

# ТЕОРИЯ ФУНКЦИЙ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО

**Вариант № 1**

1. Вычертить область, заданную неравенствами

$$|z - 1| \leq 1, \quad |z + 1| > 2.$$

2. Доказать аналитичность функции

$$w = z^2 - iz + 2$$

и найти ее производную.

3. Восстановить аналитическую в окрестности точки  $z = 0$  функцию  $f(z)$  по известной мнимой части

$$v(x, y) = e^x (y \cos y + x \sin y)$$

и значению  $f(0) = 0$ .

4. Вычислить интеграл 
$$\int_L \bar{z} \cdot \operatorname{Re} z^2 dz,$$

где  $L$  – отрезок прямой, соединяющий точки  $z_1 = 1 + 2i$  и  $z_2 = 2 + 4i$ .

5. Используя интегральную формулу Коши, вычислить интеграл:

$$\oint_L \frac{\sin z}{\left(z - \frac{\pi}{2}\right)^3} dz, \quad L: |z| = 2.$$

6. Используя теорему о вычетах, вычислить интеграл:

$$\oint_L \frac{dz}{(z^3 + z)(z^2 + 4)}, \quad L: z = i + \frac{3}{2} e^{it}.$$

7. Найти все лорановские разложения функции

$$f(z) = \frac{z + 1}{z(z - 1)} \quad \text{по степеням } (z - 1 - 2i).$$

**Вариант № 2**

1. Вычертить область, заданную неравенствами

$$|z + i| \geq 1, \quad |z| < 2.$$

2. Доказать аналитичность функции

$$f(z) = \frac{e^z + e^{-z}}{2}$$

и найти ее производную.

3. Восстановить аналитическую в окрестности точки  $z=0$  функцию  $f(z)$  по известной действительной части

$$u(x, y) = x^2 - y^2 + x$$

и значению  $f(0) = 0$ .

4. Вычислить интеграл  $\int_L (z + \operatorname{Re} z) dz$ ,

где  $L$  – дуга параболы  $x = y^2$  от точки  $z_1 = 0$  до точки  $z_2 = 4 + 2i$ .

5. Используя интегральную формулу Коши, вычислить интеграл:

$$\int_L \frac{\cos z}{z^3} dz, \quad L: |z| = 1.$$

6. Используя теорему о вычетах, вычислить интеграл:

$$\oint_L \frac{dz}{(z-1)(z-3)(z+2)}, \quad L: z = 4 + 4e^{it}.$$

7. Найти все лорановские разложения функции

$$f(z) = \frac{z+1}{z(z-1)} \quad \text{по степеням } (z-2+3i).$$

**Вариант № 3**

1. Вычертить область, заданную неравенствами

$$|z - i| \leq 2, \quad \operatorname{Re} z > 1$$

2. Доказать аналитичность функции

$$f(z) = z^3 + 1$$

и найти ее производную.

3. Восстановить аналитическую в окрестности точки  $z=0$  функцию  $f(z)$  по известной мнимой части

$$v = e^x \cos y$$

и значению  $f(0) = 1 + i$ .

4. Вычислить интеграл  $\int_L (\bar{z} + i) dz$ ,

где  $L$  – дуга параболы  $y = x^2 + 1$  от точки  $z_1 = i$  до точки  $z_2 = 1 + 2i$ .

5. Используя интегральную формулу Коши, вычислить интеграл:

$$\oint_L \frac{e^z}{(z - \pi i)^2} dz, \quad L: |z| = 4.$$

6. Используя теорему о вычетах, вычислить интеграл:

$$\oint_L \frac{(z + 2) dz}{(z + 1)(z - 1)(z + 4)}, \quad L: z = 2 + 2e^{it}.$$

7. Найти все лорановские разложения функции

$$f(z) = \frac{z + 1}{z(z - 1)} \quad \text{по степеням } (z + 3 + 2i).$$

**Вариант № 4**

1. Вычертить область, заданную неравенствами

$$|z + 1| \geq 1, \quad |z + i| < 1.$$

2. Доказать аналитичность функции

$$w = \bar{z} \operatorname{Re} z$$

и найти ее производную.

3. Восстановить аналитическую в окрестности точки  $z=0$  функцию  $f(z)$  по известной действительной части

$$u(x, y) = x^2 - y^2 - 2y$$

и значению  $f(0) = 0$ .

4. Вычислить интеграл  $\int_L z \cdot \operatorname{Re} z^2 dz$ ,

где  $L$  – отрезок прямой, соединяющий точки  $z_A = 0$ ,  $z_B = 1 + 2i$ .

5. Используя интегральную формулу Коши, вычислить интеграл:

$$\oint_{|z+1|=4} \frac{dz}{z^2 + 2z - 8}.$$

6. Используя теорему о вычетах, вычислить интеграл:

$$\oint_L \frac{dz}{z^2 + 2}, \quad L: |z + 2i| = 2.$$

7. Найти все лорановские разложения функции

$$f(z) = \frac{z + 1}{z(z - 1)} \quad \text{в окрестности точки } z_0 = -2 + i.$$

**Вариант № 5**

1. Вычертить область, заданную неравенствами

$$|z + 1| < 1, \quad |z - i| \leq 1.$$

2. Доказать аналитичность функции

$$f(z) = z^2 - 2z + 2$$

и найти ее производную.

3. Восстановить аналитическую в окрестности точки  $z=1$  функцию  $f(z)$  по известной мнимой части

$$v(x, y) = y - \frac{y}{x^2 + y^2}$$

и значению  $f(1) = 2$ .

4. Вычислить интеграл  $\int_L \bar{z} dz$ , где  $L$  – дуга параболы  $y = 2x^2$  от точки

$$z_1 = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i \quad \text{до точки} \quad z_2 = 1 + 2i.$$

5. Используя интегральную формулу Коши, вычислить интеграл:

$$\int_L \frac{\cos z}{z(z - \frac{\pi}{2})} dz, \quad L: |z| = 2.$$

6. Используя теорему о вычетах, вычислить интеграл:

$$\oint_L \frac{(z^2 + 2)dz}{(z - 1)(z - i)^2}, \quad L: |z - 2i| = 2.$$

7. Найти все лорановские разложения функции

$$f(z) = \frac{z - 1}{z(z + 1)} \quad \text{по степеням } (z - 1 - 3i).$$

**Вариант № 6**

1. Вычертить область, заданную неравенствами

$$|z + i| \leq 2, \quad |z - i| > 2.$$

2. Доказать аналитичность функции

$$f(z) = z^3 + z$$

и найти ее производную.

3. Восстановить аналитическую в окрестности точки  $z=1$  функцию  $f(z)$  по известной действительной части

$$u(x, y) = \frac{x}{x^2 + y^2}$$

и значению  $f(1) = 1 + i$ .

4. Вычислить интеграл  $\int_L (z + 2\bar{z}) dz$ ,

где  $L$  – дуга окружности  $|z|=1$ ,  $Imz \geq 0$ ,  $Re z \geq 0$ .

5. Используя интегральную формулу Коши, вычислить интеграл:

$$\int_L \frac{dz}{(z^2 - 1)^2}, \quad L: |z - 1| = 1.$$

6. Используя теорему о вычетах, вычислить интеграл:

$$\oint_L \frac{dz}{z^4(z+2)}, \quad L: |z| = 1.$$

7. Найти все лорановские разложения функции

$$f(z) = \frac{z-1}{z(z+1)} \quad \text{по степеням } (z - 2 + i).$$

**Вариант № 7**

1. Вычертить область, заданную неравенствами

$$|z - 1 - i| \leq 2, \quad \operatorname{Im} z > 1, \quad \operatorname{Re} z \geq 1.$$

2. Доказать аналитичность функции

$$f(z) = z^2 - (2 + i)z + 1$$

и найти ее производную.

3. Восстановить аналитическую в окрестности точки  $z=0$  функцию  $f(z)$  по известной мнимой части

$$v(x, y) = 2xy + y$$

и значению  $f(0) = 0$ .

4. Вычислить интеграл  $\int_L z \operatorname{Im} z dz$ , где  $L$  – отрезок прямой  $x-y=2$ , соединяющей точки  $z_1 = 2$  и  $z_2 = 5 + 3i$ .

5. Используя интегральную формулу Коши, вычислить интеграл:

$$\int_L \frac{tgz}{z \left( z - \frac{\pi}{4} \right)^2} dz, \quad L: |z| = 1.$$

6. Используя теорему о вычетах, вычислить интеграл:

$$\oint_L \frac{dz}{(z-1)(z-2)(z-4)}, \quad L: z = 1 + 2e^{it}.$$

7. Найти все лорановские разложения функции

$$f(z) = \frac{z-1}{z(z+1)} \quad \text{по степеням } (z+1-2i).$$

**Вариант № 8**

1. Вычертить область, заданную неравенствами

$$|z - 1 + i| \geq 1, \quad \operatorname{Im} z \leq 1, \quad \operatorname{Re} z < 1.$$

2. Доказать аналитичность функции

$$f(z) = 3z^2 - 2z + i$$

и найти ее производную.

3. Восстановить аналитическую в окрестности точки  $z=0$  функцию  $f(z)$  по известной действительной части

$$u(x, y) = y - 2xy$$

и значению  $f(0) = 0$ .

4. Вычислить интеграл  $\int_L \operatorname{Im}(\bar{z} + i) dz$ , где  $L$  – дуга параболы  $y = x^2$  от точки  $z = 0$  до точки  $z = 3i + 1$ .

5. Используя интегральную формулу Коши, вычислить интеграл:

$$\int_L \frac{dz}{z^2 + 9}, \quad L: |z + 2i| = 3.$$

6. Используя теорему о вычетах, вычислить интеграл:

$$\oint_L \frac{dz}{(z+1)^2(z-i)}, \quad L: z = 4e^{it}.$$

7. Найти все лорановские разложения функции

$$f(z) = \frac{z-1}{z(z+1)} \quad \text{по степеням } (z+2+3i).$$

**Вариант № 9**

1. Вычертить область, заданную неравенствами

$$|z - 2 - i| \leq 2, \quad \operatorname{Re} z \geq 3, \quad \operatorname{Im} z < 1.$$

2. Доказать аналитичность функции

$$f(z) = z^2 + 9$$

и найти ее производную.

3. Восстановить аналитическую в окрестности точки  $z=0$  функцию  $f(z)$  по известной мнимой части

$$v(x, y) = 2xy + 2x$$

и значению  $f(0) = 0$ .

4. Вычислить интеграл  $\int_L z\bar{z} dz$ , где  $L$  – отрезок прямой  $x+y=0$ , соединяющий точки  $z_1 = -2 + 2i$  и  $z_2 = 1 - i$ .

5. Используя интегральную формулу Коши, вычислить интеграл:

$$\int_L \frac{dz}{(z-1)^2(z+1)}, \quad L: |z-1| = \frac{3}{4}.$$

6. Используя теорему о вычетах, вычислить интеграл:

$$\oint_L \frac{(2z-1-i)dz}{(z-1)(z-i)}, \quad L: z = 2e^{it}.$$

7. Найти все лорановские разложения функции

$$f(z) = \frac{z+3}{z^2-1} \quad \text{по степеням} \quad (z-2-i).$$

---

Вариант № 10

1. Вычертить область, заданную неравенствами

$$|z - 1 - i| \geq 1, \quad 0 \leq \operatorname{Re} z < 2, \quad 0 < \operatorname{Im} z \leq 2.$$

2. Доказать аналитичность функции

$$f(z) = z^2 + 3z + 4$$

и найти ее производную.

3. Восстановить аналитическую в окрестности точки
- $z=0$
- функцию
- $f(z)$
- по известной действительной части

$$u(x, y) = e^x (x \cos y - y \sin y)$$

и значению  $f(0) = 0$ .

4. Вычислить интеграл
- $\int_L (z + i \operatorname{Im} z) dz$
- , где
- $L$
- дуга параболы
- $x = 2y^2$
- от точки
- $z_1 = 0$
- до точки
- $z_2 = 2 + i$
- .

5. Используя интегральную формулу Коши, вычислить интеграл:

$$\oint_L \frac{dz}{(z^2 + 9)^2}, \quad L: |z + 2i| = 4.$$

6. Используя теорему о вычетах, вычислить интеграл:

$$\oint_L \frac{(z+1)dz}{z(z-1)^2(z-3)}, \quad L: z = 2e^{it}.$$

7. Найти все лорановские разложения функции

$$f(z) = \frac{z+3}{z^2-1} \quad \text{по степеням} \quad (z-3+i).$$

---

**Вариант № 11**

1. Вычертить область, заданную неравенствами

$$|z + i| < 2, \quad 0 < \operatorname{Re} z \leq 1.$$

2. Доказать аналитичность функции

$$f(z) = z^3 + 2z$$

и найти ее производную.

3. Восстановить аналитическую в окрестности точки  $z=0$  функцию  $f(z)$  по известной мнимой части

$$v(x, y) = \frac{e^{2x} - 1}{e^x} \cdot \sin y$$

и значению  $f(0) = 2$ .

4. Вычислить интеграл  $\int_L \operatorname{Im}(z^2 - i) dz$ , где  $L$  – отрезок прямой  $y = \frac{x}{2}$ ,

соединяющий точки  $z_1 = 1 + \frac{i}{2}$  и  $z_2 = 4 + 2i$ .

5. Используя интегральную формулу Коши, вычислить интеграл:

$$\int_L \frac{z^2 dz}{z - 2i}, \quad L: |z| = 3.$$

6. Используя теорему о вычетах, вычислить интеграл:

$$\oint_L \frac{\cos z}{(z + 1)^2 (z - 2)} dz, \quad L: |z| = 3.$$

7. Найти все лорановские разложения функции

$$f(z) = \frac{z + 3}{z^2 - 1} \quad \text{по степеням} \quad (z + 2 - 3i).$$

---

**Вариант № 12**

1. Вычертить область, заданную неравенствами

$$|z - i| \leq 1, \quad 0 < \arg z < \frac{\rho}{4} .$$

2. Доказать аналитичность функции

$$w = \bar{z}^2 \cdot z$$

и найти ее производную.

3. Восстановить аналитическую в окрестности точки  $z=0$  функцию  $f(z)$  по известной мнимой части

$$v = e^x (y \cos y + x \sin y)$$

и значению  $f(0) = 0$ .

4. Вычислить интеграл  $\int_L \operatorname{Im}(\bar{z} + i) dz$ , где  $L$  – дуга параболы  $y = x^2$  от точки  $z = 0$  до точки  $z = -2 + 4i$ .

5. Используя интегральную формулу Коши, вычислить интеграл:

$$\oint_L \frac{e^z dz}{z^2 \cdot (z + 4)}, \quad L: |z - 2i| = 3.$$

6. Используя теорему о вычетах, вычислить интеграл:

$$\oint_L \frac{(z + 1) dz}{z(z - 1)^2(z - 3)}, \quad L: z = 2e^{it} .$$

7. Найти все лорановские разложения функции

$$f(z) = \frac{z + 3}{z^2 - 1} \quad \text{в окрестности точки} \quad z_0 = -2 - 2i .$$

**Вариант № 13**

1. Вычертить область, заданную неравенствами

$$|z - i| \leq 1, \quad 0 < \arg z < \frac{\pi}{4}.$$

2. Доказать аналитичность функции

$$f(z) = 2z^3 + iz - 1$$

и найти ее производную.

3. Восстановить аналитическую в окрестности точки  $z=0$  функцию  $f(z)$  по известной мнимой части

$$v(x, y) = e^{-y} \sin x + y$$

и значению  $f(0) = 1$ .

4. Вычислить интеграл  $\int_L (z + i\bar{z}) dz$ , где  $L$  – отрезок прямой  $y = -x + 1$  соединяющей точки  $z_1 = -1 + 2i$  и  $z_2 = 1$ .

5. Используя интегральную формулу Коши, вычислить интеграл:

$$\int_L \frac{dz}{z^2 + 9}, \quad L: |z - 2i| = 2.$$

6. Используя теорему о вычетах, вычислить интеграл:

$$\oint_L \frac{(z+5)}{z^2 - 1} dz, \quad L: |z - 1| = 1.$$

7. Найти все лорановские разложения функции

$$f(z) = \frac{z}{z^2 + 1} \quad \text{по степеням} \quad (z - 2 - i).$$

1. Вычертить область, заданную неравенствами

$$|z + i| > 1, \quad -\frac{\pi}{4} \leq \arg z < 0.$$

2. Доказать аналитичность функции

$$f(z) = z^2 + (1-i)z$$

и найти ее производную.

3. Восстановить аналитическую в окрестности точки  $z=0$  функцию  $f(z)$  по известной действительной части

$$u(x, y) = \frac{e^{2x+1}}{e^x} \cos y$$

и значению  $f(0) = 2$ .

4. Вычислить интеграл  $\int_L z \cdot \operatorname{Re} z dz$ , где  $L$  – дуга параболы,  $y = -x^2$  от точки  $z_1 = -1 - i$  до точки  $z_2 = 0$ .

5. Используя интегральную формулу Коши, вычислить интеграл:

$$\oint_L \frac{\sin z}{z+i} dz, \quad L: |z+i|=4.$$

6. Используя теорему о вычетах, вычислить интеграл:

$$\oint_L \frac{dz}{z^2+1}, \quad L: z = 2e^{it}.$$

7. Найти все лорановские разложения функции

$$f(z) = \frac{z}{z^2+1} \text{ по степеням } (z-1+2i).$$

1. Вычертить область, заданную неравенствами

$$|z - 1 + i| < 1, \quad |\arg z| \leq \frac{\pi}{4}.$$

2. Доказать аналитичность функции

$$f(z) = z^3 + 10$$

и найти ее производную.

3. Восстановить аналитическую в окрестности точки  $z=0$  функцию  $f(z)$  по известной мнимой части

$$v(x, y) = x^2 - y^2 + 2x + 1$$

и значению  $f(0) = i$ .

4. Вычислить интеграл  $\int_L \operatorname{Re}(iz) dz$ ,

где  $L$  – дуга окружности  $|z| = 2$ ,  $\operatorname{Im} z \geq 0$ .

5. Используя интегральную формулу Коши, вычислить интеграл:

$$\int_L \frac{dz}{(z^2 + 1)^2}, \quad L: |z + 2i| = 2.$$

6. Используя теорему о вычетах, вычислить интеграл:

$$\oint_L \frac{\cos z dz}{z^2(z - \frac{\pi}{2})}, \quad L: z = 2e^{it}.$$

7. Найти все лорановские разложения функции

$$f(z) = \frac{z}{z^2 + 1} \quad \text{по степеням} \quad (z + 3 - i).$$

1. Вычертить область, заданную неравенствами

$$|z| < 2, \quad -\frac{\pi}{4} \leq \arg(z-1) \leq \frac{\pi}{4}.$$

2. Доказать аналитичность функции

$$f(z) = z^3 - 2z$$

и найти ее производную.

3. Восстановить аналитическую в окрестности точки  $z=0$  функцию  $f(z)$  по известной действительной части

$$u(x, y) = e^{-y} \cos x$$

и значению  $f(0) = 1$ .

4. Вычислить интеграл  $\int_L \bar{z} \cdot \operatorname{Im} z dz$ , где  $L$  – отрезок прямой  $x + y = 2$  соединяющий точки  $z_1 = -1 + 3i$  и  $z_2 = 2$ .

5. Используя интегральную формулу Коши, вычислить интеграл:

$$\oint_L \frac{dz}{(z^2 - 1)^2}, \quad L: |z - 1| = 1.$$

6. Используя теорему о вычетах, вычислить интеграл:

$$\oint_L \frac{\sin z}{z^2 + 1} dz, \quad L: |z - i| = 1.$$

7. Найти все лорановские разложения функции

$$f(z) = \frac{z}{z^2 + 1} \quad \text{по степеням} \quad (z + 3 + 2i).$$

1. Вычертить область, заданную неравенствами

$$1 < |z - 1| \leq 2, \quad \operatorname{Im} z \geq 0, \quad \operatorname{Re} z < 1.$$

2. Доказать аналитичность функции

$$f(z) = z^2 + 3z + 2$$

и найти ее производную.

3. Восстановить аналитическую в окрестности точки  $z=0$  функцию  $f(z)$  по известной мнимой части

$$v(x, y) = 3x^2 y - y^3$$

и значению  $f(0) = 1$ .

4. Вычислить интеграл  $\int_L \operatorname{Im}(z - i) dz$ ,

где  $L$  – дуга окружности  $|z| = 1$ ,  $\operatorname{Im} z \leq 0$ .

5. Используя интегральную формулу Коши, вычислить интеграл:

$$\int_L \frac{e^z dz}{z^4 + 8z^2 - 9}, \quad L: |z| = 2.$$

6. Используя теорему о вычетах, вычислить интеграл:

$$\oint_L \frac{(z + 3) dz}{(z - 3)(z^2 + 1)}, \quad L: z = 5e^{it}.$$

7. Найти все лорановские разложения функции

$$f(z) = \frac{z + 2}{(z - 1)(z + 3)} \quad \text{по степеням} \quad (z + 2 - 2i).$$

1. Вычертить область, заданную неравенствами

$$1 \leq |z - i| < 2, \quad \operatorname{Re} z \leq 0, \quad \operatorname{Im} z > 1.$$

2. Доказать аналитичность функции

$$f(z) = z^2 - iz$$

и найти ее производную.

3. Восстановить аналитическую в окрестности точки  $z=0$  функцию  $f(z)$  по известной действительной части

$$u(x, y) = 1 - \sin y \cdot e^x$$

и значению  $f(0) = 1 + i$ .

4. Вычислить интеграл  $\int_L (i\bar{z} + z) dz$ , где  $L$  – отрезок прямой  $x - y = 2$  соединяющий точки  $z_1 = 3 + i$  и  $z_2 = 4 + 2i$ .

5. Используя интегральную формулу Коши, вычислить интеграл:

$$\oint_L \frac{z^3}{(z - 2i)^2} dz, \quad L: |z| = 3.$$

6. Используя теорему о вычетах, вычислить интеграл:

$$\oint_L \frac{dz}{(z - 1)(z - 2)(z - 4)}, \quad L: z = 1 + 2e^{it}.$$

7. Найти все лорановские разложения функции

$$f(z) = \frac{z + 2}{(z - 1)(z + 3)} \quad \text{по степеням} \quad (z - 1 + 3i).$$

1. Вычертить область, заданную неравенствами

$$|z| < 2, \quad \operatorname{Re} z \geq 1, \quad 0 < \arg z < \frac{\pi}{4}.$$

2. Доказать аналитичность функции

$$f(z) = z^2 - 2z + 1$$

и найти ее производную.

3. Восстановить аналитическую в окрестности точки  $z=0$  функцию  $f(z)$  по известной мнимой части

$$v(x, y) = e^{-y} \sin x$$

и значению  $f(0) = 1$ .

4. Вычислить интеграл  $\int_L \operatorname{Re}(iz^2) dz$ , где  $L$  – дуга окружности  $|z|=1$ ,

$$\operatorname{Im} z \geq 0.$$

5. Используя интегральную формулу Коши, вычислить интеграл:

$$\oint_L \frac{\sin z}{z(z - \frac{\pi}{6})} dz, \quad L: |z|=1.$$

6. Используя теорему о вычетах, вычислить интеграл:

$$\oint_L \frac{(z+3)dz}{(z-2)(z^2+1)}, \quad L: z = 5e^{it}.$$

7. Найти все лорановские разложения функции

$$f(z) = \frac{2z}{z^2 - 4} \quad \text{по степеням} \quad (z - 2 - 2i).$$

1. Вычертить область, заданную неравенствами

$$|z| < 2, \quad \operatorname{Re} z \geq 1, \quad 0 < \operatorname{arg} z < \frac{\pi}{4}.$$

2. Доказать аналитичность функции

$$f(z) = z^2 + (2 + i)z + 4$$

и найти ее производную.

3. Восстановить аналитическую в окрестности точки  $z=0$  функцию  $f(z)$  по известной действительной части

$$u(x, y) = -2xy - 2y$$

и значению  $f(0) = i$ .

4. Вычислить интеграл  $\int_L (z + \operatorname{Re} z) dz$ , где  $L$  – отрезок прямой  $y = 2x$  соединяющий точки  $z_1 = 1 + 2i$  и  $z_2 = 3 + 6i$ .

5. Используя интегральную формулу Коши, вычислить интеграл:

$$\oint_L \frac{dz}{(z-1)^2(z+1)^3}, \quad L: |z-1| = \frac{3}{2}.$$

6. Используя теорему о вычетах, вычислить интеграл:

$$\oint_L \frac{(z^2 + 2)dz}{(z-1)(z-i)^2}, \quad L: |z-2i| = 2.$$

7. Найти все лорановские разложения функции

$$f(z) = \frac{z+1}{(z+2)(z-1)} \quad \text{по степеням } (z-1-i).$$

**Вариант № 21**

1. Вычертить область, заданную неравенствами

$$|z - 1| \leq 1, \quad |z + 1| > 2.$$

2. Доказать аналитичность функции

$$w = z^2 - iz + 2$$

и найти ее производную.

3. Восстановить аналитическую в окрестности точки  $z = 0$  функцию  $f(z)$  по известной мнимой части

$$v(x, y) = e^x (y \cos y + x \sin y)$$

и значению  $f(0) = 0$ .

4. Вычислить интеграл 
$$\int_L \bar{z} \cdot \operatorname{Re} z^2 dz,$$

где  $L$  – отрезок прямой, соединяющий точки  $z_1 = 1 + 2i$  и  $z_2 = 2 + 4i$ .

5. Используя интегральную формулу Коши, вычислить интеграл:

$$\oint_L \frac{\sin z}{\left(z - \frac{\pi}{2}\right)^3} dz, \quad L: |z| = 2.$$

6. Используя теорему о вычетах, вычислить интеграл:

$$\oint_L \frac{dz}{(z^3 + z)(z^2 + 4)}, \quad L: z = i + \frac{3}{2} e^{it}.$$

7. Найти все лорановские разложения функции

$$f(z) = \frac{z + 1}{z(z - 1)} \quad \text{по степеням } (z - 1 - 2i).$$

**Вариант № 22**

1. Вычертить область, заданную неравенствами

$$|z - i| \leq 2, \quad \operatorname{Re} z > 1$$

2. Доказать аналитичность функции

$$f(z) = z^3 + 1$$

и найти ее производную.

3. Восстановить аналитическую в окрестности точки  $z=0$  функцию  $f(z)$  по известной мнимой части

$$v = e^x \cos y$$

и значению  $f(0) = 1 + i$ .

4. Вычислить интеграл  $\int_L (\bar{z} + i) dz$ ,

где  $L$  – дуга параболы  $y = x^2 + 1$  от точки  $z_1 = i$  до точки  $z_2 = 1 + 2i$ .

5. Используя интегральную формулу Коши, вычислить интеграл:

$$\oint_L \frac{e^z}{(z - \pi i)^2} dz, \quad L: |z| = 4.$$

6. Используя теорему о вычетах, вычислить интеграл:

$$\oint_L \frac{(z + 2) dz}{(z + 1)(z - 1)(z + 4)}, \quad L: z = 2 + 2e^{it}.$$

7. Найти все лорановские разложения функции

$$f(z) = \frac{z + 1}{z(z - 1)} \quad \text{по степеням } (z + 3 + 2i).$$

**Вариант № 23**

1. Вычертить область, заданную неравенствами

$$|z + 1| < 1, \quad |z - i| \leq 1.$$

2. Доказать аналитичность функции

$$f(z) = z^2 - 2z + 2$$

и найти ее производную.

3. Восстановить аналитическую в окрестности точки  $z=1$  функцию  $f(z)$  по известной мнимой части

$$v(x, y) = y - \frac{y}{x^2 + y^2}$$

и значению  $f(1) = 2$ .

4. Вычислить интеграл  $\int_L \bar{z} dz$ , где  $L$  – дуга параболы  $y = 2x^2$  от точки

$$z_1 = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i \quad \text{до точки} \quad z_2 = 1 + 2i.$$

5. Используя интегральную формулу Коши, вычислить интеграл:

$$\int_L \frac{\cos z}{z(z - \frac{\pi}{2})} dz, \quad L: |z| = 2.$$

6. Используя теорему о вычетах, вычислить интеграл:

$$\oint_L \frac{(z^2 + 2)dz}{(z - 1)(z - i)^2}, \quad L: |z - 2i| = 2.$$

7. Найти все лорановские разложения функции

$$f(z) = \frac{z - 1}{z(z + 1)} \quad \text{по степеням} \quad (z - 1 - 3i).$$

**Вариант № 24**

1. Вычертить область, заданную неравенствами

$$|z - 1 - i| \leq 2, \quad \operatorname{Im} z > 1, \quad \operatorname{Re} z \geq 1.$$

2. Доказать аналитичность функции

$$f(z) = z^2 - (2 + i)z + 1$$

и найти ее производную.

3. Восстановить аналитическую в окрестности точки  $z=0$  функцию  $f(z)$  по известной мнимой части

$$v(x, y) = 2xy + y$$

и значению  $f(0) = 0$ .

4. Вычислить интеграл  $\int_L z \operatorname{Im} z dz$ , где  $L$  – отрезок прямой  $x-y=2$ , соединяющей точки  $z_1 = 2$  и  $z_2 = 5 + 3i$ .

5. Используя интегральную формулу Коши, вычислить интеграл:

$$\int_L \frac{\operatorname{tg} z}{z \left( z - \frac{\pi}{4} \right)^2} dz, \quad L: |z| = 1.$$

6. Используя теорему о вычетах, вычислить интеграл:

$$\oint_L \frac{dz}{(z-1)(z-2)(z-4)}, \quad L: z = 1 + 2e^{it}.$$

7. Найти все лорановские разложения функции

$$f(z) = \frac{z-1}{z(z+1)} \quad \text{по степеням } (z+1-2i).$$

**Вариант № 25**

1. Вычертить область, заданную неравенствами

$$|z - 2 - i| \leq 2, \quad \operatorname{Re} z \geq 3, \quad \operatorname{Im} z < 1.$$

2. Доказать аналитичность функции

$$f(z) = z^2 + 9$$

и найти ее производную.

3. Восстановить аналитическую в окрестности точки  $z=0$  функцию  $f(z)$  по известной мнимой части

$$v(x, y) = 2xy + 2x$$

и значению  $f(0) = 0$ .

4. Вычислить интеграл  $\int_L z \bar{z} dz$ , где  $L$  – отрезок прямой  $x+y=0$ , соединяющий точки  $z_1 = -2 + 2i$  и  $z_2 = 1 - i$ .

5. Используя интегральную формулу Коши, вычислить интеграл:

$$\int_L \frac{dz}{(z-1)^2(z+1)}, \quad L: |z-1| = \frac{3}{4}.$$

6. Используя теорему о вычетах, вычислить интеграл:

$$\oint_L \frac{(2z-1-i)dz}{(z-1)(z-i)}, \quad L: z = 2e^{it}.$$

7. Найти все лорановские разложения функции

$$f(z) = \frac{z+3}{z^2-1} \quad \text{по степеням} \quad (z-2-i).$$

---

Вариант № 26

1. Вычертить область, заданную неравенствами

$$|z + i| < 2, \quad 0 < \operatorname{Re} z \leq 1.$$

2. Доказать аналитичность функции

$$f(z) = z^3 + 2z$$

и найти ее производную.

3. Восстановить аналитическую в окрестности точки  $z=0$  функцию  $f(z)$  по известной мнимой части

$$v(x, y) = \frac{e^{2x} - 1}{e^x} \cdot \sin y$$

и значению  $f(0) = 2$ .

4. Вычислить интеграл  $\int_L \operatorname{Im}(z^2 - i) dz$ , где  $L$  – отрезок прямой  $y = \frac{x}{2}$ ,

соединяющий точки  $z_1 = 1 + \frac{i}{2}$  и  $z_2 = 4 + 2i$ .

5. Используя интегральную формулу Коши, вычислить интеграл:

$$\int_L \frac{z^2 dz}{z - 2i}, \quad L: |z| = 3.$$

6. Используя теорему о вычетах, вычислить интеграл:

$$\oint_L \frac{\cos z}{(z + 1)^2 (z - 2)} dz, \quad L: |z| = 3.$$

7. Найти все лорановские разложения функции

$$f(z) = \frac{z + 3}{z^2 - 1} \quad \text{по степеням} \quad (z + 2 - 3i).$$

---

Вариант № 27

1. Вычертить область, заданную неравенствами

$$|z - i| \leq 1, \quad 0 < \arg z < \frac{\pi}{4}.$$

2. Доказать аналитичность функции

$$f(z) = 2z^3 + iz - 1$$

и найти ее производную.

3. Восстановить аналитическую в окрестности точки  $z=0$  функцию  $f(z)$  по известной мнимой части

$$v(x, y) = e^{-y} \sin x + y$$

и значению  $f(0) = 1$ .

4. Вычислить интеграл  $\int_L (z + i\bar{z}) dz$ , где  $L$  – отрезок прямой  $y = -x + 1$  соединяющей точки  $z_1 = -1 + 2i$  и  $z_2 = 1$ .

5. Используя интегральную формулу Коши, вычислить интеграл:

$$\int_L \frac{dz}{z^2 + 9}, \quad L: |z - 2i| = 2.$$

6. Используя теорему о вычетах, вычислить интеграл:

$$\oint_L \frac{(z+5)}{z^2 - 1} dz, \quad L: |z - 1| = 1.$$

7. Найти все лорановские разложения функции

$$f(z) = \frac{z}{z^2 + 1} \quad \text{по степеням} \quad (z - 2 - i).$$

---

Вариант № 28

1. Вычертить область, заданную неравенствами

$$|z - 1 + i| < 1, \quad |\arg z| \leq \frac{\pi}{4}.$$

2. Доказать аналитичность функции

$$f(z) = z^3 + 10$$

и найти ее производную.

3. Восстановить аналитическую в окрестности точки  $z=0$  функцию  $f(z)$  по известной мнимой части

$$v(x, y) = x^2 - y^2 + 2x + 1$$

и значению  $f(0) = i$ .

4. Вычислить интеграл  $\int_L \operatorname{Re}(iz) dz$ ,

где  $L$  – дуга окружности  $|z| = 2$ ,  $\operatorname{Im} z \geq 0$ .

5. Используя интегральную формулу Коши, вычислить интеграл:

$$\int_L \frac{dz}{(z^2 + 1)^2}, \quad L: |z + 2i| = 2.$$

6. Используя теорему о вычетах, вычислить интеграл:

$$\oint_L \frac{\cos z dz}{z^2(z - \frac{\pi}{2})}, \quad L: z = 2e^{it}.$$

7. Найти все лорановские разложения функции

$$f(z) = \frac{z}{z^2 + 1} \quad \text{по степеням} \quad (z + 3 - i).$$

---

Вариант № 29

1. Вычертить область, заданную неравенствами

$$1 < |z - 1| \leq 2, \quad \operatorname{Im} z \geq 0, \quad \operatorname{Re} z < 1.$$

2. Доказать аналитичность функции

$$f(z) = z^2 + 3z + 2$$

и найти ее производную.

3. Восстановить аналитическую в окрестности точки  $z=0$  функцию  $f(z)$  по известной мнимой части

$$v(x, y) = 3x^2 y - y^3$$

и значению  $f(0) = 1$ .

4. Вычислить интеграл  $\int_L \operatorname{Im}(z - i) dz$ ,

где  $L$  – дуга окружности  $|z| = 1$ ,  $\operatorname{Im} z \leq 0$ .

5. Используя интегральную формулу Коши, вычислить интеграл:

$$\int_L \frac{e^z dz}{z^4 + 8z^2 - 9}, \quad L: |z| = 2.$$

6. Используя теорему о вычетах, вычислить интеграл:

$$\oint_L \frac{(z + 3) dz}{(z - 3)(z^2 + 1)}, \quad L: z = 5e^{it}.$$

7. Найти все лорановские разложения функции

$$f(z) = \frac{z + 2}{(z - 1)(z + 3)} \quad \text{по степеням} \quad (z + 2 - 2i).$$

---

Вариант № 30

1. Вычертить область, заданную неравенствами

$$|z| < 2, \quad \operatorname{Re} z \geq 1, \quad 0 < \arg z < \frac{\pi}{4}.$$

2. Доказать аналитичность функции

$$f(z) = z^2 - 2z + 1$$

и найти ее производную.

3. Восстановить аналитическую в окрестности точки  $z=0$  функцию  $f(z)$  по известной мнимой части

$$v(x, y) = e^{-y} \sin x$$

и значению  $f(0) = 1$ .

4. Вычислить интеграл  $\int_L \operatorname{Re}(iz^2) dz$ , где  $L$  – дуга окружности  $|z|=1$ ,  $\operatorname{Im} z \geq 0$ .

5. Используя интегральную формулу Коши, вычислить интеграл:

$$\oint_L \frac{\sin z}{z(z - \frac{\pi}{6})} dz, \quad L: |z|=1.$$

6. Используя теорему о вычетах, вычислить интеграл:

$$\oint_L \frac{(z+3)dz}{(z-2)(z^2+1)}, \quad L: z = 5e^{it}.$$

7. Найти все лорановские разложения функции

$$f(z) = \frac{2z}{z^2 - 4} \quad \text{по степеням} \quad (z - 2 - 2i).$$