Министерство образования и науки Российской Федерации
Государственное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Брянская государственная инженерно-технологическая академия»

Кафедра математики

“*Кратные интегралы*”

Методические указания и задания к расчетно-графической работе
для студентов всех направлений подготовки бакалавров
очной формы обучения

Брянск 2012

Министерство образования и науки Российской Федерации
Государственное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Брянская государственная инженерно-технологическая академия»

Кафедра математики

УТВЕРЖДЕНЫ
научно-методическим
советом академии
Протокол № ____
от "____"___________2012 г.

"*Кратные интегралы*"

Методические указания и задания к расчетно-графической работе
для студентов всех направлений подготовки бакалавров
очной формы обучения

Брянск 2012

Авторы:

Камозина Олеся Владимировна

Козлова Ольга Николаевна

Рецензент: профессор каф. физики, к. физ.-мат. наук Евтюхов К. Н.

Рассмотрены УМК МТФ

Протокол №   от

Введение

Обобщением определенного интеграла на случай функции нескольких переменных является кратный интеграл. К кратным интегралам приводит и решение многих практических задач: вычисление объема тела, массы плоской пластики и т.д.

В данных методических указаниях подробно рассматриваются двойной и тройной интегралы, их вычисление и приложения.

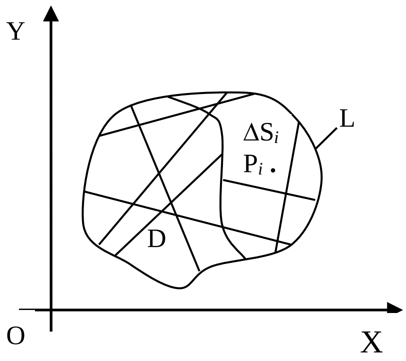
Студенту предлагается изучить соответствующий теоретический материал: определение и основные свойства, вычисление, замена переменных в двойном и тройном интегралах. Также необходимо ознакомиться с решением типовых задач по теме (изменение порядка интегрирования, вычисление двойного, тройного интегралов, нахождение площади, массы плоской пластинки, объема тела).

В конце методических указаний приведены 30 вариантов заданий для выполнения расчетно-графической работы, что позволяет проверить уровень усвоения материала по теме.

1. Двойной интеграл

1.1 Определение и основные свойства двойного интеграла

Рассмотрим в плоскости XOY замкнутую область D, ограниченную линией L. Пусть в каждой точке P(x,y) определена непрерывная функция z=f(P).



Разобьем область D произвольным образом на n частей ΔS_i. В каждой из площадок выберем точку P_i и вычислим в ней значение функции $z_i = f(P_i)$. Составим сумму произведений вида $f(P_i)\Delta S_i$:

$$V_n = f(P_1)\Delta S_1 + f(P_2)\Delta S_2 + \ldots + f(P_n)\Delta S_n = \sum_{i=1}^{n} f(P_i)\Delta S_i \,.$$

Эта сумма называется интегральной суммой для функции z=f(P) в области D.

Диаметром d_i площадки ΔS_i назовем наибольшее из расстояний между двумя точками границы этой площадки.

Если при $\max d_i \to 0$ интегральная сумма V_n имеет определенный конечный предел $I = \lim\limits_{\max d_i \to 0} \sum\limits_{i=1}^{n} f(P_i)\Delta S_i$, не зависящий от способа разбиения области D на частичные области ΔS_i и от выбора точек P_i внутри каждой из них, то этот предел называется двойным интегралом от функции f(P) в области D и обозначается таким образом

$$\lim_{\max d_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(P_i)\Delta S_i = \iint\limits_D f(x,y)dS\,,$$

где f(x,y) – подынтегральная функция;
f(x,y)dS – подынтегральное выражение;
D – область интегрирования.

<u>Основные свойства двойного интеграла.</u>

1. $\iint\limits_D (f_1(x,y) \pm f_2(x,y))dS = \iint\limits_D f_1(x,y)dS \pm \iint\limits_D f_2(x,y)dS\,;$

2. $\iint\limits_D c\cdot f(x,y)dS = c\iint\limits_D f(x,y)dS$;

3. $\iint\limits_{D_1} f(x,y)dS + \iint\limits_{D_2} f(x,y)dS = \iint\limits_D f(x,y)dS$, где D= D_1 U D_2.

1.2. Вычисление двойного интеграла

Выражение вида $I_D = \int\limits_a^b dx \int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x;y)dy$ называют повторным или двукратным интегралом по области D, D – область, ограниченная линиями x=a; x=b; y=y_1(x); y=y_2(x).

Если область D ограничена линиями y=c; y=d; x=x_1(y); x=x_2(y), то повторный интеграл по области D имеет вид: $I_D = \int\limits_c^d dy \int\limits_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x;y)dx$.

Область D называется правильной, если всякая прямая, проходящая через область D, пересекает ее границу не более чем в двух точках.

Если функция z=f(P) непрерывна в области D и область D – правильная, то двойной интеграл от этой функции по области D равен повторному интегралу по той же области.

$$\iint\limits_D f(P)dS = \int\limits_a^b dx \int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)dy = \int\limits_c^d dy \int\limits_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x,y)dx.$$

1.3. Замена переменных в двойном интеграле

Пусть в плоскости XOY дана область D, ограниченная линией L. Предположим, что координаты x и y являются функциями новых переменных u и v: x = φ(u,v), y = ψ(u,v); причем функции φ(u,v) и ψ(u,v) однозначны, непрерывны и имеют непрерывные производные в некоторой области D′.

Определитель I вида

$$I = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial\varphi}{\partial u} & \dfrac{\partial\varphi}{\partial v} \\ \dfrac{\partial\psi}{\partial u} & \dfrac{\partial\psi}{\partial v} \end{vmatrix}$$

называется *функциональным определителем* функций φ(u,v) и ψ(u,v). Его называют также *якобианом* по имени немецкого математика Якоби.

Пусть функция z = f(x,y) непрерывна в области D, тогда функция F(u,v) = f(φ(u,v),ψ(u,v)) непрерывна в области D′ и выполняется равенство:

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \iint\limits_{D'} F(u,v)|I|dudv.$$

Это и есть формула преобразования координат в двойном интеграле.

Рассмотрим частный случай перехода от декартовых координат к полярным координатам. В этом случае $u=\theta, v=\rho$.

$$x=\rho\cos\theta,\ y=\rho\sin\theta,$$

$$I=\begin{vmatrix}\frac{\partial x}{\partial\theta} & \frac{\partial x}{\partial\rho}\\ \frac{\partial y}{\partial\theta} & \frac{\partial y}{\partial\rho}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-\rho\sin\theta & \cos\theta\\ \rho\cos\theta & \sin\theta\end{vmatrix}=-\rho.$$

Следовательно, $|I|=\rho$ и формула перехода от декартовых координат к полярным имеет вид:

$$\iint_D f(x,y)dxdy=\iint_D F(\rho,\theta)\rho d\rho d\theta.$$

2. Тройной интеграл

2.1. Определение и свойства тройного интеграла

Пусть в пространстве задана некоторая область V, ограниченная замкнутой поверхностью S. Пусть в области V и на её границе определена некоторая непрерывная функция u=f(x,y,z), где x,y,z – прямоугольные координаты точек области V.

Разобьём область V произвольным образом на области V_i с диаметрами d_i и объемами ΔV_i . В каждой такой области выберем точку $P_i(x_i,y_i,z_i)$и вычислим в ней значение функции $u_i=f(P_i)$.

Интегральной суммой для функции f(x,y,z) по области V называется сумма вида $\sum_{i=1}^{n} f(P_i)\Delta V_i$.

Предел интегральной суммы при стремлении к нулю наибольшего из диаметров d_i называется тройным интегралом от функции f(x,y,z) по области V и обозначается символом:

$$\lim_{\max d_i\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(P_i)dV_i=\iiint_V f(P)dV.$$

Если функция f(x,y,z) ограничена в области V, то тройной интеграл по области V существует. Если область V определяется неравенствами: $a \le x \le b$; $y_1(x) \le y \le y_2(x)$; $z_1(x,y) \le z \le z_2(x,y)$, где $y_1(x)$, $y_2(x)$, $z_1(x,y)$, $z_2(x,y)$ – непрерывные функции, то тройной интеграл по области V от функции f(x,y,z) вычисляется по формуле:

$$\iiint_V f(P)dV=\int_a^b dx\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} dy\int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)dz.$$

2.2 Замена переменных в тройном интеграле

Пусть функции $x=\varphi(u,w,t)$, $y=\psi(u,w,t)$, $z=\xi(u,w,t)$ взаимно однозначно отображают область V в криволинейных координатах u,w,t.

Пусть при этом элемент объема ΔV_i области V переходит в элемент $\Delta V_i'$ области V′ и выполняется условие $\lim\limits_{\Delta V\to\Delta V'}\dfrac{\Delta V}{\Delta V'}=|I|$.

Определить *I*, называемый *якобианом*, численно равен определителю третьего порядка, который вычисляется по формуле:

$$I=\begin{vmatrix}\dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial w} & \dfrac{\partial x}{\partial t}\\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial w} & \dfrac{\partial y}{\partial t}\\ \dfrac{\partial z}{\partial u} & \dfrac{\partial z}{\partial w} & \dfrac{\partial z}{\partial t}\end{vmatrix}$$

При выполнении этих условий

$$\iiint\limits_V f(x,y,z)dxdydz=\iiint\limits_{V'} f\left(\varphi(u,w,t),\psi(u,w,t),\xi(u,w,t)\right)\cdot|I|\cdot dudwdt.$$

В случае цилиндрических координат имеем $x=\rho\cos\theta$, $y=\rho\sin\theta$, *z*=z.

$$I=\begin{vmatrix}\cos\theta & -\rho\sin\theta & 0\\ \sin\theta & \rho\cos\theta & 0\\ 0 & 0 & 1\end{vmatrix}=\rho.$$

Для сферических координат $x=r\sin\varphi\cos\theta$, $y=r\sin\varphi\sin\theta$, $z=r\cos\varphi$.

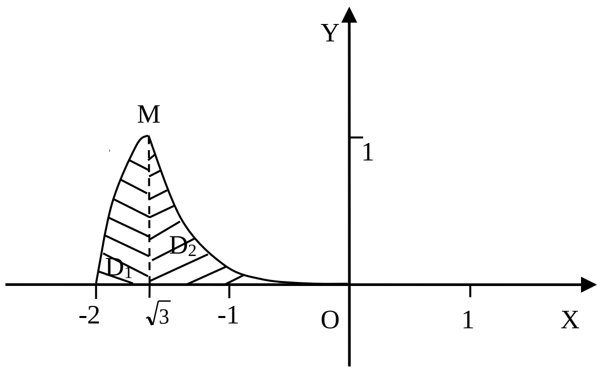
$$I=\begin{vmatrix}\sin\varphi\cos\theta & r\cos\varphi\cos\theta & -r\sin\varphi\sin\theta\\ \sin\varphi\sin\theta & r\cos\varphi\sin\theta & r\sin\varphi\cos\theta\\ \cos\varphi & -r\sin\varphi & 0\end{vmatrix}=r^2\sin\varphi.$$

Пример выполнения расчетно-графической работы

Задача 1. Изменить порядок интегрирования.

$$\int_{-2}^{-\sqrt{3}} \mathrm{dx} \int_{0}^{\sqrt{4-x^2}} f(x,y)dy + \int_{-\sqrt{3}}^{0} dx \int_{0}^{2-\sqrt{4-x^2}} f(x,y)dy$$

Решение. Изобразим область интегрирования на чертеже:



Область интегрирования D состоит из двух областей D_1 и D_2, D_1 – ограничена линиями: прямыми $x=-\sqrt{3}$, y=0 и дугой окружности y=$\sqrt{4-x^2}$; D_2 ограничена прямыми $x=-\sqrt{3}$, y=0 и дугой окружности y=2-$\sqrt{4-x^2}$. Найдем точку пересечения окружностей M:

$$\begin{cases} y=\sqrt{4-x^2} \\ y=2-\sqrt{4-x^2} \end{cases}$$

Приравнивая правые части уравнений системы, получим:

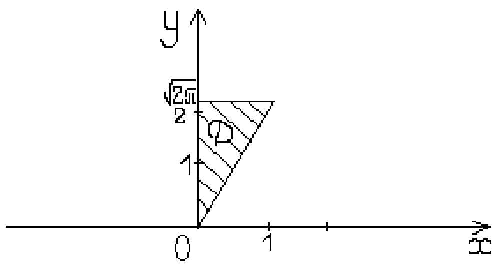
$\sqrt{4-x^2}=2-\sqrt{4-x^2}$; откуда $x=-\sqrt{3}$; тогда $y=\sqrt{4-3}=1$. Точка M имеет координаты $x=-\sqrt{3}$, y=1.

Изменяя порядок интегрирования, видим: y изменяется от 0 до 1. При этом x меняется от окружности $x^2+y^2=4$ до окружности y=2-$\sqrt{4-x^2}$. Окончательно получим:

$$\int_{-2}^{-\sqrt{3}} dx \int_{0}^{\sqrt{4-x^2}} f(x,y)dy + \int_{-\sqrt{3}}^{0} dx \int_{0}^{2-\sqrt{4-x^2}} f(x,y)dy = \int_{0}^{1} dy \int_{\sqrt{4-y^2}}^{-\sqrt{4y-y^2}} f(x,y)dx .$$

Задача 2. Вычислить двойной интеграл $\iint\limits_D y^2 \cos\frac{xy}{2}dxdy$, где D: область, ограниченная линиями: x=0, y=$\sqrt{2\pi}$, y=2x.

Решение. Изобразим область D:



Анализируя область интегрирования, замечаем: x меняется от 0 до прямой $x=\dfrac{y}{2}$; при этом y меняется от 0 до $\sqrt{2\pi}$.

$$\iint_D y^2\cos\frac{xy}{2}dxdy=\int_0^{\sqrt{2\pi}}dy\int_0^{\frac{y}{2}}y^2\cos\frac{xy}{2}dx=\int_0^{\sqrt{2\pi}}dy\cdot y^2\sin\frac{xy}{2}\cdot\frac{2}{y}\Bigg|_0^{\frac{y}{2}}=$$

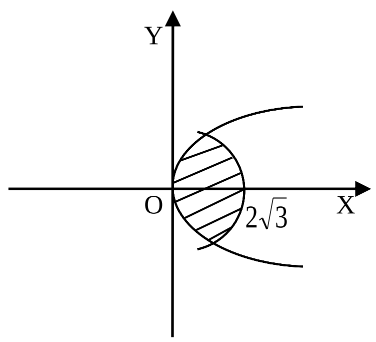
$$=\int_0^{\sqrt{2\pi}}2y\sin\frac{y^2}{4}dy=4\cdot\int_0^{\sqrt{2\pi}}\sin\frac{y^2}{4}d\left(\frac{y^2}{4}\right)=-4\cos\frac{y^2}{4}\Bigg|_0^{\sqrt{2\pi}}=$$

$$=-4\left(\cos\frac{2\pi}{4}-\cos 0\right)=4\left(1-\cos\frac{\pi}{2}\right)=4$$

Ответ: $\iint_D y^2\cos\dfrac{xy}{2}dxdy=4$.

Задача 3. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями: $x^2+y^2=12$, $x\sqrt{6}=y^2$.

Решение. Изобразим данную фигуру:



Найдем точки пресечения линий, ограничивающих данную фигуру:

$$\begin{cases}x^2+y^2=12\\ x\sqrt{6}=y^2\end{cases}.$$

$$x^2+x\sqrt{6}-12=0;$$

$$x_{1,2}=\frac{-\sqrt{6}\pm\sqrt{6+48}}{2}=\frac{-\sqrt{6}\pm\sqrt{54}}{2}=\frac{-\sqrt{6}\pm 3\sqrt{6}}{2};$$

$$y^2=\sqrt{6}\cdot\left(\frac{-\sqrt{6}\pm 3\sqrt{6}}{2}\right)=\frac{-6\pm 18}{2};$$

$y^2=6$;

$y = \pm\sqrt{6}$.

Площадь фигуры вычислим по формуле:

$$S = \iint\limits_D dxdy;$$

Учитывая симметрию фигуры относительно оси ОХ, получим:

$$S = 2\iint\limits_D dxdy = 2\int\limits_0^{\sqrt{6}} dy \int\limits_{\frac{y^2}{\sqrt{6}}}^{\sqrt{12-y^2}} dx = \int\limits_0^{\sqrt{6}} \left(\sqrt{12-y^2} - \frac{y^2}{\sqrt{6}}\right) dy =$$

$$= \int\limits_0^{\sqrt{6}} \sqrt{12-y^2}\, dy - \frac{1}{\sqrt{6}} \int\limits_0^{\sqrt{6}} y^2 dy = 6\left(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\right) - \frac{1}{\sqrt{6}} \cdot \frac{\left(\sqrt{6}\right)^3}{3} =$$

$$= \frac{3\pi}{2} + 3 - 2 = \frac{3\pi + 2}{2}.$$

Ответ: S=$\dfrac{3\pi + 2}{2}$ (ед^2.)

Задача 4. Вычислить $\iiint\limits_V x^2 zdxdydz$, V: y=3x, y=0, x=2, z=xy, z=0.

Решение.

$$\iiint\limits_V x^2 zdxdydz = \int\limits_0^2 dx \int\limits_0^{3x} dy \int\limits_0^{xy} x^2 zdz = \int\limits_0^2 dx \int\limits_0^{3x} x^2 \cdot \left.\frac{z^2}{2}\right|_0^{xy} dy = \int\limits_0^2 dx \int\limits_0^{3x} \frac{x^4 y^2}{2} dy =$$

$$= \int\limits_0^2 \frac{x^2}{2} \cdot \left.\frac{y^3}{3}\right|_0^{3x} dx = \int\limits_0^2 \frac{9x^7}{2} dx = \frac{9}{2} \cdot \left.\frac{x^8}{8}\right|_0^2 = \frac{9}{16} \cdot 2^8 = 144.$$

Ответ: $\iiint\limits_V x^2 zdxdydz = 144$.

Задача 5. Пластинка D задана ограничивающими её кривыми, μ – поверхностная плотность. Найти массу пластинки.

D: $x = \dfrac{1}{4}, y = 0, y^2 = 16x, (y \geq 0); \mu = 16x + \dfrac{9y^2}{2}.$

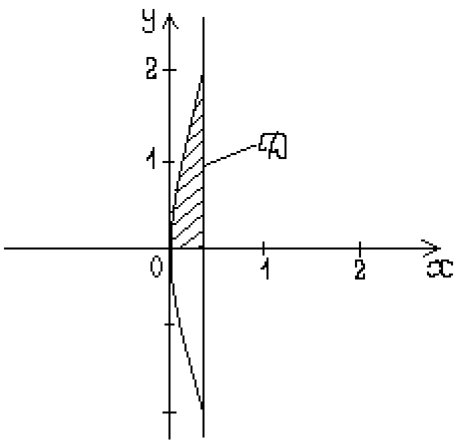
Решение. Масса пластинки m равна:

$$m = \iint\limits_D \mu(x, y) dxdy.$$

Подставляя данные задачи, получим:

$$m = \iint\limits_D (16x + \frac{9y^2}{2}) dxdy$$

Изобразим область D:



Расставляя пределы интегрирования в двойном интеграле, получим:

$$m=\int_0^{\frac{1}{4}}dx\int_0^{4\sqrt{x}}\left(16x+\frac{9y^2}{2}\right)dy=\int_0^{\frac{1}{4}}\left(16xy+\frac{3y^3}{2}\right)\Bigg|_0^{4\sqrt{x}}dx=$$

$$=\int_0^{\frac{1}{4}}\left(64x^{\frac{3}{2}}+96x^{\frac{3}{2}}\right)dx=\int_0^{\frac{1}{4}}160\cdot x^{\frac{3}{2}}dx=160\cdot\frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}}\Bigg|_0^{\frac{1}{4}}=64\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{5}{2}}=64\cdot\frac{1}{32}=2.$$

Ответ: m=2.

Задача 6. Найти объем тела, заданного ограничивающими его поверхностями:

$$x=17\sqrt{2y},x=2\sqrt{2y},z=0,z+y=\frac{1}{2}.$$

Решение. Объем тела V равен:

$$V=\iiint\limits_V dxdydz.$$

Переходя к повторному интегралу, получим:

$$V=\int_0^{\frac{1}{2}}dy\int_{2\sqrt{2y}}^{17\sqrt{2y}}dx\int_0^{\frac{1}{2}-y}dz=\int_0^{\frac{1}{2}}dy\int_{2\sqrt{2y}}^{17\sqrt{2y}}z\Bigg|_0^{\frac{1}{2}-y}dx=\int_0^{\frac{1}{2}}dy\int_{2\sqrt{2y}}^{17\sqrt{2y}}\left(\frac{1}{2}-y\right)dx=$$

$$=\int_0^{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2}x-xy\right)\Bigg|_{2\sqrt{2y}}^{17\sqrt{2y}}dy=\int_0^{\frac{1}{2}}\left(\frac{17}{2}\cdot\sqrt{2y}-\sqrt{2y}-17\sqrt{2}\cdot y^{\frac{3}{2}}+2\sqrt{2}\cdot y^{\frac{3}{2}}\right)dy=$$

$$=\int_0^{\frac{1}{2}}\left(\frac{15}{2}\sqrt{2y}-15\sqrt{2}y^{\frac{3}{2}}\right)dy=\frac{15\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{2y^{\frac{3}{2}}}{3}\Bigg|_0^{\frac{1}{2}}-15\sqrt{2}\cdot\frac{2y^{\frac{5}{2}}}{5}\Bigg|_0^{\frac{1}{2}}=$$

$$=5\sqrt{2}\cdot\frac{1}{2\sqrt{2}}-6\sqrt{2}\cdot\frac{1}{(\sqrt{2})^5}=\frac{5}{2}-\frac{6}{4}=1.$$

Ответ: V=1.

Варианты расчетно-графической работы

Задание 1. Изменить порядок интегрирования.

1. $\int\limits_{-2}^{-1} dy \int\limits_{-\sqrt{2+y}}^{0} f dx + \int\limits_{-1}^{0} dy \int\limits_{-\sqrt{-y}}^{0} f dx$.

2. $\int\limits_{0}^{1} dy \int\limits_{-\sqrt{y}}^{0} f dx + \int\limits_{1}^{\sqrt{2}} dy \int\limits_{-\sqrt{2-y^2}}^{0} f dx$.

3. $\int\limits_{0}^{1} dy \int\limits_{0}^{y} f dx + \int\limits_{1}^{\sqrt{2}} dy \int\limits_{0}^{\sqrt{2-y^2}} f dx$.

4. $\int\limits_{0}^{1} dy \int\limits_{0}^{\sqrt{y}} f dx + \int\limits_{1}^{2} dy \int\limits_{0}^{\sqrt{2-y}} f dx$.

5. $\int\limits_{-\sqrt{2}}^{-1} dx \int\limits_{-\sqrt{2-x^2}}^{0} f dy + \int\limits_{-1}^{0} dx \int\limits_{x}^{0} f dy$.

6. $\int\limits_{0}^{1/\sqrt{2}} dy \int\limits_{0}^{\arcsin y} f dx + \int\limits_{1/\sqrt{2}}^{1} dy \int\limits_{0}^{\arccos y} f dx$.

7. $\int\limits_{-2}^{-1} dy \int\limits_{0}^{\sqrt{2+y}} f dx + \int\limits_{-1}^{0} dy \int\limits_{0}^{\sqrt{-y}} f dx$.

8. $\int\limits_{0}^{1} dy \int\limits_{-\sqrt{y}}^{0} f dx + \int\limits_{1}^{e} dy \int\limits_{-1}^{-\ln y} f dx$.

9. $\int\limits_{-\sqrt{2}}^{-1} dx \int\limits_{0}^{\sqrt{2-x^2}} f dy + \int\limits_{-1}^{0} dx \int\limits_{0}^{x^2} f dy$.

10. $\int\limits_{-2}^{-\sqrt{3}} dx \int\limits_{-\sqrt{4-x^2}}^{0} f dy + \int\limits_{-\sqrt{3}}^{0} dx \int\limits_{\sqrt{4-x^2}-2}^{0} f dy$.

11. $\int\limits_{0}^{1} dx \int\limits_{1-x^2}^{1} f dy + \int\limits_{1}^{e} dx \int\limits_{\ln x}^{1} f dy$.

12. $\int\limits_{0}^{1} dy \int\limits_{0}^{\sqrt[3]{y}} f dx + \int\limits_{1}^{2} dy \int\limits_{0}^{2-y} f dx$.

13. $\int\limits_{0}^{\pi/4} dy \int\limits_{0}^{\sin y} f dx + \int\limits_{\pi/4}^{\pi/2} dy \int\limits_{0}^{\cos y} f dx$.

14. $\int\limits_{-2}^{-1} dx \int\limits_{-(2+x)}^{0} f dx + \int\limits_{-1}^{0} dx \int\limits_{\sqrt[3]{x}}^{0} f dy$.

15. $\int\limits_{0}^{1} dy \int\limits_{0}^{\sqrt{y}} f dx + \int\limits_{1}^{e} dy \int\limits_{\ln y}^{1} f dx$.

16. $\int\limits_{0}^{1} dy \int\limits_{-\sqrt{y}}^{0} f dx + \int\limits_{1}^{2} dy \int\limits_{-\sqrt{2-y}}^{0} f dx$.

17. $\int\limits_{0}^{1} dy \int\limits_{-y}^{0} f dx + \int\limits_{1}^{\sqrt{2}} dy \int\limits_{-\sqrt{2-y^2}}^{0} f dx$.

18. $\int\limits_{0}^{1} dy \int\limits_{0}^{y^2} f dx + \int\limits_{1}^{2} dy \int\limits_{0}^{2-y} f dx$.

19. $\int\limits_{0}^{\sqrt{3}} dx \int\limits_{\sqrt{4-x^2}-2}^{0} f dy + \int\limits_{\sqrt{3}}^{2} dx \int\limits_{-\sqrt{4-x^2}}^{0} f dy$.

20. $\int\limits_{-2}^{-1} dy \int\limits_{-(2+y)}^{0} f dx + \int\limits_{-1}^{0} dy \int\limits_{\sqrt[3]{y}}^{0} f dx$.

21. $\int\limits_{0}^{1} dy \int\limits_{0}^{y} f dx + \int\limits_{1}^{e} dy \int\limits_{\ln y}^{1} f dx$.

22. $\int\limits_{0}^{1} dx \int\limits_{0}^{x^2} f dy + \int\limits_{1}^{\sqrt{2}} dx \int\limits_{0}^{\sqrt{2-x^2}} f dy$.

23. $\int\limits_{0}^{\pi/4} dx \int\limits_{0}^{\sin x} f dy + \int\limits_{\pi/4}^{\pi/2} dx \int\limits_{0}^{\cos x} f dy$.

24. $\int\limits_{-\sqrt{2}}^{-1} dy \int\limits_{-\sqrt{2-y^2}}^{0} f dx + \int\limits_{-1}^{0} dy \int\limits_{y}^{0} f dx$.

25. $\int\limits_{0}^{1} dx \int\limits_{0}^{x^2} f dy + \int\limits_{1}^{2} dx \int\limits_{0}^{2-x} f dy$.

26. $\int\limits_{0}^{\sqrt{3}} dx \int\limits_{0}^{2-\sqrt{4-x^2}} f dy + \int\limits_{\sqrt{3}}^{2} dx \int\limits_{0}^{\sqrt{4-x^2}} f dy$.

27. $\int\limits_{0}^{1} dx \int\limits_{-\sqrt{x}}^{0} f dy + \int\limits_{1}^{2} dy \int\limits_{-\sqrt{2-x}}^{0} f dy$.

28. $\int\limits_{0}^{1} dx \int\limits_{0}^{x} f dy + \int\limits_{1}^{\sqrt{2}} dy \int\limits_{0}^{\sqrt{2-x^2}} f dy$.

29. $\int\limits_0^1 dy \int\limits_0^{\sqrt{y}} f dx + \int\limits_1^{\sqrt{2}} dy \int\limits_0^{\sqrt{2-y^2}} f dx$.

30. $\int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{\sqrt{x}} f dy + \int\limits_1^2 dy \int\limits_0^{\sqrt{2-x}} f dy$.

Задание 2. Вычислить двойной интеграл.

1. $\iint\limits_D y e^{\frac{xy}{2}} dxdy;\ D: y=\ln 2,\ y=\ln 3,\ x=2,\ x=4$.

2. $\iint\limits_D y^2 \sin\frac{xy}{2} dxdy;\ D: x=0,\ y=\sqrt{\pi},\ y=\frac{x}{2}$.

3. $\iint\limits_D y\cos xy dxdy;\ D: y=\frac{\pi}{2},\ y=\pi,\ x=1,\ x=2$.

4. $\iint\limits_D y^2 e^{-\frac{xy}{4}} dxdy;\ D: x=0,\ y=2,\ y=x$.

5. $\iint\limits_D y\sin xy dxdy;\ D: y=\frac{\pi}{2},\ y=\pi,\ x=1,\ x=2$.

6. $\iint\limits_D y^2 \cos\frac{xy}{2} dxdy;\ D: x=0,\ y=\sqrt{\frac{\pi}{2}},\ y=\frac{x}{2}$.

7. $\iint\limits_D 4y e^{2xy} dxdy;\ D: y=\ln 3,\ y=\ln 4,\ x=\frac{1}{2},\ x=1$.

8. $\iint\limits_D 4y^2 \sin xy dxdy;\ D: x=0,\ y=\sqrt{\frac{\pi}{2}},\ y=x$.

9. $\iint\limits_D y\cos 2xy dxdy;\ D: y=\frac{\pi}{2},\ y=\pi,\ x=\frac{1}{2},\ x=1$.

10. $\iint\limits_D y^2 e^{-\frac{xy}{8}} dxdy;\ D: x=0,\ y=2,\ y=\frac{x}{2}$.

11. $\iint\limits_D 12y\sin 2xy dxdy;\ D: y=\frac{\pi}{4},\ y=\frac{\pi}{2},\ x=2,\ x=3$.

12. $\iint\limits_D y^2 \cos xy dxdy;\ D: x=0,\ y=\sqrt{\pi},\ y=x$.

13. $\iint\limits_D y e^{\frac{xy}{4}} dxdy;\ D: y=\ln 2,\ y=\ln 3,\ x=4,\ x=8$.

14. $\iint\limits_D 4y^2 \sin xy dxdy;\ D: x=0,\ y=\sqrt{2\pi},\ y=2x$.

15. $\iint\limits_D 2y\cos 2xy\,dxdy$; $D: y=\dfrac{\pi}{4},\ y=\dfrac{\pi}{2},\ x=1,\ x=2$.

16. $\iint\limits_D y^2 e^{-\frac{xy}{2}}dxdy$; $D: x=0,\ y=\sqrt{2},\ y=x$.

17. $\iint\limits_D y\sin xy\,dxdy$; $D: y=\pi,\ y=2\pi,\ x=\dfrac{1}{2},\ x=1$.

18. $\iint\limits_D y^2\cos 2xy\,dxdy$; $D: x=0,\ y=\sqrt{\dfrac{\pi}{2}},\ y=\dfrac{\pi}{2}$.

19. $\iint\limits_D 8ye^{4xy}dxdy$; $D: y=\ln 3,\ y=\ln 4,\ x=\dfrac{1}{4},\ x=\dfrac{1}{2}$.

20. $\iint\limits_D 3y^2\sin\dfrac{xy}{2}dxdy$; $D: x=0,\ y=\sqrt{\dfrac{4\pi}{3}},\ y=\dfrac{2}{3}x$.

21. $\iint\limits_D y\cos xy\,dxdy$; $D: y=\pi,\ y=3\pi,\ x=\dfrac{1}{2},\ x=1$.

22. $\iint\limits_D y^2 e^{-\frac{xy}{2}}dxdy$; $D: x=0,\ y=1,\ y=\dfrac{x}{2}$.

23. $\iint\limits_D y\sin 2xy\,dxdy$; $D: y=\dfrac{\pi}{2},\ y=\dfrac{3\pi}{2},\ x=\dfrac{1}{2},\ x=2$.

24. $\iint\limits_D y^2\cos xy\,dxdy$; $D: x=0,\ y=\sqrt{\pi},\ y=2x$.

25. $\iint\limits_D 6ye^{\frac{xy}{3}}dxdy$; $D: y=\ln 2,\ y=\ln 3,\ x=3,\ x=6$.

26. $\iint\limits_D y^2\sin\dfrac{xy}{2}dxdy$; $D: x=0,\ y=\sqrt{\pi},\ y=x$.

27. $\iint\limits_D y\cos 2xy\,dxdy$; $D: y=\dfrac{\pi}{2},\ y=\dfrac{3\pi}{2},\ x=\dfrac{1}{2},\ x=2$.

28. $\iint\limits_D y^2 e^{-\frac{xy}{8}}dxdy$; $D: x=0,\ y=4,\ y=2x$.

29. $\iint\limits_D 3y\sin xy\,dxdy$; $D: y=\dfrac{\pi}{2},\ y=3\pi,\ x=1,\ x=3$.

30. $\iint\limits_D y^2\cos\dfrac{xy}{2}dxdy$; $D: x=0,\ y=\sqrt{2\pi},\ y=2x$.

Задание 3. Найти площадь фигуры, ограниченной данными линиями.

1. $y=\dfrac{3}{x},\ y=4e^{x},\ y=3,\ y=4.$
2. $x=\sqrt{36-y^2},\ x=6-\sqrt{36-y^2}.$
3. $x^2+y^2=72,\ 6y=-x^2\ (y\le 0).$
4. $x=8-y^2,\ x=-2y.$
5. $y=\dfrac{3}{x},\ y=8e^{x},\ y=3,\ y=8.$
6. $y=\dfrac{\sqrt{x}}{2},\ y=\dfrac{1}{2x},\ x=16.$
7. $x=5-y^2,\ x=-4y.$
8. $x^2+y^2=12,\ -\sqrt{6}y=x^2\ (y\le 0).$
9. $y=\sqrt{12-x^2},\ y=2\sqrt{3}-\sqrt{12-x^2},\ x=0\ (x\ge 0).$
10. $y=\dfrac{3}{2}\sqrt{x},\ y=\dfrac{3}{2x},\ x=9.$
11. $y=\sqrt{24-x^2},\ 2\sqrt{3}y=x^2,\ x=0\ (x\ge 0).$
12. $y=\sin x,\ y=\cos x,\ x=0\ (x\ge 0).$
13. $y=20-x^2,\ y=-8x.$
14. $y=\sqrt{18-x^2},\ y=3\sqrt{2}-\sqrt{18-x^2}.$
15. $y=32-x^2,\ y=-4x.$
16. $y=\dfrac{2}{x},\ y=5e^{x},\ y=2,\ y=5.$
17. $x^2+y^2=36,\ 3\sqrt{2}y=x^2\ (y\ge 0).$
18. $y=3\sqrt{x},\ y=\dfrac{3}{x},\ x=4.$
19. $y=6-\sqrt{36-x^2},\ y=\sqrt{36-x^2},\ x=0\ (x\ge 0).$
20. $y=\dfrac{25}{4}-x^2,\ y=x-\dfrac{5}{2}.$
21. $y=\sqrt{x},\ y=\dfrac{1}{x},\ x=16.$
22. $y=\dfrac{2}{x},\ y=7e^{x},\ y=2,\ y=7.$
23. $x=27-y^2,\ x=-6y.$
24. $x=\sqrt{72-y^2},\ 6x=y^2,\ y=0\ (y\ge 0).$
25. $y=\sqrt{6-x^2},\ y=\sqrt{6}-\sqrt{6-x^2}.$
26. $y=\dfrac{3}{2}\sqrt{x},\ y=\dfrac{3}{2x},\ x=4.$

27. $y=\sin x,\ y=\cos x,\ x=0\ (x\le 0)$.

28. $y=\dfrac{1}{x},\ y=6e^{x},\ y=1, y=6$.

29. $y=3\sqrt{x},\ y=\dfrac{3}{x},\ x=9$.

30. $y=11-x^{2},\ y=-10x$.

Задание 4. Пластинка D задана ограничивающими ее кривыми, μ - поверхностная плотность. Найти массу пластинки.

1. $D: x=1,\ y=0,\ y^{2}=4x\ (y\ge 0);\ \mu=7x^{2}+y$.

2. $D: x^{2}+y^{2}=1,\ x^{2}+y^{2}=4,\ x=0,\ y=0\ (x\ge 0,\ y\ge 0);\ \mu=\dfrac{x+y}{x^{2}+y^{2}}$.

3. $D: x=1,\ y=0,\ y^{2}=4x\ (y\ge 0);\ \mu=\dfrac{7x^{2}}{2}+5y$.

4. $D: x^{2}+y^{2}=9,\ x^{2}+y^{2}=16,\ x=0,\ y=0\ (x\ge 0,\ y\ge 0);\ \mu=\dfrac{2x+5y}{x^{2}+y^{2}}$.

5. $D: x=2,\ y=0,\ y^{2}=2x\ (y\ge 0);\ \mu=\dfrac{7x^{2}}{8}+2y$.

6. $D: x^{2}+y^{2}=1,\ x^{2}+y^{2}=16,\ x=0,\ y=0\ (x\ge 0,\ y\ge 0);\ \mu=\dfrac{x+y}{x^{2}+y^{2}}$.

7. $D: x=2,\ y=0,\ y^{2}=\dfrac{x}{2}\ (y\ge 0);\ \mu=\dfrac{7x^{2}}{2}+6y$.

8. $D: x^{2}+y^{2}=4,\ x^{2}+y^{2}=25,\ x=0,\ y=0\ (x\ge 0,\ y\le 0);\ \mu=\dfrac{2x-3y}{x^{2}+y^{2}}$.

9. D: $x=1$, $y=0$, $y^2=4x$ $(y\ge 0)$; $\mu=x+3y^{2}$.

10. D: $x^2+y^2=1$, $x^2+y^2=9$, $x=0$, $y=0$ $(x\ge 0, y\le 0)$; $\mu=(x-y)/(x^2+y^2)$.

11. D: $x=1$, $y=0$, $y^2=x$ $(y\ge 0)$; $\mu=3x+6y^2$.

12. D: $x^2+y^2=9$, $x^2+y^2=25$, $x=0$, $y=0$ $(x\le 0, y\ge 0)$; $\mu=(2y-x)/(x^2+y^2)$.

13. D: $x=2$, $y=0$, $y^2=x/2$ $(y\ge 0)$; $\mu=2x+3y^2$.

14. D: $x^2+y^2=4$, $x^2+y^2=16$, $x=0$, $y=0$ $(x\le 0, y\ge 0)$; $\mu=(2y-3x)/(x^2+y^2)$.

15. D: $x=\dfrac{1}{2}$, $y=0$, $y^2=8x$ $(y\ge 0)$; $\mu=7x+3y^2$.

16. D: $x^2+y^2=9$, $x^2+y^2=16$, $x=0$, $y=0$ $(x\le 0, y\ge 0)$; $\mu=(2y-5x)/(x^2+y^2)$.

17. D: $x=1$, $y=0$, $y^2=4x$ $(y\ge 0)$; $\mu=7x^2+2y$.

18. D: $x^2+y^2=1$, $x^2+y^2=16$, $x=0$, $y=0$ $(x\ge 0, y\ge 0)$; $\mu=(x+3y)/(x^2+y^2)$.

19. D: $x=2$, $y^2=2x$, $y=0$ $(y\ge 0)$; $\mu=7x^2/4+y/2$.

20. D: $x^2+y^2=1$, $x^2+y^2=4$, $x=0$, $y=0$ $(x\ge 0, y\ge 0)$; $\mu=(x+2y)/(x^2+y^2)$.

21. D: $x=2$, $y=0$, $y^2=2x$ $(y\ge 0)$; $\mu=7x^2/4+y$.

22. D: $x^2+y^2=1$, $x^2+y^2=9$, $x=0$, $y=0$ $(x\ge 0, y\le 0)$; $\mu=(2x-y)/(x^2+y^2)$.

23. D: $x=2$, $y=0$, $y^2=x/2$ $(y\ge 0)$; $\mu=7x^2/2+8y$.

24. D: $x^2+y^2=1$, $x^2+y^2=25$, $x=0$, $y=0$ $(x \geq 0, y \leq 0)$; $\mu=(x-4y)/(x^2+y^2)$.
25. D: $x=1$, $y=0$, $y^2=4x$ $(y \geq 0)$; $\mu=6x+3y^2$.
26. D: $x^2+y^2=4$, $x^2+y^2=16$, $x=0$, $y=0$ $(x \geq 0, y \leq 0)$; $\mu=(3x-y)/(x^2+y^2)$.
27. D: $x=2$, $y=0$, $y^2=x/2$ $(y \geq 0)$; $\mu=4x+6y^2$.
28. D: $x^2+y^2=4$, $x^2+y^2=9$, $x=0$, $y=0$ $(x \leq 0, y \geq 0)$; $\mu=(y-4x)/(x^2+y^2)$.
29. D: $x=1/2$, $y=0$, $y^2=2x$ $(y \geq 0)$; $\mu=4x+9y^2$.
30. D: $x^2+y^2=4$, $x^2+y^2=9$, $x=0$, $y=0$ $(x \leq 0, y \geq 0)$; $\mu=(y-2x)/(x^2+y^2)$.

Задание 5. Найти объем тела, заданного ограничивающими его поверхностями.

1. $y=16\sqrt{2x}$, $y=\sqrt{2x}$, $z=0$, $x+z=2$.
2. $y=5\sqrt{x}$, $y=5x/3$, $z=0$, $z=5+5\sqrt{x}/3$.
3. $x^2+y^2=2$, $y=\sqrt{x}$, $y=0$, $z=0$, $z=15x$.
4. $x+y=2$, $y=\sqrt{x}$, $z=12y$, $z=0$.
5. $x=20\sqrt{2y}$, $x=5\sqrt{2y}$, $z=0$, $z+y=1/2$.
6. $x=5\sqrt{y}/2$, $x=5y/6$, $z=0$, $z=\frac{5}{6}(3+\sqrt{y})$.
7. $x^2+y^2=2$, $x=\sqrt{y}$, $x=0$, $z=0$, $z=30y$.
8. $x+y=2$, $x=\sqrt{y}$, $z=12x/5$, $z=0$.
9. $y=17\sqrt{2x}$, $y=2\sqrt{2x}$, $z=0$, $x+z=1/2$.
10. $y=5\sqrt{x}/3$, $y=5x/9$, $z=0$, $z=5(3+\sqrt{x})/9$.
11. $x^2+y^2=8$, $y=\sqrt{2x}$, $y=0$, $z=0$, $z=15x/11$.
12. $x+y=4$, $y=\sqrt{2x}$, $z=3y$, $z=0$.
13. $x=\frac{5}{6}\sqrt{y}$, $x=\frac{5}{18}y$, $z=0$, $z=\frac{5}{18}(3+\sqrt{y})$.
14. $x=19\sqrt{2y}$, $x=4\sqrt{2y}$, $z=0$, $z+y=2$.
15. $x^2+y^2=8$, $x=\sqrt{2y}$, $x=0$, $z=30y/11$, $z=0$.
16. $x+y=4$, $x=\sqrt{2y}$, $z=3x/5$, $z=0$.
17. $y=6\sqrt{3x}$, $y=\sqrt{3x}$, $z=0$, $x+z=3$.
18. $y=\frac{5}{6}\sqrt{x}$, $y=\frac{5}{18}x$, $z=0$, $z=\frac{5}{18}(3+\sqrt{x})$.
19. $x^2+y^2=18$, $y=\sqrt{3x}$, $y=0$, $z=0$, $z=5x/11$.
20. $x+y=6$, $y=\sqrt{3x}$, $z=4y$, $z=0$.
21. $x=7\sqrt{3y}$, $x=2\sqrt{3y}$, $z=0$, $z+y=3$
22. $x=5\sqrt{y}/3$, $x=5y/9$, $z=0$, $z=5(3+\sqrt{y})/9$.
23. $x^2+y^2=18$, $x=\sqrt{3y}$, $x=0$, $z=0$, $z=10y/11$.
24. $x+y=6$, $x=\sqrt{3y}$, $z=4x/5$, $z=0$.

25. y= $\sqrt{15x}$, $y=\sqrt{15}x$, z=0, z= $\sqrt{15}$ (1+ $\sqrt{x}$).

26. $x^2+y^2=50$, y= $\sqrt{5x}$, y=0, z=0, z=3x/11.

27. x+y=8, y= $\sqrt{4x}$, z=3y, z=0.

28. x=16 $\sqrt{2y}$, x= $\sqrt{2y}$, z+y=2, z=0.

29. x=15 $\sqrt{y}$, x=15y, z=0, z=15(1+ $\sqrt{y}$).

30. $x^2+y^2=50$, x= $\sqrt{5y}$, x=0, z=0, z=6y/11.

Задание 6. Вычислить тройной интеграл.

1. $\iiint\limits_V x\,dx\,dy\,dz$;

V: y=10x, y=0, x=1, z=xy, z=0.

2. $\iiint\limits_V \dfrac{dxdydz}{\left(1+\dfrac{x}{3}+\dfrac{y}{4}+\dfrac{z}{8}\right)^4}$;

V: $\dfrac{x}{3}+\dfrac{y}{4}+\dfrac{z}{8}=1$, x=0, y=0, z=0.

3. $\iiint\limits_V 15(y^2+z^2)\,dx\,dy\,dz$;

V: z=x+y, x+y=1, x=0, y=0, z=0.

4. $\iiint\limits_V (3x+4y)\,dx\,dy\,dz$;

V: y=x, y=0, x=1, $z=5(x^2+y^2)$, z=0.

5. $\iiint\limits_V (1+2x^3)\,dx\,dy\,dz$;

V: y=9x, y=0, x=1, z= $\sqrt{xy}$, z=0.

6. $\iiint\limits_V (27+54y^3)\,dx\,dy\,dz$;

V: y=x, y=0, x=1, z= $\sqrt{xy}$, z=0.

7. $\iiint\limits_V y\,dx\,dy\,dz$;

V: y=15x, y=0, x=1, z=xy, z=0.

8. $\iiint\limits_V \dfrac{dxdydz}{\left(1+\dfrac{x}{16}+\dfrac{y}{8}+\dfrac{z}{3}\right)^5}$;

V: $\dfrac{x}{16}+\dfrac{y}{8}+\dfrac{z}{3}=1$, x=0, y=0, z=0.

9. $\iiint\limits_V (3x^2+y^2)\,dx\,dy\,dz$;

V: z=10y, x+y=1, x=0, y=0, z=0.

10. $\iiint\limits_V (15x+30z)\,dx\,dy\,dz$;

V: $z=x^2+3y^2$, $z=0$, $y=x$, $y=0$, $x=1$.

11. $\iiint\limits_V (4+8z^3)\,dx\,dy\,dz$;

V: $y=x$, $y=0$, $x=1$, $z=\sqrt{xy}$, $z=0$.

12. $\iiint\limits_V (1+2x^3)\,dx\,dy\,dz$;

V: $y=36x$, $y=0$, $x=1$, $z=\sqrt{xy}$, $z=0$.

13. $\iiint\limits_V 21xz\,dx\,dy\,dz$;

V: $y=x$, $y=0$, $x=2$, $z=xy$, $z=0$.

14. $\iiint\limits_V \dfrac{dxdydz}{\left(1+\dfrac{x}{10}+\dfrac{y}{8}+\dfrac{z}{3}\right)^6}$;

V: $x/10+y/8+z/3=1$, $x=0$, $y=0$, $z=0$.

15. $\iiint\limits_V (x^2+3y^2)\,dx\,dy\,dz$;

V: $z=10x$, $x+y=1$, $x=0$, $y=0$, $z=0$.

16. $\iiint\limits_V (60y+90z)\,dx\,dy\,dz$;

V: $y=x$, $y=0$, $x=1$, $z=x^2+y^2$, $z=0$.

17. $\iiint\limits_V \left(\dfrac{10}{3}x+\dfrac{5}{3}\right)dx\,dy\,dz$;

V: $y=9x$, $y=0$, $x=1$, $z=\sqrt{xy}$, $z=0$.

18. $\iiint\limits_V (9+18z)\,dx\,dy\,dz$;

V: $y=4x$, $y=0$, $x=1$, $z=\sqrt{xy}$, $z=0$.

19. $\iiint\limits_V 3y^2\,dx\,dy\,dz$;

V: $y=2x$, $y=0$, $x=2$, $z=xy$, $z=0$.

20. $\iiint\limits_V \dfrac{dxdydz}{\left(1+\dfrac{x}{2}+\dfrac{y}{4}+\dfrac{z}{6}\right)^4}$;

V: $x/2+y/4+z/6=1$, $x=0$, $y=0$, $z=0$.

21. $\iiint\limits_V x^2\,dx\,dy\,dz$;

V: $z=10(x+3y)$, $x+y=1$, $x=0$, $y=0$, $z=0$.

22. $\iiint\limits_V (8y+12z)\,dx\,dy\,dz$;

V: $y=x$, $y=0$, $x=1$, $z=3x^2+2y^2$, $z=0$.

23. $\iiint\limits_V$ $63(1+2\sqrt{y})\,dx\,dy\,dz$;

V: y=x, y=0, x=1, z=$\sqrt{xy}$, z=0.

24. $\iiint\limits_V$ $(x+y)\,dx\,dy\,dz$;

V: y=x, y=0, x=1, z=$30x^2+60y^2$, z=0.

25. $\iiint\limits_V \dfrac{dxdydz}{\left(1+\dfrac{x}{6}+\dfrac{y}{4}+\dfrac{z}{16}\right)^5}$;

V: x/6+y/4+z/16=1, x=0, y=0, z=0.

26. $\iiint\limits_V$ $xyz\,dx\,dy\,dz$;

V: y=x, y=0, x=2, z=xy, z=0.

27. $\iiint\limits_V$ $y^2\,dx\,dy\,dz$;

V: z=10(3x+y), x+y=1, x=0, y=0, z=0.

28. $\iiint\limits_V \left(5x+\dfrac{3z}{2}\right)dx\,dy\,dz$;

V: y=x, y=0, x=1, z=x^2+15y^2, z=0.

29. $\iiint\limits_V$ $(x^2+4y^2)\,dx\,dy\,dz$;

V: z=20(2x+y), x+y=1, x=0, y=0, z=0.

30. $\iiint\limits_V \dfrac{dxdydz}{\left(1+\dfrac{x}{8}+\dfrac{y}{3}+\dfrac{z}{5}\right)^6}$;

V: x/8+y/3+z/5=1, x=0, y=0, z=0

Литература

1. Пискунов, Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисления: учеб. пособие для втузов. В 2 т. Т.1/ Н.С. Пискунов. – Изд. стер. – М.: Интеграл-Пресс, 2004. – 415 с.
2. Высшая математика в упражнениях и задачах. В 2 ч.: учеб. пособие для вузов. Ч. 2 / П.Е. Данко [и др.]. - 6-е изд. - М. : ОНИКС: Мир и Образование, 2006. - 304 с.
3. Задачи и упражнения по математическому анализу для втузов : [учеб. пособие для втузов] / Г.С. Бараненков [и др.]; под ред. Б.П. Демидовича. – М.; Владимир: Астрель: Изд-во АСТ: ВКТ, 2008. - 495 с.

Содержание

Составители: Камозина О.В.
Козлова О.Н.

Кратные интегралы

Методические указания и задания к расчетно-графической работе
для студентов всех направлений подготовки бакалавров
очной формы обучения

Формат Объем Тираж Заказ

Брянск, Станке Димитрова 3, Редакционно-издательский отдел

Отпечатано: Печатный цех БГИТА