E}_0 \cos\left(\omega t - \vec{k}\vec{r}\right)$ распространяется в вакууме. Найти вектор $\vec{H}$ как функцию времени в точке с радиус-вектором $\vec{r} = 0$.

(Ответ: $\vec{H} = \dfrac{1}{k}\sqrt{\dfrac{\varepsilon_0}{\mu_0}}\left[\vec{k}\vec{E}\right]\cos\omega t$).

24. Плоское зеркало удаляется от наблюдателя со скоростью υ вдоль нормали к плоскости зеркала. На зеркало посылается пучок света длиной волны λ_0 = 500 нм. Определить длину волны λ света, отраженного от зеркала, движущегося со скоростью: 1) υ = 0,2 с; 2) υ = 9 км/с.

(Ответ: 1) λ = 750 нм; 2) λ = 500,03 нм).

25. Некоторая среда имеет параметры ε = 4, μ = 2, γ = 10^{-4} См/м. На каком пути в этой среде амплитуда электромагнитной волны уменьшается на 10 %, если длина волны в вакууме равна λ = 3 см.

(Ответ: S = 7,9 м).

26. В диэлектрике с параметрами ε = 1,5, μ = 1 распространяется плоская электромагнитная волна с амплитудой напряженности электрического поля E_0 = 50 В/м. Определить интенсивность I волны.

(Ответ: I = 4,06 Вт/м^2).

27. Интенсивность плоской электромагнитной волны в диэлектрической среде с параметрами ε = 2, μ = 3 равна I = 1 Вт/м^2. Найти амплитуду напряженности магнитного поля волны.

(Ответ: H_0 = $6{,}58 \cdot 10^{-2}$ А/м).

28. Фазовая скорость плоской электромагнитной волны равна υ = 75 Мм/с. Среда, в которой распространяется волна, является диэлектриком с относительной диэлектрической проницаемостью ε = 2. Определить относительную магнитную проницаемость μ среды.

(Ответ: μ = 8).

29. Во сколько раз уменьшится амплитуда электромагнитной волны с частотой ν = 30 МГц при распространении в металле с параметрами μ = 1, γ = 10^7 См/м на пути S = 0,1 мм. Определить фазовую скорость υ и длину волны λ.

(Ответ: в 31,2 раза; υ = 5,48 км/с; λ = $1{,}8 \cdot 10^7$ м).

30. Плоская синусоидальная электромагнитная волна распространяется в направлении оси x. Определить, какая энергия будет перенесена ею через площадку S = 10 см^2, расположенную перпендикулярно оси, за время t = 5 мин. Период волны $T << t$. Амплитуда напряженности электрического поля E_0 = $5 \cdot 10^{-5}$ В/м, амплитуда напряженности магнитного поля H_0 = $2 \cdot 10^{-4}$ А/м.

(Ответ: $W = 1{,}5 \cdot 10^{-9}$ $Дж/с$ = $1{,}5 \cdot 10^{-9}$ Дж/с).

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В предлагаемом учебном пособии изложены задачи по колебаниям и волнам различной физической природы: механические колебания, упругие волны, электромагнитные колебания в контуре и электромагнитные волны. Причем эти задачи, как правило, не выходят за пределы курса физики. Освоив решение предложенных задач, студент получит предварительные навыки в своей дальнейшей учебе по курсам электроники, электротехники, ТОЭ, строительным конструкциям и другим дисциплинам, необходимым специалистам разных направлений подготовки.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Основы физики : учеб. для вузов. В 2 т. / Н.П. Калашников, М.А. Смандырев. – 2-е изд. перераб. – М. : Дрофа, 2003.

2. Основы физики. Упражнения и задачи : учеб. пособие для вузов / Н.П. Калашников, М.А. Смандырев. – М. : Дрофа, 2004.

3. Савельев, И.В. Курс общей физики / И.В. Савельев. – М. : Наука, 2002. – Т. 1, 2.

4. Трофимова, Т.Н. Курс физики / Т.Н. Трофимова. – М. : Высш. шк., 2009.

5. Волькенштейн, В.С. Сборник задач по общему курсу физики / В.С. Волькенштейн. – М. : Наука, 2003.

6. Детлаф, А.А. Курс физики / А.А. Детлаф, Б.М. Яворский. – М. : Высш. шк., 2009.

7. Чертов, А.Г. Задачник по физике / А.Г. Чертов, А.А. Воробьев. – М. : Высш. шк., 2009.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Учебное издание

Кравцова Наталья Анатольевна
Фалеев Дмитрий Серафимович

КОЛЕБАНИЯ И ВОЛНЫ

Сборник задач по физике

Редактор *А.А. Иванова*
Технический редактор *Н.В. Ларионова*

План 2013 г. Поз. 9.21. Подписано в печать 30.01.2013.
Гарнитура Arial. Печать RISO. Уч.-изд. л. 7,7. Усл. печ. л. 8,3.
Зак. 45. Тираж 60 экз. Цена 393 р.

Издательство ДВГУПС
680021, г. Хабаровск, ул. Серышева, 47.