МИНИСТЕРСТВО ПУТЕЙ СООБЩЕНИЯ РФ
ИРКУТСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ПУТЕЙ СООБЩЕНИЯ



ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Учебное пособие
для студентов заочного отделения
всех специальностей

ИРКУТСК
2003

МИНИСТЕРСТВО ПУТЕЙ СООБЩЕНИЯ РФ

ИРКУТСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ПУТЕЙ СООБЩЕНИЯ

ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Учебное пособие
для студентов заочного отделения
всех специальностей

Под редакцией
доктора технических наук, профессора А. П. Хоменко

ИРКУТСК

2003

ББК 22.161.1
УДК 517.373
П 30
Черняева Т.Н., Медведева И.П. Обыкновенные дифференциальные уравнения: Учебное пособие. Иркутск, 2003. 53 с.

Пособие содержит достаточно полное изложение основных вопросов теории обыкновенных дифференциальных уравнений, соответствующих требованиям к обязательному минимуму содержания основной обязательной программы по направлению подготовки дипломированного специалиста. Пособие снабжено большим количеством подробно разобранных примеров. В пособие включены вопросы для самоконтроля и десять вариантов заданий контрольной работы.

Пособие предназначено для студентов всех специальностей второго курса заочной формы обучения, но могут быть полезны при изучении соответствующих разделов математики на дневном отделении.

Ил. 1. Библиогр.: 11 назв.

Рецензенты: канд. физ.-мат. наук, доц. О.П. Бороздин (БрГТУ);
канд. техн. наук, доц. В.В. Макаров (ИрГУПС)

© Иркутский государственный университет путей сообщения, 2003

1. ЗАДАЧИ, ПРИВОДЯЩИЕ К ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫМ УРАВНЕНИЯМ

Многие задачи естествознания приводят к нахождению неизвестных функций, описывающих рассматриваемые явления или процессы, когда известны соотношения, связывающие между собой эти функции и их производные. Такие соотношения называются *дифференциальными уравнениями.* В качестве иллюстрации рассмотрим следующие примеры.

1.1. Допустим, что в каждый момент времени t известна скорость $f(t)$ точки, движущейся по оси Ox, где $f(t)$ – функция, непрерывная на (a,b). Кроме того, будем считать, что известна абсцисса x_0 этой точки в некоторый определённый момент времени $t = t_0$. Требуется найти закон движения точки, то есть зависимость абсциссы движущейся точки от времени.

Решение. Положение точки определяется одной координатой x и задача состоит в том, чтобы выразить x как функцию от t. Принимая во внимание механический смысл первой производной, мы получим равенство

$$\frac{dx}{dt} = f(t). \tag{1.1}$$

Как известно из интегрального исчисления

$$x(t) = \int_{t_0}^{t} f(t)dt + C \quad (a < t < b), \tag{1.2}$$

где верхний предел интеграла – переменный, нижний t_0 есть некоторое фиксированное число из (a,b), C – произвольная постоянная. Так как в формулу (1.2) входит произвольная постоянная, то мы ещё не получили определённого закона движения точки.

Выделим из множества движений (1.2) то движение, при котором движущаяся точка занимает заданное положение x_0 в заданный момент времени t_0:

$$x_0 = \int_{t_0}^{t_0} f(t)dt + C \;\Rightarrow\; C = x_0,$$

что вместе с (1.2) даёт искомый закон движения точки:

$$x(t) = \int_{t_0}^{t} f(t)dt + x_0 \quad (a < t < b)\ . \ \blacksquare$$

1.2. Найти уравнения кривых, для которых отрезок касательной между точкой касания и осью Ox делится пополам в точке пересечения с осью Oy.

Решение. Из чертежа имеем $tg\alpha = \dfrac{y}{2x}$, из геометрического смысла производной $tg\alpha = \dfrac{dy}{dx}$.

Следовательно, $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y}{2x}$ или $\dfrac{dy}{y} = \dfrac{dx}{2x}$.

Интегрируя, получим

$$\ln|y| = \frac{1}{2}\ln|x| + \frac{1}{2}\ln C \quad \Rightarrow \quad y^2 = Cx.$$

Ответ: искомые кривые – параболы $y^2 = Cx$ (рис.1). ■

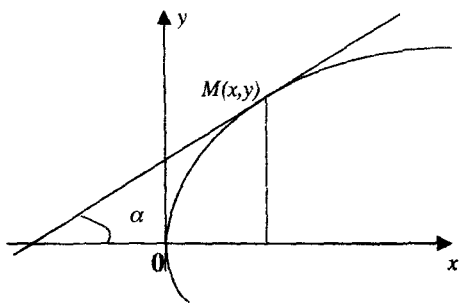


Рис. 1

2. ОСНОВНЫЕ СВЕДЕНИЯ О ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЯХ

Дифференциальным уравнением (ДУ) называется уравнение, связывающее независимую переменную x, искомую функцию $y(x)$ и ее производные или дифференциалы.

Порядком дифференциального уравнения называется наивысший порядок производной, входящей в уравнение.

Например:

1) $y'\sin x = y\ln y$ - диф. уравнение 1-го порядка;
2) $y(1-\ln y)y'' + (1+\ln y)y' = 0$ - ДУ 2-го порядка;
3) $y''' = 2(y''-1)ctgx$ - ДУ 3-го порядка.

Дифференциальным уравнением n-го порядка называется соотношение вида

$$F(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}) = 0 \qquad (2.1)$$

между независимой переменной x, функцией $y(x)$ и ее производными $y', y'', \ldots, y^{(n)}$.

Если неизвестная функция в уравнении (2.1) зависит от одной независимой переменной $y = y(x)$, то дифференциальное уравнение называется обыкновенным дифференциальным уравнением, если от нескольких переменных $y = y(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, то дифференциальное уравнение называется уравнением в частных производных. Мы будем рассматривать только обыкновенные ДУ и их системы.

Если уравнение (2.1) удается разрешить относительно $y^{(n)}$, то получим *уравнение, разрешённое относительно старшей производной,*

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}). \qquad (2.2)$$

Решением дифференциального уравнения называют функцию $y = \varphi(x)$, определенную на интервале (a, b) вместе со своими производными до n-го порядка включительно, и такую, что подстановка функции $y = \varphi(x)$ в ДУ превращает последнее в тождество $F(x, \varphi(x), \varphi'(x), \ldots, \varphi^{(n)}(x)) \equiv 0$.

Процесс нахождения решений дифференциального уравнения называется интегрированием этого уравнения.

Задача нахождения решения уравнения (2.2) или (2.1), удовлетворяющего начальным условиям,

$$y\big|_{x=x_0} = y_0, y'\big|_{x=x_0} = y_1, \ldots, y^{(n-1)}\Big|_{x=x_0} = y_{n-1},$$

где $y_0, y_1, \ldots, y_{n-1}$ – заданные числа, называется *задачей Коши* для дифференциального уравнения.

Функцию $y = \varphi(x, C_1, C_2, \ldots, C_n)$, где $C_1, C_2, \ldots, C_n$ – произвольные постоянные, будем называть *общим решением* уравнения (2.1), если в (a, b) при соответствующем выборе постоянных $C_1 = C_1^0$, $C_2 = C_2^0$, …, $C_n = C_n^0$ эта функция обращается в решение любой задачи Коши, поставленной для данного уравнения, при $x_0 \in (a, b)$.

Решение, полученное из общего при конкретных значениях произвольных постоянных $C_1 = C_1^0$, $C_2 = C_2^0$, …, $C_n = C_n^0$ (в частности, всякое решение задачи Коши), называется *частным решением* (*частным интегралом*) этого уравнения.

3. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ПЕРВОГО ПОРЯДКА. ТЕОРЕМА СУЩЕСТВОВАНИЯ И ЕДИНСТВЕННОСТИ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ КОШИ

Если порядок ДУ (2.1) n=1, то дифференциальное уравнение – первого порядка и в общем виде запишется так:

$$F(x, y, y') = 0. \tag{3.1}$$

Дифференциальное уравнение (3.1), *разрешённое относительно производной* y', имеет вид

$$y' = f(x, y). \tag{3.2}$$

Общим решением ДУ первого порядка будет функция $y = \varphi(x, C)$, которая содержит только одну произвольную постоянную C. В случае n=1 начальные условия (2.4) имеют вид

$$y\big|_{x=x_0} = y_0, \tag{3.3}$$

где x_0, y_0 – заданные числа.

Решение $y = \varphi(x, C_0)$ ДУ (3.2), удовлетворяющее начальному условию (3.3), называется *частным решением* ДУ (3.2).

Задача отыскания частного решения ДУ (3.1) или (3.2), удовлетворяющего начальному условию (3.3), называется *задачей Коши* для ДУ первого порядка.

В связи с решением задачи Коши для дифференциальных уравнений первого порядка возникает два важных вопроса:

1) всегда ли существует решение задачи Коши;

2) если решение задачи Коши существует, то является ли это решение единственным?

Ответ на эти вопросы имеет принципиальное значение. Прежде чем решать конкретную задачу Коши, необходимо исследовать вопрос о существовании и единственности решения.

Для существования решения задачи Коши для ДУ (3.2) достаточно, чтобы правая часть его, то есть функция $f(x, y)$, была непрерывна в окрестности начальной точки, тогда её решение будет определено (и непрерывно дифференцируемо) в общем случае лишь в некоторой окрестности начального значения независимой переменной. А для единственности решения этого мало. Приведём теорему, которая обеспечивает существование и единственность решения задачи Коши.

Теорема. Если правая часть ДУ (3.2) определена и непрерывна в прямоугольнике R: $|x - x_0| \le a$, $|y - y_0| \le b$, где a и b – заданные положительные числа, удовлетворяет в нем двум условиям:

1) $f(x,y)$ непрерывна и ограничена, т.е. $|f(x,y)| \le M$;

2) $\frac{\partial f}{\partial y}$ существует и ограничена, т.е. $\left|\frac{\partial f}{\partial y}\right| \le K$,

где M и K - постоянные положительные числа, то уравнение (3.2) имеет единственное решение $y = \varphi(x)$, удовлетворяющее начальным условиям $y(x_0) = y_0$, определенное и непрерывно дифференцируемое в интервале $|x - x_0| < h$, где $h = \min(a, \frac{b}{M})$.

Пример 1. Установить область существования и единственности решения для уравнения $y' = 2\sqrt{y}$.

Решение. Правая часть данного уравнения определена и непрерывна при $y \ge 0$; $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{\sqrt{y}}$, существует и непрерывна при $y > 0$. Следовательно, областью существования и единственности решения является полуплоскость ($y > 0$). ■

Пример 2. Оценить, пользуясь теоремой, область существования и единственности решения уравнения $y' = x^2 + y^2$ в прямоугольнике $R: (|x| \le 2, |y| \le 2)$, удовлетворяющего начальным условиям: $y = 0$ при $x = 0$.

Решение. Искомое решение $y = y(x)$ существует, так как правая часть данного уравнения $f(x,y) = x^2 + y^2$ – многочлен относительно x и y.

Найдем h.

По условию задачи имеем: x_0=0, y_0=0, a=2, b=2, M=8, тогда $h = \min(2, \frac{2}{8}) = \frac{1}{4}$.

Существование и единственность решения обеспечены теоремой существования и единственности лишь в интервале $|x| \le \frac{1}{4}$. ■

Решение, в каждой точке которого нарушается единственность решения задачи Коши, называется *особым*.

Если правая часть уравнения (3.2) удовлетворяет в области R условиям теоремы существования и единственности, то это уравнение, очевидно, не имеет особых решений.

В частности, если $f(x,y)$ – многочлен, то уравнение (3.2) не имеет особых решений в области R.

Если в уравнении функция $f(x,y)$ непрерывна по x и y и имеет частную производную по y, то особыми решениями могут быть те кривые $y = \varphi(x)$, во всех точках которых $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ обращается в бесконечность

$$\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{y=\varphi(x)} = \infty .$$

Будем называть такие кривые «подозрительными» на особое решение.

Пример 3. Найти кривую, «подозрительную» на особое решение уравнения $\dfrac{dy}{dx} = 2\sqrt{y}$ и исследовать, будет ли она особым решением.

Решение. Общее решение данного уравнения имеет вид $y = (x + C)^2$.

Найдем кривую, «подозрительную» на особое решение, по виду правой части.

Имеем $$\left.\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{\sqrt{y}}\right|_{y=\varphi(x)} = \infty .$$

Ясно, что в качестве кривой $y = \varphi(x)$ можно взять только $y = 0$ (ось OX). В каждой точке этого решения нарушается единственность решения задачи Коши. Возьмем любую точку $(x_0;0)$ на решении $y = 0$. Подставим координаты этой точки в общее решение; получим $0 = (x + C)^2 \Rightarrow C = -x_0$.

Подставляя это значение C в общее решение, получим частное решение $y = (x - x_0)^2 \quad (x > x_0)$.

Таким образом, через точку $(x_0;0)$ проходит не одна интегральная кривая. Следовательно, $y = 0$ -особое решение исходного уравнения. ■

4. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ПЕРВОГО ПОРЯДКА, ИНТЕГРИРУЕМЫЕ В КВАДРАТУРАХ

Дифференциальное уравнение первого порядка, разрешённое относительно y', имеет вид (ДУ (3.2))

$$\frac{dy}{dx} = f(x,y) \quad \text{или} \quad dy - f(x,y)dx = 0.$$

Последнее уравнение является частным случаем уравнения

$$P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0. \qquad (4.1)$$

Дифференциальное уравнение первого порядка называется интегрируемым в квадратурах (или просто интегрируемым), если его общее решение может быть получено с помощью конечного числа элементарных (алгебраических) операций и квадратур. (Квадратурой называется операция отыскания первообразных.) Среди дифференциальных уравнений первого порядка, интегрируемых в квадратурах, рассмотрим некоторые виды ДУ первого порядка.

4.1. Дифференциальные уравнения с разделенными переменными

ДУ первого порядка (3.2) называется уравнением с разделенными переменными, если его можно представить в виде

$$f(x)dx + g(y)dy = 0, \qquad (4.2)$$

в котором одно слагаемое $f(x)dx$ зависит только от x, а другое $g(y)dy$ только от y. Для решения этого уравнения достаточно его проинтегрировать, получив общий интеграл уравнения (4.2):

$$\int f(x)dx + \int g(y)dy = C$$

или $$F(x) + G(y) = C,$$

где $F(x)$, $G(y)$ – первообразные функций $f(x)$, $g(y)$ соответственно. Если последнее уравнение разрешить относительно y, то получится равенство $y = \varphi(x, C)$, правая часть которого является общим решением исходного уравнения (4.2).

Пример 1. Найти общее решение дифференциального уравнения

$$2xdx + \frac{dy}{y} = 0.$$

Решение. Интегрируя, находим

$$x^2 + \ln y = C.$$

Отсюда $\ln y = C - x^2$ и $y = e^{C-x^2}$.

Это равенство можно переписать в виде $y = e^C \cdot e^{-x^2}$ или (так как $e^C = C_1$) $y = C_1 e^{-x^2}$. ■

Замечание. Поскольку нахождение y из общего интеграла может представлять значительные трудности, но уже имеющие только алгебраический характер, то задачу решения ДУ считают законченной уже тогда, когда найден его общий интеграл. Более того, если общий интеграл

(или решение) уравнения выражен через неэлементарные интегралы, то и тогда уравнение считается решенным.

Например, 1) интегрируя уравнение $2xdx + (5y^4 + \cos y)dy = 0$, находим его общий интеграл $x^2 + y^5 + \sin y = C$. Хотя выразить отсюда y через x и C мы не сможем, но все же считаем исходное уравнение решенным.

2) Аналогично, записав для уравнения $2xdx + e^{-y^2}dy = 0$ общий интеграл $x^2 + \int e^{-y^2}dy = C$, мы считаем, что решили уравнение, хотя интеграл $\int e^{-y^2}dy$ и не выражается через элементарные функции.

4.2. Дифференциальные уравнения с разделяющимися переменными

Рассмотрим частный вид уравнения (4.1), а именно, когда функции $P(x,y)$ и $Q(x,y)$ представляют собой произведение функции, зависящей только от x, на функцию, зависящую только от y, то есть

$$\begin{aligned} P(x,y) &= \varphi_1(x)\cdot\psi_1(y); \\ Q(x,y) &= \varphi_2(x)\cdot\psi_2(y). \end{aligned} \tag{4.3}$$

Подставим (4.3) в ДУ (4.1), получим

$$\varphi_1(x)\cdot\psi_1(y)dx + \varphi_2(x)\cdot\psi_2(y)dy = 0. \tag{4.4}$$

Дифференциальное уравнение вида (4.4) называется *дифференциальным уравнением с разделяющимися переменными*.

Разделив почленно уравнение (4.4) на $\varphi_2(x)\cdot\psi_1(y)$ при условии, что $\varphi_2(x)\cdot\psi_1(y) \neq 0$, получим уравнение с разделенными переменными:

$$\frac{\varphi_1(x)}{\varphi_2(x)}dx + \frac{\psi_2(y)}{\psi_1(y)}dy = 0. \tag{4.5}$$

Взяв неопределённые интегралы от обеих частей ДУ (4.5), получим общий интеграл данного уравнения:

$$\int\frac{\varphi_1(x)}{\varphi_2(x)}dx + \int\frac{\psi_2(y)}{\psi_1(y)}dy = C.$$

Пример 1. Найти общее решение дифференциального уравнения

$$y' = 1 + x^2 + y^2 + x^2y^2.$$

Решение. Правая часть данного уравнения разлагается на множители

$$\frac{dy}{dx} = (1 + x^2)\cdot(1 + y^2).$$

Поскольку $(1+y^2) \neq 0$, обе части последнего уравнения разделим на $(1+y^2)$ и умножим на dx:

$$\frac{dy}{(1+y^2)} = (1+x^2)\cdot dx,$$

интегрируя, получим

$$\int \frac{dy}{(1+y^2)} = \int (1+x^2)\cdot dx \quad \Rightarrow \quad arctg\, y = x + \frac{x^3}{3} + C.$$

Ответ: $y = tg(x + \frac{x^3}{3} + C)$. ■

Пример 2. Решить задачу Коши для уравнения $3y^2dy = xdx$, если $y = 1$ при $x = 2$.

Решение. Данное ДУ можно сразу интегрировать:

$$3\int y^2 dy = \int x dx \quad \Rightarrow \quad y^3 = \frac{x^2}{2} + C.$$

Учитывая начальные условия, найдём C:

$$1^3 = \frac{2^2}{2} + C \quad \Rightarrow \quad C = -1.$$

Ответ: $y^3 = \frac{x^2}{2} - 1$. ■

Многие ДУ могут быть приведены к виду уравнения с разделяющимися переменными путем замены переменных.

К числу таких уравнений относятся однородные дифференциальные уравнения первого порядка.

4.3. Однородные дифференциальные уравнения

Функция $f(x,y)$ называется однородной измерения n, если для $\forall t$ выполняется равенство $f(tx,ty) = t^n f(x,y)$.

Дифференциальное уравнение первого порядка

$$P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0 \qquad (4.6)$$

называется однородным, если $P(x,y)$ и $Q(x,y)$ – однородные функции одного и того же измерения n, то есть

$$P(tx,ty) = t^n P(x,y);$$

$$Q(tx,ty) = t^n Q(x,y).$$

Однородное дифференциальное уравнение имеет вторую форму:

$$y' = f\left(\frac{y}{x}\right). \qquad (4.7)$$

Дифференциальные уравнения (4.6) и (4.7) заменой $y = zx$ приводятся к ДУ с разделяющимися переменными z и x, общий интеграл которых находится по методу интегрирования ДУ (4.4).

Пример 1. Найти общее решение уравнения $xdy = (x + y)dx$.

Решение. Это уравнение однородное, так как обе функции $P(x,y) = x + y$ и $Q(x,y) = x$ – однородные первого измерения, удовлетворяющие условиям:

$$P(tx,ty) = tx + ty = t(x + y) = t^1 P(x,y),$$

$$Q(tx,ty) = tx = t^1 Q(x,y).$$

Пусть $y = zx$, тогда $dy = zdx + xdz$. Подставляя значения y и dy в исходное уравнение, получим

$$x(zdx + xdz) = (x + zx)dx.$$

После упрощения получим

$$xdz = dx.$$

Решаем полученное уравнение с разделяющимися переменными:

$$\int dz = \int \frac{dx}{x} \quad \Rightarrow \quad z = \ln|x| + C.$$

Возвращаясь к старой переменной $\left(z = \frac{y}{x}\right)$, получим

$$\frac{y}{x} = \ln|x| + C \quad \Rightarrow \quad y = x(\ln|x| + C).$$

Ответ. $y = x(\ln|x| + C)$. ■

Пример 2. Решить задачу Коши для уравнения

$$xdy + (x\sqrt{\frac{y}{x} - 1} - y)dx = 0, \text{ если } y = 1 \text{ при } x = 1.$$

Решение. Полагая $y = zx$, $dy = zdx + xdz$, придём к уравнению с разделяющимися переменными:

$$xdz + \sqrt{z-1}dx = 0 \quad \Rightarrow \quad \int \frac{dz}{\sqrt{z-1}} + \int \frac{dx}{dx} = 0, \quad |z-1| \neq 0$$

$$\Rightarrow \quad 2\sqrt{z-1}+\ln|x|=C.$$

Заменяя значение $z=\dfrac{y}{x}$, получим общее решение исходного уравнения:

$$2\sqrt{\frac{y}{x}-1}+\ln|x|=C.$$

Учитывая начальное условие $y(1)=1$, находим частное решение данного уравнения:

$$2\sqrt{\frac{y}{x}-1}+\ln|x|=0.$$

Если же $z-1=0$, то из подстановки $y=zx$ получим $y=x$, $(x\neq 0)$ – особое решение.

Ответ: $2\sqrt{\dfrac{y}{x}-1}+\ln|x|=0, \quad y=x.$ ■

4.4. *Линейные дифференциальные уравнения первого порядка*

Линейным дифференциальным уравнением первого порядка называется уравнение вида

$$y'+P(x)y=Q(x), \tag{4.8}$$

в которое неизвестная функция и ее производная входят линейно (т.е. в первой степени).

Если $Q(x)\neq 0$, то уравнение (4.8) называется линейным неоднородным, если же $Q(x)=0$ – линейным однородным.

Пусть $P(x)\neq 0$, $Q(x)\neq 0$. Решение уравнения (4.8) будем искать в виде произведения функций $u=u(x)$, $v=v(x)$, то есть

$$y=uv.$$

Так как одна функция выражается через две, то одной из двух функций мы можем управлять произвольно, как это удобно для решения, вторая функция будет зависеть от выбора первой.

Подставим $y=uv$, $\dfrac{dy}{dx}=u\dfrac{dv}{dx}+v\dfrac{du}{dx}$ в ДУ (4.8).

Тогда $$u\frac{dv}{dx}+v\frac{du}{dx}+P(x)uv=Q(x)$$

или

$$u\frac{dv}{dx}+v\left(\frac{du}{dx}+P(x)u\right)=Q(x). \tag{4.9}$$

Выберем функцию u так, чтобы в уравнении (4.9) обратился в нуль коэффициент при функции v, то есть чтобы

$$\frac{du}{dx} + P(x)u = 0. \qquad (4.10)$$

ДУ (4.10) – с разделяющимися переменными. Решая его, получим (при $u \neq 0$)

$$\int \frac{du}{u} = -\int P(x)dx \quad \Rightarrow \quad \ln|u| = -\int P(x)dx \quad \Rightarrow$$

$$u(x) = e^{-\int P(x)dx} \qquad (4.11)$$

Мы берём какое-либо частное решение ДУ (4.10), а не общее, так как нам достаточно подобрать одну функцию $u(x)$. Подставляя найденное значение $u(x)$ из (4.11) в (4.9), получаем ДУ с разделяющимися переменными для определения функции $v(x)$:

$$e^{-\int P(x)dx} \cdot \frac{dv}{dx} = Q(x).$$

Откуда находим общее решение $v(x)$:

$$v(x) = \int Q(x) \cdot e^{\int P(x)dx} dx + C. \qquad (4.12)$$

Окончательно общее решение линейного уравнения (4.8):

$$y = uv = e^{-\int P(x)dx} \left[\int Q(x) e^{\int P(x)dx} dx + C \right]. \qquad (4.13)$$

Пример 1. Найти общее решение уравнения

$$\frac{dy}{dx} - \frac{2}{x+1} y = (x+1)^3.$$

Решение. Для решения можно было бы воспользоваться готовой формулой (4.13), но она сложна для запоминания, поэтому при решении кратко повторим все выкладки общего случая.

Полагаем $y = uv$, тогда $\frac{dy}{dx} = u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx}$. Подставляем значения y и dy в данное уравнение, получим

$$u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx} - \frac{2}{x+1} uv = (x+1)^3$$

или

$$u\frac{dv}{dx} + v\left(\frac{du}{dx} - \frac{2}{x+1} u\right) = (x+1)^3. \qquad (*)$$

Выберем функцию u так, чтобы коэффициент при $v(x)$ обратился в нуль:

$\frac{du}{dx} - \frac{2}{x+1}u = 0$ – это ДУ с разделяющимися переменными.

Разделяя переменные $\frac{du}{u} = \frac{2}{x+1}dx$, интегрируем и берём какое-либо одно частное решение для $u(x)$, например, полагая $C = 0$.

Получим

$$\ln|u| = 2\ln|x+1| \quad \Rightarrow \quad u = (x+1)^2.$$

Подставляя найденную функцию $u(x)$ в уравнение (*), получим для определения $v(x)$ следующее уравнение с разделяющимися переменными:

$$(x+1)^2\frac{dv}{dx} = (x+1)^3 \quad \Rightarrow \quad dv = (x+1)dx \quad \Rightarrow \quad v = \int(x+1)dx \quad \Rightarrow$$

$$v = \frac{(x+1)^2}{2} + C.$$

Окончательно

$$y = uv = (x+1)^2\left(\frac{(x+1)^2}{2} + C\right).$$

Ответ: $y = \frac{(x+1)^4}{2} + C(x+1)^2$. ■

4.5. Дифференциальные уравнения Бернулли

Могут встречаться такие уравнения, которые не являются линейными, но, однако, могут быть приведены к линейным с помощью некоторых преобразований. Одним из таких уравнений является уравнение Бернулли, которое имеет вид

$$y' + P(x)y = Q(x)y^k, \tag{4.14}$$

где k – любое постоянное число, не равное 0 и 1 (если $k = 0$ или $k = 1$, то уравнение (4.14) является линейным уравнением), и легко приводится к линейному. Разделим (при $y \neq 0$) все члены уравнения (4.14) на y^k, получим

$$y^{-k}y' + P(x)y^{1-k} = Q(x). \tag{4.15}$$

Введём новую функцию $z(x) = y^{1-k}, \quad (k \neq 1).$ (4.16)

Продифференцировав (4.16) по x (как сложную функцию), получим

$$\frac{dz}{dx} = (1-k)y^{-k}\frac{dy}{dx},$$

то есть

$$y^{-k}\frac{dy}{dx}=\frac{1}{1-k}\frac{dz}{dx}.$$

Подставим z и $\frac{dz}{dx}$ в уравнение (4.15):

$$\frac{dz}{dx}+(1-k)P(x)z=(1-k)Q(x). \qquad (4.17)$$

ДУ (4.17) является линейным относительно $z(x)$. Его решение можно найти методом, изложенным в п.4.4. Зная z, легко найти y: $y=z^{\frac{1}{1-k}}$.

Заметим, что уравнение Бернулли можно, не преобразовывая предварительно к линейному уравнению, решить тем же способом, что и линейное уравнение, полагая сразу $y=uv$. Продемонстрируем это на примере.

Пример. Решить уравнение

$$\frac{dy}{dx}+\frac{2}{x}y=\frac{1}{x}y^2.$$

Решение. Положим $y=uv$, тогда $\frac{dy}{dx}=u\frac{dv}{dx}+v\frac{du}{dx}$. Подставляем значения y и $\frac{dy}{dx}$ в данное уравнение, получим

$$u\frac{dv}{dx}+v\left(\frac{du}{dx}+\frac{2}{x}u\right)=\frac{1}{x}u^2v^2. \qquad (*)$$

Подберём u так, чтобы коэффициент при v в уравнении (*) обратился в нуль:

$$\frac{du}{dx}+\frac{2}{x}u=0 \quad - \text{ ДУ с разделяющимися переменными.}$$

Разделяя переменные, имеем $\frac{du}{u}=-\frac{2}{x}dx$, откуда, интегрируя, получим

$$\ln|u|=-2\ln|x|$$

(берём одно частное решение $u(x)$, поэтому $C=0$),

следовательно, $$u=x^{-2}=\frac{1}{x^2}.$$

Подставляя значение u в уравнение (*), получим для определения v следующее уравнение с разделяющимися переменными:

$$\frac{1}{x^2}\frac{dv}{dx} = \frac{1}{x}\frac{1}{x^4}v^2$$

или $$\frac{dv}{v^2} = \frac{dx}{x^3}.$$

Интегрируя, имеем

$$\int v^{-2}dv = \int x^{-3}dx \quad \Rightarrow \quad -\frac{1}{v} = -\frac{1}{2x^2} + C,$$

откуда $$v = \frac{2x^2}{1-2Cx^2}.$$

Окончательно имеем решение исходного ДУ в виде

$$y = uv = \frac{2}{1-2Cx^2}.$$

Ответ: $y = \frac{2}{1-2Cx^2}$. ■

4.6. Дифференциальные уравнения в полных дифференциалах

Дифференциальным уравнением в полных дифференциалах называется уравнение вида

$$P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0, \tag{4.18}$$

левая часть которого представляет собой полный дифференциал некоторой функции $u=u(x,y)$, т.е.

$$du(x,y) = P(x,y)dx + Q(x,y)dy. \tag{4.19}$$

Его общий интеграл имеет вид

$$u(x,y) = C. \tag{4.20}$$

Известно, что полный дифференциал функции $u=u(x,y)$ выражается формулой

$$du(x,y) = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy. \tag{4.21}$$

Из равенств (4.19) и (4.21) следует, что

$$P(x,y) = \frac{\partial u(x,y)}{\partial x}, \qquad Q(x,y) = \frac{\partial u(x,y)}{\partial y}. \tag{4.22}$$

Необходимым и достаточным условием того, что левая часть уравнения (4.18) является полным дифференциалом некоторой функции, является выполнение равенства

$$\frac{\partial P(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial Q(x,y)}{\partial x}. \qquad (4.23)$$

Функция $u=u(x,y)$, входящая в формулу (4.20), находится из уравнений (4.22).

Пример. Найти общее решение уравнения

$$e^y dx + (xe^y - 2y)dy = 0.$$

Решение. Для данного уравнения

$$P(x,y) = e^y, \qquad Q(x,y) = xe^y - 2y,$$

$$\frac{\partial P(x,y)}{\partial y} = e^y, \quad \frac{\partial Q(x,y)}{\partial x} = e^y.$$

Так как $\frac{\partial P(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial Q(x,y)}{\partial x}$, то наше уравнение является уравнением в полных дифференциалах.

Следовательно, $\frac{\partial u(x,y)}{\partial x} = e^y, \qquad \frac{\partial u(x,y)}{\partial y} = xe^y - 2y.$

Интегрируя первое уравнение по x (y при этом считается постоянным), находим

$$u(x,y) = xe^y + \varphi(y),$$

где $\varphi(y)$ - функция, подлежащая определению.

Дифференцируя по y найденную функцию $u(x,y)$ и принимая во внимание равенство

$$\frac{\partial u(x,y)}{\partial y} = xe^y - 2y,$$

получим $xe^y + \varphi'(y) = xe^y - 2y \Rightarrow \varphi'(y) = -2y \Rightarrow \varphi(y) = -y^2.$

Тогда общее решение данного уравнения будет иметь вид

$$xe^y - y^2 = C.$$

Ответ: $xe^y - y^2 = C.$ ■

5. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ, ДОПУСКАЮЩИЕ ПОНИЖЕНИЕ ПОРЯДКА

Если в дифференциальном уравнении (2.1) порядок $n>1$, то ДУ называется *дифференциальным уравнением высшего порядка.* Часто решение ДУ высших порядков с помощью специальных подстановок

можно свести к решению ДУ более низкого порядка. В этом случае говорят, что уравнение *допускает понижение порядка*. Рассмотрим три типа таких уравнений.

5.1. Дифференциальные уравнения, разрешенные относительно старшей производной

Рассмотрим уравнение

$$y^{(n)} = f(x). \tag{5.1}$$

Общее решение ДУ (5.1) получается выполнением n последовательных интегрирований, а именно:

$$y(x) = \underbrace{\int dx \int \ldots\ldots\ldots \int}_{n} f(x)dx + C_1 x^{n-1} + C_2 x^{n-2} + \ldots + C_{n-1}x + C_n,$$

где $C_1, C_2, \ldots C_n$ - произвольные постоянные.

Пример. Найти общее решение уравнения

$$y''' \cdot \sin^4 x = \sin 2x.$$

Решение. Перепишем данное уравнение в виде

$$y''' = \frac{\sin 2x}{\sin^4 x} = \frac{2\sin x \cdot \cos x}{\sin^4 x} = \frac{2\cos x}{\sin^3 x}.$$

Интегрируя это уравнение последовательно три раза, получим его общее решение:

$$y'' = 2\int \frac{\cos x}{\sin^3 x}dx = 2\int \sin^{-3} x d(\sin x) = 2\frac{\sin^{-2} x}{-2} + C_1 = -\frac{1}{\sin^2 x} + C_1,$$

$$y' = \int (-\frac{1}{\sin^2 x}) + C_1 \int dx = \int d(ctgx) + C_1 \int dx = ctgx + C_1 x + C_2,$$

$$y = \int ctgx dx + C_1 \int x dx + C_2 \int dx = \ln|\sin x| + C_1 \frac{x^2}{2} + C_2 x + C_3.$$

Ответ: $y = \ln|\sin x| + C_1 \frac{x^2}{2} + C_2 x + C_3.$ ■

5.2. Дифференциальные уравнения, не содержащие явно искомой функции

Рассмотрим уравнения вида

$$F(x, y', y'') = 0 \quad \text{или} \quad \frac{d^2y}{dx^2} = f(x, \frac{dy}{dx}). \tag{5.2}$$

Порядок этих уравнений можно понизить, взяв за новую неизвестную функцию низшую производную данных уравнений (5.2), т.е. $y' = z$, $z = z(x)$.

Тогда $y'' = z'$ и ДУ (5.2) примут вид дифференциального уравнения первого порядка:

$$F(x, z, z') = 0 \quad \text{или} \quad \frac{dz}{dx} = f(x, z). \tag{5.3}$$

Пример. Решить задачу Коши для уравнения

$$(1 + x^2)y'' - 2xy' = 0, \text{если} \quad y(0) = 0, y'(0) = 3.$$

Решение. Обозначим $y' = z(x)$, тогда $y'' = z'(x)$;

подставим значения y', y'' в данное уравнение, получим

$$(1 + x^2)z' - 2xz = 0 \text{ -}$$

это ДУ первого порядка с разделяющимися переменными. Разделяя переменные и интегрируя, находим $z(x)$:

$$\int \frac{dz}{z} = \int \frac{2xdx}{1 + x^2} \Rightarrow \ln|z| = \ln|1 + x^2| + \ln C_1 \Rightarrow z = C_1(1 + x^2).$$

Возвращаемся к функции y:

$$\frac{dy}{dx} = C_1(1 + x^2), \quad dy = C_1(1 + x^2)dx,$$

интегрируя, получим $y = C_1(\frac{x^3}{3} + x) + C_2$ - общее решение.

Используя начальные условия, находим C_1, C_2:

$$\begin{array}{l} y = 0 \quad при \quad x = 0 \\ y' = 3 \quad при \quad x = 0 \end{array} \Rightarrow \begin{cases} 0 = C_2 \\ 3 = C_1 \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} C_1 = 3, \\ C_2 = 0. \end{array}$$

Подставляя значения C_1 и C_2 в общее решение, получим частное решение.

Ответ: $y = 3(\frac{x^3}{3} + x) = x^3 + 3x$. ■

5.3. Дифференциальные уравнения, не содержащие явно независимой переменной x

К этому типу ДУ относятся уравнения вида

$$F(y, y', y'') = 0 \quad \text{или} \quad \frac{d^2y}{dx^2} = f(y, \frac{dy}{dx}). \tag{5.4}$$

Порядок этих уравнений **можно понизить, если положить** $y' = z(y)$ (за новый аргумент принять y).

По правилу дифференцирования сложной функции имеем

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dz(y)}{dx} = \frac{dz}{dx}\cdot\frac{dy}{dx} = z\cdot\frac{dy}{dx}.$$

Подставим значения первой и второй производных

$$y' = z; \quad y'' = z\cdot\frac{dz}{dy} \quad \text{в} \quad \text{ДУ} \quad (5.4),$$

получим

$$F(y,z,z\cdot\frac{dz}{dy}) = 0 \quad \text{или} \quad z\cdot\frac{dz}{dy} = f(y,z).$$

Эти уравнения уже имеют порядок на единицу ниже, чем исходные уравнения.

Пример. Найти общее решение уравнения

$$(2y+3)y'' - 2(y')^2 = 0.$$

Решение. Положим, $y' = z(y)$; $y'' = z\cdot\frac{dz}{dy}$.

Подставим значения y' и y'' в данное уравнение:

$$z\cdot\frac{dz}{dy}(2y+3) - 2z^2 = 0.$$

Это уравнение первого порядка с разделяющимися **переменными**. Разделяя переменные и интегрируя, находим $z(y)$:

$$z(2y+3)dz = 2z^2dy \Rightarrow \int\frac{dz}{z} = \int\frac{2dy}{2y+3} \Rightarrow$$

$$\ln|z| = \ln|2y+3| + \ln|C_1|$$

или

$$z = C_1(2y+3).$$

Возвращаясь к функции $y=y(x)$, получим

$$\frac{dy}{dx} = C_1(2y+3), \quad \frac{dy}{2y+3} = C_1dx,$$

интегрируем:

$$\int\frac{dy}{2y+3} = C_1\int dx \Rightarrow \frac{1}{2}\ln|2y+3| = C_1x + C_2.$$

Ответ: $\frac{1}{2}\ln|2y+3| = C_1x + C_2$. ■

5.4. Составление дифференциальных уравнений

Решение задачи прикладного характера обычно состоит из трех частей:

1) составления дифференциального уравнения;

2) решения этого уравнения;

3) исследования решения.

При решении *геометрических задач* полезно пользоваться следующей последовательностью действий:

1) сделать чертеж и ввести обозначения. Например, $y = f(x)$ - уравнение искомой линии и т.п.;

2) отделить условия, имеющие место в произвольной точке искомого геометрического места, от условий, имеющих место лишь в отдельных фиксированных точках. Другими словами, выделить начальные условия. Их в начале, при составлении дифференциального уравнения, не учитывать;

3) выразить все упомянутые в задаче величины через x, y и y', учитывая при этом геометрический смысл производной;

4) на основании условия задачи составить дифференциальное уравнение семейства искомых кривых;

5) найти общее решение полученного дифференциального уравнения, а затем по начальным условиям найти конкретную интегральную кривую (см. пример 1.2 п. 1).

При решении задач с *физическим содержанием*, так же как и в случае решения геометрических задач, можно рекомендовать следующую последовательность действий:

1) установить, какому закону подчиняется рассматриваемый процесс;

2) решить, что выбрать за независимую переменную, например, время t, и что – за искомую функцию, например, $S=f(t)$;

3) исходя из условий задачи, определить начальные условия, например, $S_0 = f(t_0)$;

4) выразить все фигурирующие в задаче величины через t, S, S', используя при этом физический смысл производной как скорость изменения переменной S в изучаемом процессе;

5) исходя из условия задачи и на основании физического закона, которому подчиняется данный процесс, составить дифференциальное уравнение;

6) найти общий интеграл дифференциального уравнения;

7) по начальным условиям найти частное решение.

Пример. На вращающийся в жидкости диск действует замедляющая его движение сила трения, пропорциональная угловой скорости вращения. Найти зависимость угловой скорости от времени, если вначале диск вращался со скоростью 100 оборотов в минуту, а по истечении одной минуты - 60 оборотов в минуту.

Решение. Пусть $\omega(t)$ - угловая скорость движения диска. Тогда, согласно закона изменения момента количества движения, имеем

$$I \cdot \frac{d\omega}{dt} = M, \qquad (*)$$

где I – момент инерции диска; M - момент сил, действующих на диск.

По условию $M = k_0\omega$ $(k_0 = const)$, поэтому уравнение (*) принимает вид

$$\frac{d\omega}{dt} = k\omega, \qquad k = \frac{k_0}{I}.$$

Его решение $\omega = \omega_0 e^{kt}$.

Пусть ω *измеряется в оборотах за минуту, а время* t *- в минутах.*

Тогда $\omega_0 = 100$, *т.е.* $60 = 100e^k$, откуда $e^k = 0{,}6$. Таким образом, требуемая зависимость имеет вид $\omega = 100 \cdot (0{,}6)^t$ *об/мин.* ■

6. ЛИНЕЙНЫЕ ОДНОРОДНЫЕ ДИФФЕРНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ С ПОСТОЯННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ

Линейные однородные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами - наиболее изученный тип дифференциальных уравнений высших порядков. Многие задачи техники и естествознания приводят к линейным однородным дифференциальным уравнениям.

6.1. Основные теоремы о структуре общего решения уравнения. Определитель Вронского

Линейное однородное уравнения n–го порядка с постоянными коэффициентами имеет вид

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + a_2 y^{(n-2)} + \ldots + a_{n-1} y' + a_n y = 0, \qquad (6.1)$$

где все коэффициенты $a_1, a_2, \ldots, a_n$ – числа (в частности, некоторые могут быть нулями).

Рассмотрим основные свойства линейных однородных дифференциальных уравнений (ЛОДУ) с постоянными коэффициентами на примере уравнения второго порядка

$$y'' + a_1 y' + a_2 y = 0. \qquad (6.2)$$

Теорема 1. Если $y_1(x)$ и $y_2(x)$ – два решения уравнения (6.2), то функция $y_1(x) + y_2(x)$ также является решением этого уравнения.

Доказательство. По определению решения ЛОДУ имеем

$$y_1'' + a_1 y_1' + a_2 y_1 \equiv 0;$$
$$y_2'' + a_1 y_2' + a_2 y_2 \equiv 0.$$

Выполнив операцию сложения этих тождеств, получим

$$\big(y_1(x) + y_2(x)\big)'' + a_1\big(y_1(x) + y_2(x)\big)' + a_2\big(y_1(x) + y_2(x)\big) \equiv 0,$$

откуда и следует что $y_1(x) + y_2(x)$ является решением ЛОДУ (6.2). **#**

Теорема 2. Если $y_1(x)$ – решение уравнения (6.2), то функция $C_1 y_1(x)$, где C_1 - произвольная постоянная, также является решением этого уравнения.

Доказательство. По определению решения ЛОДУ имеем

$$y_1''(x) + a_1 y_1'(x) + a_2 y_1(x) \equiv 0,$$

умножая обе части тождества на C_1, получим

$$\big(C_1 y_1(x)\big)'' + a_1\big(C_1 y_1(x)\big)' + a_2\big(C_1 y_1(x)\big) \equiv 0,$$

откуда и следует что $C_1 y_1(x)$ является решением ЛОДУ (6.1.2). **#**

***Следствие 1*:** Если $y_1(x)$ и $y_2(x)$ – два решения ЛОДУ (6.2), то функция

$$y(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x), \qquad (6.3)$$

где C_1, C_2 – произвольные постоянные, также является решением этого уравнения.

Выясним, при каких $y_1(x)$ и $y_2(x)$ формула (6.3) определяет общее решение ЛОДУ (6.2).

Рассмотрим определитель

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix} = y_1(x)y_2'(x) - y_1'(x)y_2(x), \qquad (6.4)$$

который называется *определителем Вронского* этих функций или *вронскианом* (И.Вронский (1778-1853) – польский математик, который впервые ввел определитель в рассмотрение).

Теорема 3. Если $y_1(x)$ и $y_2(x)$ являются решениями уравнения (6.2), то для определителя Вронского этих решений справедлива формула

$$W'(x) + a_1 W(x) = 0. \qquad (6.5)$$

Доказательство. Найдем от $W(x)$ производную по x:

$$W'(x) = \left(y_1(x)y_2'(x) - y_1'(x)y_2(x)\right)' =$$
$$= y_1'(x)y_2'(x) + y_1(x)y_2''(x) - y_1''(x)y_2(x) - y_1'(x)y_2'(x) =$$
$$= y_1(x)y_2''(x) - y_2(x)y_1''(x).$$

Так как $y_1(x)$ и $y_2(x)$ являются решениями уравнения (6.1.2), то

$$y_1''(x) + a_1 y_1'(x) + a_2 y_1(x) \equiv 0,$$
$$y_2''(x) + a_1 y_2'(x) + a_2 y_2(x) \equiv 0.$$

Умножим первое уравнение на $(-y_2)$, а второе на y_1 и, сложив их, получим

$$-y_1''(x)y_2(x) - a_1 y_1'(x)y_2(x) - a_2 y_1(x)y_2(x) + y_1(x)y_2''(x) +$$
$$+ a_1 y_1(x)y_2'(x) + a_2 y_2(x)y_1(x) \equiv 0$$
$$y_1(x)y_2''(x) - y_1''(x)y_2(x) + a_1\left(y_1(x)y_2'(x) - y_1'(x)y_2(x)\right) \equiv 0$$

или $W'(x) + a_1 W(x) = 0$. #

Теорема 4. Пусть $W(x)$ – определитель Вронского решений $y_1(x)$ и $y_2(x)$ ЛОДУ (6.2). Если при некотором x_0 $W(x_0)=0$, то $W(x)$ обращается в нуль при любом x: $W(x)=0$.

Доказательство: Пусть $W(x_0)=0$, а так как функция $W(x)$ удовлетворяет уравнению (6.5) и условию $W(x_0)=0$, то из теоремы существования и единственности следует, что других решений уравнения (6.5) не существует, что и нужно было доказать. #

Следствие 2. Если при некотором x_0 $W(x_0) \neq 0$, то $W(x)$ отлично от нуля при любом $x \in R$.

Доказательство· Предположим противное: при некотором x_1 $W(x_1)=0$. Тогда, согласно теоремы 4, $W(x)=0$, что противоречит условию $W(x_0) \neq 0$. #

Терема 5. (Формула Лиувилля).

Пусть $W(x)$ – определитель Вронского решений $y_1(x)$ и $y_2(x)$ ЛОДУ (6.1.2), тогда

$$W(x) = W(x_0) \cdot e^{-\int_{x_0}^{x} a_1 dx}. \qquad (6.6)$$

Доказательство. Если $W(x_0)=0$, то по теореме 4 $W(x)=0$ и формула (6.6) верна. Если же $W(x_0) \neq 0$, то, в силу следствия 2, $W(x) \neq 0$ ни при каком x. Тогда, разделив (6.5) на $W(x)$, получим

$$\frac{dW}{W} = -a_1 dx.$$

Интегрируем обе части в пределах от x_0 до x

$$\int_{x_0}^{x} \frac{dW}{W} = -\int_{x_0}^{x} a_1 dx \quad \Rightarrow \quad \ln|W(x)|\Big|_{x_0}^{x} = -a_1 x\Big|_{x_0}^{x} \Rightarrow$$

$$\ln|W(x)| - \ln|W(x_0)| = -a_1(x - x_0) \Rightarrow \quad \ln\left|\frac{W(x)}{W(x_0)}\right| = -a_1(x - x_0).$$

Потенцируя, получим

$$\frac{W(x)}{W(x_0)} = e^{-a_1(x-x_0)} \quad \Rightarrow \quad W(x) = W(x_0) \cdot e^{-\int_{x_0}^{x} a_1 dx}. \#$$

Определение. Систему $y_1(x)$ и $y_2(x)$ решений ЛОДУ (6.2) назовем *фундаментальной системой*, если $W(x) \neq 0$ ни при одном значении x.

Как показывает следствие 2, для этого достаточно проверить, что $W(x) \neq 0$ при каком-нибудь одном значении $x=x_0$.

Теорема 6 (об общем виде решения ЛОДУ).

Если $y_1(x)$ и $y_2(x)$ образуют фундаментальную систему решений ЛОДУ (6.2), то общее решение этого уравнения будет иметь вид

$$y(x)=C_1y_1(x)+C_2y_2(x), \qquad (6.7)$$

где C_1 и C_2 – произвольные постоянные.

Результаты исследований для ЛОДУ второго порядка могут быть перенесены и на линейные однородные уравнения n–го порядка (6.1).

Система решений $y_1, y_2, \ldots, y_n$ уравнения (6.1) называется *фундаментальной*, если ее определитель Вронского:

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & y_3 & \ldots & y_n \\ y_1' & y_2' & y_3' & \ldots & y_n' \\ y_1'' & y_2'' & y_3'' & \ldots & y_n'' \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & y_3^{(n-1)} & \ldots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix} \neq 0.$$

Если $y_1, y_2, \ldots, y_n$ образуют фундаментальную систему решений уравнения (6.1), то

$$y = C_1y_1+C_2y_2+C_3y_3+\ldots+C_ny_n,$$

где $C_1, C_2, \ldots C_n$ – произвольные постоянные, есть ***общее решение*** уравнения (6.1).

Пример. Найти общее решение уравнения

$$y''' - 6y'' + 11y' - 6y = 0,$$

если известно, что функции $y_1 = e^x, y_2 = e^{2x}, y_3 = e^{3x}$ являются его решениями.

Решение: Это ЛОДУ третьего порядка. Покажем, что $y_1 = e^x, y_2 = e^{2x}, y_3 = e^{3x}$ образуют фундаментальную систему функций:

$$W(x) = \begin{vmatrix} e^x & e^{2x} & e^{3x} \\ e^x & 2e^{2x} & 3e^{3x} \\ e^x & 4e^{2x} & 9e^{3x} \end{vmatrix} = e^x \cdot e^{2x} \cdot e^{3x} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 9 \end{vmatrix} =$$

$$= e^{6x}(18 + 3 + 4 - 2 - 9 - 12) = 2e^{6x} \neq 0.$$

Тогда общее решение будет

$$y = C_1y_1 + C_2y_2 + C_3y_3 = C_1e^x + C_2e^{2x} + C_3e^{3x}.$$

Ответ: $y = C_1e^x + C_2e^{2x} + C_3e^{3x}$. ■

6.2. Нахождение фундаментальной системы решений и общего решения ЛОДУ

Линейное однородное дифференциальное уравнение (ЛОДУ) n-ого порядка с постоянными коэффициентами имеет вид

$$y^{(n)} + a_1y^{(n-1)} + a_2y^{(n-2)} + \ldots\ldots + a_{n-1}y' + a_ny = 0, \qquad (6.8)$$

где все коэффициенты a_1, a_2, a_3, …, a_{n-1}, a_n - числа (в частности, некоторые могут быть и нулями).

Рассмотрим уравнение второго порядка

$$y'' + a_1y' + a_2y = 0. \qquad (6.9)$$

Заметим, что в силу свойств однородных линейных уравнений нам достаточно найти два частных решений, составляющих фундаментальную систему решений уравнения (6.9), чтобы затем найти общее.

Будем искать частное решение уравнения (6.9) в виде

$$y = e^{kx}, \qquad (6.10)$$

где k - число, которое подберем так, чтобы функция (6.10) удовлетворяла уравнению (6.9).

Дифференцируя дважды y, найдем $y' = ke^{kx}$, $y'' = k^2 \cdot e^{kx}$; подставляя в (6.9), получим

$$k^2e^{kx} + a_1k \cdot e^{kx} + a_2e^{kx} = 0,$$

сокращая на $e^{kx} \neq 0$, имеем

$$k^2 + a_1 k + a_2 = 0. \qquad (6.11)$$

Это алгебраическое квадратное уравнение относительно k, оно будет называться *характеристическим уравнением* уравнения (6.9).

Итак, чтобы функция $y = e^{kx}$ была частным решением уравнения (6.9), нужно, чтобы k удовлетворяло уравнению (6.11).

Пусть k_1 и k_2 - корни характеристического уравнения (6.11), т.е.

$$k_{1,2} = \frac{-a_1 \pm \sqrt{a_1^2 - 4a_2}}{2}.$$

Возможны случаи:

1. Корни k_1 и k_2 уравнения (6.2.4) действительные и различные, т.е. $k_1 \neq k_2$ (в этом случае дискриминант $D = a_1^2 - 4a_2 > 0$).

Тогда формула (6.10) даст два частных решения:

$$y_1 = e^{k_1 x};\ y_2 = e^{k_2 x}.$$

Эти частные решения образуют фундаментальную систему решений уравнения (6.9), так как

$$\frac{y_2}{y_1} = e^{(k_2 - k_1)x} \neq C \quad (т.к.\ k_1 \neq k_2).$$

Следовательно, общее решение уравнения (6.9) будет иметь вид

$$y = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x}. \qquad (6.12)$$

Пример. Решить уравнение $y'' + 3y' + 2y = 0$.

Решение Это ЛОДУ второго порядка. Составим характеристическое уравнение

$$k^2 + 3k + 2 = 0.$$

Находим его корни: k_1=-2, k_2=-1.

Частные решения имеют вид $y_1 = e^{-2x}, y_2 = e^{-x}$.

Тогда $y = C_1 e^{-2x} + C_2 e^{-x}$ будет общим решением.

Ответ: $y = C_1 e^{-2x} + C_2 e^{-x}$. ■

2.Корни характеристического уравнения (6.11) действительные и равные, т. е. $k_1 = k_2$.

В этом случае $D = a_1^2 - 4a_2 = 0$ и $k_1 = k_2 = -\frac{a_1}{2}$.

В данном случае формула (6.10) дает нам одно частное решение $y_1 = e^{k_1 x}$. Остается найти другое частное решение y_2, образующее вместе с решением y_1 фундаментальную систему решений уравнения (6.9).

Покажем, что таким решением будет функция вида $y_2 = xe^{k_1 x}$.

Найдем $y_2' = e^{k_1 x} + x \cdot k_1 e^{k_1 x}$,

$$y_2'' = k_1 e^{k_1 x} + k_1 e^{k_1 x} + x k_1^2 e^{k_1 x} = 2k_1 e^{k_1 x} + k_1^2 x e^{k_1 x}.$$

Подставим y_2, y'_2, y''_2 в уравнение (6.9) и воспользуемся формулой (6.12):

$$2k_1 e^{k_1 x} + k_1^2 x e^{k_1 x} + a_1 e^{k_1 x} + a_1 k_1 x e^{k_1 x} + a_2 x e^{k_1 x} \equiv 0,$$

$$-a_1 e^{\frac{-a_1}{2}x} + \frac{a_1^2}{4} x e^{\frac{-a_1}{2}x} + a_1 e^{\frac{-a_1}{2}x} - \frac{a_1^2}{2} x e^{\frac{-a_1}{2}x} + a_2 x e^{\frac{-a_1}{2}x} \equiv 0,$$

$$x\left(\frac{4a_2 - a_1^2}{4}\right) e^{\frac{-a_1}{2}x} \equiv 0.$$

Так как $\frac{y_2}{y_1} = x \neq C$, то y_1 и y_2 образуют фундаментальную систему решений. Таким образом, при $k_1 = k_2$ функция

$$y = C_1 e^{k_1 x} + C_2 x e^{k_1 x} \qquad (6.13)$$

есть общее решение уравнения (6.9).

Пример. Решить уравнение $y'' + 2y' + y = 0$.

Решение. Это ЛОДУ второго порядка. **Составим характеристическое** уравнение

$$k^2 + 2k + 1 = 0.$$

Находим его корни: $k_1 = k_2 = -1$.

Частные решения имеют вид $y_1 = e^{-x}, y_2 = xe^{-x}$.

Тогда $y = C_1 e^{-x} + C_2 x e^{-x}$ будет общим решением данного уравнения.

Ответ: $y = C_1 e^{-x} + C_2 x e^{-x}$. ■

3. Корни характеристического уравнения (6.11) комплексно-сопряженные, т. е. $k_1 = \alpha + i\beta$, $k_2 = \alpha - i\beta$, $\beta \neq 0$ (в этом случае $D = a_1^2 - 4a_2 < 0$).

Можно показать (подставляя в уравнение (6.9)) , что

$$y_1 = e^{\alpha x} \cos \beta x \quad \text{и} \quad y_2 = e^{\alpha x} \sin \beta x$$

являются частными решениями уравнения (6.11).

Так как $\frac{y_2}{y_1} = tg\beta x \neq C \quad (\beta \neq 0)$, то y_1 и y_2 образуют фундаментальную систему решений, следовательно,

$$y = e^{\alpha x} \cdot (C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x) \qquad (6.14)$$

есть общее решение уравнения (6.9).

Пример. Решить уравнение $y'' + 2y' + 2y = 0$.

Решение. Это ЛОДУ второго порядка. Составим характеристическое уравнение

$$k^2 + 2k + 2 = 0.$$

Его корни: $k_1 = -1 + i$, $k_2 = -1 - i$.

В данном примере $\alpha = -1$, $\beta = 1$.

Пользуясь формулой (6.14), получим общее решение:

$$y = e^{-x} \cdot (C_1 \cos x + C_2 \sin x).$$

Ответ: $y = e^{-x} \cdot (C_1 \cos x + C_2 \sin x)$. ■

4. Рассмотрим уравнение (6.8):

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + a_2 y^{(n-2)} + \ldots + a_{n-1} y' + a_n y = 0.$$

Составим для него характеристическое уравнение

$$k^n + a_1 k^{n-1} + a_2 k^{n-2} + \ldots + a_{n-1} k + a_n = 0. \qquad (6.15)$$

Пусть уравнение (6.2.8) имеет n различных корней $k_1, k_2, k_3 \ldots, k_n$. Если, кроме того, все n корней - действительные, то

$$y = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x} + C_3 e^{k_3 x} + \ldots + C_n e^{k_n x} \qquad (6.16)$$

есть общее решение уравнения (6.8).

Если же среди корней есть комплексный корень $k_1 = \alpha + i\beta$, $\beta \neq 0$, то уравнение (6.15) имеет также сопряженный комплексный корень $k_2 = \alpha - i\beta$. Этой паре комплексных корней соответствуют два частных решения:

$$y_1 = e^{\alpha x} \cdot \cos \beta x \quad \text{и} \quad y_2 = e^{\alpha x} \cdot \sin \beta x.$$

и в этом случае (в предположении, что корни k_3, k_4, $k_5 \ldots, k_n$ действительные и различные) общее решение уравнения (6.8) имеет вид

$$y = e^{\alpha x} \cdot (C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x) + C_3 e^{k_3 x} + C_4 e^{k_4 x} + \ldots + C_n x^{k_n x}.$$

Пусть теперь корни $k_1, k_2, k_3 \ldots, k_n$ - действительные, но $k_1 = k_2 = k_3$, а числа $k_4, k_5, k_6 \ldots, k_n$ различны между собой и не совпадают с k_1. В этом случае, говорят, что k_1 - корень кратности 3.

Общее решение имеет вид

$$y = e^{k_1 x} \cdot (C_1 + C_2 x + C_3 x^2) + C_4 e^{k_4 x} + C_5 e^{k_5 x} + \ldots + C_n e^{k_n x}.$$

Рассмотрим ещё случай, когда есть кратные комплексно- сопряженные корни $k_1 = k_2 = \alpha + i\beta$, $k_3 = k_4 = \alpha - i\beta$, $\beta \neq 0$, а остальные корни $k_5, k_6 \ldots, k_n$ действительные и различные. Общее решение в этом случае имеет вид

$$y = e^{\alpha x} \cdot \left[(C_1 + C_2 x)\cos \beta x + (C_3 + C_4 x) \cdot \sin \beta x\right] + \\ + C_5 e^{k_5 x} + C_6 e^{k_6 x} + \ldots + C_n e^{k_n x}.$$

Пример 1. Решить уравнение $y^{IV} - 13y'' + 36y = 0$.

Решение. Это ЛОДУ четвертого порядка. Составим характеристическое уравнение

$$k^4 - 13k^2 + 36 = 0.$$

Находим корни этого уравнения: $k_1 = 2$, $k_2 = -2$, $k_3 = 3$, $k_4 = -3$.

Частные решения будут иметь вид

$$y_1 = e^{2x},\ y_2 = e^{-2x},\ y_3 = e^{3x},\ y_4 = e^{-3x}.$$

Тогда $y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-2x} + C_3 e^{3x} + C_4 e^{-3x}$ будет общим решением уравнения.

Ответ: $y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-2x} + C_3 e^{3x} + C_4 e^{-3x}$. ■

Пример 2. Решить уравнение $y''' + y'' - 5y' + 3y = 0$.

Решение. Это ЛОДУ третьего порядка. Составим характеристическое уравнение $k^3 + k^2 - 5k + 3 = 0$.

Его корни: $k_1 = k_2 = 1$, $k_3 = -3$.

Следовательно, частные решения будут иметь вид:

$$y_1 = e^x, y_2 = xe^x, y_3 = e^{-3x}.$$

Тогда $y = C_1 e^x + C_2 x e^x + C_3 e^{-3x}$ будет общим решением уравнения.

Ответ: $y = C_1 e^x + C_2 x e^x + C_3 e^{-3x}$. ■

Пример 3. Решить уравнение $y^{IV} + 8y'' + 16y = 0$.

Решение. Это ЛОДУ четвертого порядка.

Составим характеристическое уравнение $k^4 + 8k^2 + 16 = 0$ или

$$(k^2 + 4)^2 = 0.$$

Найдем его корни: $k_1 = k_2 = 2i$, $k_3 = k_4 = -2i$. То есть в нашем примере $\alpha = 0, \beta = 2$, а кратность корня равна двум.

Тогда общее решение

$$y = (C_1 + C_2 x)\cos 2x + (C_3 + C_4 x)\sin 2x.$$

Ответ: $y = (C_1 + C_2 x)\cos 2x + (C_3 + C_4 x)\sin 2x$. ■

7. ЛИНЕЙНЫЕ НЕОДНОРОДНЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ С ПОСТОЯННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

Линейным неоднородным дифференциальным уравнением (ЛНДУ) n-го порядка с постоянными коэффициентами называется уравнение вида

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1} y' + a_n y = f(x), \qquad (7.1)$$

где $a_1, a_2, a_3 \ldots, a_{n-1}, a_n$ – действительные числа; $y = f(x)$ – данная функция.

Рассмотрим ЛНДУ второго порядка

$$y'' + a_1 y' + a_2 y = f(x) \qquad (7.2)$$

и соответствующее ему однородное уравнение (ЛОДУ)

$$y'' + a_1 y' + a_2 y = 0. \qquad (7.3)$$

Пусть y_1 и y_2 – фундаментальная система решений уравнения (7.3), тогда

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 \qquad (7.4)$$

есть общее решение уравнения (7.3).

Теорема *(о структуре общего решения ЛНДУ).*

Общее решение неоднородного уравнения (7.2) равно сумме общего решения соответствующего однородного (7.3) и частного решения неоднородного уравнения (7.2):

$$y_{он} = y_{оо} + y_{чн}.$$

Доказательство Так как $y_{оо}$ - общее решение уравнения (7.3), то по определению решения эта функция обращает уравнение (7.3) в верное равенство. Так как $y_{чн}$ - частное решение уравнения (7.2), то функция $y_{чн}$ также обращает это уравнение в тождество. Имеем два тождества:

$$\left.\begin{aligned} y''_{оо} + a_1 y'_{оо} + a_2 y_{оо} &\equiv 0 \\ (y_{чн})'' + a_1 (y_{чн})' + a_2 y_{чн} &\equiv f(x) \end{aligned}\right\}$$ - найдем их сумму:

$$(y''_{оо} + y''_{чн}) + a_1 (y'_{оо} + y'_{чн}) + a_2 (y_{оо} + y_{чн}) \equiv f(x) \quad \text{или}$$

$$(y_{оо} + y_{чн})'' + a_1 (y_{оо} + y_{чн})' + a_2 (y_{оо} + y_{чн}) \equiv f(x).$$

Следовательно, $y_{он} = y_{оо} + y_{чн}$ является общим решением уравнения (7.2). #

7.1. Нахождение частного решения ЛНДУ со специальной правой частью

В том случае, когда правая часть дифференциальных уравнений (7.1) и (7.2) в общем случае имеет вид

$$f(x) = e^{\alpha x} \cdot [P_m(x)\cos \beta x + Q_n(x)\sin \beta x],$$

где $P_m(x)$ и $Q_n(x)$ - многочлены переменной x степеней m и n; α, β - действительные числа, используется метод неопределенных коэффициентов (или метод подбора).

Частное решение $y_{чн}$ дифференциального уравнения (7.2) зависит в каждом конкретном случае от вида функции $f(x)$ и от выражения $\alpha \pm i\beta$ (где $i = \sqrt{-1}$), которое сравнивается с корнями характеристического уравнения, составленного для соответствующего ЛОДУ (7.3).

Возможны случаи:

1. Если $\alpha \pm i\beta$ является корнем кратности r характеристического уравнения

$$k^2 + a_1 k + a_2 = 0 \qquad (*)$$

(r – означает сколько раз $\alpha \pm i\beta$ совпадет с корнями характеристического уравнения). Тогда частное решение находится в виде

$$y_{чн} = x^r e^{\alpha x} \cdot [M_l(x)\cos\beta x + N_l(x)\sin\beta x],$$

где $M_l(x)$ и $N_l(x)$- многочлены со своими неопределенными коэффициентами, при этом $l = \max\{m, n\}$.

Например, если

$l = 0$, то $M_0(x) = Ax^0 = A$ - многочлен нулевой степени;

$l = 1$, то $M_1(x) = Ax + B$ - многочлен первой степени;

$l = 2$, то $M_2(x) = Ax^2 + Bx + C$ - многочлен второй степени;

$l = 3$, то $M_3(x) = Ax^3 + Bx^2 + Cx + D$ - многочлен 3-й степени;

l, то $M_l(x) = A_0 x^l + A_1 x^{l-1} + \ldots + A_l$ - многочлен степени l.

2. Если $\alpha \pm i\beta$ не является корнем характеристического уравнения (*), то $r = 0$ и $x^0 = 1$, тогда частное решение $y_{чн}$ имеет вид $y_{чн} = e^{\alpha x} \cdot [M_l(x)\cos\beta x + N_l(x)\sin\beta x]$.

Пример 1. Найти общее решение уравнения

$$y'' - 6y' + 9y = 5e^{3x}.$$

Решение. Находим общее решение соответствующего ЛОДУ:

$$y'' - 6y' + 9y = 0.$$

Его характеристическое уравнение $k^2 - 6k + 9 = 0$ имеет корни $k_1 = k_2 = 3$. Общее решение однородного уравнения при равных корнях характеристического уравнения имеет вид

$$y_{оо} = C_1 e^{3x} + C_2 x e^{3x} = e^{3x}(C_1 + C_2 x).$$

Правая часть неоднородного уравнения имеет вид $f(x) = 5e^{3x}$.

$\alpha = 3,\ \beta = 0 \Rightarrow \alpha \pm i\beta = 3$ - является кратным корнем кратности $r = 2$ характеристического уравнения, $l = \max\{0,0\} = 0$, поэтому

$$y_{чн} = x^2 e^{3x} \cdot [M_0(x)\cos 0x + N_0(x)\sin 0x] = Ax^2 e^{3x}.$$

Дважды дифференцируем $y_{чн}$:

$$(y_{чн})' = 2Axe^{3x} + 3Ax^2 e^{3x},$$

$$(y_{чн})'' = 2Ae^{3x} + 6Axe^{3x} + 6Axe^{3x} + 9Ax^2 e^{3x} =$$

$$= 2Ae^{3x} + 12Axe^{3x} + 9Ax^2 e^{3x}$$

и подставляем полученные выражения в данное уравнение:

$$2Ae^{3x} + 12Axe^{3x} + 9Ax^2 e^{3x} - 12Axe^{3x} - 18Ax^2 e^{3x} + 9x^2 e^{3x} = 5e^{3x}.$$

В результате получим

$$2Ae^{3x} = 5e^{3x} \Rightarrow 2A = 5 \Rightarrow A = 2{,}5.$$

Тогда $y_{чн} = 2{,}5x^2 e^{3x}$. А общее решение неоднородного уравнения

$$y_{он} = y_{оо} + y_{чн} = e^{3x}(C_1 + C_2 x) + 2{,}5x^2 e^{3x}.$$

Ответ: $y = e^{3x}(C_1 + C_2 x) + 2{,}5x^2 e^{3x}$. ■

Пример 2. Решить задачу Коши для уравнения

$$y'' + y' - 2y = \cos x - 3\sin x, \text{ если } y(0) = 1, y'(0) = 2.$$

Решение. Находим общее решение соответствующего ЛОДУ

$$y'' + y' - 2y = 0.$$

Его характеристическое уравнение $k^2 + k - 2 = 0$,

$$k_{1,2} = \frac{-1 \pm 3}{2}; \qquad k_1 = 1; k_2 = -2.$$

Общее решение ЛОДУ при различных корнях характеристического уравнения имеет вид

$$y_{оо} = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x} = C_1 e^{x} + C_2 e^{-2x}.$$

Правая часть данного уравнения: $f(x) = \cos x - 3\sin x$.

$\alpha = 0, \beta = 1 \Rightarrow \alpha \pm i\beta = \pm i$ - не являются корнями характеристического уравнения $\Rightarrow r = 0,\ l = \max\{0,0\} = 0$.

Тогда

$$y_{чн} = x^r e^{\alpha x} \cdot [M_l(x)\cos \beta x + N_l(x)\sin \beta x] = A\cos x + B\sin x.$$

Дифференцируя, получим

$$y'_{чн} = -A\sin x + B\cos x, \qquad y''_{чн} = -A\cos x - B\sin x.$$

Подставим значения $y_{чн}, y'_{чн}, y''_{чн}$ в данное уравнение, будем иметь

$$-A\cos x - B\sin x - A\sin x + B\cos x - $$
$$-2A\cos x - 2B\sin x \equiv \cos x - 3\sin x.$$

Приравнивая коэффициенты при *cosx* и *sinx* в левой и правой частях, получим систему

$$\begin{cases} -3A + B = 1 \\ -A - 3D = -3 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} A = 0, \\ B = 1. \end{matrix}$$

Тогда $y_{чн} = \sin x$, а $y_{он} = y_{оо} + y_{чн} = C_1 e^x + C_2 e^{-2x} + \sin x$ - общее решение данного уравнения.

Найдем $y'_{он} = C_1 e^x - 2C_2 e^{-2x} + \cos x.$

Используя начальные условия, найдем C_1 и C_2 при $x=0,\ y = 1, y' = 2$:

$$\begin{cases} 1 = C_1 + C_2 \\ 2 = C_2 - 2C_2 + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C_1 + C_2 = 1 \\ C_1 - 2C_2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} C_1 = 1, \\ C_2 = 0. \end{matrix}$$

Подставляя значения C_1 и C_2 в общее решение, получим частное решение: $y_{част} = e^x + \sin x$.

Ответ: $y_{част.} = e^x + \sin x$. ■

7.2. Принцип наложения (суперпозиции)

Этот метод основан на следующей теореме:

Теорема. Если правая часть $f(x)$ ЛНДУ (7.1) представляет сумму двух функций, т.е. $f(x) = f_1(x) + f_2(x)$, то частное решение такого ДУ можно получить как сумму частных решений аналогичных уравнений с правыми частями соответственно $f_1(x)$ и $f_2(x)$, т.е.

$$y_{чн} = y_{1чн}(x) + y_{2чн}(x).$$

Доказательство. Рассмотрим два уравнения:

$$y'' + a_1 y' + a_2 y = f_1(x) \quad \text{и} \quad y'' + a_1 y' + a_2 y = f_2(x).$$

Пусть $y_{1чн}(x)$ и $y_{2чн}(x)$ являются частными решениями этих уравнений соответственно, тогда имеем два тождества:

$$\left.\begin{matrix} (y_{1чн})'' + a_1 (y_{1чн})' + a_2 y_{1чн} \equiv f_1(x) \\ (y_{2чн})'' + a_1 (y_{2чн})' + a_2 y_{2чн} \equiv f_2(x) \end{matrix}\right\}$$ - найдем их сумму:

$$[(y_{1чн})'' + (y_{2чн})''] + a_1[(y_{1чн})' + (y_{2чн})'] +$$
$$+ a_2(y_{1чн} + y_{2чн}) \equiv f_1(x) + f_2(x)$$

или $(y_{1чн} + y_{2чн})'' + a_1(y_{1чн} + y_{2чн})' + a_2(y_{1чн} + y_{2чн}) \equiv f_1(x) + f_2(x).$

Следовательно, $y_{чн} = y_{1чн} + y_{2чн}$ является решением уравнения

$$y'' + a_1 y' + a_2 y = f_1(x) + f_2(x). \quad \#$$

Пример. Найти общее решение уравнения

$$y'' + y' = x + e^{2x}.$$

Решение. Так как правая часть уравнения $f(x) = x + e^{2x} = f_1(x) + f_2(x)$, то по теореме **общее решение** данного уравнения будет иметь вид

$$y_{он} = y_{оо} + y^1_{чн} + y^2_{чн}.$$

Найдем $y_{оо}$. Для этого рассмотрим уравнение $y'' + y' = 0$, его характеристическое уравнение $k^2 + k = 0$ имеет корни k_1=0; k_2= -1.

Тогда $y_{оо} = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x} = C_1 e^{0x} + C_2 e^{-x} = C_1 + C_2 e^{-x}$

Найдем $y_{1чн}$.

Для этого рассмотрим уравнение $y'' + y' = x$

Правая часть $f_1(x) = x \Rightarrow \alpha_1 = 0; \beta_1 = 0; l = 1$.

Так как $\alpha_1 \pm i\beta_1 = 0 \pm 0i = 0$ - является простым корнем характеристического уравнения $\Rightarrow r = 1$, тогда

$$y_{1чн} = x^r e^{\alpha_1 x} \cdot [M_l(x)\cos\beta_1 x + N_l(x)\sin\beta_1 x] =$$
$$= x[(Ax + B)\cos 0x + (Cx + D)\sin 0x] = x(Ax + B).$$

Подставим $y_{1чн} = Ax^2 + Bx$, $(y_{1чн})' = 2Ax + B$, $(y_{1чн})'' = 2A$ в рассматриваемое уравнение $y'' + y' = x$:

$$2A + 2Ax + B = x,$$

используя условие равенства многочленов, получим

$$\begin{cases} 2A = 1 \\ 2A + B = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = \dfrac{1}{2}, \\ B = 1. \end{cases}$$

Таким образом, получим $y_{1чн} = \dfrac{1}{2}x^2 - x.$

Найдем $y_{2чн}$.

Для этого рассмотрим уравнение $y'' + y' = e^{2x}$.

Правая часть $f_2(x) = e^{2x}$. Для $f_2(x)$: $\alpha_2 = 2; \beta_2 = 0; l = 0$.

$\alpha_2 \pm \beta_2 i = 2 \pm 0i = 2$ - не является корнем характеристического уравнения $\Rightarrow r = 0$, поэтому

$$y_{2чн} = x^r e^{\alpha_2 x}\left[M_l(x)\cos\beta_2 x + N_l(x)\sin\beta_2 x\right] =$$
$$= x^0 e^{2x}\left[A\cos 0x + B\sin 0x\right] = Ae^{2x};$$

$$y_{2чн} = Ae^{2x};\ (y_{2чн})' = 2Ae^{2x};\ (y_{2чн})'' = 4Ae^{2x}.$$

Значения $y_{2чн}, (y_{2чн})', (y_{2чн})''$ подставим в уравнение $y'' + y' = e^{2x}$. Получим

$$4Ae^{2x} + 2Ae^{2x} = e^{2x} \Rightarrow 6Ae^{2x} = e^{2x} \Rightarrow 6A = 1, \text{A} = \frac{1}{6}.$$

Таким образом, получаем $y_{2чн} = \frac{1}{6}e^{2x}$.

Тогда общее решение данного уравнения:

$$y_{он} = y_{оо} + y^1_{чн} + y^2_{чн} = C_1 + C_2e^{-x} + \frac{1}{2}x^2 - x + \frac{1}{6}e^{2x}.$$

Ответ: $y = C_1 + C_2e^{-x} + \frac{1}{2}x^2 - x + \frac{1}{6}e^{2x}$. ■

7.3. Метод вариации произвольных постоянных (метод Лагранжа)

Если частное решение дифференциального уравнения (7.1) или (7.2) найти нельзя или сложно методом неопределенных коэффициентов, но известна фундаментальная система решений соответствующего однородного уравнения (7.3), то для нахождения общего решения ЛНДУ (7.1) или (7.2) применяют метод Лагранжа.

Рассмотрим ЛНДУ (7.2): $y'' + a_1y' + a_2y = f(x)$.

Общее решение этого неоднородного уравнения находят из общего решения соответствующего однородного уравнения, т.е. $y_{оо} = C_1y_1(x) + C_2y_2(x)$, заменяя произвольные постоянные C_1, C_2 соответствующими функциями от x, т.е. в виде

$$y_{он} = C_1(x)y_1(x) + C_2(x)y_2(x), \tag{7.5}$$

где $y_1(x), y_2(x)$ - фундаментальная система решений ЛОДУ (7.3), а $C_1(x)$ и $C_2(x)$ - удовлетворяют системе

$$\begin{cases} C_1'(x)y_1 + C_2'(x)y_2 = 0, \\ C_1'(x)y_1' + C_2'(x)y_2' = f(x). \end{cases} \tag{7.6}$$

Пример. Методом Лагранжа найти частное решение уравнения $y'' + y = \frac{1}{\cos x}$.

Решение. Составляем соответствующее однородное уравнение:

$$y'' + y = 0.$$

Его характеристическое уравнение $k^2+1=0$ имеет корни $k_{1,2} = \pm\sqrt{-1} = \pm i$

Фундаментальной системой решений соответствующего однородного уравнения будут функции $y_1=\cos x$; $y_2=\sin x$.

Будем искать общее решение данного уравнения в виде

$$y_{он} = C_1(x)y_1 + C_2(x)y_2 = C_1(x)\cos x + C_2(x)\sin x. \qquad (*)$$

$C_1(x)$ и $C_2(x)$ определяются из системы (7.3.2)

$$\begin{cases} C_1'(x)\cos x + C_2'(x)\sin x = 0 \\ -C_1'(x)\sin x + C_2'(x)\cos x = \dfrac{1}{\cos x}. \end{cases}$$

Для решения системы применим формулы Крамера

$$C_1'(x) = \frac{\Delta_1}{\Delta}; C_2'(x) = \frac{\Delta_2}{\Delta},$$

где

$$\Delta = \begin{vmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{vmatrix} = \cos^2 x + \sin^2 x = 1$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 0 & \sin x \\ \dfrac{1}{\cos x} & \cos x \end{vmatrix} = -\frac{\sin x}{\cos x} = -tgx$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} \cos x & 0 \\ -\sin x & \dfrac{1}{\cos x} \end{vmatrix} = 1, \qquad C_1'(x) = -tgx,\ C_2'(x) = 1$$

$$C_1(x) = -\int tgx dx = \ln|\cos x| + C_1;\ \ C_2(x) = \int dx = x + C_2,$$

где C_1 и C_2 - произвольные постоянные.

Подставляем значения $C_1(x)$ и $C_2(x)$ в формулу (*), получим общее решение исходного уравнения:

$$y_{он} = (\ln|\cos x| + C_1)\cos x + (x + C_2)\sin x.$$

Ответ: $y_{он} = (\ln|\cos x| + C_1)\cos x + (x + C_2)\sin x.$ ■

Замечание. В приведенном выше примере получен результат

$$y_{он} = (\ln|\cos x| + C_1)\cos x + (x + C_2)\sin x.$$

Сравнивая его с общим решением соответствующего ЛОДУ

$$y_{оо} = C_1\cos x + C_2\sin x,$$

видим, что

$$y_{он} = C_1 \cos x + C_2 \sin x + (cosx \cdot \ln|\cos x| + x \sin x) =$$

$$= y_{оо} + (\cos x \cdot \ln|\cos x| + x \sin x).$$

Слагаемое в скобках является частным решением исходного ЛНДУ и, таким образом, при решении ЛНДУ методом Лагранжа получили выполнение теоремы о структуре общего решения ЛНДУ:

$$y_{он} = y_{оо} + y_{чн}.$$

7.4. Понятие о краевой задаче

Наряду с задачей Коши для дифференциальных уравнений часто возникает необходимость найти такое решение ДУ (2.1) при $n \geq 2$, которое принимало бы заданные числовые значения на концах (границах) рассматриваемого отрезка $[a,b]$, решение находится внутри этого отрезка. Такие задачи называются *краевыми (граничными) задачами.*

В простейшем случае для обыкновенного ДУ второго порядка $F(x, y, y', y'') = 0$ краевые значения имеют вид:

$$y = y_0 \text{ при } x = a;$$

$$y = y_1 \text{ при } x = b.$$

Геометрически здесь речь идет о нахождении интегральной кривой $y=y(x)$, соединяющей две заданные точки $M_0(a,y_0)$ и $M_1(b, y_1)$.

Пример. Решите краевую задачу для уравнения $y'' + y = 0$ с краевыми условиями $y(0)=1$, $y(\pi/2)=0$.

Решение. Находим общее решение данного уравнения. Составим характеристическое уравнение $k^2+1=0$, откуда $k_{1,2}=\pm i$, $\alpha=0$, $\beta=1$,

$$y_{оо} = C_1 y_1 + C_2 y_2 = e^{\alpha x}(C_1 \cos x + C_2 \sin x) =$$

$$= C_1 \cos x + C_2 \sin x.$$

Для определения произвольных постоянных C_1 и C_2 воспользуемся краевыми условиями:

$$\begin{cases} 1 = C_1 \cos 0 + C_2 \sin 0 \\ 0 = C_1 \cos\dfrac{\pi}{2} + C_2 \sin\dfrac{\pi}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C_1 = 1 \\ C_2 = 0 \end{cases}.$$

Тогда $y = \cos x \, (0 \leq x \leq \dfrac{\pi}{2})$.

Ответ: $y = \cos x \, (0 \leq x \leq \dfrac{\pi}{2})$. ■

8. СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ОБЩЕГО ВИДА. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И ОПРЕДЕЛЕНИЯ

8.1. Понятие о системе дифференциальных уравнений и ее решении

Совокупность соотношений вида

$$\begin{cases} F_1(x, y_1, y_2, y_3, ..., y_n, y_1', y_2', y_3', ...y_n') = 0, \\ F_2(x, y_1, y_2, y_3, ..., y_n, y_1', y_2', y_3', ...y_n') = 0, \\ \quad ..... \\ F_n(x, y_1, y_2, y_3, ..., y_n, y_1', y_2', y_3', ..., y_n') = 0, \end{cases} \tag{8.1}$$

где $y_1, y_2, ...y_n$ - искомые функции от независимой переменной x, называется *системой обыкновенных дифференциальных уравнений* первого порядка.

Всякая совокупность n функций

$$y_1(x), y_2(x), y_3(x), ...y_n(x), \tag{8.2}$$

определенных и непрерывно дифференцируемых в интервале (a, b), называется *решением системы* (8.1) в этом интервале, если она обращает все ДУ системы (8.1) в тождества, справедливые при всех значениях $x \in (a, b)$.

Процесс нахождения решений системы (8.1) называется *интегрированием* этой системы.

Пример. Рассмотрим систему

$$\begin{cases} x^2 (y')^2 - z = 0, \\ z' - 2y = 0. \end{cases} \tag{*}$$

Эта система имеет решение

$$y = x, \quad z = x^2, \quad (-\infty < x < +\infty). \tag{**}$$

Действительно, подставляя (**) в систему (*), получим тождества

$$\begin{cases} x^2 \cdot 1 - x^2 \equiv 0, \\ 2x - 2 \cdot x \equiv 0, \end{cases} \quad (-\infty < x < +\infty). \ \blacksquare$$

8.2. Нормальная форма системы дифференциальных уравнений

СДУ первого порядка

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dx} = f_1(x, y_1, y_2, ..., y_n), \\ \dfrac{dy_2}{dx} = f_2(x, y_1, y_2, ..., y_n), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \dfrac{dy_n}{dx} = f_n(x, y_1, y_2, ..., y_n), \end{cases} \tag{8.3}$$

разрешенная относительно производных от искомых функций, называется *системой дифференциальных уравнений в нормальной форме* или *нормальной системой*.

Если при помощи некоторых преобразований из данной системы удается получить интегрируемое уравнение, то оно называется *интегрируемой комбинацией*

Пример. Пусть дана система

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{z}{(x-y)^2}, \\ \dfrac{dz}{dx} = \dfrac{y}{(z-y)^2}. \end{cases} \tag{8.4}$$

Решение. Система (8.4) – нормальная. Разделив первое ДУ на второе, получим интегрируемую комбинацию:

$$\frac{dy}{dz} = \frac{z}{y},$$

Разделяя переменные и интегрируя, получим

$$\int y dy = \int z dz \quad \Rightarrow \quad y^2 - z^2 = C_1. \tag{8.5}$$

Вычитая почленно второе уравнение системы (8.4) из первого, найдем еще одну интегрируемую комбинацию:

$$\frac{d(y-z)}{dx} = -\frac{1}{y-z}.$$

Разделяя переменные и интегрируя, получим

$$\int (y-z)d(y-z) = -\int dx \Rightarrow (y-z)^2 = -2x + C_2. \qquad (8.6)$$

Совокупность соотношений (8.5) и (8.6) в общей теории СДУ называется *общим интегралом системы*.

Ответ: $y^2 - z^2 = C_1$,

$(y-z)^2 = -2x + C_2$. ■

8.3. Задача Коши для нормальной системы

Задача Коши для нормальной системы (8.3) ставится так:

найти решение $y_1 = y_1(x), y_2 = y_2(x), \ldots, y_n = y_n(x)$,

удовлетворяющее начальным условиям (условиям Коши),

$$y_1 = y_1^0, y_2 = y_2^0, \ldots, y_n = y_n^0, \qquad (8.7)$$

где $x_0, y_1^0, y_2^0, \ldots, y_n^0$ - заданные числа.

Геометрически находится интегральная кривая, проходящая через заданную точку $(x_0, y_1^0, y_2^0, \ldots, y_n^0)$.

8.4. Теорема существования и единственности решения задачи Коши для нормальной системы

Теореме Пикара. Если правые части системы (8.3) непрерывны в некоторой окрестности начальной точки $(x_0, y_1^0, y_2^0, \ldots, y_n^0)$ и имеют непрерывные в этой окрестности частные производные по $y_1, y_2, y_3, \ldots, y_n$, то система (8.3) имеет единственное решение (8.2), определенное в некоторой окрестности точки x_0 и удовлетворяющее начальным условиям (8.7).

Условия теоремы Пикара, в частности, заведомо выполнены, если правые части нормальной системы есть многочлены относительно $y_1, y_2, y_3, \ldots, y_n$, коэффициенты которых непрерывны в окрестности начального значения x_0. При этом начальные значения $y_1^0, y_2^0, y_3^0, \ldots, y_n^0$ можно брать произвольно.

9. ИНТЕГРИРОВАНИЕ НОРМАЛЬНОЙ СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ МЕТОДОМ ИСКЛЮЧЕНИЯ

Пусть задана система n уравнений (8.3):

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dx} = f_1(x, y_1, y_2, ..., y_n), \\ \dfrac{dy_2}{dx} = f_2(x, y_1, y_2, ..., y_n), \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \dfrac{dy_n}{dx} = f_n(x, y_1, y_2, ..., y_n). \end{cases}$$

Метод исключений состоит в том, что из системы (8.3) при помощи дифференцирования одного из уравнений и замены $y_1', y_2', y_3', ..., y_n'$ исключают все искомые функции, кроме одной, для которой получается уравнение n–го порядка. Найдя общее решение этого уравнения, находим остальные неизвестные функции без дальнейших квадратур.

Пример. Рассмотрим систему

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = y + z, \\ \dfrac{dy}{dz} = x + z, \\ \dfrac{dz}{dt} = x + y. \end{cases} \qquad (9.1)$$

Решение. Дифференцируя первое уравнение и пользуясь вторым и третьим, получаем

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{dy}{dt} + \frac{dz}{dt} = 2x + z + y,$$

но $y + z = \dfrac{dx}{dt}$, поэтому $\dfrac{d^2x}{dt^2} = 2x + \dfrac{dx}{dt}$

или

$$\frac{d^2x}{dt^2} - \frac{dx}{dt} - 2x = 0. \qquad (9.2)$$

Получим еще одно ДУ с одной неизвестной функцией: y или z. Исключим z из первых двух ДУ системы (9.1). Вычитая почленно первое ДУ из второго, имеем

$$\frac{dy}{dt} - \frac{dx}{dt} = x - y,$$

откуда

$$\frac{dy}{dt} + y = \frac{dx}{dt} + x. \tag{9.3}$$

Проинтегрировав последовательно ДУ (9.2) и (9.3), **найдем x и y**. Из уравнения (9.2) найдем

$$x = C_1 e^{-t} + C_2 e^{2t}. \tag{9.4}$$

Подставляя в (9.3), имеем

$$\frac{dy}{dt} + y = 3C_2 e^{2t},$$

откуда

$$y = C_3 e^{-t} + C_2 e^{2t}.$$

Наконец, из $y + z = \frac{dx}{dt}$, найдем

$$z = \frac{dx}{dt} - y \Rightarrow z = (C_1 + C_2)\cdot e^{-t} + C_2 e^{2t}.$$

Ответ:

$$x = C_1 e^{-t} + C_2 e^{2t},$$
$$y = C_3 e^{-t} + C_2 e^{2t},\quad z = -(C_1 + C_3)e^{-t} + C_2 e^{2t}. \blacksquare$$

10. ИНТЕГРИРОВАНИЕ ОДНОРОДНОЙ ЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ С ПОСТОЯННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ МЕТОДОМ ЭЙЛЕРА

Однородные линейные системы с постоянными коэффициентами всегда интегрируются в элементарных функциях, поэтому они представляют особый интерес для изучения.

Пусть дана однородная линейная система

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dx} = a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + \ldots + a_{1n}y_n, \\ \dfrac{dy_2}{dx} = a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + \ldots + a_{2n}y_n, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \dfrac{dy_n}{dx} = a_{n1}y_1 + a_{n2}y_2 + \ldots + a_{nn}y_n, \end{cases} \qquad (10.1)$$

где a_{ik} - действительные числа, $i = \overline{1,n}$, $k = \overline{1,n}$.

Будем искать решение системы (10.1) в виде

$$y_1 = \gamma_1 e^{\lambda x},\ y_2 = \gamma_2 e^{\lambda x},\ldots,\ y_n = \gamma_n e^{\lambda x}, \qquad (10.2)$$

где λ – некоторое число, а числа $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \ldots, \gamma_n$ не равны одновременно нулю.

Подставляя (10.2) в (10.1), сокращая $e^{\gamma x}$ и группируя члены, получим следующую систему уравнений для нахождения чисел $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \ldots, \gamma_n$:

$$\begin{cases} (a_{11} - \lambda)\gamma_1 + a_{12}\gamma_2 + a_{13}\gamma_3 + \ldots + a_{1n}\gamma_n = 0, \\ a_{21}\gamma_1 + (a_{22} - \lambda)\gamma_2 + a_{23}\gamma_3 + \ldots + a_{2n}\gamma_n = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}\gamma_1 + a_{n2}\gamma_2 + a_{n3}\gamma_3 + \ldots + (a_{nn} - \lambda)\gamma_n = 0. \end{cases} \qquad (10.3)$$

Эта система имеет интересующее нас ненулевое решение относительно $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \ldots, \gamma_n$ только в том случае, если ее определитель равен нулю, т.е. если λ является корнем уравнения

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & a_{13} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & a_{23} & \ldots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} - \lambda & \ldots & a_{3n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \ldots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix} = 0. \qquad (10.4)$$

Уравнение (10.4) называется *характеристическим*, а его корни *характеристическими числами системы* (10.1).

Рассмотрим случай, когда все корни $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \ldots, \lambda_n$ характеристического уравнения действительные и различные. В этом случае, подставляя поочередно каждый корень $\lambda_i (i = 1,2,3,\ldots,n)$ в место λ в (10.2), решая систему (10.3), найдем значения $\gamma_{i1}, \gamma_{i2}, \gamma_{i3}, \ldots, \gamma_{in} (i = 1,2,3,\ldots,n)$, не равные одновременно нулю.

Получим n частных решений:

$$\begin{cases} \gamma_{11}e^{\lambda_1 x}, \gamma_{12}e^{\lambda_1 x}, \ldots, \gamma_{1n}e^{\lambda_1 x} \\ \gamma_{21}e^{\lambda_2 x}, \gamma_{22}e^{\lambda_2 x}, \ldots, \gamma_{2n}e^{\lambda_2 x} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \gamma_{n1}e^{\lambda_n x}, \gamma_{n2}e^{\lambda_n x}, \ldots, \gamma_{nn}e^{\lambda_n x}. \end{cases} \qquad (10.5)$$

Беря линейные комбинации решений (10.5) с произвольными постоянными $C_1, C_2, C_3, \ldots, C_n$, получим общее решение системы (10.1):

$$\begin{cases} y_1 = C_1\gamma_{11}e^{\lambda_1 x} + C_2\gamma_{12}e^{\lambda_1 x} + C_n\gamma_{1n}e^{\lambda_1 x}, \\ y_2 = C_1\gamma_{21}e^{\lambda_2 x} + C_2\gamma_{22}e^{\lambda_2 x} + C_n\gamma_{2n}e^{\lambda_2 x}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_n = C_1\gamma_{n1}e^{\lambda_n x} + C_2\gamma_{n2}e^{\lambda_n x} + C_n\gamma_{nn}e^{\lambda_n x}. \end{cases}$$

Кратко: $y_k = \sum_{i=1}^{n} C_i\gamma_{ik}e^{\lambda_i x}, k(1,2,\ldots,n).$

Пример. Рассмотрим систему

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x + y, \\ \dfrac{dy}{dt} = -2x + 4y. \end{cases}$$

Решение. Найдем решение данной системы в виде

$$x = \gamma_1 \cdot e^{\lambda t}, y = \gamma_2 \cdot e^{\lambda t}.$$

Составим характеристическое уравнение:

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ -2 & 4-\lambda \end{vmatrix} = 0, \qquad \lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0.$$

Оно имеет корни $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = 3$.

Построим частное решение, соответствующее корню $\lambda_1 = 2$.

Числа γ_1 и γ_2 найдем из системы

$$\begin{cases} -\gamma_1 + \gamma_2 = 0, \\ -2\gamma_1 + 2\gamma_2 = 0. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\gamma_1 + \gamma_2 = 0, \\ -\gamma_1 + \gamma_2 = 0. \end{cases}$$

Система сводится к решению одного уравнения:

$$-\gamma_1 + \gamma_2 = 0,$$

следовательно, одно из чисел γ_1, γ_2 можно выбрать произвольно.

Положив $\gamma_1 = 1$, получим $\gamma_2 = 1$.

Имеем частные решения: $x_1 = e^{2t}, y_1 = e^{2t}$.

Аналогично находим частное решение, соответствующее характеристическому числу $\lambda_2 = 3$:

$$x_2 = e^{3t}, y_2 = e^{3t},$$

Тогда общее решение имеет вид:

$$x = C_1 e^{2t} + C_2 e^{3t},$$

$$y = C_1 e^{2t} + C_2 e^{3t}.$$

Ответ: $x = C_1 e^{2t} + C_2 e^{3t}, \quad y = C_1 e^{2t} + C_2 e^{3t}$. ■

Вопросы для самоконтроля

1. Что называют дифференциальным уравнением, порядком дифференциального уравнения. Общее и частное решение ДУ. Задача Коши для ДУ n – го порядка.

2. Дифференциальные уравнения первого порядка. Теорема существования и единственности решения задачи Коши. Особое решение.

3. Дифференциальные уравнения с разделенными переменными, его общий интеграл и общее решение.

4. Дифференциальные уравнения с разделяющимися переменными, его общий интеграл.

5. Какое дифференциальное уравнение называется однородным? Запишите его в общем виде.

6.Возможно ли функцию $f(x,y)=\dfrac{3x-2y}{5x-2y}$ представить в виде функции отношений $\dfrac{x}{y}$ или $\dfrac{y}{x}$? Можно ли то же самое сделать для функции $f(x,y)=\dfrac{3x-2y+2}{5x-2y+1}$?

7. Какая подстановка используется для интегрирования однородного уравнения?

8. Какая функция называется однородной измерения k? Приведите примеры однородных функций нулевого, первого, второго измерений.

9. Какое дифференциальное уравнение называется линейным первого порядка? Запишите его в общем виде.

10. Какую подстановку используют для решения линейных дифференциальных уравнений?

11. Какой вид имеет ОДУ Бернулли?

12. Как интегрируется уравнение Бернулли?

13. При каком условии уравнение $P(x,y)dx+Q(x,y)dy=0$ является уравнением в полных дифференциалах?

14. Какой вид имеет общее решение (общий интеграл) уравнения в полных дифференциалах?

15. Запишите дифференциальное уравнение второго порядка в общем виде.

16. Какой вид имеют начальные условия в задаче Коши для дифференциального уравнения второго порядка?

17. Как понижается порядок в уравнениях вида: $y^{(n)}=f(x)$, $F(x,y',y'')=0$, $F(y,y',y'')=0$.

18. Дайте определение линейного однородного дифференциального уравнения (ЛОДУ) с постоянными коэффициентами n-го порядка.

19. Докажите свойства частных решений линейного однородного ДУ.

20. Дайте определение линейно зависимых и линейно независимых функций на (a,b).

21. Докажите, что для линейно зависимых функций определитель Вронского равен нулю.

22. Сформулируйте теорему о линейно независимых решениях ЛОДУ.

23. Дайте понятие фундаментальной системы решений ЛОДУ.

24. Докажите теорему об общем решении ЛОДУ второго порядка.

25. Какую форму имеет общее решение линейного однородного ДУ n-го порядка?

26. В каком виде записывается общее решение ЛОДУ с постоянными коэффициентами второго порядка в случае действительных различных корней; равных, комплексных корней характеристического уравнения?

27. Какой общий вид имеет линейное неоднородное дифференциальное уравнение (ЛНДУ) n-го порядка?

28. Докажите теорему об общем решении линейного неоднородного ДУ второго порядка с постоянными коэффициентами?

29. Как найти общее решение ЛНДУ, если известно одно его частное решение и общее решение соответствующего ЛОДУ?

30. В чем суть метода неопределенных коэффициентов при отыскании частного решения ЛНДУ?

31. В чем состоит метод Лагранжа нахождения общего или частного решений ЛНДУ произвольного порядка?

32. В чем состоит смысл краевой задачи для дифференциального уравнения второго порядка?

33. Дайте определение системы обыкновенных ДУ первого порядка.

34. Что называется решением системы дифференциальных уравнений (СДУ).

35. Какой вид имеет нормальная система ДУ?

36. Сформулируйте задачу Коши для нормальной СДУ.

37. Теорема существования и единственности решения задачи Коши для нормальной СДУ.

38. Сформулировать суть метода исключения неизвестных для решения СДУ.

39. Привести схему интегрирования однородной линейной СДУ с постоянными коэффициентами методом Эйлера.

40. Дать определение характеристического уравнения и характеристических чисел однородной линейной СДУ. Указать вид ее общего решения.

ЗАДАЧИ КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ

Вариант 1

1. Решить дифференциальные уравнения первого порядка:

1.1. $\dfrac{dy}{y-y^2}+\dfrac{dx}{x}=0.$

1.2. $\sqrt{y^2+1}dx=xydy.$

1.3. $y'-yctgx=\sin x, y(\pi/2)=0.$

1.4. $(x^2+y^2)dx-2xydy=0.$

2. Локомотив движется по горизонтальному участку пути со скоростью 72 км/ч. В какой момент времени и на каком расстоянии он будет остановлен тормозом, если сопротивление движению после начала торможения равно 0,2 его веса.

3. Решить дифференциальные уравнения высших порядков, допускающие понижение порядка:

3.1. $2xy'''=y''.$

3.2. $yy''-(y')^2=y^3.$

3.3. $y'''=60x^2.$

4. Решить линейные однородные дифференциальные уравнения (ЛОДУ) второго порядка:

4.1. $y''-5y'-6y=0.$

4.2. $y''-2y'+y=0.$

4.3. $y''+4y'+5y=0.$

5. Решить линейные неоднородные дифференциальные уравнения (ЛНДУ) второго порядка:

5.1. $y''+6y'+9y=10\sin x.$

5.2. $y''-2y'-3y=e^{3x}.$

5.3. $y''+9y'=15\sin 2x,\ \ y(0)=-7,\ \ y'(0)=0.$

6. Решить ЛНДУ второго порядка методом Лагранжа (методом вариации произвольных постоянных):

$$y''-4y'+5y=\frac{e^{2x}}{\cos x}.$$

7. Решить нормальную систему дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами методом Эйлера:

$$\begin{cases}\dot{x}=x-3y,\\ \dot{y}=y-3x.\end{cases}$$

Вариант 2

1. Решить дифференциальные уравнения первого порядка:

1.1. $xdx = ydy$.

1.2. $4x^3 - y' = 0$.

1.3. $(x + y)dy + ydx = 0$.

1.4. $y' - y = e^x, y(e) = e^e$.

2. В дне цилиндрического сосуда с водой имеется малое отверстие. Скорость вытекания воды пропорциональна квадратному корню из высоты столба воды в сосуде. За сколько времени вытечет вода из сосуда, если 3/4 ее количества вытекает за 10 секунд?

3. Решить дифференциальные уравнения высших порядков, допускающие понижение порядка:

3.1. $y''' - y'' = 0$.

3.2. $yy'' - (y')^2 = 0$.

3.3. $y'' = x^2 + \frac{1}{x^2}$.

4. Решить линейные однородные дифференциальные уравнения (ЛОДУ) второго порядка:

4.1. $y'' + y' - 2y = 0$.

4.2. $y'' + 4y + 4 = 0$.

4.3. $y'' - 2y' + 2y = 0$.

5. Решить линейные неоднородные дифференциальные уравнения (ЛНДУ) второго порядка:

5.1. $y'' - 2y' = x^2 - x$.

5.2. $y'' + y = 4\sin x$.

5.3. $y'' - 2y' - 3y = e^{4x}$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$.

6. Решить ЛНДУ второго порядка методом Лагранжа (методом вариации произвольных постоянных):

$$y'' - 2y' + y = \frac{e^x}{x}.$$

7. Решить нормальную систему дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами методом Эйлера:

$$\begin{cases} \dot{x} = 2x + y, \\ \dot{y} = 3x + 4y. \end{cases}$$

Вариант 3

1. Решить дифференциальные уравнения первого порядка:

1.1. $\dfrac{dy}{y+1} = \dfrac{dx}{x}$.

1.2. $(x+1)ydx = dy$.

1.3. $y' + 2y = 4x, y(0) = 3$.

1.4. $(x-y)dy = (x+y)dx$.

2. Угловой коэффициент касательной в каждой точке кривой равен отношению удвоенного произведения координат этой точки к разности квадратов абсциссы и ординаты. Найти кривую.

3. Решить дифференциальные уравнения высших порядков, допускающие понижение порядка:

3.1. $xy^{VI} - y''' = 0$.

3.2. $y''' = (y'')^3$.

3.3. $y''' = x + \cos x$.

4. Решить линейные однородные дифференциальные уравнения (ЛОДУ) второго порядка:

4.1. $y'' - 2y' = 0$.

4.2. $y'' - 4y' + 4y = 0$.

4.3. $y'' + 6y' + 10y = 0$.

5. Решить линейные неоднородные дифференциальные уравнения (ЛНДУ) второго порядка:

5.1. $y'' + y' - 6y = -x^2 - \dfrac{29}{18}$.

5.2. $y'' - 3y' + 2y = \sin x$.

5.3. $y'' + y = -\sin 2x, \quad y(\pi) = y'(\pi) = 1$.

6. Решить ЛНДУ второго порядка методом Лагранжа (методом вариации произвольных постоянных):

$$y'' - y' = \frac{1}{1+e^x}.$$

7. Решить нормальную систему дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами методом Эйлера:

$$\begin{cases} \dot{x} = x - y, \\ \dot{y} = y - 4x. \end{cases}$$

Вариант 4

1. Решить дифференциальные уравнения первого порядка:

1.1. $y^2 dy = (1 - 2x)dx.$

1.2. $dy = y\cos^2 x dx.$

1.3. $y' + \frac{y-1}{x} = 1, y(2) = 2.$

1.4. $xydy - (x^2 + y^2)dx = 0.$

2. Сосуд объемом в 20 л содержит воздух (80% азота и 20% кислорода). В сосуд при непрерывном перемешивании каждую секунду втекает 0,1 л азота и вытекает такое же количество смеси. Через какое время в сосуде будет 99% азота?

3. Решить дифференциальные уравнения высших порядков, допускающие понижение порядка:

3.1. $xy'' = 1 + x^2.$

3.2. $y'' = \sqrt{1 - (y')^2}.$

3.3. $y''' = x + \sin x.$

4. Решить линейные однородные дифференциальные уравнения (ЛОДУ) второго порядка:

4.1. $y'' - 3y' + 2y = 0.$

4.2. $y'' - 6y' + 9y = 0.$

4.3. $y'' - 4y' + 5y = 0.$

5. Решить линейные неоднородные дифференциальные уравнения (ЛНДУ) второго порядка:

5.1. $y'' + 7y' + 12y = 0.$

5.2. $y'' + 9y = 6\cos 3x.$

5.3. $y'' - 2y' + 2y = 4e^x \cos x, \quad y(\pi) = \pi e^{\pi}, \quad y'(\pi) = e^{\pi}.$

6. Решить ЛНДУ второго порядка методом Лагранжа (методом вариации произвольных постоянных):

$$y'' - y' = e^{2x}\cos e^x.$$

7. Решить нормальную систему дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами методом Эйлера:

$$\begin{cases} \dot{x} = 2x - y, \\ \dot{y} = 3x - 2y. \end{cases}$$

Вариант 5

1. Решить дифференциальные уравнения первого порядка:

1.1. $2xdx = 3y^2dy.$

1.2. $(1+y^2)dx = (1+x^2)dy.$

1.3. $y' - yctgx = tg^2x, y(\pi/3) = 2\sqrt{3}.$

1.4. $xydx - (x^2+y^2)dy = 0.$

2. Найти кривые, обладающие следующим свойством: если через любую точку кривой провести прямые, параллельные осям координат, до встречи с этими осями, то площадь полученного прямоугольника делится кривой в отношении 1:2.

3. Решить дифференциальные уравнения высших порядков, допускающие понижение порядка:

3.1. $(x-3)y'' + y' = 0.$

3.2. $2(y')^2 = (y-1)y''.$

3.3. $y'' = \dfrac{3(1+x^2)}{x^2}.$

4. Решить линейные однородные дифференциальные уравнения (ЛОДУ) второго порядка:

4.1. $y'' + 3y' - 2y = 0.$

4.2. $y'' - 8y' + 16y = 0.$

4.3. $y'' + 6y' + 13y = 0.$

5. Решить линейные неоднородные дифференциальные уравнения (ЛНДУ) второго порядка:

5.1. $4y'' - y = x^3 - 24x.$

5.2. $y'' - 2y' + 5y = e^x \sin 2x.$

5.3. $y'' - 2y' = e^x(x^2 + x - 3),\ \ y(0) = y'(0) = 2.$

6. Решить ЛНДУ второго порядка методом Лагранжа (методом вариации произвольных постоянных):

$$y'' - 2y = 4x^3e^{x^2}.$$

7. Решить нормальную систему дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами методом Эйлера:

$$\begin{cases} \dot{x} = x + 4y, \\ \dot{y} = x - 2y. \end{cases}$$

Вариант 6

1. Решить дифференциальные уравнения первого порядка:

1.1. $\dfrac{dy}{(y-2)^2} - \dfrac{dx}{(x+1)^3} = 0.$

1.2. $dy = y \sin x dx.$

1.3. $y' + y\cos x = \sin x \cos x, y(0) = 0.$

1.4. $(x-y)dy - ydx = 0.$

2. Скорость остывания (или нагревания) тела пропорциональна разности температур тела и окружающей среды. Температура окружающего воздуха поддерживается равной 200С. Когда тело остынет до 25^0С, если за 10 минут оно охладилось от 100^0С до 60^0С?

3. Решить дифференциальные уравнения высших порядков, допускающие понижение порядка:

3.1. $y''x\ln x = y'.$

3.2. $yy'' = (y')^2 - (y')^3.$

3.3. $y'' = \cos x.$

4. Решить линейные однородные дифференциальные уравнения (ЛОДУ) второго порядка:

4.1. $9y'' - y' - 2y = 0.$

4.2. $y'' + 10y' + 25y = 0.$

4.3. $y'' + 5y = 0.$

5. Решить линейные неоднородные дифференциальные уравнения (ЛНДУ) второго порядка:

5.1. $y'' + 6y' + 5y = 25x^2 - 2.$

5.2. $y'' - 3y' + 2y = e^x.$

5.3. $y'' - y' = 2(1-x),\ \ y(0) = y'(0) = 1.$

6. Решить ЛНДУ второго порядка методом Лагранжа (методом вариации произвольных постоянных):

$$y'' + 4y' + 4y = \frac{e^{-2x}}{x^3}.$$

7. Решить нормальную систему дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами методом Эйлера:

$$\begin{cases} \dot{x} = 7x + 2y, \\ \dot{y} = 3x + 2y. \end{cases}$$

Вариант 7

1. Решить дифференциальные уравнения первого порядка:

1.1. $\frac{\sqrt{y}+1}{y}dy - \frac{1}{\sqrt{x}}dx = 0.$

1.2. $3xdy = 2ydx.$

1.3. $y' + x^2 y = x^2, y(2) = 1.$

1.4. $xdy - y\ln\frac{y}{x}dx = 0.$

2. У какой кривой отрезок любой касательной, заключенный между точкой касания и осью абсцисс, делится осью ординат пополам?

3. Решить дифференциальные уравнения высших порядков, допускающие понижение порядка:

3.1. $2xy'' = y'.$

3.2. $2yy'' = 1 + (y')^2.$

3.3. $y'' = 6x.$

4. Решить линейные однородные дифференциальные уравнения (ЛОДУ) второго порядка:

4.1. $y'' + y' - 2y = 0.$

4.2. $y'' - 12y' + 36y = 0.$

4.3. $4y'' - 8y' + 5y = 0.$

5. Решить линейные неоднородные дифференциальные уравнения (ЛНДУ) второго порядка:

5.1. $y'' - 2y' + 10y = 37\cos 3x.$

5.2. $y'' - 2y = xe^{-x}.$

5.3. $2y'' - y' = 1, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1.$

6. Решить ЛНДУ второго порядка методом Лагранжа (методом вариации произвольных постоянных):

$$y'' + y = \frac{1}{(\cos 2x)^{3/2}}.$$

7. Решить нормальную систему дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами методом Эйлера:

$$\begin{cases} \dot{x} = 4x + 2y, \\ \dot{y} = -x + y. \end{cases}$$

Вариант 8

1. Решить дифференциальные уравнения первого порядка:

1.1. $tgxdx + \frac{dy}{y} = 0.$

1.2. $\frac{5x+3}{y}dy = dx.$

1.3. $y' - ytgx = \frac{1}{\cos x}, y(0) = 0.$

1.4. $xdy - y(1 + \ln\frac{y}{x})dx = 0.$

2. Тело движется прямолинейно со скоростью υ, пропорциональной квадрату времени. Установить зависимость между пройденным путем S и временем t, если известно, что при $t=0$, $S=S_0$.

3. Решить дифференциальные уравнения высших порядков, допускающиЕ понижение порядка:

3.1. $y'' + y'tgx = \sin 2x.$

3.2. $y''(2y+3) - 2(y')^2 = 0.$

3.3. $y'' = \sin x + 1.$

4. Решить линейные однородные дифференциальные уравнения (ЛОДУ) второго порядка:

4.1. $y'' + 3y' = 0.$

4.2. $y'' + 14y' + 49y = 0.$

4.3. $y'' + 2y' + 2y = 0.$

5. Решить линейные неоднородные дифференциальные уравнения (ЛНДУ) второго порядка:

5.1. $y'' - 8y' + 12y = -65\cos 4x.$

5.2. $y'' + 4y = 5e^x.$

5.3. $y'' - 4y' + 3y = e^{5x}, \ y(0) = 3, \ y'(0) = 9.$

6. Решить ЛНДУ второго порядка методом Лагранжа (методом вариации произвольных постоянных):

$$y'' - 2y' + y = \frac{e^x}{x}.$$

7. Решить нормальную систему дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами методом Эйлера:

$$\begin{cases} \dot{x} = x - y, \\ \dot{y} = -4x + y. \end{cases}$$

Вариант 9

1. Решить дифференциальные уравнения первого порядка:

1.1. $\frac{1+x}{x}dx + \frac{1-y}{y}dy = 0.$

1.2. $dy = e^{x+y}dx.$

1.3. $y' - y = e^x, y(0) = 0.$

1.4. $ydy + (x-2y)dx = 0.$

2. В баке находится 100 л раствора, содержащего 10 кг соли. В бак непрерывно подается вода (5 л в минуту), которая перемешивается с имеющимся раствором. Смесь вытекает с той же скоростью. Сколько останется соли в баке через час?

3. Решить дифференциальные уравнения высших порядков, допускающиЕ понижение порядка:

3.1. $x^3y'' + x^2y' = 1.$

3.2. $yy'' - (y')^2 = y^2 \ln y.$

3.3. $y'' = e^{-x}.$

4. Решить линейные однородные дифференциальные уравнения (ЛОДУ) второго порядка:

4.1. $y'' - 5y' + 6y = 0.$

4.2. $y'' - 16y' + 64y = 0.$

4.3. $y'' + 9y = 0.$

5. Решить линейные неоднородные дифференциальные уравнения (ЛНДУ) второго порядка:

5.1. $y'' - 2y' = 4(x+1).$

5.2. $y'' + 16y = -24\sin 4x.$

5.3. $y'' - 8y' + 16y = e^{4x}, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1.$

6. Решить ЛНДУ второго порядка методом Лагранжа (методом вариации произвольных постоянных):

$$y'' + 4y' + 4y = e^{-2x}\ln x.$$

7. Решить нормальную систему дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами методом Эйлера:

$$\begin{cases} \dot{x} = x + y, \\ \dot{y} = 3x - y. \end{cases}$$

Вариант 10

1. Решить дифференциальные уравнения первого порядка:

1.1. $ydy + (x-1)dx = 0.$

1.2. $dy = (y+2)dx.$

1.3. $(x^2+1)y' + 4xy = 3.$

1.4. $dy = \frac{y}{x}\ln\frac{y}{x}.$

2. Найти: 1) семейство кривых, для которых угловой коэффициент касательной равен ординате точки касания; 2) кривую этого семейства, проходящую через точку (2;5).

3. Решить дифференциальные уравнения высших порядков, допускающие понижение порядка:

3.1. $(1-x^2)y'' - xy' = 2.$

3.2. $1 + (y')^2 = yy''.$

3.3. $y'' = \frac{1}{x^2}.$

4. Решить линейные однородные дифференциальные уравнения (ЛОДУ) второго порядка:

4.1. $2y'' + 5y' + 2y = 0.$

4.2. $y'' + 18y' + 81y = 0.$

4.3. $y'' - 6y' + 34y = 0.$

5. Решить линейные неоднородные дифференциальные уравнения (ЛНДУ) второго порядка:

5.1. $y'' + y' - 2y = 6x^2.$

5.2. $y'' + 4y = 3\sin 2x.$

5.3. $y'' + y = \cos x,\ \ y(\pi/2) = 4,\ \ y'(\pi/2) = 1.$

6. Решить ЛНДУ второго порядка методом Лагранжа (методом вариации произвольных постоянных):

$$y'' + 2y' + 2y = \frac{1}{e^x \sin x}.$$

7. Решить нормальную систему дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами методом Эйлера:

$$\begin{cases} \dot{x} = 8y - x, \\ \dot{y} = x + y. \end{cases}$$

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Бугров Я. С., Никольский С.М. Дифференциальные уравнения. Кратные интегралы. Ряды. Функции комплексного переменного.-М.: Наука, 1985.-432с.
2. Боярчук А.К., Головач Г.П. Справочное пособие по высшей математике.-М.: Наука, 1998.-Т.5.-384с.
3. Гутер Р.С., Янпольский А.Р. Дифференциальные уравнения.-М.: Высшая школа, 1980.- 304с.
4. Данко П.Е., Попов А.Г., Кожевникова Т. Я. Высшая математика в упражнениях и задачах.-М.: Высшая школа, 1999.Ч.1.-304с.; Ч.2.-416с.
5. Демидович Б.Н. Задачи и упражнения по математическому анализу.-М.:Наука, 1978.- 478с.
6. Задачник по курсу математического анализа / Под ред. Н.Я. Виленкина -М.:Просвещение, 1971.
7. Запорожец Г.И. Руководство к решению задач по математическому анализу.-М.: Высшая школа, 1964.-480с.
8. Пискунов Н. С. Дифференциальное и интегральное исчисление.-М.: Наука, 1985.-Т.2-560с.
9. Сборник задач по курсу высшей математики /Под ред. Г.И. Кручковича -М.: Высшая школа, 1973.-576с.
10. Шипачев В. С. Высшая математика.-М.: Высшая школа,1990.-479 с.
11. Шнейдер В.Е., Слуцкий А.И., Шумов А.С. Краткий курс высшей математики.-М.: Высшая школа,1978.-328с.

ОГЛАВЛЕНИЕ

1. Задачи, приводящие к дифференциальным уравнениям 3
2. Основные сведения о дифференциальных уравнениях 4
3. Дифференциальные уравнения первого порядка. Теорема существования и единственности. решения задачи Коши..... 6
4. Дифференциальные уравнения первого порядка, интегрируемые в квадратурах..... 8
4.1. Дифференциальные уравнения с разделенными переменными..... 9
4.2. Дифференциальные уравнения с разделяющимися переменными..... 10
4.3. Однородные дифференциальные уравнения..... 11
4.4. Линейные дифференциальные уравнения первого порядка..... 13
4.5. Дифференциальные уравнения Бернулли..... 15
4.6. Дифференциальные уравнения в полных дифференциалах..... 17
5. Дифференциальные уравнения высших порядков, допускающие понижение порядка..... 18
5.1. Дифференциальные уравнения, разрешенные относительно старшей производной..... 19
5.2. Дифференциальные уравнения, не содержащие явно искомой функции..... 19
5.3. Дифференциальные уравнения, не содержащие явно независимой переменной *x*..... 20
5.4. Составление дифференциальных уравнений..... 22
6. Линейные однородные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами высших порядков..... 23
6.1. Основные теоремы о структуре общего решения уравнения. Определитель Вронского..... 23
6.2. Нахождение фундаментальной системы решений и общего решения ЛОДУ..... 27
7. Линейные неоднородные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами 32
7.1. Нахождение частного решения ЛНДУ со специальной правой частью..... 32
7.2. Принцип наложения (суперпозиции) 35
7.3. Метод вариации произвольных постоянных (метод Лагранжа)..... 37
7.4. Понятие о краевой задаче..... 39
8. Системы дифференциальных уравнений общего вида. Основные понятия и определения 40
8.1. Понятие о системе дифференциальных уравнений и ее решении..... 40
8.2. Нормальная форма системы дифференциальных уравнений..... 41
8.3. Задача Коши для нормальной системы..... 42
8.4. Теорема существования и единственности решения задачи Коши для нормальной системы..... 42
9. Интегрирование нормальной системы дифференциальных уравнений методом исключения..... 43
10. Интегрирование однородной линейной системы дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами методом Эйлера 46
Вопросы для самоконтроля..... 48
Задачи контрольной работы..... 50
Библиографический список..... 60

Учебное издание

Черняева Татьяна Николаевна

Медведева Ирина Петровна

Обыкновенные дифференциальные уравнения

Учебное пособие
для студентов заочного отделения
всех специальностей

Редактор Л. И. Рубанова
Компьютерная верстка И.П. Медведевой

Лицензия №021231 от 23.07.97 г.
Подписано в печать 15.09.03
Формат 60×84/16. Печать офсетная.
Усл. печ. л. - 3,9. Уч.- изд. л. – 4.
План 2003 г.
Заказ 800 экз.

Глазковская типография, г. Иркутск, ул. Гоголя, 53