Министерство транспорта Российской Федерации
Федеральное агентство железнодорожного транспорта
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Дальневосточный государственный
университет путей сообщения»

Кафедра «Высшая математика»

П.В. Виноградова, Т.Э. Королева

ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИИ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

Рекомендовано
Методическим советом по качеству
образовательной деятельности ДВГУПС
в качестве учебного пособия

Хабаровск
Издательство ДВГУПС
2014

УДК 517.3 (075.8)
ББК В161.12я73
В 491

Рецензенты:

Кафедра «Математика и информационные технологии»
Дальневосточного государственного гуманитарного университета
(заведующий кафедрой кандидат физико-математических наук,
доцент *В.А. Казинец*)

Кандидат педагогических наук, доцент кафедры «Высшая математика»
Тихоокеанского государственного университета
Т.В. Сясина

Виноградова, П.В.
В 491 Интегральное исчисление функции одной переменной : учеб. пособие / П.В. Виноградова, Т.Э. Королева. – Хабаровск : Изд-во ДВГУПС, 2014. – 102 с. : ил.

Учебное пособие соответствует ФГОС ВО по направлениям подготовки бакалавров 38.03.02. «Менеджмент», 09.03.03 «Прикладная информатика», 38.03.01 «Экономика».

Изложен теоретический материал по разделам «Неопределенный интеграл» и «Определенный интеграл». Приведены примеры и упражнения для самостоятельного решения.

Предназначено для студентов 1-го курса всех форм обучения, изучающих дисциплину «Математический анализ».

УДК 517.3 (075.8)
ББК В161.12я73

© ДВГУПС, 2014

ВВЕДЕНИЕ

Математика играет важную роль в естественнонаучных, инженерно-технических и гуманитарных исследованиях. Она стала не только орудием количественного расчета, но также методом точного исследования и средством предельно четкой формулировки понятий и проблем. Поэтому математическое образование следует рассматривать как важнейшую составляющую в системе фундаментальной подготовки современного экономиста.

Для более полной характеристики предмета высшей математики следует указать, что она изучает переменные величины не изолированно, а в их взаимной связи. Точным математическим понятием, выражающим такую взаимосвязь переменных, является понятие функции. Это основное и важнейшее понятие высшей математики. С ним школьники знакомятся в курсе алгебры, но систематически его изучает именно высшая математика в том разделе, который называется математическим анализом. Дифференциальное и интегральное исчисления представляют собой ветви этого раздела.

Предлагаемое пособие рассматривает интегральное исчисление функции одной переменной и состоит из двух разделов: «Неопределенный интеграл» и «Определенный интеграл». Каждый раздел разбит на подразделы, в которых изложен теоретический материал, подробно разобраны примеры. В конце подраздела приведены упражнения для самостоятельного решения. Такое изложение материала позволит студентам организовать самостоятельную работу при изучении курса, овладеть основными методами математического анализа и впоследствии применить их для решения профессиональных задач.

Данное пособие содержит варианты индивидуальных заданий для самостоятельного решения. Изучив теоретический материал по рассматриваемой теме, студентам необходимо выполнить задания в сроки, указанные в учебном графике.

Учебное пособие направлено на формирование у студентов, изучающих дисциплину «Математический анализ», общекультурных (ОК) и/или профессиональных компетенций (ПК) в соответствии с действующими в ДВГУПС основными образовательными программами подготовки бакалавров:

ОК–15, ПК–3 по направлению подготовки бакалавров 38.03.02 «Менеджмент»;

ОК–1, ПК–2, ПК–5 по направлению подготовки бакалавров 09.03.03 «Прикладная информатика»;

ПК–2, ПК–5 по направлению подготовки бакалавров 38.03.01 «Экономика».

1. НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

1.1. Понятие первообразной функции и неопределенного интеграла

В дифференциальном исчислении основной задачей является нахождение от заданной функции $F(x)$ её производной $F'(x)=f(x)$ или дифференциала $dF(x)=F'(x)\,dx=f(x)\,dx.$

Интегральное исчисление решает обратную задачу – нахождение самой функции $F(x)$ по её производной $f(x)$ или дифференциалу $f(x)\,dx.$

Определение. Функция $F(x)$ называется первообразной функцией для функции $f(x)$ на заданном промежутке, если в каждой внутренней точке этого промежутка справедливо равенство $F'(x)=f(x)$ или $F'(x)\,dx=f(x)\,dx.$

Пример. Пусть имеем функцию $f(x)=2x.$ Функция $F(x)=x^2$ является первообразной для $f(x)$, так как $(x^2)'=2x.$ Но функция $F(x)=x^2+1$ тоже является первообразной функции $f(x)$, так как $(x^2+1)'=2x,$ и вообще – любая функция $F(x)=x^2+c$ (где $c-$произвольная постоянная) есть первообразная для $f(x)$. Таким образом данная функция имеет множество первообразных, причем можно показать, что любые две из них отличаются друг от друга на постоянное число.

Теорема 1.1. (*о двух первообразных*). Если $F_1(x)$ и $F_2(x)$ – две первообразные функции $f(x)$ на заданном промежутке, то разность между ними равна постоянному числу.

Доказательство. Покажем, что любые две первообразные от функции $f(x)$ отличаются друг от друга лишь постоянным слагаемым.

Пусть $F_1(x)$ и $F_2(x)$ – две первообразные от $f(x)$, тождественно не равные между собой. Имеем:

$$F_1'(x)=f(x),\ F_2'(x)=f(x).$$

Вычитая одно равенство из другого, получим $F_1'(x)-F_2'(x)=0,$ т. е. $\left[F_1(x)-F_2(x)\right]'=0.$ Но если производная от некоторой функции (в нашем случае от $F_1(x)-F_2(x)$) тождественно равна нулю, то сама функция есть постоянная, следовательно, $F_1(x)-F_2(x)=c_1$ (где c_1 – вполне определенная постоянная), что и требовалось доказать.

Таким образом, выражение $F(x)+c$, где $F(x)$ – некоторая первообразная от $f(x)$, c – произвольная постоянная, охватывает все возможные первообраз-

ные от $f\ x$. Придавая различные значения c, мы будем получать различные первообразные.

Определение. Множество всех первообразных для функции $f\ x$ на заданном промежутке называется неопределенным интегралом от функции $f\ x$ и обозначается $\int f\ x\ dx$.

Таким образом, по определению имеем

$$\int f\ x\ dx = F\ x\ + c,$$

где $\int$ – знак интеграла; $f\ x$ – подынтегральная функция; $f\ x\ dx$ – подынтегральное выражение; x – независимая переменная; $F\ x$ – некоторая первообразная; c – произвольная постоянная.

Процесс нахождения первообразной для заданной функции $f\ x$ называется *интегрированием*. Очевидно, что действия дифференцирование и интегрирование являются взаимно обратными. То есть правильность интегрирования всегда можно проверить дифференцированием результата.

Геометрический смысл неопределенного интеграла. График первообразной $F\ x$ называют интегральной кривой. В системе координат xOy графики всех первообразных от данной функции представляют семейство кривых, зависящих от величины постоянной C и получаемых одна из другой путем параллельного сдвига вдоль оси Oy. Для примера, рассмотренного выше, имеем:

$$\int 2xdx = x^2 + c.$$

Семейство первообразных $x^2 + c$ *геометрически интерпретируется совокупностью парабол.*

Теорема 1.2. *(о существовании неопределенного интеграла).* Если функция $f\ x$ непрерывна на заданном промежутке, то для этой функции существует неопределенный интеграл на этом же промежутке.

Найти неопределенный интеграл от функции – это значит найти все первообразные от неё (для этого достаточно указать одну из них). Поэтому и говорят неопределенное интегрирование, так как при этом не указывается, какая именно из первообразных имеется в виду.

1.2. Основные свойства неопределенного интеграла

Рассмотрим основные свойства неопределенного интеграла.

1. Производная от неопределенного интеграла равна подынтегральной функции, т. е.:

$$\int f\ x\ dx\ ' = f\ x\ .$$

Доказательство. Так как $\int f\ x\ dx = F\ x + c$, где $F'\ x = f\ x$, то дифференцируя левую и правые части этого равенства, получаем:

$$\int f\ x\ dx\ ' = F\ x + c\ ' = F'\ x + c' = f\ x\ .$$

2. Дифференциал неопределенного интеграла равен подынтегральному выражению, т. е.:

$$d\ \int f\ x\ dx\ = f\ x\ dx.$$

Доказательство. По определению дифференциала и свойству 1 имеем:

$$d\ \int f\ x\ dx\ = \int f\ x\ dx\ ' dx = f\ x\ dx.$$

3. Неопределенный интеграл от дифференциала некоторой функции равен этой функции с точностью до постоянного слагаемого, т. е.:

$$\int dF\ x\ = F\ x\ + c,$$

где c – произвольное число.

Доказательство. Рассматривая функцию $F\ x$ как первообразную для некоторой функции $f\ x$, можно записать

$$\int f\ x\ dx = F\ x\ + c$$

и на основании свойства 2 дифференциал неопределенного интеграла $f\ x\ dx = F'\ x\ dx = dF\ x$, поэтому имеем

$$\int dF\ x\ = \int F'\ x\ dx = \int f\ x\ dx = F\ x\ + c.$$

4. Постоянный множитель можно выносить за знак интеграла, т. е.

$$\int \alpha f\ x\ dx = \alpha \int f\ x\ dx,$$

где α – некоторое число.

Доказательство. Пусть $F(x)$ – первообразная для функции $f(x)$, т. е. $F'\ x\ = f\ x$.

Тогда $\alpha F(x)$ – первообразная для функции $\alpha f(x)$: $\alpha F\ x\ ' = \alpha F'\ x\ = \alpha f\ x$.

Из определения следует, что

$$\alpha \int f\ x\ dx = \alpha\ F\ x\ + c\ = \alpha F\ x\ + c_1 = \int \alpha f\ x\ dx,$$

где $c_1 = \alpha c$.

5. Неопределенный интеграл от алгебраической суммы двух функций равен алгебраической сумме интегралов от этих функций, т. е.:

$$\int \left[f\ x\ \pm g\ x\ \right] dx = \int f\ x\ dx \pm \int g\ x\ dx.$$

Доказательство. Пусть $F\ x$ и $G\ x$ – первообразные для функций $f\ x$ и $g\ x$, т. е. $F'\ x = f\ x$, $G'\ x = g\ x$. Тогда функции $F\ x \pm G\ x$ являются первообразными для функций $f\ x \pm g\ x$. Следовательно,

$$\int f\ x\ dx \pm \int g\ x\ dx = \left[F\ x + c_1\right] \pm \left[G\ x + c_2\right] = \left[F\ x \pm G\ x\right] + c_1 + c_2 =$$
$$= \int \left[f\ x \pm g\ x\right] dx.$$

6. *Неопределенный интеграл не зависит от переменной интегрирования*, т. е., если выполняется:

$$\int f\ x\ dx = F\ x + c,$$

то будет справедливо $\int f\ t\ dt = F\ t + c.$

1.3. Таблица основных интегралов

Запишем таблицу основных интегралов. Так как действия дифференцирования и интегрирования являются взаимно обратными, то простейшую таблицу интегралов можно получить обращением таблицы производных. Дополним эту таблицу интегралами, наиболее часто встречающимися на практике. Заметим, результат интегрирования всегда можно проверить дифференцированием: если $\int f\ x\ dx = F\ x + C$, то $F'\ x = f\ x$.

№ п/п	Интеграл	№ п/п	Интеграл
1	$\int dx = x + c$	10	$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = tgx + c$
2	$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c,$ при $n \neq -1$	11	$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -ctgx + c$
3	$\int \frac{dx}{x} = \ln\lvert x\rvert + c$	12	$\int shxdx = chx + c$
4	$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + c$	13	$\int chxdx = shx + c$
5	$\int e^x dx = e^x + c$	14	$\int \frac{dx}{sh^2 x} = -cthx + c$
6	$\int \cos xdx = \sin x + c$	15	$\int \frac{dx}{ch^2 x} = thx + c$
7	$\int \sin xdx = -\cos x + c$	16	$\int thxdx = \ln chx + c$
8	$\int tgxdx = -\ln\lvert\cos x\rvert + c$	17	$\int cthxdx = \ln\lvert shx\rvert + c$
9	$\int ctgxdx = \ln\lvert\sin x\rvert + c$	18	$\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \begin{cases} \frac{1}{a} arctg \frac{x}{a} + c \\ -\frac{1}{a} arcctg \frac{x}{a} + c \end{cases}$

№ п/п	Интеграл	№ п/п	Интеграл
19	$\int\frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}=\begin{cases}\arcsin\frac{x}{a}+c\\ -\arccos\frac{x}{a}+c\end{cases}$	22	$\int\frac{dx}{\cos x}=\ln\left\lvert tg\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right\rvert+c$
20	$\int\frac{dx}{x^2-a^2}=\frac{1}{2a}\ln\left\lvert\frac{x-a}{x+a}\right\rvert+c$	23	$\int\frac{dx}{\sin x}=\ln\left\lvert tg\frac{x}{2}\right\rvert+c$
21	$\int\frac{dx}{\sqrt{x^2\pm\lambda}}=\ln\left\lvert x+\sqrt{x^2\pm\lambda}\right\rvert+c$		

Приведенные в таблице интегралы назовем табличными, их необходимо знать наизусть.

В интегральном исчислении нет общего приема нахождения неопределенного интеграла. При интегрировании функций разными методами в конечном итоге интегралы всегда будут приводиться к одному или нескольким табличным. Рассмотрим методы интегрирования функций.

1.4. Метод непосредственного интегрирования

1.4.1. Преобразование подынтегральной функции к сумме функций

Под таким названием объединяются способы приведения интеграла к одному или нескольким табличным с помощью тождественных преобразований подынтегральной функции, свойств неопределенного интеграла и таблицы основных интегралов. Рассмотрим несколько таких преобразований на примерах.

Пример. Вычислить неопределенные интегралы:

1. $\int\left(2e^x+5tgx-\frac{4}{\sqrt{1-x^2}}\right)dx.$

2. $\int\left(x^6-\frac{3}{x^4}+x\sqrt{x}\right)dx.$

Решение. В этих примерах подынтегральные функции записаны в виде алгебраических сумм функций, поэтому для нахождения интегралов применим четвертое и пятое правила интегрирования и табличные интегралы. Тогда

1. $\int\left(2e^x+5tgx-\frac{4}{\sqrt{1-x^2}}\right)dx=2\int e^x dx+5\int tgx dx-4\int\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=$
$=2e^x-5\ln\lvert\cos x\rvert-4\arcsin x+c.$

Применялись табличные интегралы 5, 8, 19, произвольные постоянные объединены в одну.

2. $\int\left(x^6-\frac{3}{x^4}+x\sqrt{x}\right)dx=\int x^6dx-3\int x^{-4}dx+\int x^{\frac{3}{2}}dx==\frac{x^7}{7}-3\frac{x^{-4+1}}{-3}+\frac{x^{\frac{3}{2}+1}}{5/2}+c=$

$=\frac{x^7}{7}+\frac{1}{x^3}+\frac{2}{5}x^2\sqrt{x}+c.$

Применялся второй табличный интеграл при значениях $n=6,\ n=-4,\ n=\frac{3}{2}.$

С помощью действия дифференцирования легко проверить, что интегралы вычислены верно. Например, в первом примере:

$$(2e^x-5\ln|\cos x|-4\arcsin x+c)'=2e^x-5\frac{(-\sin x)}{\cos x}-4\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}=2e^x+5tgx-\frac{4}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Пример. Вычислить неопределенные интегралы:

1. $\int\frac{dx}{9x^2-1}.$ 2. $\int\frac{dx}{4x^2+25}.$ 3. $\int\frac{dx}{\sqrt{4x^2+1}}.$ 4. $\int\frac{x-2\quad x+1}{x}dx.$

5. $\int\frac{x^2}{x^2+3}dx.$ 6. $\int\frac{dx}{3^x}.$ 7. $\int 2^{3x-1}dx.$

Решение

1. Поскольку $\frac{1}{9x^2-1}=\frac{1}{9}\frac{1}{x^2-\ 1/3\ ^2}$, то воспользуемся формулой (20) при $a=\frac{1}{3}.$

$$\int\frac{dx}{9x^2-1}=\int\frac{1}{9}\frac{dx}{x^2-\ 1/3\ ^2}=\frac{1}{9}\int\frac{dx}{x^2-\ 1/3\ ^2}=\frac{1}{9}\frac{3}{2}\ln\left|\frac{x-1/3}{x+1/3}\right|+c=\frac{1}{6}\ln\left|\frac{3x-1}{3x+1}\right|+c.$$

2. Так как $4x^2+25=4\left(x^2+\frac{25}{4}\right)=4\left(x^2+\left(\frac{5}{2}\right)^2\right)$, то используя формулу (18) при $a=\frac{5}{2}$, получаем:

$$\int\frac{dx}{4x^2+25}=\int\frac{1}{4}\frac{dx}{x^2+\ 5/2\ ^2}=\frac{1}{4}\int\frac{dx}{x^2+\ 5/2\ ^2}=\frac{1}{10}arctg\frac{2x}{5}+c.$$

3. Так как $\sqrt{4x^2+1}=2\sqrt{x^2+1/4}$, то используя формулу (21) при $\lambda=\frac{1}{4}$, получаем:

$$\int\frac{dx}{\sqrt{4x^2+1}}=\frac{1}{2}\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+1/4}}=\frac{1}{2}\ln\left|x+\sqrt{x^2+1/4}\right|+c.$$

4. Преобразуем подынтегральную функцию: перемножим скобки в числителе и почленно разделим числитель на знаменатель:

$$\int\frac{x-2\quad x+1}{x}dx=\int\frac{x^2-x-2}{x}dx=\int\left(x-1-\frac{2}{x}\right)dx=\int xdx-\int dx-2\int\frac{dx}{x}=$$

$$=\frac{x^2}{2}-x-2\ln|x|+c.$$

5. Преобразуем подынтегральную функцию следующим образом:

$$\int\frac{x^2}{x^2+3}dx=\int\frac{(x^2+3)-3}{x^2+3}dx=\int\frac{x^2+3}{x^2+3}dx+\int\frac{-3}{x^2+3}dx=\int 1dx-3\int\frac{dx}{x^2+3}=$$

$$=x-\frac{3}{\sqrt{3}}arctg\frac{x}{\sqrt{3}}+c.$$

Применялись табличные интегралы 1 и 18.

6. Учитывая, что $\frac{1}{3^x}=\left(\frac{1}{3}\right)^x$ и используя формулу (4) при $a=\frac{1}{3}$, получаем:

$$\int\frac{dx}{3^x}=\int\left(\frac{1}{3}\right)^x dx=\frac{1/3\ ^x}{\ln\ 1/3}\ +c=-\frac{1}{3^x\ln 3}+c.$$

7. Так как $2^{3x-1}=2^{3x}\cdot 2^{-1}=\frac{1}{2}8^x$, то воспользуемся формулой (4) при a = 8, тогда

$$\int 2^{3x-1}dx=\int\frac{1}{2}8^x dx=\frac{1}{2}\int 8^x dx=\frac{1}{2}\frac{8^x}{\ln 8}+c.$$

Пример. Вычислить неопределенные интегралы:

1. $\int\frac{dx}{\sin^2 x\cdot\cos^2 x}$. 2. $\int\cos^2\frac{x}{2}dx$.

Решение

1. $$\int\frac{dx}{\sin^2 x\cdot\cos^2 x}=\int\frac{\cos^2 x+\sin^2 x}{\sin^2 x\cdot\cos^2 x}dx=\int\frac{\cos^2 x}{\sin^2 x\cdot\cos^2 x}dx+\int\frac{\sin^2 x}{\sin^2 x\cdot\cos^2 x}dx=$$

$$=\int\frac{dx}{\sin^2 x}+\int\frac{dx}{\cos^2 x}=-ctgx+tgx+c.$$

Применялась формула тригонометрии $\cos^2\alpha+\sin^2\alpha=1$ и табличные интегралы 10 и 11.

2. $$\int\cos^2\frac{x}{2}dx=\int\frac{1}{2}\ 1+\cos x\ \ dx=\frac{1}{2}\int dx+\frac{1}{2}\int\cos xdx=\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}\sin x+c=$$

$$=\frac{1}{2}\ \ x+\sin x\ \ +c.$$

Применялась формула $\cos^2\alpha=\frac{1}{2}\ 1+\cos 2\alpha$ и табличные интегралы 1 и 7.

1.4.2. Вычисление неопределенного интеграла с применением компенсирующего множителя

Если $\int f\ \ x\ \ dx = F\ \ x\ \ + c,$ то $\int f\ \ ax+b\ dx = \frac{1}{a} F\ \ ax+b\ \ + c,$ где $a, b -$ постоянные величины $a \neq 0$. Формула легко проверяется дифференцированием. Множитель $\frac{1}{a}$ называется ***компенсирующим множителем.***

Пример. Вычислить неопределенные интегралы:

1. $\int e^{8x} dx.$ 2. $\int \cos\ 3x-7\ \ dx.$ 3. $\int tg\left(1-\frac{x}{2}\right) dx.$

Решение

1. $\int e^{8x} dx = \frac{1}{8} e^{8x} + c;$ здесь $a = 8,$ табличный интеграл 5.

2. $\int \cos\ 3x-7\ \ dx = \frac{1}{3} \sin\ 3x-7\ \ + c;$ здесь $a = 3,$ табличный интеграл 5.

3. $\int tg\left(1-\frac{x}{2}\right) dx = 2\ln\left|\cos\left(1-\frac{x}{2}\right)\right| + c,$ здесь $a = -\frac{1}{2},$ табличный интеграл 8.

1.4.3. Вычисление неопределенных интегралов введением функции под дифференциал

Метод введения функции под знак дифференциала основан на равенстве

$$\int f\ \ g\ \ x\ \ d\ \ g\ \ x\ \ = F\ \ g\ \ x\ \ + c.$$

То есть, главной задачей является приведение подынтегральной функции к виду $f\ \ g\ \ x\ \ d\ \ g\ \ x$. Поэтому желательно иметь перед глазами таблицу производных и таблицу первообразных основных элементарных функций. Запишем таблицу производных в виде дифференциалов.

$d\ \ c\ \ = 0$	$d\ \ \cos x\ \ = -\sin x dx$
$d\ \ x^n\ \ = n x^{n-1} dx$	$d\ \ tgx\ \ = \frac{dx}{\cos^2 x}$
$d\ \ \ln x\ \ = \frac{dx}{x}$	$d\ \ ctgx\ \ = -\frac{dx}{\sin^2 x}$
$d\ \ \log_a x\ \ = \frac{dx}{x \ln a}$	$d\ \ \arcsin x\ \ = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$

$d\ e^x\ = e^x dx$	$d\ \arccos x\ = -\dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$
$d\ a^x\ = a^x \ln a dx$	$d\ arctgx\ = \dfrac{dx}{1+x^2}$
$d\ \sin x\ = \cos x dx$	$d\ arcctgx\ = -\dfrac{dx}{1+x^2}$

Пример. Вычислить неопределенные интегралы:

1. $\int \frac{\ln^5 x}{x} dx$; 2. $\int\ x^3+2\ ^6 x^2 dx$; 3. $\int e^{x^2} x dx$.

Решение

1. Нам нужно вычислить неопределенный интеграл, используя метод введения функции под знак дифференциала. Из таблицы производных имеем $\frac{dx}{x} = d\ \ln x$, поэтому $\int \frac{\ln^5 x}{x} dx = \int \ln^5 x d\ \ln x$.

По таблице первообразных сразу приходим к ответу:

$$\int \frac{\ln^5 x}{x} dx = \int \ln^5 x d\ \ln x\ = \frac{\ln^6 x}{6} + c.$$

Немного поясним. Можно ввести переменную $z = \ln x$, тогда

$$\int \frac{\ln^5 x}{x} dx = \int \ln^5 x d\ \ln x\ = |\ln x = z| = \int z^5 dz.$$

Из таблицы первообразных для степенной функции видим, что $\int z^5 dz = \frac{z^6}{6} + c$.

Возвращаемся к исходной переменной:

$$\frac{z^6}{6} + c = |z = \ln x| = \frac{\ln^6 x}{x} + c.$$

Итак, $\int \frac{\ln^5 x}{x} dx = \frac{\ln^6 x}{6} + c$.

2. Так как $x^3+2\ ' = 3x^2$, поэтому можно записать $d\ x^3+2\ = 3x^2 dx$ или $\frac{1}{3} d\ x^3+2\ = x^2 dx$.

Следовательно, решение будет следующим:

$$\int x^3+2\ ^6 x^2dx=\left|\begin{matrix} d\ \ x^3+2\ \ =3x^2dx \\ \frac{1}{3}d\ \ x^3+2\ \ =x^2dx \end{matrix}\right|=\int x^3+2\ ^6\cdot\frac{1}{3}d\ \ x^3+2\ \ =\frac{1}{3}\int x^3+2\ ^6 d\ \ x^3+2\ \ =$$

$$=\left|z=x^3+2\right|=\frac{1}{3}\int z^6dz=\frac{1}{3}\cdot\frac{z^7}{7}+c=\frac{z^7}{21}+c=\frac{x^3+2\ ^7}{21}+c.$$

3. Применим метод введения функции под знак дифференциала:

$$\int e^{x^2}xdx=\left|\begin{matrix} d\ \ x^2\ \ =2xdx \\ xdx=\frac{1}{2}d\ \ x^2 \end{matrix}\right|=\frac{1}{2}\int e^{x^2}d\ \ x^2\ \ =\left|z=x^2\right|=\frac{1}{2}\int e^z dz=\frac{1}{2}e^z+c=\frac{1}{2}e^{x^2}+c.$$

1.4.4. Вычисление неопределенных интегралов с применением обобщенного второго табличного интеграла

Если во втором табличном интеграле $\int x^n dx=\frac{x^{n+1}}{n+1}+c$, при $n\neq -1$ заменить переменную интегрирования x на дифференцируемую функцию $u\ \ x$, то получим следующую формулу:

$$\int\left[u\ \ x\ \right]^n du\ \ x\ \ =\frac{\left[u\ \ x\ \right]^{n+1}}{n+1}+c \quad \text{или} \quad \int\left[u\ \ x\ \right]^n u'\ \ x\ \ dx=\frac{\left[u\ \ x\ \right]^{n+1}}{n+1}+c.$$

Пример. Вычислить неопределенные интегралы:

1. $\int\frac{2x}{\sqrt{5+x^2}}dx$. 2. $\int\sqrt{4+2x^2}xdx$. 3. $\int\sqrt[3]{\sin^2 x}\cos xdx$.

Решение

1. $$\int\frac{2x}{\sqrt{5+x^2}}dx=\left|\ 5+x^2\ \ '=2x\right|=\int 5+x^2\ \ ^{-\frac{1}{2}}2xdx=\frac{5+x^2\ \ ^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1}+c=\frac{5+x^2\ \ ^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}+c=$$

$$=2\sqrt{5+x^2}+c.$$

2. $$\int\sqrt{4+2x^2}xdx=\left|\ 4+2x^2\ \ '=4x\right|=\frac{1}{4}\int 4+2x^2\ \ ^{\frac{1}{2}}\cdot 4xdx=\frac{1}{4}\frac{4+2x^2\ \ ^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1}+c=$$

$$=\frac{1}{4}\frac{4+2x^2\ \ ^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}+c=\frac{\sqrt{4+2x^2\ \ ^3}}{6}+c.$$

3. $\int\sqrt[3]{\sin^2 x}\cos x dx = \left| \sin x\ ' = \cos x \right| = \int \sin x\ ^{\frac{2}{3}} \cos x dx =$

$$= \frac{\sin x\ ^{\frac{2}{3}+1}}{\frac{2}{3}+1} + c = \frac{\sin x\ ^{\frac{5}{3}}}{\frac{5}{3}} + c = \frac{3}{5}\sqrt[3]{\sin x\ ^{5}} + c.$$

1.4.5. Вычисление неопределенных интегралов с применением формулы

$$\int \frac{u'\ x}{u\ x} dx = \ln|u\ x| + c$$

Если числитель подынтегральной функции является производной знаменателя, то интеграл равен логарифму абсолютной величины знаменателя.

Данная формула представляет собой обобщение табличного интеграла 3, если вместо переменной x подставить дифференцируемую функцию $u\ x$.

Пример. Вычислить неопределенные интегралы:

1. $\int \frac{dx}{3x-1}$. 2. $\int \frac{\sin 6x}{1+\cos 6x} dx$. 3. $\int \frac{x}{5+x^2} dx$. 4. $\int \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} dx$.

Решение

1. $\int \frac{dx}{3x-1} = \left| 3x-1\ ' = 3 \right| = \frac{1}{3}\int \frac{3}{3x-1} dx = \frac{1}{3}\ln|3x-1| + c$.

2. $\int \frac{\sin 6x}{1+\cos 6x} dx = \left| 1+\cos 6x\ ' = -6\sin 6x \right| = -\frac{1}{6}\int \frac{-6\sin 6x}{1+\cos 6x} dx = -\frac{1}{6}\ln|1+\cos 6x| + c$.

3. $\int \frac{x}{5+x^2} dx = \left| 5+x^2\ ' = 2x \right| = \frac{1}{2}\int \frac{2x}{5+x^2} dx = \frac{1}{2}\ln|5+x^2| + c$.

4. $\int \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} dx = \left| \begin{array}{l} e^x + e^{-x}\ ' = \\ = e^x - e^{-x} \end{array} \right| = \ln|e^x + e^{-x}| + c$.

Задачи для самостоятельного решения

1. Вычислить неопределенные интегралы, результаты проверить дифференцированием:

1) $\int 3x^2 + 2x + 1\, dx$;

2) $\int \left(\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x^3}} - \frac{4}{x^2} \right) dx$;

3) $\int \frac{2x+1\ ^2}{\sqrt{x}} dx$;

4) $\int \left(3e^{2x} - 4\cos\left(2 - \frac{x}{5}\right) + \frac{10}{x} \right) dx$;

5) $\int e^x \cdot \left(1+\frac{e^{-x}}{x}\right)dx$;

6) $\int \frac{\cos 2x}{\sin^2 x \cdot \cos^2 x}dx$;

7) $\int \sin^2 4x dx$;

8) $\int \frac{x^2}{x^2+16}dx$.

2. Вычислить неопределенные интегралы:

1) $\int 3x+7\ ^6 dx$;

2) $\int \frac{x^3}{\sqrt{2+x^4}}dx$;

3) $\int \sqrt{9-x}dx$;

4) $\int \sin^{10} x \cdot \cos x dx$;

5) $\int \frac{arctg^4 x}{1+x^2}dx$;

6) $\int \frac{dx}{4x^2+16}$.

1.5. Замена переменной в неопределенном интеграле (метод подстановки)

Если интеграл не может быть вычислен непосредственно, то во многих случаях введением новой переменной интегрирования подынтегральное выражение может быть преобразовано к виду, интеграл от которого является табличным, или его можно преобразовать к табличному.

Пусть требуется вычислить интеграл $\int f\ \ x\ \ dx$, не являющийся табличным. Введем вместо x новую переменную t, связанную с x зависимостью $x=\varphi\ \ t$, где $\varphi\ \ t$ – дифференцируемая функция, для которой существует обратная функция. Тогда $dx=\varphi'\ \ t\ \ dt$ и будет иметь место формула:

$$\int f\ \ x\ \ dx=\int f\left[\varphi\ \ t\ \right]\varphi'\ \ t\ \ dt=\int f_1\ \ t\ dt=F\ \ t\ +c=F\left[\varphi^{-1}\ \ x\ \right]+c,$$

которая называется ***формулой замены переменной***.

Важно иметь ввиду, что дифференциал dx должен быть заменен на дифференциал новой переменной dt.

Пример. Вычислить неопределенные интегралы:

1. $\int \frac{tg^3 x}{\cos^2 x}$. 2. $\int \frac{dx}{x\sqrt{4+\ln x}}$. 3. $\int tgx dx$. 4. $\int x^2 e^{3+5x^3}dx$.

Решение

1. Можно заметить, что $tgx\ ' = \frac{1}{\cos^2 x}$ и множитель $\frac{1}{\cos^2 x}$ есть в подынтегральной функции. Поэтому подстановка $t=tgx$ упростит интеграл и приведет его к табличному.

Положим $t = tgx$, тогда нам нужно найти дифференциал этой переменной, т. е. $dt = \ tgx\ ' dx = \dfrac{dx}{\cos^2 x}$ и получим:

$$\int \frac{tg^3 x}{\cos^2 x} dx = \begin{vmatrix} t = tgx \\ dt = \dfrac{dx}{\cos^2 x} \end{vmatrix} = \int t^3 dt = \frac{t^4}{4} + c,$$

где c – произвольная постоянная. Сделаем обратную замену переменной:

$$\int \frac{tg^3 x}{\cos^2 x} dx = = \int t^3 dt = \frac{t^4}{4} + c = \frac{tg^4 x}{4} + c.$$

2. Так как производная функции *lnx* совпадает с производной подкоренного выражения и равна $\dfrac{1}{x}$, то удобно в качестве новой переменной выбрать именно его. После замены переменной вычисляем ее дифференциал. Таким образом,

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{4 + \ln x}} = \begin{vmatrix} t = 4 + \ln x \\ dt = \dfrac{1}{x} dx \end{vmatrix} = \int \frac{dt}{\sqrt{t}} = \int t^{-\frac{1}{2}} dt = \frac{t^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + c = 2\sqrt{t} + c = 2\sqrt{4 + \ln x} + c.$$

3. Так как $tgx = \dfrac{\sin x}{\cos x}$, то интеграл можно записать в виде

$$\int tgx dx = \int \frac{\sin x}{\cos x} dx.$$

Замечая, что $\cos x\ ' = -\sin x$, сделаем следующую подстановку:

$$\int tgx dx = \int \frac{\sin x}{\cos x} dx = \begin{vmatrix} t = \cos x \\ dt = -\sin x dx \\ \sin x dx = -dt \end{vmatrix} = \int \frac{-dt}{t} = -\int \frac{dt}{t} = -\ln|t| + c = -\ln|\cos x| + c.$$

4. После замены найдем дифференциал новой переменной и выразим *dx*, тогда

$$\int x^2 e^{3+x^3} dx = \begin{vmatrix} t = 3 + x^3 \\ dt = 3x^2 dx \\ dx = \dfrac{dt}{3x^2} \end{vmatrix} = \int x^2 e^t \frac{dt}{3x^2} = \frac{1}{3} \int e^t dt = \frac{1}{3} e^t + c = \frac{1}{3} e^{3+x^3} + c.$$

Задачи для самостоятельного решения

Вычислить неопределенные интегралы:

1) $\int \dfrac{dx}{x \ln x}$;

6) $\int x \cdot \cos x^2 dx$;

2) $\int \frac{dx}{x\ln^2 x}$;

3) $\int \frac{e^{\arcsin x}}{\sqrt{1-x^2}}dx$;

4) $\int \frac{e^{arctg 5x}}{1+25x^2}dx$;

5) $\int \sqrt{\frac{\arcsin x}{1-x^2}}dx$;

7) $\int \frac{dx}{49+7x^2}$;

8) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+21}}$;

9) $\int \frac{\cos x dx}{\sqrt{8-\sin^2 x}}$;

10) $\int \frac{e^x}{9+e^{2x}}dx$.

1.6. Интегрирование по частям

Пусть функции $u\ x$ и $v\ x$ имеют непрерывные производные, найдем производную их произведения:

$$uv\ ' = u'v + uv'.$$

Проинтегрируем обе части равенства:

$$\int uv\ ' dx = \int u'vdx + \int v'udx.$$

С учетом свойства 3 неопределенного интеграла имеем:

$$\int uv\ ' dx = uv + c.$$

Кроме того, $u'dx = du,\ v'dx = dv.$

Константу c можно включить в неопределенные интегралы, входящие в это равенство, тогда:

$$uv = \int vdu + \int udv.$$

После преобразований получим ***формулу интегрирования по частям***:

$$\int udv = uv - \int vdu.$$

Перечислим основные типы интегралов, вычисляемых этим методом, и укажем целесообразное разделение подынтегрального выражения на u и dv.

1. $\int P_n\ x\ e^{\alpha x}dx,\ \int P_n\ x\ \sin\alpha x dx,\ \int P_n\ x\ \cos\alpha x dx,$

где $P_n\ x$ – многочлен степени n относительно x; α – произвольная постоянная. В интегралах такого типа рекомендуются обозначения:

$$u = P_n\ x\ ,\ dv = e^{\alpha x}dx,\ dv = \sin\alpha x dx,\ dv = \cos\alpha x dx.$$

В этих интегралах интегрирование по частям применяется столько раз, какова степень многочлена $P_n\ x$, т. е. n раз.

Пример. Вычислить неопределенные интегралы:

1. $\int x\sin 3xdx$. 2. $\int 1-2x\ e^{5x}dx$. 3. $\int x^2\cos 4xdx$.

Решение

$$1.\ \int x\sin 3xdx=\left|\begin{array}{l} u=x\Rightarrow du=dx \\ dv=\sin 3xdx\Rightarrow \\ v=\int\sin 3xdx=-\frac{1}{3}\cos 3x \end{array}\right|=x\cdot\left(-\frac{1}{3}\cos 3x\right)-\int\left(-\frac{1}{3}\cos 3x\right)dx=$$

$$=-\frac{x}{3}\cos 3x+\frac{1}{3}\int\cos 3xdx=-\frac{x}{3}\cos 3x+\frac{1}{9}\sin 3x+c.$$

$$2.\ \int 1-2x\ e^{5x}dx=\left|\begin{array}{l} u=1-2x\Rightarrow du=\ 1-2x\ '\ dx\Rightarrow du=-2dx \\ dv=e^{5x}dx\Rightarrow v=\int e^{5x}dx\Rightarrow v=\frac{1}{5}e^{5x} \end{array}\right|=$$

$$=\ 1-2x\ \cdot\left(\frac{1}{5}e^{5x}\right)-\int\frac{1}{5}e^{5x}\cdot\ -2dx\ =\frac{1}{5}\ 1-2x\ \cdot e^{5x}+\frac{2}{5}\int e^{5x}dx=$$

$$=\ \frac{1}{5}\ 1-2x\ \cdot e^{5x}+\frac{2}{5}\cdot\frac{1}{5}e^{5x}+c=\frac{1}{5}\ 1-2x\ \cdot e^{5x}+\frac{2}{25}e^{5x}+c.$$

$$3.\ \int x^2\cos 4xdx=\left|\begin{array}{l} u=x^2\Rightarrow du=2xdx \\ dv=\cos 4xdx\Rightarrow v=\frac{1}{4}\sin 4x \end{array}\right|=$$

$$=x^2\cdot\left(\frac{1}{4}\sin 4x\right)-\int\frac{1}{4}\sin 4x\cdot 2xdx=\frac{x^2}{4}\sin 4x-\frac{1}{2}\int x\cdot\sin 4xdx=...$$

При вычислении этого интеграла формулу интегрирования по частям надо применить еще раз:

$$...=\frac{x^2}{4}\sin 4x-\frac{1}{2}\int\sin 4x\cdot xdx=\left|\begin{array}{l} u=x\Rightarrow du=dx \\ dv=\sin 4xdx\Rightarrow v=-\frac{1}{4}\cos 4x \end{array}\right|=$$

$$=\ \frac{x^2}{4}\sin 4x-\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{4}x\cos 4x+\int\frac{1}{4}\cos 4xdx\right)=\frac{x^2}{4}\sin 4x+\frac{1}{8}x\cos 4x-\frac{1}{32}\sin 4x+c=$$

$$=\frac{x^2}{4}\sin 4x+\frac{1}{8}x\cos 4x-\frac{1}{32}\sin 4x+c.$$

2. $\int P_n\ x\ \arcsin\alpha xdx,\ \int P_n\ x\ \arccos\alpha xdx,\ \int P_n\ x\ \mathrm{arc}tg\alpha xdx,\ \int P_n\ x\ \ln\alpha xdx.$

где $P_n\ x$ – многочлен степени n относительно x; α – произвольная постоянная. В интегралах такого типа рекомендуются обозначения:

$dv=P_n\ x\ dx,\ u=arc\sin\alpha x,\ u=\arccos\alpha x,\ u=arctg\alpha x,\ u=\ln\alpha x.$

Пример. Вычислить неопределенные интегралы:

1. $\int arctgxdx$. 2. $\int x^2 \ln xdx$.

Решение

1. $$\int arctgxdx = \left| \begin{array}{l} u = arctgx \Rightarrow du = \dfrac{dx}{1+x^2} \\ dv = dx \Rightarrow v = \int dx = x \end{array} \right| = x \cdot arctgx - \int \frac{xdx}{1+x^2} =$$

$$= x \cdot arctgx - \frac{1}{2}\int \frac{d\ 1+x^2}{1+x^2} = x \cdot arctgx - \frac{1}{2}\ln\left|1+x^2\right| + c.$$

2. $$\int x^2 \ln xdx = \left| \begin{array}{l} u = \ln x \Rightarrow du = \dfrac{dx}{x} \\ dv = x^2 dx \Rightarrow v = \int x^2 dx = \dfrac{x^3}{3} \end{array} \right| = \ln x \cdot \left(\frac{x^3}{3}\right) - \int \frac{x^3}{3}\frac{dx}{x} =$$

$$= \frac{x^3}{3}\ln x - \frac{1}{3}\int x^2 dx = \frac{x^3}{3}\ln x - \frac{1}{3}\cdot\frac{x^3}{3} + c = \frac{x^3}{3}\ln x - \frac{x^3}{9} + c.$$

3. $\int e^{\alpha x}\sin bxdx,\ \int e^{\alpha x}\cos bxdx,\ \int\sqrt{ax^2+b}\,dx.$

При интегрировании функций вида $e^{\alpha x}\sin bx, e^{\alpha x}\cos bx$ интегрирование по частям применяется дважды, в результате чего получается уравнение, из которого и находится исходный интеграл. Такие интегралы называются «круговыми» (циклическими). Причем в обоих случаях в качестве множителя u берется функция одного и того же типа: показательная или тригонометрическая.

Пример. Вычислить неопределенные интегралы:

1. $\int e^{-3x}\cos 2xdx$. 2. $\int\sqrt{5-x^2}dx.$

Решение

1. $$\int e^{-3x}\cos 2xdx = \left| \begin{array}{l} u = e^{-3x} \Rightarrow du = -3e^{-3x} \\ dv = \cos 2xdx \Rightarrow v = \int \cos 2xdx = \dfrac{1}{2}\sin 2x \end{array} \right| =$$

$$=\left(\frac{1}{2}\sin 2x\right)e^{-3x}-\int\left(\frac{1}{2}\sin 2x\right)\ -3e^{-3x}\ dx=\frac{1}{2}e^{-3x}\sin 2x+\frac{3}{2}\int e^{-3x}\sin 2xdx=$$

$$=\left|\begin{matrix} u=e^{-3x}\Rightarrow du=-3e^{-3x}dx \\ dv=\sin 2xdx\Rightarrow v=-\frac{1}{2}\cos 2x \end{matrix}\right|=$$

$$=\frac{1}{2}e^{-3x}\sin 2x+\frac{3}{2}\left(-\frac{1}{2}e^{-3x}\cos 2x-\int\left(-\frac{1}{2}\cos 2x\right)\ -3e^{-3x}\ dx\right)=$$

$$=\frac{1}{2}e^{-3x}\sin 2x-\frac{3}{4}e^{-3x}\cos 2x-\frac{9}{4}\int e^{-3x}\cos 2xdx.$$

Получили уравнение относительно исходного интеграла:

$$\int e^{-3x}\cos 2xdx=\frac{1}{2}e^{-3x}\sin 2x-\frac{3}{4}e^{-3x}\cos 2x-\frac{9}{4}\int e^{-3x}\cos 2xdx,$$

$$\left(1+\frac{9}{4}\right)\int e^{-3x}\cos 2xdx=\frac{1}{2}e^{-3x}\sin 2x-\frac{3}{4}e^{-3x}\cos 2x.$$

Отсюда найдем интеграл:

$$\int e^{-3x}\cos 2xdx=\frac{4}{13}\left(\frac{1}{2}e^{-3x}\sin 2x-\frac{3}{4}e^{-3x}\cos 2x\right)+c=\frac{1}{13}e^{-3x}\ \ 2\sin 2x-3\cos 2x\ \ +c.$$

2. $$\int\sqrt{5-x^2}dx=\left|\begin{matrix} u=\sqrt{5-x^2}\Rightarrow du=\frac{-xdx}{\sqrt{5-x^2}} \\ dv=dx\Rightarrow dv=\int dx\Rightarrow v=x \end{matrix}\right|=x\cdot\sqrt{5-x^2}-\int x\left(\frac{-x}{\sqrt{5-x^2}}\right)dx=$$

$$=x\cdot\sqrt{5-x^2}-\int\frac{5-x^2}{\sqrt{5-x^2}}dx+\int\frac{5}{\sqrt{5-x^2}}dx=x\cdot\sqrt{5-x^2}-\int\sqrt{5-x^2}dx+5\arcsin\frac{x}{\sqrt{5}}+c.$$

Получили уравнение относительно исходного интеграла:

$$\int\sqrt{5-x^2}dx=x\cdot\sqrt{5-x^2}-\int\sqrt{5-x^2}dx+5\arcsin\frac{x}{\sqrt{5}}+c,$$

$$\int\sqrt{5-x^2}dx=\frac{1}{2}x\cdot\sqrt{5-x^2}+\frac{5}{2}\arcsin\frac{x}{\sqrt{5}}+c.$$

Задачи для самостоятельного решения

Вычислить неопределенные интегралы:

1) $\int xe^x dx$;

2) $\int x\cos 5xdx$;

3) $\int\ 2-3x\ \ e^x dx$;

6) $\int\ln 8xdx$;

7) $\int e^x\sin 5xdx$;

8) $\int\sqrt{3-x^2}dx$;

4) $\int x \cdot arctgx dx$;

5) $\int x^2 \sin 3x dx$;

9) $\int x^2 e^x dx$.

1.7. Интегрирование дробно-рациональных функций

1.7.1. Интегралы от простейших рациональных дробей

Как известно, функция $P_n\ x = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$, где $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}, a_n$ – заданные числа, называется многочленом степени n.

Определение. Отношение двух многочленов

$$\frac{P_n\ x}{Q_m\ x} = \frac{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \ldots + b_1 x + b_0}$$

называется ***дробно-рациональной функцией или рациональной дробью***.

Если $n < m$, то рациональная дробь называется правильной, если $n \geq m$, то рациональная дробь называется неправильной.

Из общей совокупности правильных дробей выделяют четыре специальных типа дробей, называемых ***простейшими.*** Простейшие дроби имеют вид:

1) $\dfrac{A}{x-a}$ – I тип;

2) $\dfrac{A}{x-a\ ^k}$, $k = 2, 3, \ldots$ – II тип;

3) $\dfrac{Mx+N}{x^2+px+q}$ – III тип;

4) $\dfrac{Mx+N}{x^2+px+q\ ^k}$, $k = 2, 3, \ldots$ – IV тип,

где $A, a, M, N, p, q \in \square$, квадратный трехчлен $x^2 + px + q$ не имеет действительных корней $D = p^2 - 4q < 0$.

Все остальные правильные дроби называются сложными.

Найдем интегралы от простейших дробей:

1) $\int \dfrac{A}{x-a} dx = A \cdot \ln|x-a| + c$;

2) $\int \dfrac{A}{x-a\ ^k} dx = A \int\ x-a\ ^{-k} dx = \left| dx = d\ \ x-a\ \right| = A \int\ x-a\ ^{-k} d\ \ x-a\ =$

$$= A \frac{x-a\ ^{-k+1}}{-k+1} + c = \frac{A}{-k+1} \cdot \frac{1}{x-a\ ^{k-1}} + c;$$

3) $\int \frac{Mx+N}{x^2+px+q}dx.$

При интегрировании дробей III и IV типов в выражении, стоящем в знаменателе, выделяют полный квадрат:

$$x^2+px+q=x^2+2\cdot\frac{p}{2}\cdot x+q=\left(x^2+2\cdot\frac{p}{2}\cdot x+\frac{p^2}{4}\right)-\frac{p^2}{4}+q=\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+\left(q-\frac{p^2}{4}\right).$$

Тогда, применяя метод замены переменной, получим:

$$\int\frac{Mx+N}{x^2+px+q}dx=\int\frac{Mx+N}{\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+\left(q-\frac{p^2}{4}\right)}dx=\left|\begin{array}{l} t=x+\frac{p}{2} \\ x=t-\frac{p}{2} \\ dx=dt \\ a^2=q-\frac{p^2}{4}\end{array}\right|=\int\frac{M\left(t-\frac{p}{2}\right)+N}{t^2+a^2}dt=$$

$$=\int\frac{Mt+N-\frac{Mp}{2}}{t^2+a^2}dt=M\int\frac{tdt}{t^2+a^2}+\left(N-\frac{Mp}{2}\right)\int\frac{dt}{t^2+a^2}=\frac{M}{2}\ln\left|t^2+a^2\right|+$$

$$+\left(N-\frac{Mp}{2}\right)\cdot\frac{1}{a}arctg\frac{t}{a}+c=\frac{M}{2}\ln\left|x^2+px+q\right|+\left(N-\frac{Mp}{2}\right)\cdot\frac{1}{a}arctg\frac{x+\frac{p}{2}}{a}=$$

$$=\frac{M}{2}\ln\left|x^2+px+q\right|+\frac{2N-Mp}{2a}arctg\frac{2x+p}{2a}+c=$$

$$=\frac{M}{2}\ln\left|x^2+px+q\right|+\frac{2N-Mp}{2\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}}arctg\frac{2x+p}{2\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}}+c.$$

Полученную формулу нет необходимости запоминать, проще все элементарные преобразования выполнять в заданном интеграле.

Пример. Вычислить неопределенные интегралы:

1. $\int\frac{2dx}{x+1}$. 2. $\int\frac{dx}{x-5}^{3}$.

Решение

1. $\int\frac{2dx}{x+1}=2\ln|x+1|+c,$ здесь интегрировалась дробь I типа.

2. $\int\frac{dx}{x-5}^{3}=\int x-5^{-3}dx=\frac{x-5^{-3+1}}{-3+1}+c=-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x-5^{2}}+c,$ интегрировалась дробь II типа.

Пример. Вычислить неопределенные интегралы:

1. $\int\frac{dx}{x^2-4x+13}$. 2. $\int\frac{dx}{4x^2+4x-3}$. 3. $\int\frac{2x+5}{x^2+4x-3}dx$.

Решение. Во всех трех случаях квадратные трехчлены, стоящие в знаменателях, не имеют действительных корней (проверьте), следовательно, надо найти интегралы от простейших дробей III типа.

1. $$\int\frac{dx}{x^2-4x+13}=\int\frac{dx}{x^2-2\cdot 2\cdot x+4\ -4+13}=\int\frac{dx}{x-2\ ^2+9}=\begin{vmatrix}t=x-2\\dt=dx\end{vmatrix}=\int\frac{dt}{t^2+3^2}=$$

$$=\frac{1}{3}arctg\,\frac{t}{3}+c=\frac{1}{3}arctg\,\frac{x-2}{3}+c.$$

2. $$\int\frac{dx}{4x^2+4x-3}=\int\frac{dx}{4\left(x^2+x-\frac{3}{4}\right)}=\frac{1}{4}\int\frac{dx}{\left(x^2+2\cdot\frac{1}{2}\cdot x+\frac{1}{4}\right)-\frac{1}{4}-\frac{3}{4}}=\frac{1}{4}\int\frac{dx}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2-1}=$$

$$=\begin{vmatrix}t=x+\frac{1}{2}\\dt=dx\end{vmatrix}=\frac{1}{4}\int\frac{dt}{t^2-1^2}=\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right|+c=\frac{1}{8}\ln\left|\frac{x+\frac{1}{2}-1}{x+\frac{1}{2}+1}\right|+c=\frac{1}{8}\ln\left|\frac{2x-1}{2x+3}\right|+c.$$

3. $$\int\frac{2x+5}{x^2+4x-3}dx=\int\frac{2x+5}{x+2\ ^2-7}d=\begin{vmatrix}t=x+2\\x=t-2\\dt=dx\end{vmatrix}=\int\frac{2\ t-2\ +5}{t^2-7}dt=\int\frac{2t+1}{t^2-7}dt=$$

$$=\int\frac{2tdt}{t^2-7}+\int\frac{dt}{t^2-\ \sqrt{7}\ ^2}=\ln\left|t^2-7\right|+\frac{1}{2\sqrt{7}}\ln\left|\frac{t-\sqrt{7}}{t+\sqrt{7}}\right|+c=$$

$$=\ln\left|\ x+2\ ^2-7\right|+\frac{1}{2\sqrt{7}}\ln\left|\frac{x+2-\sqrt{7}}{x+2+\sqrt{7}}\right|+c=\ln\left|x^2+4x-3\right|+\frac{1}{2\sqrt{7}}\ln\left|\frac{x+2-\sqrt{7}}{x+2+\sqrt{7}}\right|+c.$$

Интегрирование простейших дробей III типа можно провести и другим методом: при $M\neq 0$ в числителе дроби выделить производную знаменателя, затем перейти к двум интегралам, один из которых находится по формуле: $\int\frac{u'\ x}{u\ x}dx=\ln\left|u\ \ x\ \right|+c,$ а другой – по табличной формуле (20). Рассмотрим этот метод на примере 3.

$$\int\frac{2x+5}{x^2+4x-3}dx=\begin{vmatrix}x^2+4x-3\ '\\=2x+4\end{vmatrix}=\int\frac{2x+4+1}{x^2+4x-3}dx=\int\frac{2x+4}{x^2+4x-3}dx+\int\frac{dx}{x+2\ ^2-7}=$$

$$=\ln\left|x^2+4x-3\right|+\frac{1}{2\sqrt{7}}\ln\left|\frac{x+2-\sqrt{7}}{x+2+\sqrt{7}}\right|+c.$$

4. $\int \frac{Mx+N}{x^2+px+q}^{k} dx$.

При интегрировании простейших дробей четвертого типа при $M=0$ выделяют полный квадрат из квадратного трехчлена в знаменателе. Выделенный двучлен заменяют новой переменной «t» и применяют рекуррентную формулу

$$\int \frac{dt}{t^2+a^2}^{k} = \frac{1}{2a^2}\ k-1 \cdot \frac{t}{t^2+a^2}^{k-1} + \frac{1}{a^2} \cdot \frac{2k-3}{2k-2} \int \frac{dt}{t^2+a^2}^{k-1}.$$

Формула применяется $k-1$ раз и приводит в итоге интеграл к табличному интегралу 20.

При $M \neq 0$ интегрировании дроби четвертого вида сначала в числителе выделяют производную от квадратного трехчлена, стоящего в знаменателе, затем переходят к двум интегралам, вычисление которых рассматривали выше.

Пример. Вычислить неопределенные интегралы:

1. $\int \frac{dx}{x^2+9}^{2}$. 2. $\int \frac{3x+2}{x^2+2x+10}^{2} dx.$

Решение

1. При нахождении интеграла применяем рекуррентную формулу, здесь $k=2,\ a=3$:

$$\int \frac{dx}{x^2+9}^{2} = \frac{1}{2\cdot 3^2}\ 2-1 \cdot \frac{x}{x^2+3^2}^{2-1} + \frac{1}{3^2} \cdot \frac{2\cdot 2-3}{2\cdot 2-2} \int \frac{dx}{x^2+3^2} =$$

$$= \frac{1}{18} \cdot \frac{x}{x^2+9} + \frac{1}{54} arctg \frac{x}{3} + c.$$

2. Находим производную от квадратного трехчлена: $x^2+2x+10\ ' = 2x+2,$ выделим в числителе производную от трехчлена:

$$3x+2 = \frac{3}{2}\ 2x+2\ -3+2 = \frac{3}{2}\ 2x+2\ -1,$$

тогда

$$\int \frac{3x+2}{x^2+2x+10}^{2} dx = \int \frac{\frac{3}{2}\ 2x+2\ -1}{x^2+2x+10}^{2} dx = \frac{3}{2} \int \frac{2x+2}{x^2+2x+10}^{2} dx - \int \frac{dx}{x^2+2x+10}^{2}.$$

Рассмотрим интегралы отдельно:

$$\int \frac{2x+2}{x^2+2x+10}^{2} dx = \int x^2+2x+10\ ^{-2} \cdot\ 2x+2\ dx = \frac{x^2+2x+10\ ^{-2+1}}{-2+1} + c_1 = -\frac{1}{x^2+2x+10} + c_1,$$

$$\int\frac{dx}{x^2+2x+10}^2=\int\frac{dx}{x^2+2x+1\ +9}^2=\int\frac{dx}{x+1}^2+9^2=\left|\begin{matrix}t=x+1\\dt=dx\end{matrix}\right|=\int\frac{dt}{t^2+9}^2=$$

$$=\frac{1}{18}\cdot\frac{t}{t^2+9}+\frac{1}{54}arctg\frac{t}{3}+c_2=\frac{1}{18}\cdot\frac{x+1}{x^2+2x+10}+\frac{1}{54}arctg\frac{x+1}{3}+c_2.$$

Подставляя значения интегралов, получим:

$$\int\frac{3x+2}{x^2+2x+10}^2dx=\frac{3}{2}\left[-\frac{1}{x^2+2x+10}\right]-\left[\frac{1}{18}\cdot\frac{x+1}{x^2+2x+10}+\frac{1}{54}arctg\frac{x+1}{3}\right]+c=$$

$$=c-\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{x^2+2x+10}-\frac{1}{18}\cdot\frac{x+1}{x^2+2x+10}-\frac{1}{54}arctg\frac{x+1}{3}.$$

Задачи для самостоятельного решения

Вычислить неопределенные интегралы:

1) $\int\frac{4dx}{3x-1}$;

2) $\int\frac{dx}{4-x}^2$;

3) $\int\frac{dx}{x^2+3x+6}$;

4) $\int\frac{dx}{4x^2+x+5}$;

5) $\int\frac{3x+2}{x^2+7x+14}dx$.

1.7.2. Интегрирование рациональных дробей

При интегрировании дробно-рациональных функций в общем случае, если дробь *неправильная*, то надо выделить из нее целую часть и представить в виде:

$$\frac{P_n\ \ x}{Q_m\ \ x}=M\ \ x\ +\frac{r\ \ x}{Q_m\ \ x},$$

где $M\ \ x$ – частное (многочлен); $r\ \ x$ – остаток; $\frac{r\ \ x}{Q_m\ \ x}$ – правильная рациональная дробь.

Тогда $\int\frac{P_n\ \ x}{Q_m\ \ x}dx=\int M\ \ x\ \ dx+\int\frac{r\ \ x}{Q_m\ \ x}dx$.

Например, рассмотрим рациональную дробь $\frac{x^3-2x^2+4}{x^2+2x-3}$. Здесь n = 3, m = 2, $n > m$ следовательно, дробь неправильная. Выделим целую часть делением «уголком»:

$$
\begin{array}{r|l}
-\begin{array}{r} x^3 - 2x^2 + 4 \\ x^3 + 2x^2 - 3x \end{array} & x^2 + 2x - 3 \\ \cline{2-2}
\cline{1-1} & x - 4 \\
-\begin{array}{r} -4x^2 + 3x + 4 \\ -4x^2 - 8x + 12 \end{array} & \\ \cline{1-1}
11x - 8 &
\end{array}
$$

Получим $$\frac{x^3-2x^2+4}{x^2+2x-3}=x-4+\frac{11x-8}{x^2+2x-3}.$$

Таким образом, интегрирование рациональной дроби в общем виде сводится к интегрированию многочлена и правильной дроби. Если правильная дробь не является простейшей, то многочлен, стоящий в знаменателе, разлагают на линейные квадратичные множители. Например, $x^2-3x+2=\ x-1\ \ x-2$, $x^4+2x^3+5x^2=x^2\ \ x^2+2x+5$, $x^2+2x+1=\ x+1\ ^2$.

Теорема 1.3. *(о разложении правильной рациональной дроби на простейшие).* Любая правильная сложная дробь единственным образом разлагается на сумму простейших дробей, при этом каждому множителю знаменателя вида $x-a\ ^n$ соответствует сумма n простейших дробей:

$$\frac{A_1}{x-a}+\frac{A_2}{x-a\ ^2}+\ldots+\frac{A_n}{x-a\ ^n};$$

а множителю знаменателя $x^2+px+q\ ^m$, где $\frac{p^2}{4}-q<0,$ соответствует сумма m простейших дробей:

$$\frac{B_1x+C_1}{x^2+px+q}+\frac{B_2x+C_2}{x^2+px+q\ ^2}+\ldots+\frac{B_mx+C_m}{x^2+px+q\ ^m},$$

где $A_1,A_2,...,B_1,B_2,...,C_1,C_2,...$ – действительные числа (назовем их неопределенными коэффициентами).

Для нахождения неопределенных коэффициентов применяется метод составления системы линейных уравнений относительно искомых коэффициентов или метод произвольных числовых значений. Рассмотрим эти методы на примерах.

Пример. Разложить на простейшие дроби:

$$\frac{x+2}{x^3-x}.$$

Решение. Убедившись, что рациональная дробь – правильная, разложим знаменатель на множители:

$$x^3 - x = x\ \ x^2 - 1\ \ = x\ \ x - 1\ \ \ x + 1\ .$$

Разложим правильную рациональную дробь на простейшие. Так как в знаменателе правильной дроби все множители стоят в первой степени, то рациональная дробь разложится на сумму простейших дробей I типа:

$$\frac{x+2}{x^3 - x} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{x+1}.$$

Приводим к общему знаменателю в правой части равенства и приравниваем числитель заданной и полученной дроби:

$$x + 2 = A\ \ x + 1\ \ \ x - 1\ + Bx\ \ x + 1\ + Cx\ \ x - 1\ , \qquad (1.1)$$

где A, B, C – неопределенные коэффициенты. Для того, чтобы их найти рассмотрим два способа.

1. Составление системы

В последнем равенстве раскроем скобки:

$$x + 2 = A\ \ x^2 - 1\ + B\ \ x^2 + x\ + C\ \ x^2 - x\ .$$

Сгруппируем члены с одинаковыми степенями:

$$x + 2 = x^2\ \ A + B + C\ + x\ \ B - C\ - A.$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x слева и справа, запишем систему:

$$\begin{array}{l|l} \text{коэф. при } x^2 & A + B + C = 0, \\ \text{коэф. при } x^1 & B - C = 1, \\ \text{коэф. при } x^0 & -A = 2. \end{array}$$

Решая систему, получим: $A = -2,\ \ B = \frac{3}{2},\ C = \frac{1}{2}.$

2. Способ подстановки произвольных числовых значений

При этом способе вычисления коэффициентов в равенстве (1.1) не надо раскрывать скобки. Так как это равенство является тождеством, то оно остается справедливым при любых значениях x. Так как неизвестных коэффициентов три, то для их нахождения достаточно в данное равенство подставить вместо x любые три частных значения x. Этот метод особенно удобен, если вместо x подставлять действительные корни знаменателя заданной дроби. В нашем случае это $x_1 = 0,\ x_2 = 1,\ x_3 = -1.$

В равенство (1.1) подставим значения x:

$$\begin{array}{l|l} x_1=0 & 0+2=A\ \ 0+1\ \ 0-1\ +B\cdot 0\ \ 0+1\ +C\cdot 0\ \ 0-1\ \Rightarrow A=-2, \\ x_2=1 & 1+2=A\ \ 1+1\ \ 1-1\ +B\cdot 1\ \ 1+1\ +C\cdot 1\ \ 1-1\ \Rightarrow B=\frac{3}{2}, \\ x_3=-1 & -1+2=A\ \ -1+1\ \ -1-1\ +B\cdot\ -1\ \ -1+1\ +C\cdot\ -1\ \ -1-1\ \Rightarrow C=\frac{1}{2}. \end{array}$$

В результате получили те же значения коэффициентов, что и в первом случае.

Итак, $\dfrac{x+2}{x^3-x}=\dfrac{-2}{x}+\dfrac{\frac{3}{2}}{x-1}+\dfrac{\frac{1}{2}}{x+1}=-\dfrac{2}{x}+\dfrac{3}{2}\cdot\dfrac{1}{x-1}+\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{x+1}.$

Вычислим интеграл

$$\int\frac{x+2}{x^3-x}dx=-2\int\frac{dx}{x}+\frac{3}{2}\int\frac{dx}{x-1}+\frac{1}{2}\int\frac{dx}{x+1}=-2\ln|x|+\frac{3}{2}\ln|x-1|+\frac{1}{2}\ln|x+1|+c=$$

$$=\ln\left|\frac{\sqrt{\ x-1\ ^3\ \ x+1}}{x^2}\right|+c.$$

Пример. Вычислить неопределенный интеграл

$$\int\frac{x^2}{x^3+5x^2+8x+4}dx.$$

Решение. Так как подынтегральная функция – правильная сложная рациональная дробь, представим её в виде суммы простейших дробей. Разложим знаменатель на множители:

$$x^3+5x^2+8x+4=x^3+4x^2+x^2+4x+4x+4=x\ \ x^2+4x+4\ +\ x^2+4x+4\ =$$

$$=\ x+2\ ^2\ \ x+1\ .$$

Корни знаменателя: $x_1=-2,\ x_2=-1.$ Заметим, что при разложении рациональной дроби на простейшие множителю $x+1$ в сумме будет соответствовать одна дробь $\dfrac{A}{x+1}$, а множителю $x+2\ ^2$ – сумма двух дробей $\dfrac{B}{x+2}+\dfrac{C}{x+2\ ^2}$, т.е. разложение имеет вид:

$$\frac{x^2}{x^3+5x^2+8x+4}=\frac{x^2}{x+2\ ^2\ \ x+1}=\frac{A}{x+1}+\frac{B}{x+2}+\frac{C}{x+2\ ^2}.$$

Приведем дроби к общему знаменателю и приравняем числители:

$$x^2=A\ \ x+2\ ^2+B\ \ x+1\ \ \ x+2\ +C\ \ x+1\ .$$

Для нахождения коэффициентов применим сначала способ частных значений, подставляя вместо x значения корней знаменателя:

$$x_1 = -2 \quad -2\ ^2 = A\ -2+2\ ^2 + B\ -2+1\ \ -2+2\ + C\ -2+1\ \Rightarrow C = -4;$$

$$x_2 = -1 \quad -1\ ^2 = A\ -1+2\ ^2 + B\ -1+1\ \ -1+2\ + C\ -1+1\ \Rightarrow A = 1.$$

Для нахождения коэффициента B применим первый способ, но запишем только одно уравнение, приравняв коэффициенты при x^2: $A + B = 1 \Rightarrow B = 1 - A = 0 \Rightarrow B = 0.$

Таким образом,

$$\int \frac{x^2}{x^3+5x^2+8x+4}dx = \int\left(\frac{1}{x+1} + \frac{0}{x+2} + \frac{-4}{x+2\ ^2}\right)dx = \int\frac{dx}{x+1} - 4\int\frac{dx}{x+2\ ^2} =$$

$$= \ln|x+1| + \frac{4}{x+2} + c.$$

Пример. Вычислить неопределенный интеграл

$$\int \frac{12}{x^4+x^3-x-1}dx.$$

Решение. Подынтегральная дробь – правильная, разложим знаменатель на множители:

$$x^4+x^3-x-1 = x^3\ \ x+1\ -\ \ x+1\ =\ \ x+1\ \ \ x^3-1\ =\ \ x+1\ \ \ x-1\ \ \ x^2+x+1\ .$$

Так как квадратный трехчлен x^2+x+1 не имеет действительных корней, поэтому разложение функции на простейшие имеет вид:

$$\frac{12}{x^4+x^3-x-1} = \frac{12}{x+1\ \ \ x-1\ \ \ x^2+x+1} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-1} + \frac{Cx+D}{x^2+x+1}.$$

Приравняем числители:

$$12 = A\ \ x-1\ \ \ x^2+x+1\ + B\ \ x+1\ \ \ x^2+x+1\ +\ Cx+D\ \ \ x-1\ \ \ x+1\ . \qquad (1.2)$$

Подставляя: $x_1 = 1$, $x_2 = -1$ (корни знаменателя), получим:

$x_1 = 1$

$$12 = A\ 1-1\ \ 1^2+1+1\ + B\ 1+1\ \ 1^2+1+1\ +\ C\cdot 1+D\ \ 1-1\ \ 1+1\ \Rightarrow B = 2\ ;$$

$x_2 = -1$

$$12 = A(-1-1)((-1)^2-1+1) + B(-1+1)((-1)^2-1+1) + (C(-1)+D)(-1-1)(-1+1) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \mathrm{A} = -6.$$

Запишем равенство (1.2) в виде:

$$12 = A\ \ x^3 - 1\ \ + B\ \ x^3 + 2x^2 + 2x + 1\ \ + Cx^3 - Cx + Dx^2 - D,$$

$$12 = x^3\ \ A + B + C\ \ + x^2\ \ 2B + D\ \ + x\ \ 2B - C\ \ +\ \ -A + B - D\ .$$

Тогда

$$\begin{array}{l|l} \text{коэф. при } x^3 & A + B + C = 0, \\ \text{коэф. при } x^2 & 2B + D = 0, \\ \text{коэф. при } x^1 & 2B - C = 0, \\ \text{коэф. при } x & -A + B - D = 12. \end{array}$$

Зная $A = -6,\ B = 2$, найдем остальные коэффициенты:

$$D = -A + B - 12 = 6 + 2 - 12 = -4 \Rightarrow D = -4,$$

$$C = 2B = 4 \Rightarrow C = 4.$$

Таким образом,

$$\int \frac{12}{x^4 + x^3 - x - 1} dx = \int \frac{12}{x+1\ \ \ x-1\ \ \ x^2 + x + 1} dx = \int \left(\frac{-6}{x+1} + \frac{2}{x-1} + \frac{4x-4}{x^2+x+1} \right) dx =$$

$$= -6\int \frac{dx}{x+1} + 2\int \frac{dx}{x-1} + \int \frac{4x-4}{x^2+x+1} dx = -6\ln|x+1| + 2\ln|x-1| + 4\int \frac{x-1}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}} dx.$$

Последний интеграл представляет собой интеграл от простейшей дроби третьего типа, рассмотрим его отдельно:

$$\int \frac{x-1}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}} dx == \left| \begin{array}{l} t = x + \frac{1}{2} \\ dt = dx \\ x = t - \frac{1}{2} \end{array} \right| = \int \frac{t - \frac{1}{2} - 1}{t^2 + \frac{3}{4}} dt = \int \frac{t - \frac{3}{2}}{t^2 + \frac{3}{4}} dt = \int \frac{t}{t^2 + \frac{3}{4}} dt - \frac{3}{2}\int \frac{dt}{t^2 + \frac{3}{4}} =$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{2t}{t^2 + \frac{3}{4}} dt - \frac{3}{2}\int \frac{dt}{t^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \frac{1}{2}\ln\left|t^2 + \frac{3}{4}\right| - \frac{3}{2} \cdot \frac{2}{\sqrt{3}} arctg\, \frac{2t}{\sqrt{3}} + c =$$

$$= \frac{1}{2}\ln\left|x^2 + x + 1\right| - \frac{3}{\sqrt{3}} arctg\, \frac{2x+1}{\sqrt{3}} + c$$

Итак,

$$\int\frac{12}{x^4+x^3-x-1}dx=-6\ln|x+1|+2\ln|x-1|+2\ln|x^2+x+1|-4\sqrt{3}arctg\,\frac{2x+1}{\sqrt{3}}+c.$$

Пример. Вычислить неопределенный интеграл

$$\int\frac{x^3-2x^2+4}{x^2+2x-3}dx.$$

Решение. Подынтегральная функция – неправильная рациональная дробь, поэтому сначала выделим целую часть делением «уголком», это сделано в п. 1.7.2. Получим:

$$\int\frac{x^3-2x^2+4}{x^2+2x-3}dx=\int\left(x-4+\frac{11x-8}{x^2+2x-3}\right)dx=\int xdx-4\int dx+\int\frac{11x-8}{x^2+2x-3}dx.$$

Последнее слагаемое представляет собой интеграл от правильной сложной дроби. Рассмотрим его отдельно. Знаменатель легко раскладывается на множители: $x^2+2x-3=\ x-1\ \ x+3\ $.

Разложим подынтегральную функцию на сумму простейших дробей:

$$\frac{11x-8}{x^2+2x-3}=\frac{11x-8}{x-1\ \ x+3}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+3}.$$

Приравняем числители:

$11x-8=A\ \ x+3\ +B\ \ x-1\ $.

Подставляем корни знаменателя:

$$\begin{array}{l|l} x_1=1 & 11\cdot 1-8=A\ \ 1+3\ +B\ \ 1-1\ \Rightarrow A=\frac{3}{4}, \\ x_2=-3 & 11\cdot\ -3\ -8=A\ \ -3+3\ +B\ \ -3-1\ \Rightarrow B=\frac{41}{4}. \end{array}$$

Тогда

$$\int\frac{11x-8}{x^2+2x-3}dx=\int\frac{11x-8}{x-1\ \ x+3}dx=\frac{3}{4}\int\frac{dx}{x-1}+\frac{41}{4}\int\frac{dx}{x+3}=\frac{3}{4}\ln|x-1|+\frac{41}{4}\ln|x+3|+c.$$

Итак, окончательно имеем:

$$\int\frac{x^3-2x^2+4}{x^2+2x-3}dx=\int\left(x-4+\frac{11x-8}{x^2+2x-3}\right)dx=\int xdx-4\int dx+\int\frac{11x-8}{x^2+2x-3}dx=$$

$$=\frac{x^2}{2}-4x+\frac{3}{4}\ln|x-1|+\frac{41}{4}\ln|x+3|+c.$$

Задачи для самостоятельного решения

Вычислить неопределенные интегралы:

1) $\int \frac{x^2+x+5}{x\ \ x+3\ \ x-2}dx$;

2) $\int \frac{x^2+x+2}{x-3\ \ x-4}dx$;

3) $\int \frac{2x^2-11}{x^2+x-6}dx$;

4) $\int \frac{x^4+x^3+x^2+x+1}{x^2+1\ ^2\cdot x}dx$.

1.8. Интегрирование простейших иррациональных функций

При интегрировании иррациональных функций обычно применяют рационализирующие подстановки, т.е. подстановки, позволяющие в подынтегральной функции освободиться от радикалов. Здесь и дальше будем полагать, что $R\ \ x,y,z,\ldots$ – рациональная функция от своих аргументов.

1. Рассмотрим интеграл

$$\int R\left(x,\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{m_1}{n_1}},\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{m_2}{n_2}},\ldots\right)dx,$$

где $m_1,m_2,\ldots,n_1,n_2,\ldots$ – целые числа, a,b,c,d – действительные числа. Рационализирующей подстановкой, позволяющей избавиться от всех радикалов, является подстановка $\frac{ax+b}{cx+d}=t^k$, где t – новая переменная, а $k=НОК\ \ n_1,n_2,\ldots$ – наименьшее общее кратное чисел $n_1,n_2,\ldots$

В частном случае интеграл имеет вид:

$$\int R\left(x,x^{\frac{m_1}{n_1}},x^{\frac{m_2}{n_2}},\ldots\right)dx.$$

Здесь рационализирующая подстановка $x=t^k$, где $k=НОК\ \ n_1,n_2,\ldots$.

Пример. Вычислить неопределенный интеграл

$$\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}dx.$$

Решение. Так как здесь показатели корней 2 и 3, их наименьшее кратное 6. В этом случае сделаем замену $x=t^6$, тогда $dx=6t^5dt$.

$$\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}dx=\left|\begin{matrix}x=t^6\\ dx=6t^5dt\end{matrix}\right|=\int \frac{\sqrt{t^6}}{\sqrt{t^6}+\sqrt[3]{t^6}}6t^5dt=6\int \frac{t^8}{t^3+t^2}dt=6\int \frac{t^6}{t+1}dt=$$

$$=6\int\left(t^5-t^4+t^3-t^2+t-1+\frac{1}{t+1}\right)dt=6\left(\frac{t^6}{6}-\frac{t^5}{5}+\frac{t^4}{4}-\frac{t^3}{3}+\frac{t^2}{2}-t+\ln|t+1|\right)+c=$$

$$=6\left(\frac{x}{6}-\frac{\sqrt[6]{x^5}}{5}+\frac{\sqrt[3]{x^2}}{4}-\frac{\sqrt{x}}{3}+\frac{\sqrt[3]{x}}{2}-\sqrt[6]{x}+\ln\left|\sqrt[6]{x}+1\right|\right)+c.$$

Пример. Вычислить неопределенный интеграл:

$$\int\frac{dx}{\sqrt{2x+3}+\sqrt[3]{\ 2x+3\ ^{2}}}.$$

Решение. Заметим, что $\sqrt{2x+3}=\ 2x+3\ ^{\frac{1}{2}}$, $\sqrt[3]{\ 2x+3\ ^{2}}=\ 2x+3\ ^{\frac{2}{3}}$. Наименьшим общим кратным знаменателей дробей $\frac{1}{2},\frac{2}{3}$ является 6. Поэтому, если применить подстановку $2x+3=t^6$, то $\ 2x+3\ ' dx=\ t^6\ ' dt\Rightarrow 2dx=6t^5dt\Rightarrow dx=3t^5dt.$

$$\int\frac{dx}{\sqrt{2x+3}+\sqrt[3]{\ 2x+3\ ^{2}}}=\begin{vmatrix}2x+3=t^6\\ dx=3t^5dt\end{vmatrix}=\int\frac{3t^5dt}{t^3+t^4}=3\int\frac{t^2}{1+t}dt.$$

Таким образом, данный интеграл сведен к интегралу от рациональной функции. Для его нахождения выделим целую часть подынтегральной функции:

$$\frac{t^2}{1+t}=\frac{t^2-1+1}{1+t}=\frac{t-1\ \ t+1\ +1}{t+1}=\frac{t-1\ \ t+1}{t+1}+\frac{1}{t+1}=t-1+\frac{1}{t+1}.$$

Таким образом, получим:

$$\int\frac{t^2}{1+t}dt=\int\left(t-1+\frac{1}{t+1}\right)dt=\int tdt-\int 1\cdot dt+\int\frac{dt}{t+1}=\frac{t^2}{2}-t+\ln|t+1|+c.$$

Возвратимся к старой переменной. Так как $2x+3=t^6$, то $t=\sqrt[6]{2x+3}$.

Итак,

$$\int\frac{dx}{\sqrt{2x+3}+\sqrt[3]{\ 2x+3\ ^{2}}}=\frac{3\sqrt[3]{2x+3}}{2}-3\sqrt[6]{2x+3}+3\ln\left|\sqrt[6]{2x+3}+1\right|+c.$$

2. Рассмотрим интеграл вида

$$\int\frac{Ax+B}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx.$$

Данный интеграл вычисляется так же, как и интегралы от простейших дробей III типа: выделяется полный квадрат в подкоренном выражении и полученную в скобках сумму принимают за новую переменную.

Пример. Вычислить неопределенный интеграл

$$\int \frac{5x-1}{\sqrt{x^2+2x+2}}dx.$$

Решение

$$\int \frac{5x-1}{\sqrt{x^2+2x+2}}dx = \int \frac{5x-1}{\sqrt{\ x+1\ ^2+1}}dx = \begin{vmatrix} t=x+1 \\ x=t-1 \\ dt=dx \end{vmatrix} = \int \frac{5\ t-1\ -1}{\sqrt{t^2+1}}dt = \int \frac{5t-6}{\sqrt{t^2+1}}dt =$$

$$= 5\int \frac{tdt}{\sqrt{t^2+1}} - 6\int \frac{dt}{\sqrt{t^2+1}} = \frac{5}{2}\int \frac{d\ \ t^2+1}{\sqrt{t^2+1}} - 6\ln\left|t+\sqrt{t^2+1}\right| + c = \frac{5}{2}\cdot 2\sqrt{t^2+1} -$$

$$-6\ln\left|t+\sqrt{t^2+1}\right| + c = 5\sqrt{x^2+2x+2} - 6\ln\left|x+1+\sqrt{x^2+2x+2}\right| + c.$$

Здесь применялись: метод замены переменной, возведение функции под знак дифференциала и табличный интеграл 21.

Пример. Вычислить неопределенный интеграл:

$$\int \frac{5x+11}{\sqrt{6x-x^2-5}}dx.$$

Решение

$$\int \frac{5x+11}{\sqrt{6x-x^2-5}}dx = \int \frac{5x+11}{\sqrt{-\ \ x^2-6x+5}}dx = \int \frac{5x+11}{\sqrt{-\ \ \ x-3\ ^2-4}}dx = \begin{vmatrix} t=x-3 \\ x=t+3 \\ dx=dt \end{vmatrix} =$$

$$= \int \frac{5\ \ t+3\ \ +11}{\sqrt{4-t^2}}dt = \int \frac{5t+26}{\sqrt{4-t^2}}dt = 5\int \frac{tdt}{\sqrt{4-t^2}} + 26\int \frac{dt}{\sqrt{4-t^2}} = \frac{5}{2}\int \frac{dt^2}{\sqrt{4-t^2}} +$$

$$+26\arcsin\frac{t}{2} + c = -\frac{5}{2}\int \frac{d\ \ 4-t^2}{\sqrt{4-t^2}} + 26\arcsin\frac{t}{2} + c = -5\sqrt{4-t^2} + 26\arcsin\frac{t}{2} + c =$$

$$= -5\sqrt{6x-x^2-5} + 26\arcsin\frac{x-3}{2} + c.$$

Задачи для самостоятельного решения

Вычислить неопределенные интегралы:

1) $\int \frac{\sqrt{x}dx}{1+\sqrt{x}}$;

2) $\int \frac{dx}{\sqrt{x}\ \ 4+\sqrt[4]{x}}$;

3) $\int \frac{xdx}{\sqrt{x+1}+\sqrt[3]{x+1}}$;

4) $\int \frac{x^2dx}{3x+5\ \ \sqrt{3x+5}}$.

1.9. Интегрирование тригонометрических функций

Рассмотрим несколько случаев интегрирования тригонометрических выражений.

1. Интегралы $\int \cos nx \cdot \cos mx dx$, $\int \sin nx \cdot \cos mx dx$, $\int \sin nx \cdot \sin mx dx$.

Чтобы вычислить эти интегралы, следует представить подынтегральное произведение в виде суммы, используя формулы:

$$\cos\alpha \cdot \cos\beta = \frac{1}{2}\left[\cos\ \alpha+\beta\ + \cos\ \alpha-\beta\ \right],$$

$$\sin\alpha \cdot \cos\beta = \frac{1}{2}\left[\sin\ \alpha+\beta\ + \sin\ \alpha-\beta\ \right],$$

$$\sin\alpha \cdot \sin\beta = \frac{1}{2}\left[\cos\ \alpha-\beta\ - \cos\ \alpha+\beta\ \right].$$

Пример. Вычислить неопределенный интеграл:

$$\int \sin 13x \cdot \cos 5x dx.$$

Решение

$$\int \sin 13x \cdot \cos 5x dx = \frac{1}{2}\int\ \sin 18x + \sin 8x\ dx = \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{18}\cos 18x - \frac{1}{8}\cos 8x\right) + c.$$

2. Интегралы $\int \sin^n x \cdot \cos^m dx$, где n и m – целые числа.

Интегралы такого вида наиболее просто вычисляются в следующих случаях:

1) n – нечетное положительное число, m – любое, применяется подстановка $t = \cos x$;

2) m – нечетное положительное число, n – любое, применяется подстановка $t = \sin x$;

3) n и m – четные положительные числа. В этом случае хороший результат дает применение формул:

$$\sin^2\alpha = \frac{1}{2}\ 1 - \cos 2\alpha\ ,$$

$$\cos^2\alpha = \frac{1}{2}\ 1 + \cos 2\alpha\ ,$$

$$\sin\alpha \cdot \cos\alpha = \frac{1}{2}\sin 2\alpha.$$

Пример. Вычислить неопределенные интегралы:

1. $\int \sin^3 x \cdot \cos^6 x dx.$ 2. $\int \cos^5 x dx.$

Решение

1. Так как $n=3$, то применим подстановку $t=\cos x$.

$$\int \sin^3 x\cdot\cos^6 x dx=\int \sin^2 x\cdot\cos^6 x\cdot\sin x dx=\int 1-\cos^2 x\ \cdot\cos^6 x\cdot\sin x dx=$$

$$=\begin{vmatrix} t=\cos x \\ dt=-\sin x dx \end{vmatrix}=\int 1-t^2\ t^6\ -dt\ =\int t^8-t^6\ dt=\frac{t^9}{9}-\frac{t^7}{7}+c=\frac{\cos^9 x}{9}-\frac{\cos^7 x}{7}+c.$$

2. Так как $m=5$, то применим подстановку $t=\sin x$.

$$\int \cos^5 x dx=\int \cos^4 x\cdot\cos x dx=\int \cos^2 x\ ^2\cdot\cos x dx=\int 1-\sin^2 x\ ^2\cdot\cos x dx=$$

$$=\begin{vmatrix} t=\sin x \\ dt=\cos x dx \end{vmatrix}=\int 1-t^2\ ^2 dt=\int 1-2t^2+t^4\ dt=t-\frac{2t^3}{3}+\frac{t^5}{5}+c=$$

$$=\sin x-\frac{2\sin^3 x}{3}+\frac{\sin^5 x}{5}+c.$$

Пример. Вычислить неопределенные интегралы:

1. $\int \sin^2 2x\cdot\cos^2 2x dx.$ 2. $\int \cos^4 \frac{x}{2} dx.$

Решение

1. $$\int \sin^2 2x\cdot\cos^2 2x dx=\int \sin 2x\cdot\cos 2x\ ^2 dx=\int\left(\frac{1}{2}\sin 4x\right)^2 dx=\frac{1}{4}\int \sin^2 4x dx=$$

$$=\frac{1}{4}\int\frac{1}{2}\ 1-\cos 8x\ dx=\frac{1}{8}\int 1-\cos 8x\ dx=\frac{1}{8}\left(x-\frac{1}{8}\sin 8x\right)+c=\frac{1}{8}x-\frac{1}{64}\sin 8x+c.$$

2. $$\int \cos^4 \frac{x}{2} dx=\int\left(\cos^2\frac{x}{2}\right)^2 dx=\int\left(\frac{1}{2}\ 1+\cos x\ \right)^2 dx=\frac{1}{4}\int 1+2\cos x+\cos^2 x\ dx=$$

$$=\frac{1}{4}\int dx+\frac{1}{2}\int \cos x dx+\frac{1}{4}\int \cos^2 x dx=\frac{1}{4}x+\frac{1}{2}\sin x+\frac{1}{8}\int 1+\cos 2x\ dx=$$

$$=\frac{1}{4}x+\frac{1}{2}\sin x+\frac{1}{8}x+\frac{1}{16}\sin 2x+c=\frac{3}{8}x+\frac{1}{2}\sin x+\frac{1}{16}\sin 2x+c.$$

3. Интегралы $\int R\ \sin x,\cos x\ dx,$ где $R\ \sin x,\cos x$ – рациональная функция от $\sin x$ и $\cos x$. Любой интеграл $\int R\ \sin x,\cos x\ dx$ может быть сведен к интегралу от рациональной дроби универсальной тригонометрической подстановкой:

$$t=tg\frac{x}{2}\ \Rightarrow\ \frac{x}{2}=arctgt;$$

$$x=2arctgt;$$

$$dx=\frac{2dt}{1+t^2}.$$

По формулам тригонометрии: $\sin x=\dfrac{2tg\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}}$, $\cos x=\dfrac{1-tg\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}}$, получим:

$$\sin x=\frac{2t}{1+t^2},\ \cos x=\frac{1-t}{1+t^2}.$$

Пример. Вычислить неопределенный интеграл

$$\int\frac{dx}{2+3\sin x}.$$

Решение

$$\int\frac{dx}{2+3\sin x}=\left|\begin{array}{l} t=tg\frac{x}{2} \\ \sin x=\frac{2t}{1+t^2} \\ dx=\frac{2dt}{1+t^2}\end{array}\right|=\int\frac{1}{2+3\cdot\frac{2t}{1+t^2}}\cdot\frac{2dt}{1+t^2}=\int\frac{1+t^2\ \ 2dt}{2+2t^2+6t\ \ 1+t^2}=$$

$$=\int\frac{dt}{t^2+3t+1}=\int\frac{dt}{\left(t^2+3\cdot\frac{3}{2}t+\frac{9}{4}\right)-\frac{9}{4}+1}=\int\frac{dt}{\left(t+\frac{3}{2}\right)^2-\frac{5}{4}}=\frac{1}{2\cdot\sqrt{\frac{5}{4}}}\cdot\ln\left|\frac{t+\frac{3}{2}-\frac{\sqrt{5}}{2}}{t+\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{5}}{2}}\right|+c=$$

$$=\frac{\sqrt{5}}{5}\ln\left|\frac{2t+3-\sqrt{5}}{2t+3+\sqrt{5}}\right|+c=\frac{\sqrt{5}}{5}\ln\left|\frac{2tg\frac{x}{2}+3-\sqrt{5}}{2tg\frac{x}{2}+3+\sqrt{5}}\right|+c.$$

4. Интегралы $\int R\ \sin^2 x,\cos^2 x\ dx$, где $R\ \sin x,\cos x$ – рациональная функция от $\sin x$ и $\cos x$.

Здесь следует использовать замену:

$$t=tgx\ \Rightarrow\ x=arctgt;$$

$$dx=\frac{dt}{1+t^2}.$$

По формулам тригонометрии получим:

$$\cos x=\frac{1}{\sqrt{1+tg^2x}}=\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}\Rightarrow\cos^2 x=\frac{1}{1+t^2},$$

$$\sin x = \cos x \cdot tgx = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}} \Rightarrow \sin^2 x = \frac{t^2}{1+t^2}.$$

Пример. Вычислить неопределенный интеграл

$$\int \frac{dx}{1+\cos^2 x}.$$

Решение

$$\int \frac{dx}{1+\cos^2 x} = \left| \begin{array}{l} t = tgx \\ x = arctgt \\ dx = \dfrac{dt}{1+t^2} \end{array} \right| = \int \frac{1}{1+\frac{1}{1+t^2}} \cdot \frac{dt}{1+t^2} = \int \frac{1+t^2 \;\; dt}{1+t^2 \quad 1+1+t^2} = \int \frac{dt}{t^2+2} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} arctg \frac{t}{\sqrt{2}} + c = \frac{\sqrt{2}}{2} arctg \frac{\sqrt{2} tgx}{2} + c.$$

5. Интеграл $\int R \;\; tgx \;\; dx.$ В этом случае применяют подстановку $t = tgx$ или $t = ctgx$, когда подынтегральная функция зависит от $ctgx$.

Пример. Вычислить неопределенный интеграл

$$\int tg^6 x dx.$$

Решение

$$\int tg^6 x dx = \left| \begin{array}{l} t = tgx \\ dx = \dfrac{dt}{1+t^2} \end{array} \right| = \int t^6 \cdot \frac{dt}{1+t^2} = \int \frac{t^6}{1+t^2} dt = \int \left(t^4 - t^2 + 1 - \frac{1}{1+t^2} \right) dt =$$

$$= \frac{t^5}{5} - \frac{t^3}{3} + t - arctgt + c = \frac{tg^5 x}{5} - \frac{tg^3 x}{3} + tgx - arctg \;\; tgx \;\; + c.$$

6. Интеграл $\int f \;\; \sin x \;\; \cdot \cos x dx.$ Здесь применяется подстановка $t = \sin x.$

Пример. Вычислить неопределенный интеграл:

$$\int \frac{\cos x dx}{\sin^2 x + 2\sin x - 3}.$$

Решение

$$\int \frac{\cos x dx}{\sin^2 x + 2\sin x - 3} = \left| \begin{array}{l} t = \sin x \\ dt = \cos x dx \end{array} \right| = \int \frac{dt}{t^2 + 2t - 3} = \int \frac{dt}{t^2 + 2 \cdot 1 \cdot t + 1 \;\; -1-3} =$$

$$= \int \frac{dt}{t+1 \;\; ^2 - 4} = \frac{1}{4} \ln \left| \frac{t+1-2}{t+1+2} \right| + c = \frac{1}{4} \ln \left| \frac{t-1}{t+3} \right| + c = \frac{1}{4} \ln \left| \frac{\sin x - 1}{\sin x + 3} \right| + c.$$

7. Интеграл $\int f\ \cos x\ \cdot \sin x dx$. Здесь применяется подстановка $t = \cos x$.

Пример. Вычислить неопределенный интеграл

$$\int \frac{4\sin x dx}{\sqrt{25+\cos^2 x}}.$$

Решение

$$\int \frac{4\sin x dx}{\sqrt{25+\cos^2 x}} = \left| \begin{matrix} t = \cos x \\ dt = -\sin x dx \end{matrix} \right| = -4\int \frac{dt}{\sqrt{25+t^2}} = -4\ln\left|t+\sqrt{25+t^2}\right| + c =$$

$$= c - 4\ln\left|\cos x + \sqrt{25+\cos^2 x}\right|.$$

Задачи для самостоятельного решения

Вычислить неопределенные интегралы:

1) $\int \sin 3x \cdot \cos 7x dx$;

2) $\int \sin^4 x \cdot \cos^3 x dx$;

3) $\int \sin^4 x dx$;

4) $\int \cos^5 \frac{x}{3} dx$;

5) $\int \frac{dx}{5\cos x + 3}$;

6) $\int tg^5 x dx$;

7) $\int \frac{dx}{1+\sin^2 x}$.

1.10. Обзор методов интегрирования

Обобщим методы интегрирования и представим их в виде таблицы.

№ п/п	Вид интеграла	Метод интегрирования
1	$\int f\ \ ax+b\ dx$	Интегрирование с применением компенсирующего множителя, т.е. $\int f\ \ ax+b\ dx = \frac{1}{a}F\ \ ax+b\ \ +c$
2	$\int f\ \ g\ \ x\ \ d\ \ g\ \ x$	Интегрирование введением функции под дифференциал, т.е. $\int f\ \ g\ \ x\ \ d\ \ g\ \ x\ \ = F\ \ g\ \ x\ \ +c$
3	$\int u\ \ x\ \ ^n u'\ \ x\ \ dx$	Применение обобщенного второго табличного интеграла, т.е. $\int u\ \ x\ \ ^n u'\ \ x\ \ dx = \frac{u\ \ x\ \ ^{n+1}}{n+1}\ \ +c$

№ п/п	Вид интеграла	Метод интегрирования
4	$\int \frac{u'\ x}{u\ x} dx$	Интегрирование с помощью формулы: $\int \frac{u'\ x}{u\ x} dx = \ln\lvert u\ x\ \rvert + c$
5	$\int f\ \varphi\ t\ \ \varphi'\ t\ dt$	Замена переменной: подстановка $x = \varphi\ t\ ,\ dx = \varphi'\ t\ dt$
6	$\int P_n\ x\ e^{\alpha x} dx,$ $\int P_n\ x\ \sin\alpha x dx,\ \ \int P_n\ x\ \cos\alpha x dx$	Интегрирование по частям: подстановки $u = P_n\ x\ ,$ $dv = e^{\alpha x} dx,\ \ dv = \sin\alpha x dx,\ \ dv = \cos\alpha x dx.$
7	$\int P_n\ x\ \arcsin\alpha x dx,\ \int P_n\ x\ \arccos\alpha x dx,$ $\int P_n\ x\ \mathrm{arc}tg\alpha x dx,\ \ \int P_n\ x\ \ln\alpha x dx$	Интегрирование по частям: подстановки $dv = P_n\ x\ dx,\ \ u = arc\sin\alpha x,$ $u = \arccos\alpha x, u = arctg\alpha x, u = \ln\alpha x.$
8	$\int e^{\alpha x} \sin bx dx,$ $\int e^{\alpha x} \cos bx dx$	Интегрирование по частям применяется дважды: в качестве множителя u берется функция одного и того же типа: показательная или тригонометрическая
9	$\int \sqrt{ax^2 + b}\, dx$	Интегрирование по частям применяется дважды: подстановки $u = \sqrt{ax^2 + b},\ dv = dx$
10	$\int \frac{A}{x - a} dx$	Интегрирование простейшей дроби I типа: $\int \frac{A}{x - a} dx = A \cdot \ln\lvert x - a\rvert + c$
11	$\int \frac{A}{x - a\ ^k} dx$	Интегрирование простейшей дроби II типа: $\int \frac{A}{x - a\ ^k} dx = \frac{A}{-k + 1} \cdot \frac{1}{x - a\ ^{k-1}} + c$
12	$\int \frac{Mx + N}{x^2 + px + q} dx,$ $p^2 - 4q < 0$	Интегрирование простейшей дроби III типа: в выражении, стоящем в знаменателе, выделяют полный квадрат и применяют подстановку $t = x + \frac{p}{2}$
13	$\int \frac{dt}{t^2 + a^2\ ^k}$	Рекуррентная формула: $\int \frac{dt}{t^2 + a^2\ ^k} = \frac{1}{2a^2\ \ k - 1} \cdot \frac{t}{t^2 + a^2\ ^{k-1}} +$ $+ \frac{1}{a^2} \cdot \frac{2k - 3}{2k - 2} \int \frac{dt}{t^2 + a^2\ ^{k-1}}$

№ п/п	Вид интеграла	Метод интегрирования
14	$\int \frac{Mx+N}{x^2+px+q^{\ k}}dx$	Интегрирование простейшей дроби IV типа: в выражении, стоящем в знаменателе, выделяют полный квадрат, вводят новую переменную $t = x + \frac{p}{2}$ и применяют рекуррентную формулу
15	$\int \frac{P_n\ \ x}{Q_m\ \ x}dx$ $\frac{P_n\ \ x}{Q_m\ \ x}$ – неправильная рациональная дробь	В подынтегральной дроби выделяют целую часть: $\int \frac{P_n\ \ x}{Q_m\ \ x}dx = \int M\ \ x\ \ dx + \int \frac{r\ \ x}{Q_m\ \ x}dx$
16	$\int \frac{P_n\ \ x}{Q_m\ \ x}dx$ $\frac{P_n\ \ x}{Q_m\ \ x}$ – правильная рациональная дробь	Подынтегральную дробь раскладывают на сумму простейших дробей: $\frac{P_n\ \ x}{Q_m\ \ x} = \frac{A_1}{x-a} + \frac{A_2}{x-a\ ^2} + \ldots + \frac{A_n}{x-a\ ^n}$ или $\frac{P_n\ \ x}{Q_m\ \ x} = \frac{B_1x+C_1}{x^2+px+q} + \frac{B_2x+C_2}{x^2+px+q\ ^2} + \ldots$ $\ldots + \frac{B_mx+C_m}{x^2+px+q\ ^m}$
17	$\int R\left(x, x^{\frac{m_1}{n_1}}, x^{\frac{m_2}{n_2}}, \ldots\right)dx$	Подстановка: $x = t^k$, где $k = НОК\ \ n_1, n_2, \ldots$
18	$\int R\left(x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{m_1}{n_1}}, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{m_2}{n_2}}, \ldots\right)dx$	$\frac{ax+b}{cx+d} = t^k$, где t – новая переменная, а $k = НОК\ \ n_1, n_2, \ldots$ – наименьшее общее кратное чисел $n_1, n_2, \ldots$
19	$\int \frac{Ax+B}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx$	Выделяется полный квадрат в подкоренном выражении и полученную в скобках сумму принимают за новую переменную
20	$\int \cos nx \cdot \cos mx dx$, $\int \sin nx \cdot \cos mx dx$, $\int \sin nx \cdot \sin mx dx$.	Представить подынтегральное произведение в виде суммы, используя формулы: $\cos\alpha \cdot \cos\beta = \frac{1}{2}\left[\cos\ \ \alpha+\beta\ \ + \cos\ \ \alpha-\beta\ \ \right]$

№ п/п	Вид интеграла	Метод интегрирования
		$\sin\alpha\cdot\cos\beta=\frac{1}{2}\left[\sin\ \alpha+\beta\ +\sin\ \alpha-\beta\ \right]$ $\sin\alpha\cdot\sin\beta=\frac{1}{2}\left[\cos\ \alpha-\beta\ -\cos\ \alpha+\beta\ \right]$
21	$\int\sin^n x\cdot\cos^m dx$, где n и m – целые числа.	n – нечетное положительное число, m – любое, применяется подстановка $t=\cos x$. m – нечетное положительное число, n – любое, применяется подстановка $t=\sin x$. n и m – четные положительные числа. В этом случае хороший результат дает применение формул: $\sin^2\alpha=\frac{1}{2}\ 1-\cos 2\alpha$ $\cos^2\alpha=\frac{1}{2}\ 1+\cos 2\alpha$ $\sin\alpha\cdot\cos\alpha=\frac{1}{2}\sin 2\alpha$
22	$\int R\ \sin x,\cos x\ \ dx$	Универсальная тригонометрическая подстановка: $t=tg\frac{x}{2}$, $dx=\frac{2dt}{1+t^2}$
23	$\int R\ \sin^2 x,\cos^2 x\ \ dx$	Подстановка: $t=tgx$, $dx=\frac{dt}{1+t^2}$
24	$\int R\ \ tgx\ \ dx$	Подстановка: $t=tgx$, $dx=\frac{dt}{1+t^2}$
25	$\int R\ \ ctgx\ \ dx$	Подстановка: $t=ctgx$, $dx=\frac{dt}{1+t^2}$
26	$\int f\ \ \sin x\ \cdot\cos x dx$	Подстановка: $t=\sin x$
27	$\int f\ \ \cos x\ \cdot\sin x dx$	Подстановка: $t=\cos x$

2. ОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

2.1. Понятие определенного интеграла. Площадь криволинейной трапеции

Пусть на отрезке a,b задана неотрицательная функция $y=f\ \ x$, $f\ \ x\ \geq 0$.

Определение. Криволинейной трапецией называется плоская фигура, ограниченная осью Ox, линией $y = f\ x$, с которой любая прямая, параллельная оси Oy, пересекается не более, чем в одной точке, и прямыми $x = a$ и $x = b$.

Поставим задачу: найти площадь S криволинейной трапеции.

Разобьем основание трапеции, отрезок a, b, точками $a = x_0, x_1, x_2, ..., x_{n-1}, x_n = b$ на n отрезков, через них проведем прямые, параллельные оси Oy. Таким образом трапеция будет состоять из n вертикальных полосок (криволинейных трапеций) (рис. 2.1).

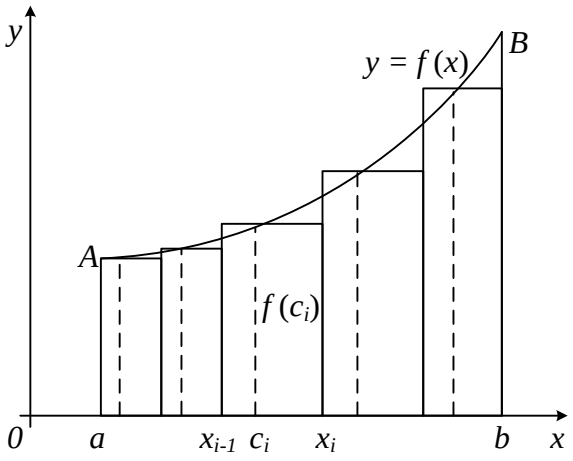

Рис. 2.1

Рассмотрим одну такую полоску (рис. 2.2), основанием которой является отрезок x_{k-1}, x_k и найдем ее площадь. На отрезке x_{k-1}, x_k возьмем произвольную точку c_k и найдем значение функции в этой точке: $f\ c_k$. Величина $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$ равна длине k-й части отрезка. Рассмотрим прямоугольник с высотой $f\ c_k$ и основанием Δx_k.

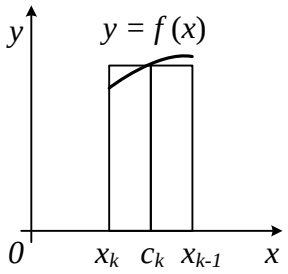

Рис. 2.2

Площадь этого прямоугольника равна: $S_k = f\ c_k \cdot \Delta x_k$.

Площадь прямоугольника S_k приближенно равна площади рассматриваемой криволинейной полоски, которую мы обозначим ΔS_k, т. е.

$$\Delta S_k \approx f\ c_k \cdot \Delta x_k.$$

Таким же образом поступим со всеми полосками, на которые мы разбили криволинейную трапецию. Тогда площадь криволинейной трапеции:

$$S_{крив.тр.} \approx f\ c_1 \cdot \Delta x_1 + f\ c_2 \cdot \Delta x_2 + ... + f\ c_n \cdot \Delta x_n = \sum_{k=1}^{n} f\ c_k \cdot \Delta x_k.$$

Это равенство будет тем точнее, чем меньше основания полосок. Обозначим $\lambda = \max \Delta x_k$. λ называется рангом дробления, устремим λ к 0 $\lambda \to 0$. Тогда площадь криволинейной трапеции равна

$$S = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{k=1}^{n} f\ c_k \cdot \Delta x_k,$$

где сумма вида $\sum_{k=1}^{n} f\ c_k\ \cdot \Delta x_k$ называется интегральной суммой для функции $y = f\ x$ на a,b .

Таким образом, площадь криволинейной трапеции выражается как предел, к которому стремятся площади криволинейных полосок, если длины их оснований стремятся к нулю, а количество рассматриваемых криволинейных полосок неограниченно растет.

Определение. Предел интегральной суммы при стремлении $\lambda \to 0$, если он существует, конечен и не зависит от способа разбиения отрезка $[a,b]$ и выбора точек c_k, называется *определенным интегралом от функции* $y = f\ x$ по промежутку $[a,b]$, обозначается $\int_a^b f\ x\, dx$, а сама функция $y = f\ x$ называется *интегрируемой* на отрезке $[a,b]$, т. е.:

$$\lim_{\lambda \to 0} \sum_{k=1}^{n} f\ c_k\ \cdot \Delta x_k = \int_a^b f\ x\ dx.$$

При этом число a называется *нижним пределом интервала*, число b – его *верхним пределом*; функция $f\ x$ – *подынтегральной функцией*, выражение $f\ x\ dx$ – *подынтегральным выражением*, а задача о нахождении $\int_a^b f\ x\, dx$ – *интегрированием функции* $f\ x$ на отрезке $[a,b]$.

Теорема 2.1. Если функция $f\ x$ непрерывна на $[a,b]$, то она интегрируема на этом промежутке.

Теорема 2.2. Если функция $f\ x$ ограничена на $[a,b]$ и имеет на $[a,b]$ конечное число точек разрыва первого рода, то она интегрируема на $[a,b]$.

Из рассмотренной выше задачи вытекает **геометрический смысл определенного интеграла**: $\int_a^b f\ x\, dx$ *равен площади криволинейной трапеции.*

Замечание 1. Для определенного интеграла не имеет значения, какой буквой обозначена переменная интегрирования, т. е.:

$$\int_a^b f\ x\, dx = \int_a^b f\ y\, dy = \int_a^b f\ t\, dt = ...,$$

так как смена обозначений такого рода никак не влияет на поведение интегральной суммы.

Замечание 2. Несмотря на сходство в обозначениях и терминологии, определенный и неопределенный интегралы – существенно различные понятия: в то

время как $\int f\ \ x\,dx$ представляет семейство функций, $\int\limits_a^b f\ \ x\,dx$ есть определенное число.

2.2. Экономический смысл определенного интеграла

Пусть непрерывная функция $z = f\ \ t$ задает производительность труда на некотором предприятии в момент времени $t \in\ 0,T$.

Найдем объем продукции, произведенной за весь промежуток времени $\left[0,T\right]$.

Разобьем отрезок $\left[0,T\right]$ на части точками $0 = t_0 < t_1 < t_2 < ... < t_{n-1} < t_n = T$, величина $\Delta t_k = t_k - t_{k-1}$ равна длительности k – го промежутка времени, $k = 1,2,...,n.$

Обозначим Δu_k объем продукции, произведенной за промежуток времени t_{k-1}, t_k . Эта величина приближенно равна

$$\Delta u_k = f\ \ c_k\ \ \Delta t_k,$$

где c_k – некоторый момент времени из промежутка t_{k-1}, t_k .

Вся произведенная продукция примерно равна сумме этих частей:

$$u \approx \sum_{k=1}^{n} u_k = \sum_{k=1}^{n} f\ \ c_k\ \ \Delta t_k\ .$$

Это приближенное равенство будет тем точнее, чем меньше разбиение отрезка $\left[0,T\right]$. Поэтому за *точное значение продукции примем предел, к которому стремится сумма* $\sum\limits_{k=1}^{n} u_k$ *при неограниченном измельчении разбиения отрезка*:

$$u = \lim_{\Delta t \to 0} \sum_{k=1}^{n} f\ \ c_k\ \ \Delta t_k\ ,$$

что, согласно определению определенного интеграла, равно:

$$u = \int\limits_0^T f\ \ t\ dt\ .$$

Пример. Пусть производительность цеха в течение рабочего дня изменяется в соответствии с функцией $z = f\ \ t\ = -0,05t^2 + 0,6t + 14$ (ден. ед./ч). Начало рабочего дня соответствует $t = 0$ ч.

Тогда стоимость произведенной к моменту времени t, ч, продукции (объем произведенной продукции в стоимостном выражении) задается функцией:

$$u\ t\ = \int_0^t f\ \ t\ dt = \int_0^t -0,05t^2 + 0,6t + 14\ dt = \left(-0,05\frac{t^3}{3} + 0,6\frac{t^2}{2} + 14t\right)\Big|_0^t = -\frac{t^3}{60} + \frac{3t^2}{10} + 14t\ .$$

За всю смену рабочий произведет продукции на

$$u\ 8\ = -\frac{8^3}{60} + \frac{3\cdot 8^2}{10} + 14\cdot 8 \approx 149,1\ \text{ ден.ед.}$$

2.3. Свойства определенного интеграла

Далее будем предполагать интегрируемость всех рассматриваемых функций на выделенных отрезках интегрирования.

Рассмотрим сначала свойства определенного интеграла, которые имеют аналоги в случае интеграла неопределенного.

Свойство 1. Постоянный множитель можно выносить за знак интеграла, т. е.

$$\int_a^b \alpha f\ \ x\ dx = \alpha \int_a^b f\ \ x\ dx\ ,$$

где α – некоторое число.

Доказательство. Представим интеграл, стоящий в левой части, как предел интегральной суммы и воспользуемся свойствами пределов. Тогда

$$\int_a^b \alpha f\ \ x\ \ dx = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=1}^n \alpha f\ \ c_k\ \ \cdot \Delta x_k = \alpha \lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=1}^n f\ \ c_k\ \ \cdot \Delta x_k = \alpha \int_a^b f\ \ x\ \ dx\ .$$

Свойство 2. Интеграл от алгебраической суммы двух функций равен такой же сумме интегралов от этих функций, т. е.

$$\int_a^b\ f\ \ x\ \pm g\ \ x\ \ \ dx = \int_a^b f\ \ x\ dx \pm \int_a^b g\ \ x\ \ dx.$$

Доказательство. Свойства 2 аналогично свойству 1.

Перейдем теперь к свойствам определенного интеграла, которые не имеют аналогов в случае неопределенного интеграла.

Свойство 3. Если нижний и верхний пределы интегрирования поменять местами, то интеграл изменит знак:

$$\int_a^b f\ \ x\ dx = -\int_b^a f\ \ x\ dx.$$

Доказательство основывается на определении определенного интеграла.

Свойство 4. Для любых трех чисел a, b, c справедливо равенство

$$\int_a^b f\ x\,dx = \int_a^c f\ x\,dx + \int_c^b f\ x\,dx,$$

если только все три интеграла существуют.

Доказательство. Пусть $a < c < b$ и функция $f\ x$ неотрицательна на $[a,b]$. Согласно геометрическому смыслу определенного интеграла $\int_a^c f\ x\,dx = S_1$ и $S_2 = \int_c^b f\ x\,dx$, $\int_a^b f\ x\,dx = S$, где S - площадь под кривой $y = f\ x$ на отрезке $[a,b]$.

Тога при сделанных предположениях доказываемое равенство утверждает наличие следующего соотношения: $S = S_1 + S_2$.

Если $a < b < c$ и функция $f\ x$ неотрицательна на a,c, то получим $S_1 = S - S_2$ – площадь под кривой $y = f\ x$ на отрезке a,c.

Аналогично доказывается это свойство при любом другом расположении точек *a, b, c* **,** а также в случае отрицательности функции $y = f\ x$.

Свойство 5. Если функция неотрицательна $f\ x \geq 0$ на отрезке $[a,b]$, то $\int_a^b f\ x\,dx \geq 0$.

Если функция неположительна $f\ x \leq 0$ на отрезке $[a,b]$, то $\int_a^b f\ x\,dx \leq 0$.

Доказательство. Рассмотрим случай $f\ x > 0$ на $[a,b]$. Составим интегральную сумму для $f\ x$ на $[a,b]$: $\sum_{k=1}^{n} f\ c_k \cdot \Delta x_k$.

Здесь $f\ c_k \geq 0$ (функция $f\ x$ неотрицательна по условию), $\Delta x_k = x_k - x_{k-1} \geq 0$. Следовательно, $\lim_{\lambda \to 0} \sum_{k=1}^{n} f\ c_k \cdot \Delta x_k \geq 0$, а значит $\int_a^b f\ x\,dx \geq 0$.

Доказательство в случае $f\ x \leq 0$ проводится аналогично.

Свойство 6. $\int_a^a f\ x\,dx = 0.$

Здесь отрезок интегрирования равен нулю, следовательно, и определенный интеграл тоже.

С геометрической точки зрения это означает, что если конец основания трапеции совместить с его началом, то трапеция превратится в прямоугольный отрезок – ординату *f(a)*, площадь которого нужно считать равной нулю.

Свойство 7. Если для функций $f\ x$ и $g\ x$ на отрезке $[a,b]$ выполняется условие $f\ x \leq g\ x$, то будет справедливым неравенство:

$$\int_a^b f\ x\ dx \le \int_a^b g\ x\ dx.$$

Доказательство. Рассмотрим функцию $g\ x - f\ x \ge 0$ на отрезке $[a,b]$. Проинтегрируем и применим свойство 5, тогда $\int_a^b g\ x - f\ x\ dx \ge 0$. Далее воспользуемся свойством 2: $\int_a^b g\ x - f\ x\ dx = \int_a^b g\ x\ dx - \int_a^b f\ x\ dx \ge 0$. Отсюда следует: $\int_a^b f\ x\ dx \le \int_a^b g\ x\ dx$.

Свойство 8 (*об оценке определенного интеграла*). Значение определенного интеграла заключено между произведениями наименьшего и наибольшего значений подынтегральной функции на длину интервала интегрирования, т. е.

$$m\ b-a\ \le \int_a^b f\ x\ dx \le M\ b-a\ , \qquad a<b,$$

где m и M – соответственно наименьшее и наибольшее значения функции $f\ x$ на отрезке $[a,b]$: $m \le f\ x\ \le M$.

Доказательство. Для доказательства нам понадобится вычислить интеграл: $\int_a^b dx = \int_a^b 1\cdot dx = \lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{k=1}^{n} 1\cdot \Delta x_k = \lim\limits_{\lambda\to 0}\ b-a\ = b-a$.

Возьмем две функции $f\ x\ - m$ и $M - f\ x$.

Функция $f\ x\ - m$ на отрезке $[a,b]$ неотрицательна, т. е.:

$$f\ x\ - m \ge 0 \Rightarrow \int_a^b f\ x\ - m\ dx \ge 0 \Rightarrow \int_a^b f\ x\ dx \ge \int_a^b m dx \Rightarrow \int_a^b f\ x\ dx \ge m\ b-a\ ,$$

т. е. $m\ b-a\ \le \int_a^b f\ x\ dx$.

Аналогично получаем: $M - f\ x\ \ge 0\ \Rightarrow M\ b-a\ \ge \int_a^b f\ x\ dx$.

Свойство 9 (*теорема о среднем*). Если $f\ x$ интегрируема на $[a,b]$ (где $a<b$), то на $[a,b]$ найдется такая точка c: $a<c<b$, что выполняется соотношение:

$$\int_a^b f\ x\ dx = f\ c\ \ b-a\ .$$

Из теоремы о среднем мы получили среднее значение непрерывной функции $f\ x$ на отрезке $[a,b]$:

$$f\ c\ = \frac{\int_a^b f\ x\ dx}{b-a}.$$

Доказательство. Функция, непрерывная на отрезке, принимает на этом отрезке своё наименьшее m и наибольшее M значения. Тогда

$$m \le f\ x\ \le M \Rightarrow m\ b-a\ \le \int_a^b f\ x\,dx \le M\ b-a\ \Rightarrow m \le \frac{1}{b-a}\int_a^b f\ x\,dx \le M\,.$$

Число $\frac{1}{b-a}\int_a^b f\ x\,dx$ заключено между минимальным и максимальным значениями функции на отрезке. Одно из свойств функции, непрерывной на отрезке, заключается в том, что эта функция принимает любое значение, расположенное между m и M. Таким образом, существует точка $c\ a<c<b$, такая что

$$f\ c\ = \frac{1}{b-a}\int_a^b f\ x\,dx \Rightarrow \int_a^b f\ x\,dx = f\ c\ \cdot\ b-a\ .$$

Это свойство имеет простую геометрическую интерпретацию: если $f\ x\ \ge 0$ непрерывна на отрезке $\left[a,b\right]$, то существует точка $c\ a<c<b$ такая, что площадь криволинейной трапеции равна площади прямоугольника с основанием $\left[a,b\right]$ и высотой $f\ c$.

2.4. Определенный интеграл с переменным верхним пределом. Формула Ньютона–Лейбница

До сих пор мы рассматривали определенный интеграл с постоянными пределами интегрирования a и b. Предположим, что нижний предел интегрирования постоянный, а верхний – переменный. Придавая верхнему пределу различные значения, будем получать соответствующие значения интеграла; следовательно, при рассматриваемом условии интеграл является *функцией своего верхнего предела.* Таким образом, записывают:

$$I\ x\ = \int_a^x f\ x\,dx\,.$$

Однако переменная x в подынтегральном выражении служит лишь вспомогательной переменной – переменной интегрирования, пробегающей в процессе составления интеграла значения от a до x. Поэтому нагляднее употреблять такую запись:

$$I\ x\ = \int_a^x f\ t\,dt\,.$$

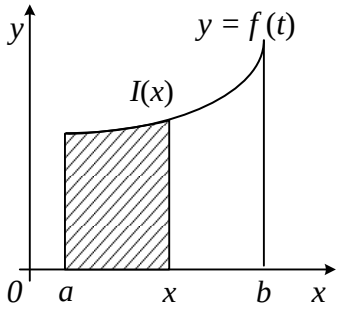

Рис. 2.3

Геометрически функция $I\ x$ представляет собой площадь заштрихованной криволинейной трапеции, если $f\ x\ \ge 0$. При этом функция $I\ x$ возрастающая, так как с ростом x площадь криволинейной трапеции увеличивается (рис. 2.3).

Теорема 2.3. Производная определенного интеграла по верхнему пределу равна значению подынтегральной функции при переменном верхнем пределе, т. е.

$$I'(x) = \left(\int_a^x f(t)\,dt\right)'_x = f(x).$$

Из сформулированной теоремы вытекает, что $I(x)$ является первообразной для функции $f(x)$. Тогда из теоремы о первообразной следует, что $I(x) = F(x) + c$, где $F(x)$ – какая-то первообразная функции $f(x)$. Итак,

$$\int_a^x f(t)\,dt = F(x) + c.$$

Положим $x = a$, получим $\int_a^a f(t)\,dt = F(a) + c = 0$. Отсюда $c = -F(a)$, тогда

$$\int_a^x f(t)\,dt = F(x) - F(a).$$

При $x = b$, получим $\int_a^b f(t)\,dt = F(b) - F(a)$.

Так как обозначение переменной не играет роли, то получаем формулу

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a),$$

которая называется формулой Ньютона–Лейбница. Из формулы Ньютона–Лейбница следует, что для вычисления определенного интеграла нужно найти первообразную подынтегральной функции и затем подставить пределы интегрирования:

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a).$$

Символ $\Big|_a^b$ называется двойной подстановкой.

Пример. Найти определенные интегралы:

1. $\int_1^2 x^2 + 3x\,dx$. 2. $\int_{-1}^1 \frac{dx}{1+x^2}$. 3. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x + 2\cos x\,dx$.

Решение

1. $\int_1^2 x^2 + 3x\,dx = \left(\frac{x^3}{3} + \frac{3x^2}{2}\right)\Bigg|_1^2 = \left(\frac{2^3}{3} + \frac{3\cdot 2^2}{2}\right) - \left(\frac{1^3}{3} + \frac{3\cdot 1^2}{2}\right) = \left(\frac{8}{3} + 6\right) - \left(\frac{1}{3} + \frac{3}{2}\right) =$

$= \frac{8}{3} + 6 - \frac{1}{3} - \frac{3}{2} = \frac{41}{6}$.

2. $\int\limits_{-1}^{1}\frac{dx}{1+x^2}=arctgx\big|_{-1}^{1}=arctg1-arctg\ -1\ =\frac{\pi}{4}-\left(-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2}.$

3. $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}}\sin x+2\cos x\ \ dx=\ -\cos x+2\sin x\ \Big|_{0}^{\frac{\pi}{2}}=\left(-\cos\frac{\pi}{2}+2\sin\frac{\pi}{2}\right)-\ -\cos 0+2\sin 0\ =$

$=\ 0+2\ -\ -1+0\ =3.$

2.5. Замена переменной и интегрирование по частям в определенном интеграле

Теорема 2.4. *(о замене переменной).* Если функция $x=\varphi\ t$ удовлетворяет условиям:

1) $\varphi\ t$ имеет непрерывную производную на отрезке $\left[\alpha,\beta\right]$;

2) $\varphi\ \alpha\ =a,\ \varphi\ \beta\ =b,$

то для любой непрерывной на отрезке $\left[a,b\right]$ функции $f\ \ x$ имеет место равенство:

$$\int\limits_{a}^{b}f\ \ x\ dx=\int\limits_{\alpha}^{\beta}f\left[\varphi\ \ t\ \right]\varphi'\ \ t\ \ dt\,.$$

Из теоремы следует, что, выполняя замену переменной в определенном интеграле, необходимо заменить и пределы интегрирования.

Пример. Вычислить определенные интегралы:

1. $\int\limits_{0}^{1}x\ \ 2-x^2\ \ ^5dx.$ 2. $\int\limits_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{4}}\cos^2 x\cdot\sin xdx.$

Решение

1. $\int\limits_{0}^{1}x\ \ 2-x^2\ \ ^5dx=\left|\begin{array}{l} t=2-x^2 \\ dt=-2xdx\Rightarrow dx=\dfrac{dt}{-2x} \\ \text{при}\ \ x=0\Rightarrow t=2-0^2=2 \\ \text{при}\ \ x=1\Rightarrow t=2-1^2=1 \end{array}\right|=\int\limits_{2}^{1}x\cdot t^5\cdot\frac{dt}{-2x}=-\frac{1}{2}\int\limits_{2}^{1}t^5dt=-\frac{1}{2}\cdot\frac{t^6}{6}\Bigg|_{2}^{1}=$

$=-\frac{1}{12}t^6\Big|_{2}^{1}=-\frac{1}{12}\ \ 1-2^6\ \ =\frac{63}{12}=\frac{21}{4}.$

$$2.\ \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{4}} \cos^2 x \cdot \sin x dx = \left| \begin{array}{l} t = \cos x \\ dt = -\sin x dx \\ \text{при } x = \frac{\pi}{3} \Rightarrow t = \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} \\ \text{при } x = \frac{\pi}{4} \Rightarrow t = \cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{array} \right| = \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{2}}{2}} t^2 \ -dt \ = -\frac{t^3}{3}\Bigg|_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{2}}{2}} =$$

$$= -\frac{1}{3}\left(\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^3 - \left(\frac{1}{2}\right)^3\right) = -\frac{1}{3}\left(\frac{2\sqrt{2}}{8} - \frac{1}{8}\right) = -\frac{1}{3} \cdot \frac{2\sqrt{2}-1}{8} = -\frac{2\sqrt{2}-1}{24}.$$

Рассмотрим теперь, как выполняется интегрирование по частям в определенном интеграле.

Пусть функции $u\ x$ и $v\ x$ имеют непрерывные производные на отрезке $[a,b]$, тогда по правилу дифференцирования произведения получим:

$$uv\ ' = u'v + uv'.$$

Отсюда следует, что функция uv является первообразной для функции $u'v + uv'$. А так как функция $u'v + uv'$ непрерывна на отрезке $[a,b]$, то интеграл от нее существует, т. е. она интегрируема на этом отрезке, и по формуле Ньютона–Лейбница, имеем:

$$\int_a^b uv\ ' dx = \int_a^b u'vdx + \int_a^b uv'dx \ \Rightarrow \ uv\Big|_a^b = \int_a^b vdu + \int_a^b udv \ \Rightarrow \int_a^b udv = uv\Big|_a^b - \int_a^b vdu.$$

Итак, формула интегрирования по частям в определенном интеграле имеет вид:

$$\int_a^b udv = uv\Big|_a^b - \int_a^b vdu\ .$$

Пример. Вычислить определенные интегралы:

1. $\int_1^2 xe^x dx$. 2. $\int_0^1 \ln\ 1 + x\ \ dx$.

Решение

$$1.\ \int_1^2 xe^x dx = \left| \begin{array}{l} u = x \Rightarrow du = dx \\ dv = e^x dx \Rightarrow v = \int e^x dx = e^x \end{array} \right| = xe^x\Big|_1^2 - \int_1^2 e^x dx = 2e^2 - 1 \cdot e - e^x\Big|_1^2 =$$

$$= 2e^2 - e - \ e^2 - e \ = 2e^2 - e - e^2 + e = e^2.$$

2. $\int_0^1 \ln\ 1+x\ dx = \left| \begin{array}{l} u = \ln\ 1+x \Rightarrow du = \dfrac{dx}{1+x} \\ dv = dx \Rightarrow v = \int dx = x \end{array} \right| = x \cdot \ln\ 1+x\ \Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{xdx}{1+x} =$

$$= \ln 2 - \int_0^1 \frac{x+1\ -1}{x+1} dx = \ln 2 - \int_0^1 \frac{x+1}{x+1} dx + \int_0^1 \frac{dx}{x+1} = \ln 2 - \int_0^1 dx + \int_0^1 \frac{dx}{x+1} =$$

$$= \ln 2 - x\Big|_0^1 + \ln|x+1|\Big|_0^1 = \ln 2 -\ 1-0\ + \ln 2 - \ln 1 = 2\ln 2 - 1 = \ln 4 - 1.$$

Задачи для самостоятельного решения

Вычислить неопределенные интегралы:

1) $\int_0^2 \frac{xdx}{x+1\ ^4}$;

2) $\int_1^3 x\sqrt[3]{x^2-4}dx$;

3) $\int_1^2 \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2} dx$;

4) $\int_0^1 \frac{xdx}{1+x^4}$;

5) $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \cos^2 x \cdot \sin x dx$;

6) $\int_0^1 \frac{arctg^2 x}{1+x^2} dx$;

7) $\int_{-1}^1 arctgx dx$;

8) $\int_1^4 x+1\ e^x dx$;

9) $\int_0^{\pi} x \cdot \cos x dx$;

10) $\int_1^e x \ln x dx$.

3. НЕСОБСТВЕННЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

3.1. Несобственные интегралы с бесконечными пределами интегрирования

В предыдущих подразделах, рассматривая *определенные интегралы*, мы подразумевали, что интервал интегрирования *конечен*, и подынтегральная функция на нем *непрерывна*. Но довольно часто возникает необходимость распространить определение определенного интеграла на случаи *бесконечного* интервала интегрирования и *разрывной* подынтегральной функции. Несобственные интегралы бывают двух видов.

Пусть функция $y = f\ x$ непрерывна при всех значениях x из интервала $a, +\infty$. Рассмотрим $t > a$. На интервале a, t функция $f\ x$ непрерывна, и мы можем вычислить интеграл

$$I\ t\ = \int_a^t f\ \ x\ \ dx\,.$$

Пусть $t \to +\infty$.

Определение. Несобственным интегралом первого рода от функции $f\ \ x$ называется предел интеграла $\int_a^t f\ \ x\ \ dx$ при $t \to +\infty$. Записывается это так:

$$\int_a^{+\infty} f\ \ x\ dx = \lim_{t \to +\infty} \int_a^t f\ \ x\ dx\,.$$

Если предел существует и конечен, то интеграл сходится. Если предел не существует, то интеграл расходится.

Если первообразная функция $F\ \ x$ для подынтегральной функции $f\ \ x$ известна, то легко установить, сходится несобственный интеграл или нет. С помощью формулы Ньютона – Лейбница получаем

$$\int_a^{+\infty} f\ \ x\ dx = \lim_{t \to +\infty} \left[F\ \ t\ - F\ \ a\ \right] = F\ \ \infty\ - F\ \ a\ \ .$$

Вычислить несобственный интеграл – это значит найти число (точно так же, как в определенном интеграле), или доказать, что он расходится (например, получить в итоге бесконечность вместо числа).

Аналогично определяется несобственный интеграл на интервале $-\infty, a$:

$$\int_{-\infty}^a f\ \ x\ dx = \lim_{t \to -\infty} \int_t^a f\ \ x\ \ dx\,.$$

Если функция определена и непрерывна на всей числовой оси, то можно рассматривать несобственный интеграл на интервале $-\infty, +\infty$. Пусть для некоторого числа a несобственные интегралы $\int_{-\infty}^a f\ \ x\ dx$ и $\int_a^{+\infty} f\ \ x\ dx$ сходятся. Тогда

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f\ \ x\ dx = \int_{-\infty}^a f\ \ x\ dx + \int_a^{+\infty} f\ \ x\ dx\,.$$

При этом интеграл $\int_{-\infty}^{+\infty} f\ \ x\ dx$ называется сходящимся. Если хотя бы один из интегралов, входящих в правую часть, расходится, то несобственный интеграл $\int_{-\infty}^{+\infty} f\ \ x\ dx$ называется расходящимся. Введенное определение не зависит от выбора числа a.

Сходящемуся несобственному интегралу $\int_a^{+\infty} f\ \ x\ dx$ можно придать определенный ***геометрический смысл***. Он заключается в следующем: это площадь

бесконечно длинной области D, ограниченной сверху неотрицательной функцией $y = f\ \ x\ \ $, снизу осью Ox, слева – прямой $x = a$ (рис. 3.1).

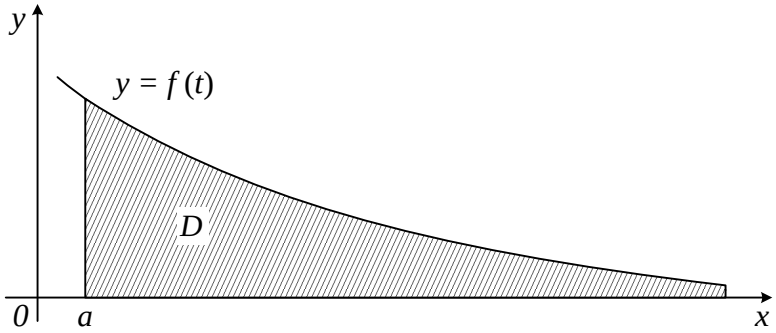

Рис. 3.1

Сходящиеся интегралы соответствуют таким областям D, площадь которых конечна (хотя сама область D неограничена), а расходящиеся (в случае $f\ \ x\ \ \geq 0$) – неограниченным областям с бесконечной площадью. В случае, когда $F\ \ b\ \ \to \infty$ при $b \to +\infty$, часто пишут формально:

$$\int_a^{+\infty} f\ \ x\ dx = \infty,$$

однако нужно ясно понимать, что эта запись означает расходимость интеграла и отсутствие у него числового значения.

Само определение значения интеграла через предел интегралов по конечным, но увеличивающимся отрезкам означает исчерпание площади путем учёта все большей её части $S_b = \int_a^b f\ \ x\ dx$ правый вертикальный отрезок, проведённый при $x = b$, отодвигается всё дальше и дальше в бесконечность (рис. 3.2); в пределе будет учтена вся площадь под графиком $y = f\ \ x\ \ $.

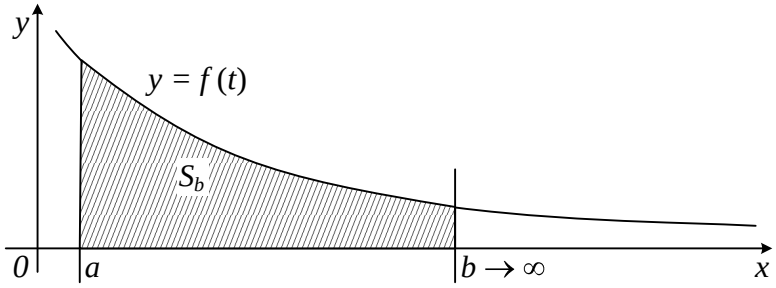

Рис. 3.2

Если несобственный интеграл $\int_a^{+\infty} f\ \ x\ dx$ сходится, то будем говорить, что заштрихованная фигура на рис. 3.1 имеет площадь, равную этому интегралу. Если интеграл расходится, то говорить о площади фигуры нельзя.

Заметим, что на несобственные интегралы без всяких изменений переносятся простейшие свойства определенного интеграла, если только все интегралы сходятся.

Запишем два замечательных несобственных интеграла, которые встречаются в приложениях:

$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$ (интеграл Пуассона);

$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}$ (интеграл Дирихле).

Пример. Вычислить несобственные интегралы:

1. $\int\limits_{0}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2}$. 2. $\int\limits_{-\infty}^{-1} \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}}$. 3. $\int\limits_{\frac{\pi}{3}}^{+\infty} \sin x dx$.

Решение

1. По определению имеем :

$$\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{t\to+\infty} \int\limits_{0}^{t} \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{t\to+\infty} arctgt\Big|_0^t = \lim_{t\to+\infty} arctgt - arctg0 = \frac{\pi}{2}.$$

2. $\int\limits_{0}^{\infty} \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}} = \lim_{t\to-\infty} \int\limits_{t}^{-1} x^{-\frac{2}{3}} dx = \lim_{t\to-\infty} 3x^{\frac{1}{3}}\Big|_t^{-1} = \lim_{t\to-\infty} -3-\sqrt[3]{t} = \infty$.

Интеграл расходится.

3. $\int\limits_{\frac{\pi}{3}}^{+\infty} \sin x dx = \lim_{t\to+\infty} \int\limits_{\frac{\pi}{3}}^{t} \sin x dx = \lim_{t\to+\infty} -\cos x \Big|_{\pi/3}^{t} = \lim_{t\to+\infty} \left(-\cos t + \cos\frac{\pi}{3}\right)$.

$\lim\limits_{t\to+\infty} \cos t$ не существует, следовательно, интеграл расходится.

3.2. Несобственные интегралы от разрывных функций

Пусть функция $y = f\ x$ непрерывна при всех x из $[a,b]$, а в точке $x = b$ имеет разрыв второго рода. Пусть $\varepsilon > 0$ сколь угодно малая величина. Тогда на промежутке $[a, b-\varepsilon]$ функция $f\ x$ будет непрерывной и можно найти интеграл $\int\limits_{a}^{b-\varepsilon} f\ x\, dx$.

Устремим ε к нулю и рассмотрим предел $\lim\limits_{\varepsilon\to 0} \int\limits_{a}^{b-\varepsilon} f\ x\ dx$.

Этот предел называется ***несобственным интегралом второго рода***; записывается это так:

$$\int_a^b f\ \ x\,dx = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_a^{b-\varepsilon} f\ \ x\ \ dx.$$

Если предел существует и конечен, то интеграл сходится, если предел не существует, то интеграл расходится.

Аналогично определяется интеграл, если функция $f\ \ x$ имеет разрыв на левом конце интервала $[a,b]$:

$$\int_a^b f\ \ x\ \ dx = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{a+\varepsilon}^{b} f\ \ x\ \ dx.$$

Если $f\ \ x$ имеет разрыв в точке $x=c$, лежащей внутри промежутка $[a,b]$, то

$$\int_a^b f\ \ x\ \ dx = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_a^{c-\varepsilon} f\ \ x\ \ dx + \lim_{\delta\to 0}\int_{c+\delta}^{b} f\ \ x\ \ dx.$$

Пример. Вычислить несобственные интегралы:

1. $\int_0^1 \frac{dx}{x^3}$. 2. $\int_2^3 \frac{dx}{\sqrt{x-2}}$. 3. $\int_{-1}^1 \frac{dx}{x^2}$.

Решение

1. Подынтегральная функция $f\ \ x\ = \frac{1}{x^3}$ имеет бесконечный разрыв в точке $x=0$. Имеем:

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^3} = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_\varepsilon^1 \frac{dx}{x^3} = \lim_{\varepsilon\to 0}\left(-\frac{1}{2x^2}\right)\Big|_\varepsilon^1 = \lim_{\varepsilon\to 0}\left(-\frac{1}{2}+\frac{1}{2\varepsilon^2}\right) = \infty.$$

Интеграл расходится.

2. Подынтегральная функция $f\ \ x\ = \frac{1}{\sqrt{x-2}}$ имеет бесконечный разрыв в точке $x=2$. Имеем:

$$\int_2^3 \frac{dx}{\sqrt{x-2}} = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{2+\varepsilon}^3 \frac{dx}{\sqrt{x-2}} = \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{2\sqrt{x-2}}{1}\Big|_{2+\varepsilon}^3 = \lim_{\varepsilon\to 0}\ 2-2\sqrt{\varepsilon}\ \ = 2.$$

Интеграл сходится.

3. Подынтегральная функция $f\ \ x\ = \frac{1}{x^2}$ имеет бесконечный разрыв в точке $x=0$. Имеем:

$$\int_{-1}^1 \frac{dx}{x^2} = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{-1}^{-\varepsilon} \frac{dx}{x^2} + \lim_{\delta\to 0}\int_\delta^1 \frac{dx}{x^2} = \lim_{\varepsilon\to 0}\left(-\frac{1}{x}\right)\Big|_{-1}^{-\varepsilon} + \lim_{\delta\to 0}\left(-\frac{1}{x}\right)\Big|_\delta^1 = \lim_{\varepsilon\to 0}\left(\frac{1}{\varepsilon}-1\right) + \lim_{\delta\to 0}\left(-1+\frac{1}{\delta}\right) = \infty.$$

Интеграл расходится.

Задачи для самостоятельного решения

Вычислить неопределенные интегралы:

1) $\int\limits_{-1}^{1}\frac{dx}{\sqrt{x+1}}$;

2) $\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{arctgx}{1+x^2}$;

3) $\int\limits_{1}^{\infty}\frac{dx}{x^3}$;

4) $\int\limits_{0}^{1}\frac{dx}{\sqrt{x}}$;

5) $\int\limits_{-1}^{1}\frac{dx}{x^4}$;

6) $\int\limits_{0}^{1}x\ln x dx$;

7) $\int\limits_{0}^{\infty}e^{-2x}dx$;

8) $\int\limits_{0}^{\frac{1}{2}}\frac{dx}{x\cdot\ln^2 x}$.

4. ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ПРИЛОЖЕНИЯ ОПРЕДЕЛЕННОГО ИНТЕГРАЛА

4.1. Вычисление площадей плоских фигур

1. Пусть функция $y=f\ x$ **неотрицательна и непрерывна на отрезке** $[a,b]$ (рис. 4.1).

Тогда площадь S фигуры, ограниченной линиями $y=f\ x$ на $[a,b]$ численно равна интегралу $\int\limits_{a}^{b}f\ x\,dx$, т. е. если $f\ x\ \geq 0$, то $S=\int\limits_{a}^{b}f\ x\,dx$.

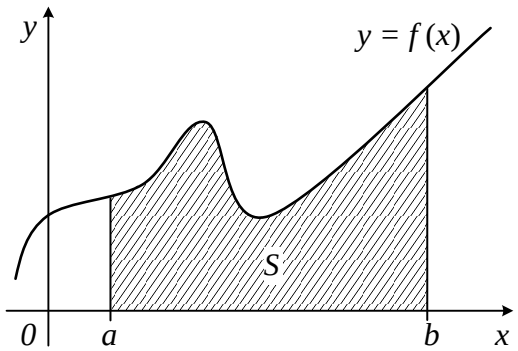

Рис. 4.1

Пример. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями $y=x^2$, $y=0$, $x=3$.

Решение. Сделаем чертеж (рис. 4.2).

Из рис. 4.2 видно, что верхней границей данной криволинейной трапеции является дуга параболы $y=x^2$. Тогда по формуле о площади криволинейной трапеции получаем:

$$S=\int\limits_{0}^{3}x^2dx=\frac{x^3}{3}\Big|_0^3=9 \text{ (кв. ед.)}.$$

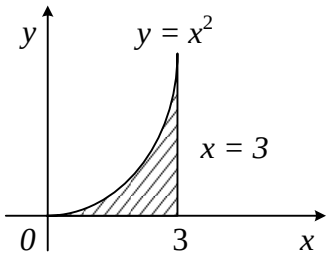

Рис. 4.2

2. Пусть функция $y = f(x)$ **неположительна и непрерывна на отрезке** $[a,b]$.

Отражая кривую $y = f\ x$ относительно оси абсцисс, получаем кривую с уравнением $y = -f\ x$. Функция $y = -f\ x$ уже неотрицательна на $[a,b]$, а площадь под этой кривой на $[a,b]$ из соображений симметрии равна площади S, т. е. если $f\ x \le 0$, то $S = -\int_a^b f\ x\, dx$.

Пример. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями $y = -x^2$, $y = x - 2$, $y = 0$.

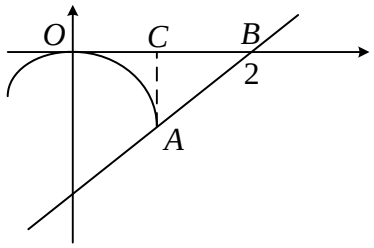

Рис. 4.3

Решение. Сделаем чертеж (рис. 4.3).

Из рис. 4.3 видно, что искомая площадь S криволинейного треугольника OAB может рассматриваться как площадь над кривой OAB на отрезке $[0,2]$. Однако указанная кривая не задается одним уравнением. Поэтому для нахождения $S = S_{OAB}$ разобьем криволинейный треугольник OAB на части, проецируя точку A излома на ось абсцисс. Тогда $S = S_{OAC} + S_{ABC}$. Абсциссы точек O, A, B задают пределы интегрирования. Координаты точек O, A, B равны (0,0), (1,–1), (2,0). Вычислим площади фигур OAC и ABC:

$$S_{OAC} = -\int_0^1 -x^2\ dx = \int_0^1 x^2 dx = \frac{x^3}{3}\Big|_0^1 = \frac{1}{3},$$

$$S_{ABC} = -\int_1^2 x - 2\ dx = \left(-\frac{x^2}{2} + 2x\right)\Big|_1^2 = \frac{1}{2}.$$

Окончательно площадь фигуры равна $S = \frac{1}{3} + \frac{1}{2} = \frac{5}{6}$ (кв. ед.)

3. Пусть плоская фигура ограничена линиями $y = \varphi_1\ x$, $y = \varphi_2\ x$, $x = a$, $x = b$.

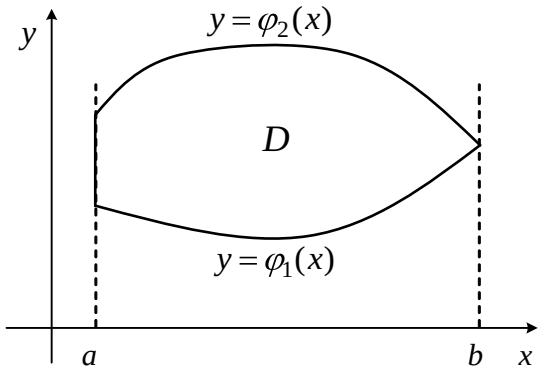

Рис. 4.4

Площадь D рассматриваемой фигуры (рис. 4.4) ограничена сверху и снизу кривыми $y = \varphi_2\ x$ и $y = \varphi_1\ x$ соответственно, то:

$$S = \int_a^b \varphi_2\ x\, dx - \int_a^b \varphi_1\ x\ dx = \int_a^b \varphi_2\ x - \varphi_1\ x\ dx.$$

Пример. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями $y = x^2 - 2$, $y = x$.

Решение. Сделаем чертеж (рис. 4.5). Данная фигура ограничена снизу дугой

параболы $y = x^2 - 2$ и сверху прямой $y = x$. Для того, чтобы установить пределы интегрирования, найдем точки пересечения параболы $y = x^2 - 2$ и прямой $y = x$. То есть решим уравнение: $x^2 - 2 = x \Rightarrow \ \Rightarrow x^2 - x - 2 = 0 \Rightarrow x_1 = -1,\ x_2 = 2$.

Тогда получим:

$$S = \int_{-1}^{2} x - x^2 - 2 \ dx = \int_{-1}^{2} -x^2 + x + 2 \ = \left(-\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 2x \right)\Bigg|_{-1}^{2} =$$

$$= \left(-\frac{8}{3} + 2 + 4 \right) - \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2} - 2 \right) = 4\frac{1}{2} \text{ (кв.ед.).}$$

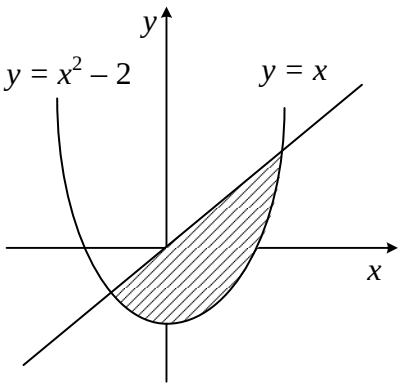

Рис. 4.5

4. Рассмотрим фигуру, ограниченную сверху и снизу несколькими линиями, заданными уравнениями $y = f_1 \ x$, $y = f_2 \ x$, $y = \varphi_1 \ x$, $y = \varphi_2 \ x$.

Если фигура не является криволинейной трапецией (рис. 4.6), ее разбивают на части и находят площадь как сумму площадей отдельных частей. Итак, для того, чтобы найти ее площадь фигуру разбивают на части таким образом, чтобы верхняя граница состояла только из одной кривой и нижняя тоже только из одной кривой. Таким образом,

$$S = \int_a^b \left[f_1 \ x - \varphi_1 \ x \right] dx +$$

$$+ \int_b^c \left[f_1 \ x - \varphi_2 \ x \right] dx +$$

$$+ \int_c^d \left[f_2 \ x - \varphi_2 \ x \right] dx.$$

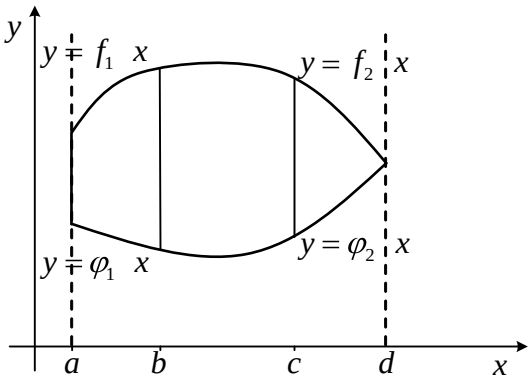

Рис. 4.6

5. Рассмотрим фигуру, ограниченную осью Ox **и линией, заданной уравнением** $y = f \ x$, **если функция** $f \ x$ **непрерывна на отрезке** $[a,b]$ **и меняет на нем знак**, то

$$S = \int_a^b \left| f \ x \right| dx .$$

Например (рис. 4.7),

$$S = S_1 + S_2 + S_3 =$$

$$\int_a^c f \ x \, dx - \int_c^d f \ x \ dx + \int_d^b f \ x \, dx.$$

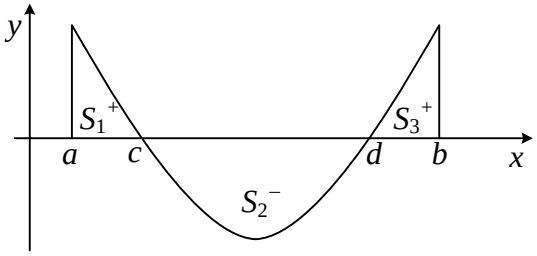

Рис. 4.7

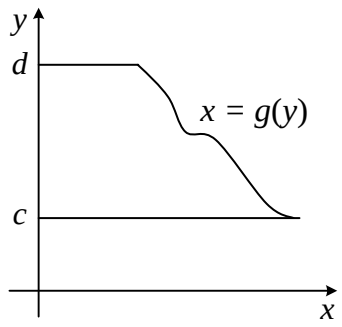

Рис. 4.8

6. Если фигура ограничена линиями $x = g\ y$, $y = c$, $y = d$, $x = 0$, (рис. 4.8), то

$$S = \int_c^d g\ y\, dy.$$

7. Линия на плоскости задана параметрически:

$$\begin{cases} x = x\ t \\ y = y\ t \end{cases},\ \alpha \le t \le \beta,\ x\ \alpha\ = a,\ x\ \beta\ = b.$$

Пусть данные уравнения определяют функцию $y = f\ x$, тогда в формуле $S = \int_a^b f\ x\, dx$ сделаем замену $f\ x\ = y = y\ t$, $dx = d\ x\ t\ = x'\ t\ dt$, $\alpha \le t \le \beta$.

Получим формулу для вычисления площади в случае параметрического задания линии:

$$S = \int_\alpha^\beta y\ t\ x'\ t\ dt.$$

Пример. Найти площадь эллипса с полуосями a и b, уравнение которого задано параметрически: $\begin{cases} x = a\cos t \\ y = b\sin t \end{cases}$, $0 \le t \le 2\pi$.

Решение. Нам задан эллипс с центром в начале координат с полуосями a и b. Можно найти площадь $S_1\ \frac{1}{4}$ части эллипса, лежащей в первой четверти, тогда $S_{элл} = 4S_1$, $0 \le t \le \frac{\pi}{2}$, $x'\ t\ = -a\sin t$. Найдем S_1.

$$S_1 = \left| -\int_0^{\frac{\pi}{2}} b\sin t \cdot a\sin t dt \right| = \left| -ab\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t dt \right| = \left| -\frac{ab}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} 1 - \cos 2t\ dt \right| = \left| -\frac{ab}{2}\left(t - \frac{1}{2}\sin 2t \right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} \right| =$$

$$= \left| -\frac{ab}{2}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}\sin\pi \right) + \frac{ab}{2}\left(0 - \frac{1}{2}\sin 0 \right) \right| = \left| -\frac{ab}{2} \cdot \frac{\pi}{2} \right| = \frac{\pi ab}{4}.$$

Таким образом, $S_{элл} = 4S_1 = \pi ab$ (кв. ед.).

8. Вычисление площади в полярных координатах, площадь криволинейного сектора

Определение. Криволинейным сектором называется плоская фигура, ограниченная непрерывной кривой, заданной уравнением в полярных координатах $\rho = \rho\ \varphi$, и двумя лучами $\varphi = \alpha$ и $\varphi = \beta$.

Площадь криволинейного сектора (рис. 4.9) выражается формулой

$$S=\frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta}\rho^2\ \varphi\ d\varphi.$$

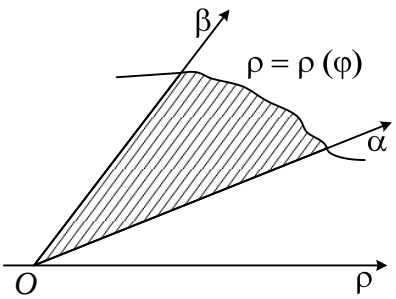

Рис. 4.9

Пример. Найти площадь лемнискаты Бернулли $x^2+y^2\ ^2=2a^2\ x^2-y^2$. (рис. 4.10).

Решение. Перейдем к полярным координатам:

$$\begin{cases} x=\rho\cos\varphi \\ y=\rho\sin\varphi \end{cases} \Rightarrow x^2+y^2=\rho^2$$

$$\rho^4=2a^2\rho^2\ \cos^2\varphi-\sin^2\varphi\ \Rightarrow \rho^2=2a^2\cos 2\varphi.$$

Найдем область определения функции:

$$\cos 2\varphi\ge 0\Rightarrow 2\pi n-\frac{\pi}{2}\le 2\varphi\le\frac{\pi}{2}+2\pi n,\ n\in\square\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \pi n-\frac{\pi}{4}\le\varphi\le\frac{\pi}{4}+\pi n,\ n\in\square$$

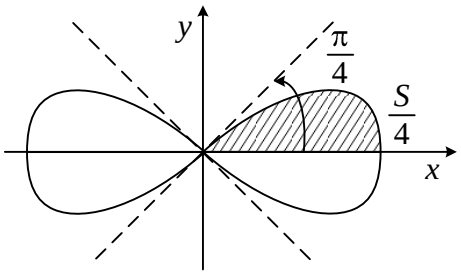

Рис. 4.10

Фигура симметрична относительно начала координат, Найдем площадь $\frac{1}{4}$ заданной фигуры, лежащей в первой четверти, т. е. $S=4S_1$.

$$S_1=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\rho^2\ \varphi\ d\varphi=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\rho^2\ \varphi\ d\varphi=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}2a^2\cos 2\varphi d\varphi=a^2\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos 2\varphi d\varphi=\frac{a^2}{2}\sin 2\varphi\Big|_0^{\pi/4}=$$

$$=\frac{a^2}{2}\left(\sin\frac{\pi}{2}-\sin 0\right)=\frac{a^2}{2}.$$

Итак, площадь данной фигуры равна $S=4S_1=4\cdot\frac{a^2}{2}=2a^2$ (кв. ед.).

4.2. Вычисление объемов тел по известным площадям поперечных сечений

Поставим задачу: найти объем тела V, заключенного между плоскостями $x=a$ и $x=b$ (рис. 4.11), если известна площадь его сечения плоскостью, проводимой перпендикулярно оси Ox при любом x (такое сечение называют поперечным), т. е. эта площадь является известной функцией $S\ x$, причем $S\ x$ является непрерывной на $[a,b]$.

Для решения задачи сделаем следующее:

1) возьмем произвольную точку x_i и проведем плоскость $x=x_i$;

2) дадим x_i приращение $\Delta x_i \neq 0$, проведем плоскость $x = x_i + \Delta x_i$;

3) из данного тела этими плоскостями вырезан слой, объем которого ΔV_i приближенно равен объему цилиндра с площадью основания $S\ x_i$ и высотой Δx_i, т. е. $\Delta V_i \approx S\ x_i\ \cdot \Delta x_i$;

4) объем тела ΔV приближенно равен сумме объемов ΔV_i:

$$\Delta V \approx \sum_{i=1}^{n} \Delta V_i = \sum_{i=1}^{n} S\ x_i\ \cdot \Delta x_i;$$

5) точное значение объема тела найдем, переходя к пределу при $n \to \infty$, который существует, так как $S\ x$ непрерывна, и равен интегралу от $S\ x$ по отрезку $[a,b]$:

$$V = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} S\ x_i\ \cdot \Delta x_i = \int_a^b S\ x\ dx.$$

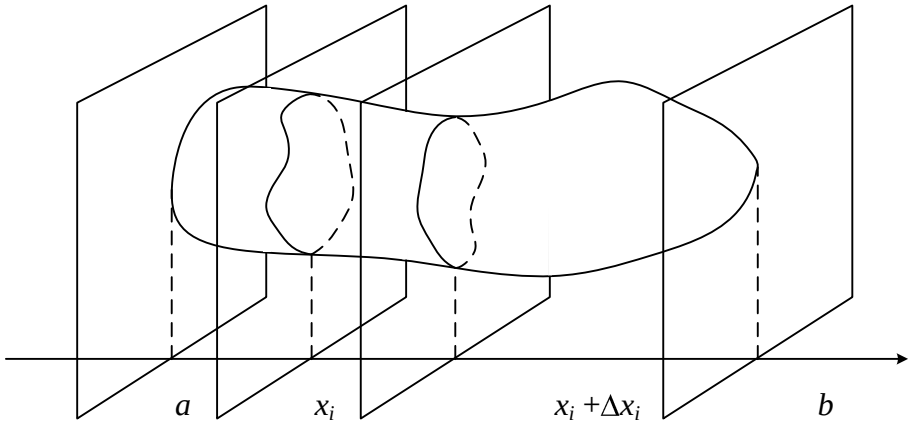

Рис. 4.11

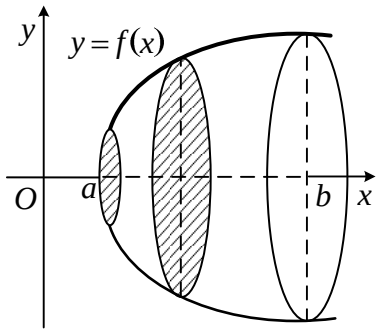

Рис. 4.12

Таким образом, мы получили формулу для вычисления объема:

$$V = \int_a^b S\ x\ dx,$$

где $S\ x$ – площадь поперечного сечения.

Используя полученную формулу, вычислим объем тела вращения.

Пусть криволинейная трапеция, ограниченная линиями $y = f(x)$ ($f(x)$ непрерывна на $[a,b]$), $x = a$, $x = b$, $y = 0$, вращается вокруг оси Ox (рис. 4.12), найдем объем полученного тела.

Поперечным сечением здесь является круг, его площадь равна:

$$S\ x\ = \pi y^2 = \pi\ \ f\ \ x\ \ ^2.$$

Тогда объем тела вращения вычисляется по формуле

$$V_{Ox} = \int_a^b \pi y^2 dx = \pi \int_a^b f\ \ x\ \ ^2 dx .$$

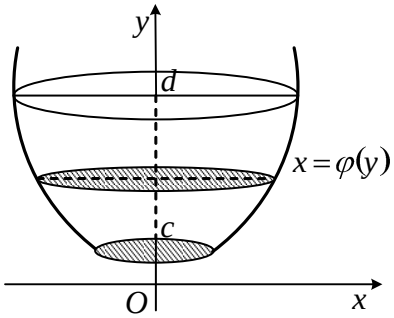

Рис. 4.13

Если криволинейная трапеция, ограниченная линиями $x = \varphi\ \ y$ ($\varphi\ \ y$ непрерывна на $[c, d]$), $y = c$, $y = d$, $x = 0$, вращается вокруг оси Oy (рис. 4.13), получаем другую формулу для вычисления объема тела вращения:

$$V_{Oy} = \int_a^b \pi x^2 dy = \pi \int_a^b \varphi\ \ y\ \ ^2 dy .$$

Пример. Найти объем тела, образованного вращением вокруг оси Ox фигуры, ограниченной линиями: $y^2 = 4x$, $y = 0$, $x = 4$.

Решение. Построим данную фигуру (рис. 4.14).

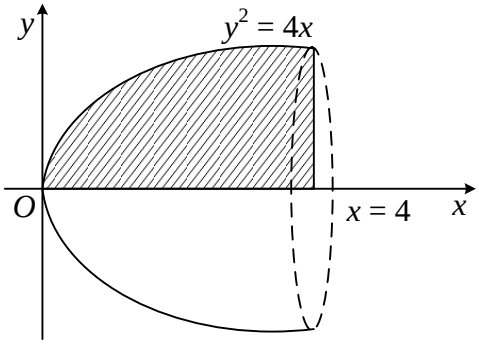

Рис. 4.14

Вычислим искомый объём:

$$V = \pi \int_0^4 4x dx = 2\pi x^2 \Big|_0^4 =$$

$$= 2\pi \cdot 16 - 0 = 32\pi \text{ (куб. ед.).}$$

Если фигура ограничена снизу кривой $y = y_1\ \ x$, сверху – $y = y_2\ \ x$ и прямыми $x = a$, $x = b,\ \ b > a$, то объем тела, образованного вращением такой фигуры вокруг оси Ox, вычисляется по формуле

$$V = \pi \int_a^b y_2^2 - y_1^2\ \ dx .$$

Пример. Найти объем тела, образованного вращением вокруг оси Ox фигуры, ограниченной линиями: $y^2 = 4x$, $y = x$.

Решение. Построим данную фигуру (рис. 4.15).

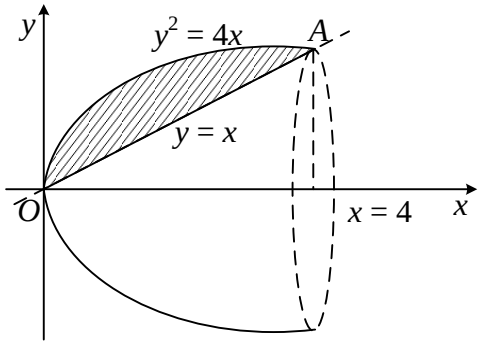

Рис. 4.15

Кривые $y^2 = 4x$ и $y = x$ пересекаются при $x = 4$.

$$V = \pi \int_0^4 4x - x^2\ \ dx = \pi \left(2x^2 - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_0^4 =$$

$$= \pi \left(32\pi - \frac{64}{3} \right) = \frac{32}{3}\pi \text{ (куб. ед.).}$$

4.3. Вычисление длины дуги плоской кривой

Если кривая задана уравнением в декартовых координатах $y = f\ \ x$, где $a \le x \le b$, то длина дуги кривой вычисляется по формуле

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + \ \ y'\ \ ^2}\, dx.$$

Пример. Найти длину дуги кривой $y = \ln\cos x$, заключенной между точками с абсциссами $x = 0$, $x = \dfrac{\pi}{3}$.

Решение. Так как $y' = \ \ln\cos x\ \ ' = -tgx$, $\sqrt{1 + \ \ y'\ \ ^2} = \sqrt{1 + tg^2 x} = \dfrac{1}{\cos x}$, то

$$L = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{\cos x} dx = \ln\left| tg\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right)\right|\Big|_0^{\pi/3} = \ln\left| tg\,\frac{5\pi}{12}\right| \text{ (лин. ед.).}$$

Если кривая задана параметрически

$$\begin{cases} x = x\ \ t \\ y = y\ \ t \end{cases},\ \alpha \le t \le \beta,$$

то длина дуги кривой выражается интегралом

$$L = \int_\alpha^\beta \sqrt{\ \ x'\ \ t\ \ \ ^2 + \ \ y'\ \ t\ \ \ ^2}\, dt.$$

Пример. Найти длину окружности $\begin{cases} x = a\cos t \\ y = a\sin t \end{cases}$, $0 \le t \le 2\pi$.

Решение. По формуле имеем:

$$L = \int_0^{2\pi} \sqrt{-a\sin t\ \ ^2 + \ \ a\cos t\ \ ^2}\, dt = a\int_0^{2\pi} \sqrt{\sin^2 t + \cos^2 t}\, dt = a\int_0^{2\pi} dt = at\Big|_0^{2\pi} = 2\pi a \text{ (лин. ед.).}$$

Если кривая задана уравнением в полярных координатах $\rho = \rho\ \ \varphi$, $\alpha \le \varphi \le \beta$, то длина дуги кривой выражается интегралом

$$L = \int_\alpha^\beta \sqrt{\rho^2 + \ \ \rho'\ \ ^2}\, d\varphi.$$

Пример. Найти длину дуги кардиоиды $\rho = a\ \ 1 + \cos\varphi$, $(a > 0)$, $0 \le \varphi \le 2\pi$.

Решение. Имеем:

$$\rho' = -a\sin\varphi,$$

$$\sqrt{\rho^2+\ \rho'\ ^2}=\sqrt{a^2\ 1+\cos\varphi\ ^2+a^2\sin^2\varphi}=a\sqrt{2\ 1+\cos\varphi\ }=a\sqrt{4\cos^2\frac{\varphi}{2}}=$$

$$=2a\left|\cos\frac{\varphi}{2}\right|=\begin{cases}2a\cos\frac{\varphi}{2},\ 0\le\varphi\le\pi\\ -2a\cos\frac{\varphi}{2},\ \pi\le\varphi\le2\pi\end{cases}.$$

Следовательно, в силу симметрии, имеем:

$$L=2a\int_0^{2\pi}\left|\cos\frac{\varphi}{2}\right|d\varphi=4a\int_0^{\pi}\cos\frac{\varphi}{2}d\varphi=8a\cdot\sin\frac{\varphi}{2}\Big|_0^{\pi}=8a \text{ (лин. ед.).}$$

Задачи для самостоятельного решения

1. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями: $y=x,\ y=2,\ y=0.$

2. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями: $y=\frac{x^2}{2},\ y=\frac{1}{1+x^2}$.

3. Вычислить площадь фигуры, ограниченной одной аркой циклоиды: $\begin{cases}x=a\ \ t-\sin t\\ y=a\ \ 1-\cos t\end{cases}$, $0\le t\le2\pi$ и осью Ox.

4. Вычислить площадь фигуры, ограниченной кардиоидой $r=a\ 1+\cos\varphi$, $a>0$.

5. Вычислить объем тела, образованного вращением вокруг оси Ox фигуры, ограниченной линиями $y=\frac{x^2}{2},\ y=-x+\frac{3}{2}$.

6. Вычислить длину дуги кривой $y=\ln x$, содержащейся между точками с абсциссами $x=\sqrt{3},\ x=\sqrt{8}$.

7. Вычислить длину дуги одной арки циклоиды $\begin{cases}x=a\ \ t-\sin t\\ y=a\ \ 1-\cos t\end{cases}$, $0\le t\le2\pi$.

5. ПРИМЕРЫ ПРИМЕНЕНИЯ ОПРЕДЕЛЕННОГО ИНТЕГРАЛА В ЭКОНОМИКЕ

Выше мы отмечали экономический смысл определенного интеграла, выражающего объем произведенной продукции при известной функции производительности труда.

Рассмотрим другие примеры использования интеграла в экономике.

Рассмотрим *производственную функцию Кобба–Дугласа* $f\ x_1, x_2\ = b_0 x_1^{b_1} x_2^{b_2}$, у которой коэффициенты b_1 и b_2 приближенно показывают, на сколько процентов изменится выпуск продукции при изменении только затрат труда x или только объема производственных фондов y на 1%.

Если в функции Кобба–Дугласа считать, что затраты труда есть линейная зависимость от времени, а затраты капитала неизменны, то эта функция может быть представлена в виде $g\ t\ =\ \alpha t + \beta\ e^{\gamma t}$. Тогда объем выпускаемой продукции за T лет составит:

$$Q = \int_0^T \alpha t + \beta\ e^{\gamma t} dt\,.$$

Пример. Найти объем продукции, произведенной за 4 года, если функция Кобба–Дугласа имеет вид $g\ t\ =\ 1 + t\ e^{3t}$.

Решение. Объем произведенной продукции

$$Q = \int_0^4 1 + t\ e^{3t} dt\,.$$

Используем метод интегрирования по частям, тогда

$$Q = \int_0^4 1 + t\ e^{3t} dt = \left| \begin{array}{l} u = 1 + t \Rightarrow du = dt \\ dv = e^{3t} dt \Rightarrow v = \dfrac{1}{3} e^{3t} \end{array} \right| = \frac{1}{3} e^{3t} \cdot\ 1 + t\ \Big|_0^4 - \int_0^4 \frac{1}{3} e^{3t} dt =$$

$$= \frac{5}{3} e^{12} - \frac{1}{3} - \frac{1}{9} e^{3t} \Big|_0^4 = \frac{5}{3} e^{12} - \frac{1}{3} - \frac{1}{9}\ e^{12} - e^0\ = \frac{14}{9} e^{12} - \frac{2}{9} \text{ (усл. ед.).}$$

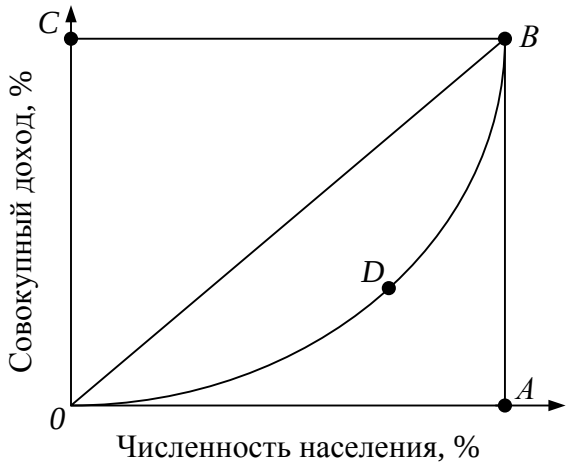

Рис. 5.1. Кривая Лоренца

Исследуя *кривую Лоренца* – зависимость процента доходов от процента имеющего их населения, мы можем оценить степень неравенства в распределении доходов населения. При равномерном распределении доходов кривая Лоренца вырождается в прямую – биссектрису OB, поэтому площадь фигуры ODB между биссектрисой OB и кривой Лоренца, отнесенная к площади треугольника OAB (коэффициент Джини), характеризует степень неравенства в распределении доходов населения (рис. 5.1).

Пример. По данным исследований в распределении доходов в одной из стран кривая Лоренца OB может быть описана уравнением $y = 1 - \sqrt{1 - x^2}$, где x – доля населения, y – доля доходов населения. Вычислить коэффициент Джини.

Решение. Очевидно, коэффициент Джини

$$k = \frac{S_{ODB}}{S_{\square OAB}} = 1 - \frac{S_{ODBA}}{S_{\square OAB}} = 1 - 2S_{ODBA}, \text{ так как } S_{\square OAB} = \frac{1}{2}.$$

$$S_{ODBA} = \int_0^1 1 - \sqrt{1 - x^2}\ dx = \int_0^1 dx - \int_0^1 \sqrt{1 - x^2}\,dx = 1 - \int_0^1 \sqrt{1 - x^2}\,dx.$$

Поэтому $k = 1 - 2\left(1 - \int_0^1 \sqrt{1 - x^2}\,dx\right) = 2\int_0^1 \sqrt{1 - x^2}\ dx - 1.$

С помощью замены, например, $x = \sin t$ можно вычислить

$$\int_0^1 \sqrt{1 - x^2}\,dx = \frac{\pi}{4}.$$

Итак, коэффициент Джини

$$k = 2 \cdot \frac{\pi}{4} - 1 = \frac{\pi}{2} - 1 \approx 0{,}57.$$

Достаточно высокое значение k показывает существенно неравномерное распределение доходов среди населения в рассматриваемой стране.

Определение начальной суммы по ее конечной величине, полученной через время t (лет) при годовом проценте (процентной ставке) p, называется *дисконтированием*. Задачи такого рода встречаются при определении экономической эффективности капитальных вложений.

Пусть K_t – конечная сумма, полученная за t лет, и K – дисконтируемая (начальная) сумма, которую в финансовом анализе называют также современной суммой. Если проценты простые, то $K_t = K\ 1 + it$, где $i = \frac{p}{100}$ – удельная процентная ставка. Тогда $K = K_t /\ 1 + it$. В случае сложных процентов $K_t = K\ 1 + it\ ^t$ и поэтому $K = K_t /\ 1 + it\ ^t$.

Пусть поступающий ежегодно доход изменяется во времени и описывается функцией $f\ \ t$ и при удельной норме процента, равной i, процент начисляется непрерывно. Можно показать, что в этом случае дисконтированный доход K за время T вычисляется по формуле

$$K = \int_0^T f\ \ t\ e^{-it} dt.$$

Пример. Определить дисконтированный доход за три года при процентной ставке 8 %, если первоначальные (базовые) капиталовложения составили 10 млрд руб., и намечается ежегодно увеличивать капиталовложения на 1 млрд руб.

Решение. Очевидно, что капиталовложения задаются функцией $f\ t = 10 + 1 \cdot t = 10 + t$. Тогда дисконтированная сумма капиталовложений $K = \int_0^3 10 + t\ e^{-0,08t} dt$.

Интегрируя, получим $K = 30,5$ млрд руб. Это означает, что для получения одинаковой наращенной суммы через три года ежегодные капиталовложения от 10 до 13 млрд руб. равносильны одновременным первоначальным вложениям 30,5 млрд руб. при той же, начисляемой непрерывно, процентной ставке.

Пусть известна функция $t = t\ x$, описывающая изменение затрат времени t на изготовление изделия в зависимости от степени освоения производства, где x – порядковый номер изделия в партии. Тогда среднее время $t_{ср.}$, затраченное на изготовление одного изделия в период освоения от x_1 до x_2 изделий вычисляется по теореме о среднем:

$$t_{ср.} = \frac{1}{x_2 - x_1} \int_{x_1}^{x_2} t\ x\, dx.$$

Что касается функции изменения затрат времени на изготовление изделий $t = t\ x$, то часто она имеет вид

$$t = ax^{-b},$$

где a – затраты времени на первое изделие, b – показатель производственного процесса.

Пример. Найти среднее время, затраченное на освоение одного изделия в период освоения от $x_1 = 100$ до $x_2 = 121$ изделий, полагая $a = 600$ (мин), $b = 0,5$.

Решение. Получаем

$$t_{ср} = \frac{1}{121 - 100} \int_{100}^{121} 600 x^{-1/2} dx = \frac{600}{21} 2\sqrt{x}\Big|_{100}^{121} = \frac{400}{7} \approx 57,2 \text{ мин.}$$

ВАРИАНТЫ ИНДИВИДУАЛЬНЫХ ЗАДАНИЙ

Вариант 1

Вычислить неопределенные интегралы (в заданиях 1–6 результаты проверить дифференцированием):

1. $\int \frac{3+\sqrt[3]{x^2}-2x}{\sqrt{x}}dx.$

2. $\int \frac{\sqrt{3}}{9x^2-3}dx.$

3. $\int \frac{2xdx}{\sqrt{5-4x^2}}.$

4. $\int \frac{dx}{2x+1\cdot\sqrt[3]{\ln^2\ 2x+1}}.$

5. $\int \frac{\sqrt{tg^3x}}{\cos^2 x}dx.$

6. $\int \frac{xdx}{e^{3x^2+4}}.$

Вычислить неопределенные интегралы:

7. $\int \frac{2-3x}{x^2+2}dx.$

8. $\int \sin 3x \cos x dx.$

9. а) $\int\ x+4\ e^{3x}dx;$ б) $\int arctg\,2xdx.$

10. а) $\int \frac{dx}{x^2-5x+4};$ б) $\int \frac{x^3+1}{x^3-x^2}dx;$ в) $\int \frac{x^3+1}{x^3-x^2}dx.$

11. $\int \frac{dx}{2+\sqrt{x+3}}.$

12. $\int \frac{dx}{5+2\sin x+3\cos x}.$

Вычислить определенный интеграл с точностью до двух знаков после запятой:

13. $\int_0^{\sqrt{3}} x\sqrt[3]{1+x^2}dx.$

Вычислить несобственные интегралы или доказать их расходимость:

14. $\int_0^{\infty} \frac{xdx}{16x^4+1}.$

Найти площадь фигуры, ограниченной линиями:

15. $y=\sqrt{x},\ y=2-x,\ y=0.$

16. Найти объем продукции, произведенной за 4 года, если функция Кобба–Дугласа имеет вид $g\ t\ =\ 2+t\ e^{3t}$.

Вариант 2

Вычислить неопределенные интегралы (в заданиях 1–6 результаты проверить дифференцированием):

1. $\int \frac{2x^2+3\sqrt{x}-1}{2x}dx.$

2. $\int \frac{dx}{\sqrt{9x^2+3}}.$

3. $\int \frac{xdx}{\sqrt{5-3x^2}}.$

4. $\int \sin^4 x \cdot \cos x dx.$

5. $\int \frac{\sqrt{arctg^5 3x}}{1+9x^2}dx$

6. $\int e^{\cos x} \sin x dx.$

Вычислить неопределенные интегралы:

7. $\int \frac{3-5x}{\sqrt{1-x^2}}dx.$

8. $\int \frac{\sin 2x}{\sqrt{1+3\cos 2x}^{\,3}}dx.$

9. а) $\int x-2\ e^{6x}dx;$ б) $\int \arccos 2x dx.$

10. а) $\int \frac{dx}{x^2-4x+4};$ б) $\int \frac{x^3-2x^2-2x+1}{x^3-x^2}dx;$ в) $\int \frac{3x+13}{x-1\quad x^2+2x+5}dx$

11. $\int \frac{xdx}{\sqrt{x+3}}.$

12. $\int \frac{dx}{5-4\sin x+3\cos x}.$

Вычислить определенный интеграл с точностью до двух знаков после запятой:

13. $\int_0^{12\sqrt{3}} \frac{12x^5}{\sqrt{x^6+1}}dx.$

Вычислить несобственные интегралы или доказать их расходимость:

14. $\int_1^{\infty} \frac{16xdx}{16x^4-1}.$

Найти площадь фигуры, ограниченной линиями:

15. $y=x^2,\ y=x^3,\ x=-1.$

16. Найти объем продукции, произведенной за 4 года, если функция Кобба–Дугласа имеет вид $g\ t\ =\ 4+t\ e^t.$

Вариант 3

Вычислить неопределенные интегралы (в заданиях 1–6 результаты проверить дифференцированием):

1. $\int \frac{3\sqrt{x}+4x^2-5}{2x^2}dx.$

2. $\int \frac{dx}{9x^2+3}.$

3. $\int \frac{3xdx}{4x^2+1}.$

4. $\int \frac{\sqrt[3]{\ln^2\ 1-x}}{x-1}dx.$

5. $\int \frac{\sin x}{\cos^4 x}dx.$

6. $\int e^{2x^3-1}x^2dx.$

Вычислить неопределенные интегралы:

7. $\int \frac{8-13x}{\sqrt{x^2-1}}dx.$

8. $\int \frac{\sin 3x}{3-3\cos 3x\ ^3}dx.$

9. а) $\int\ x-1\ \cos 5xdx;$ б) $\int \mathrm{arc}\,tg8xdx.$

10. а) $\int \frac{dx}{x^2+5x+6};$ б) $\int \frac{3x^3+1}{x-1\quad x^2-1}dx;$ в) $\int \frac{3x^2-17x+2}{x-1\quad x^2-2x+10}dx.$

11. $\int \frac{x^2dx}{\sqrt{x-3}}.$

12. $\int \frac{3\sin x-2\cos x}{1+\cos x}dx.$

Вычислить определенный интеграл с точностью до двух знаков после запятой:

13. $\int_0^1 \frac{x^2}{x^2+1}dx.$

Вычислить несобственные интегралы или доказать их расходимость:

14. $\int_0^\infty \frac{x^3dx}{\sqrt{16x^4+1}}.$

Найти площадь фигуры, ограниченной линиями:

15. $y=\frac{1}{x},\ y=x,\ x=2.$

16. Найти объем продукции, произведенной за 4 года, если функция Кобба–Дугласа имеет вид $g\ t\ =\ 3+t\ e^{2t}$.

Вариант 4

Вычислить неопределенные интегралы (в заданиях 1–6 результаты проверить дифференцированием):

1. $\int \frac{2\sqrt{x}-x^2+3}{\sqrt[3]{x}}dx.$

2. $\int \frac{9dx}{\sqrt{9x^2-3}}.$

3. $\int \frac{4xdx}{\sqrt{3-4x^2}}.$

4. $\int \frac{\sin x}{\sqrt[3]{\cos x}}dx.$

5. $\int \frac{ctg^5 x}{\sin^2 x}dx.$

6. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}\cdot e^{\arcsin x}}.$

Вычислить неопределенные интегралы:

7. $\int \frac{6x+1}{2x^2-1}dx.$

8. $\int \frac{e^x}{2e^x+3}dx.$

9. а) $\int x\sin\frac{x}{5}dx;$ б) $\int \arcsin 6x dx.$

10. а) $\int \frac{dx}{2x^2+x-6};$ б) $\int \frac{x^3+2}{x^3-x^2}dx;$ в) $\int \frac{x+1}{x^2-4x+13}dx.$

11. $\int \frac{xdx}{2+\sqrt{x+4}}.$

12. $\int \frac{dx}{5+3\cos x-5\sin x}.$

Вычислить определенный интеграл с точностью до двух знаков после запятой:

13. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\cdot\cos^2 x dx.$

Вычислить несобственные интегралы или доказать их расходимость:

14. $\int_1^{\infty} \frac{xdx}{\sqrt{16x^4-1}}.$

Найти площадь фигуры, ограниченной линиями:

15. $y=x^2+2,\ y=2x+2.$

16. Найти объем продукции, произведенной за 4 года, если функция Кобба-Дугласа имеет вид $g\ t\ =\ 1+8t\ e^t$.

Вариант 5

Вычислить неопределенные интегралы (в заданиях 1–6 результаты проверить дифференцированием):

1. $\int \frac{\sqrt[4]{x}-2x+5}{x^2}dx.$

2. $\int \frac{dx}{\sqrt{3-9x^2}}.$

3. $\int \frac{2xdx}{\sqrt{8x^2-9}}.$

4. $\int \cos^7 2x \cdot \sin 2x dx.$

5. $\int \frac{arctg^3 4x}{1+16x^2}dx.$

6. $\int e^{1-4x^2} x dx.$

Вычислить неопределенные интегралы:

7. $\int \frac{3-7x}{\sqrt{1-4x^2}}dx.$

8. $\int \frac{\sin 2x}{3\sin^2 x+4}dx.$

9. а) $\int x+5 \ \sin 2x dx;$ б) $\int \ln \ 2x-1 \, dx.$

10. а) $\int \frac{dx}{x^2-2x-3};$ б) $\int \frac{4x^4+8x^3-x-2}{x \ x-1^{\ 2}}dx;$ в) $\int \frac{2x^2+2x+20}{x-1 \ \ x^2+2x+5}dx.$

11. $\int \frac{x+1 \ dx}{x\sqrt{x+2}}.$

12. $\int \frac{3\sin x-2\cos x}{1+\cos x}dx.$

Вычислить определенный интеграл с точностью до двух знаков после запятой:

13. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{1+\cos x}dx.$

Вычислить несобственные интегралы или доказать их расходимость:

14. $\int_{-\infty}^{0} \frac{xdx}{\sqrt{x^2+4^{\ 3}}}.$

Найти площадь фигуры, ограниченной линиями:

15. $y=x^2-2x+3, \ y=3x-1.$

16. Найти объем продукции, произведенной за 4 года, если функция Кобба–Дугласа имеет вид $g \ t \ = \ 1+2t \ e^{3t}$.

Вариант 6

Вычислить неопределенные интегралы (в заданиях 1–6 результаты проверить дифференцированием):

1. $\int \frac{2x^3-\sqrt{x}+5}{\sqrt{x}}dx.$

2. $\int \frac{dx}{7x^2-4}.$

3. $\int \frac{4xdx}{\sqrt{4x^2+3}}.$

4. $\int \frac{\cos x}{\sin x+2}dx.$

5. $\int \frac{\sqrt[3]{arctg^2 x}}{1+x^2}dx.$

6. $\int e^{5x^2-3}xdx.$

Вычислить неопределенные интегралы:

7. $\int \frac{x-2}{\sqrt{2-x^2}}dx.$

8. $\int \frac{\sin 2x}{\cos^2 x-4}dx.$

9. а) $\int x+3\ \cos\frac{x}{2}dx;$ б) $\int \ln\ x+8\ dx.$

10. а) $\int \frac{dx}{x^2+x-2};$ б) $\int \frac{4x^4+8x^3-3x-x}{x^3+2x^2+x}dx;$ в) $\int \frac{x^2+3x-6}{x+1\quad x^2+6x+13}dx.$

11. $\int \frac{x^2dx}{\sqrt{x+1}}.$

12. $\int \frac{dx}{3+2\cos x-\sin x}.$

Вычислить определенный интеграл с точностью до двух знаков после запятой:

13. $\int\limits_{\frac{3}{4}}^{\frac{4}{3}} \frac{dx}{x^2+1}.$

Вычислить несобственные интегралы или доказать их расходимость:

14. $\int\limits_0^{\infty} \frac{xdx}{\sqrt[4]{16+x^2}^{\ 5}}.$

Найти площадь фигуры, ограниченной линиями:

15. $y=x^2,\ y=1+\frac{3}{4}x^2.$

16. Найти объем продукции, произведенной за 4 года, если функция Кобба–Дугласа имеет вид $g\ t\ =\ 7+t\ e^t.$

Вариант 7

Вычислить неопределенные интегралы (в заданиях 1–6 результаты проверить дифференцированием):

1. $\int\left(\sqrt[3]{x}-\frac{2\sqrt[4]{x}}{x}+3\right)dx.$

2. $\int\frac{3dx}{\sqrt{7x^2-4}}.$

3. $\int\frac{xdx}{\sqrt{3-4x^2}}.$

4. $\int\frac{\ln^4\ 2-x}{2-x}dx.$

5. $\int\frac{\sqrt[3]{tg^5x}}{\cos^2 x}dx.$

6. $\int e^{\sin x+1}\cos xdx.$

Вычислить неопределенные интегралы:

7. $\int\frac{5-3x}{\sqrt{2x^2+1}}dx.$

8. $\int\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{4}dx.$

9. а) $\int\ x-9\ e^{4x}dx;$ б) $\int\arccos 5xdx.$

10. а) $\int\frac{dx}{x^2+3x+2};$ б) $\int\frac{2x^4+8x^3-17x-5}{x^2+2x-3\quad x+2}dx;$ в) $\int\frac{12-6x}{x+1\quad x^2-4x+13}dx.$

11. $\int\frac{dx}{x+1\ \sqrt{x+4}}.$

12. $\int\frac{dx}{5-3\cos x}.$

Вычислить определенный интеграл с точностью до двух знаков после запятой:

13. $\int\limits_0^{-3}\frac{dx}{\sqrt{25+3x}}.$

Вычислить несобственные интегралы или доказать их расходимость:

14. $\int\limits_0^{\infty}\frac{x^2dx}{\sqrt[3]{\ x^3+8\ ^4}}.$

Найти площадь фигуры, ограниченной линиями:

15. $y=x^2-3x-4,\ \ y=0.$

16. Найти объем продукции, произведенной за 4 года, если функция Кобба–Дугласа имеет вид $g\ \ t\ =\ 6+t\ \ e^{2t}$.

Вариант 8

Вычислить неопределенные интегралы (в заданиях 1–6 результаты проверить дифференцированием):

1. $\int \frac{2x^3 - \sqrt{x^5} + 1}{\sqrt{x}} dx.$

2. $\int \frac{dx}{5x^2 + 3}.$

3. $\int \frac{\sqrt{3} x dx}{\sqrt{3x^2 - 2}}.$

4. $\int \frac{\sin x}{\sqrt[3]{\cos x + 1}} dx.$

5. $\int \frac{\arcsin^3 2x}{\sqrt{1 - 4x^2}} dx.$

6. $\int e^{x^3+1} x^2 dx.$

Вычислить неопределенные интегралы:

7. $\int \frac{1 + x}{\sqrt{2 - x^2}} dx.$

8. $\int \frac{e^{2x}}{5 + e^{2x}} dx.$

9. а) $\int \ x + 2 \ e^{-3x} dx;$ б) $\int \operatorname{arc}tg\, 2x dx.$

10. а) $\int \frac{dx}{x^2 - x - 12};$ б) $\int \frac{6x^4}{x^2 - 1 \quad x + 2} dx;$ в) $\int \frac{3x^2 - 7x + 2}{x^2 + 9 \quad x - 1} dx.$

11. $\int \frac{\sqrt{x + 2} dx}{x - 3}.$

12. $\int \frac{dx}{8 - 4\sin x + 7\cos x}.$

Вычислить определенный интеграл с точностью до двух знаков после запятой:

13. $\int_0^2 \frac{x^3 dx}{\sqrt{x^4 + 4}}.$

Вычислить несобственные интегралы или доказать их расходимость:

14. $\int_4^\infty \frac{x dx}{\sqrt{x^2 - 4x + 1}}.$

Найти площадь фигуры, ограниченной линиями:

15. $y = \frac{2}{x}$; $x = 1$; $x = 2$.

16. Найти объем продукции, произведенной за 4 года, если функция Кобба–Дугласа имеет вид $g \ t \ = \ 5 + t \ e^{4t}$.

Вариант 9

Вычислить неопределенные интегралы (в заданиях 1–6 результаты проверить дифференцированием):

1. $\int \frac{3x^2 - \sqrt[5]{x} + 2}{x} dx.$

2. $\int \frac{dx}{5x^2 - 3}.$

3. $\int \frac{2xdx}{\sqrt{3x^2 - 2}}.$

4. $\int \sqrt[3]{\cos 2x} \sin 2x dx.$

5. $\int \frac{dx}{\cos^2 4x \sqrt{tg 4x}}.$

6. $\int e^{3x^3} x^2 dx.$

Вычислить неопределенные интегралы:

7. $\int \frac{3x+2}{2x^2+1} dx.$

8. $\int \frac{\sin 2x}{4 - \sin^2 x} dx.$

9. а) $\int 1 - x \; e^{\frac{x}{2}} dx;$ б) $\int \arcsin 3x dx.$

10. а) $\int \frac{dx}{x^2 + 4x + 3};$ б) $\int \frac{x^3 - 4x + 5}{x^2 - 1 \quad x - 1} dx;$ в) $\int \frac{7x - 10}{x^3 + 27} dx.$

11. $\int \frac{dx}{\sqrt{x} + 3}.$

12. $\int \frac{dx}{3 + 7\cos x}.$

Вычислить определенный интеграл с точностью до двух знаков после запятой:

13. $\int_1^e \frac{1 + \ln x}{x} dx.$

Вычислить несобственный интеграл или доказать его расходимость:

14. $\int_{-1}^{\infty} \frac{dx}{\pi \; x^2 + 4x + 5}.$

Найти площадь фигуры, ограниченной линиями:

15. $y = x^2 + 2,\; y = 1 - x^2,\; x = 0,\; x = 1.$

16. Найти объем продукции, произведенной за 4 года, если функция Кобба–Дугласа имеет вид $g \;\; t \;\; = \; 1 - t \;\; e^t$.

Вариант 10

Вычислить неопределенные интегралы (в заданиях 1–6 результаты проверить дифференцированием):

1. $\int \frac{2x^3-\sqrt{x}+4}{x^2}dx.$

2. $\int \frac{2xdx}{\sqrt{7-2x^2}}.$

3. $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{1-4x^{\ 5}}}.$

4. $\int \frac{\ln^5\ x-8}{x-8}dx.$

5. $\int \frac{\sqrt[3]{arctg^2 x}}{1+x^2}dx.$

6. $\int \frac{xdx}{e^{x^2-3}}dx.$

Вычислить неопределенные интегралы:

7. $\int \frac{1-5x}{1+25x^2}dx.$

8. $\int \cos x \sin 9x dx.$

9. а) $\int 1-x\ e^{\frac{x}{2}}dx;$ б) $\int \ln 8x dx.$

10. а) $\int \frac{dx}{2x^2+3x};$ б) $\int \frac{2x^2-11}{x^2+x-6}dx;$ в) $\int \frac{2x^2-26}{x^2+2x+5\quad x+5}dx.$

11. $\int \frac{dx}{\sqrt{x}\ \ x+3}.$

12. $\int \frac{dx}{2\sin x+3\cos x+3}.$

Вычислить определенный интеграл с точностью до двух знаков после запятой:

13. $\int\limits_{-\pi}^{\pi} \sin^2 \frac{x}{2}dx.$

Вычислить несобственный интеграл или доказать его расходимость:

14. $\int\limits_{-1}^{\infty} \frac{xdx}{x^2+4x+5}.$

Найти площадь фигуры, ограниченной линиями:

15. $y=x^2,\ y=6.$

16. Найти объем продукции, произведенной за 4 года, если функция Кобба–Дугласа имеет вид $g\ \ t\ =\ 4+t\ \ e^{2t}$.

Вариант 11

Вычислить неопределенные интегралы (в заданиях 1–6 результаты проверить дифференцированием):

1. $\int\left(x\sqrt{x}-\frac{1}{\sqrt{x^3}}+1\right)dx.$

2. $\int\frac{\arcsin^2 2x}{\sqrt{1-4x^2}}dx.$

3. $\int\frac{dx}{\cos^2 x\cdot tgx}.$

4. $\int\frac{x^4}{e^{x^5+1}}dx.$

5. $\int\cos^3 5x\sin 5xdx.$

6. $\int\sin 2x\cos 3xdx.$

Вычислить неопределенные интегралы:

7. $\int\frac{5x+1}{\sqrt{x^2-6}}dx.$

8. $\int\sin 2x\cos 5xdx.$

9. а) $\int 2x+4\ \cos 3xdx;$ б) $\int\ln\ 4-x\ dx.$

10. а) $\int\frac{dx}{2x^2+3x};$ б) $\int\frac{2x^4-57x^3-15x^2+40x-70}{x-4\quad x^2+2x-3}dx;$ в) $\int\frac{12}{x^2+6x+13\quad x-2}dx.$

11. $\int\frac{xdx}{\sqrt{x}-1}.$

12. $\int\frac{dx}{3\sin x-4\cos x}.$

Вычислить определенный интеграл с точностью до двух знаков после запятой:

13. $\int_0^1 x^3\sqrt{4+5x^4}dx.$

Вычислить несобственный интеграл или доказать его расходимость:

14. $\int_0^1\frac{xdx}{1-x^4}.$

Найти площадь фигуры, ограниченной линиями:

15. $y=\frac{1}{2}x^2-1,\ y=1.$

16. Найти объем продукции, произведенной за 4 года, если функция Кобба–Дугласа имеет вид $g\ t\ =\ 7+t\ e^t.$

Вариант 12

Вычислить неопределенные интегралы (в заданиях 1–6 результаты проверить дифференцированием):

1. $\int \frac{\sqrt[6]{x^5}-5x^2+3}{x}dx.$

2. $\int \frac{dx}{\sqrt{2-x}^{\,5}}.$

3. $\int \frac{dx}{x+2\ \sqrt[5]{\ln\ x+2}}.$

4. $\int \frac{tg^7 x}{\cos^2 x}dx.$

5. $\int e^{1-6x^2}xdx.$

6. $\int \sin^4 2x\cos 2xdx.$

Вычислить неопределенные интегралы:

7. $\int \frac{4x-3}{3x^2-4}dx.$

8. $\int \sin 2x\cos 5xdx.$

9. а) $\int 1-5x\ \sin 2xdx;$ б) $\int x\ln 4xdx.$

10. а) $\int \frac{dx}{x^2-5x+6};$ б) $\int \frac{2x^4+17x^3+40x^2+37x+36}{x+1\quad x^2+8x+15}dx;$ в) $\int \frac{3x^2-7x+2}{x^2+1\quad x-1}dx.$

11. $\int \frac{1+x\ dx}{x+\sqrt{x}}.$

12. $\int \frac{dx}{8+3\cos x}.$

Вычислить определенный интеграл с точностью до двух знаков после запятой:

13. $\int_1^5 \frac{xdx}{\sqrt{4x+5}}.$

Вычислить несобственный интеграл или доказать его расходимость:

14. $\int_0^\infty \frac{3-x^2}{x^2+4}dx.$

Найти площадь фигуры, ограниченной линиями:

15. $y=4x-x^2,\ y=0.$

16. Найти объем продукции, произведенной за 4 года, если функция Кобба–Дугласа имеет вид $g\ t\ =\ 8+t\ e^t$.

Вариант 13

Вычислить неопределенные интегралы (в заданиях 1–6 результаты проверить дифференцированием):

1. $\int\left(x\sqrt{x}-\frac{1}{\sqrt{x^3}}+1\right)dx.$

2. $\int\frac{dx}{1+4x^2}.$

3. $\int\frac{tg6x}{\cos^2 6x}dx.$

4. $\int e^{3+\cos x}\sin x dx.$

5. $\int\cos 5x\sin 5x dx.$

6. $\int\frac{\arccos^2 3x}{\sqrt{1-9x^2}}dx.$

Вычислить неопределенные интегралы:

7. $\int\frac{x-3}{9x^2+7}dx.$

8. $\int\sin 3x\cos 4x dx.$

9. а) $\int 1-4x\ e^{2x}dx;$ б) $\int\ln\ 1+5x\ dx.$

10. а) $\int\frac{dx}{3x^2-8x-3};$ б) $\int\frac{2x^4-7x^3+7x^2-8x}{x+1\quad x^2-5x+6}dx;$ в) $\int\frac{4x+3}{x^2-2x+10}dx.$

11. $\int\frac{xdx}{\sqrt{x-1}}.$

12. $\int\frac{dx}{2+4\sin x+3\cos x}.$

Вычислить определенный интеграл с точностью до двух знаков после запятой:

13. $\int_1^2\frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2}dx.$

Вычислить несобственный интеграл или доказать его расходимость:

14. $\int_{\frac{1}{3}}^{1}\frac{\ln\ 3x-1}{3x-1}dx.$

Найти площадь фигуры, ограниченной линиями:

15. $y=x^2,\ y=2-x^2.$

16. Найти объем продукции, произведенной за 4 года, если функция Кобба–Дугласа имеет вид $g\ t\ =\ 5+t\ e^t.$

Вариант 14

Вычислить неопределенные интегралы (в заданиях 1–6 результаты проверить дифференцированием):

1. $\int \frac{\sqrt[3]{x^2}-2x^5+3}{x}dx.$

2. $\int \frac{dx}{\sqrt{2x^2-9}}.$

3. $\int \frac{ctg^5 4x}{\sin^2 4x}dx.$

4. $\int \frac{xdx}{e^{x^2+4}}dx.$

5. $\int \frac{\sin x}{5+\cos x}dx.$

6. $\int \frac{2xdx}{\sqrt{2x^2+5}}dx.$

Вычислить неопределенные интегралы:

7. $\int \frac{5-3x}{\sqrt{4-3x^2}}dx.$

8. $\int \cos^4 2x dx.$

9. а) $\int 4x+1\ e^{-2x}dx;$ б) $\int \ln 1-5x\ dx.$

10. а) $\int \frac{dx}{8-2x-x^2};$ б) $\int \frac{2x^4-7x^3+2x^2+13}{x+1\quad x^2-5x+6}dx;$ в) $\int \frac{8dx}{x+1\quad x^2+6x+13}dx.$

11. $\int \frac{dx}{3+\sqrt{x+5}}.$

12. $\int \frac{2-\sin x+3\cos x}{1+\cos x}dx.$

Вычислить определенный интеграл с точностью до двух знаков после запятой:

13. $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}}.$

Вычислить несобственный интеграл или доказать его расходимость:

14. $\int_0^{\infty} \frac{3-x^2}{x^2+4}dx.$

Найти площадь фигуры, ограниченной линиями:

15. $y=x^3,\ y=8,\ x=0.$

16. Найти объем продукции, произведенной за 4 года, если функция Кобба–Дугласа имеет вид $g\ t\ =\ 2+t\ e^t.$

Вариант 15

Вычислить неопределенные интегралы (в заданиях 1-6 результаты проверить дифференцированием):

1. $\int\left(\frac{\sqrt[3]{x}}{x}+2x^3-4\right)dx.$

2. $\int\frac{16dx}{8x^2-512}.$

3. $\int\frac{arctg\sqrt{x}dx}{1+x\ \sqrt{x}}.$

4. $\int x\cdot e^{-3x^2+2}dx.$

5. $\int\frac{2\sin x}{\cos^3 x}dx.$

6. $\int\frac{e^{tg3x}}{\cos^2 3x}dx.$

Вычислить неопределенные интегралы:

7. $\int\frac{1+3x}{\sqrt{1+4x^2}}dx.$

8. $\int\cos^3 xdx.$

9. а) $\int\ 2x-3\ \cdot e^{4x}dx;$ б) $\int x\ln\ x+1\,dx.$

10. а) $\int\frac{dx}{5x-x^2-6};$ б) $\int\frac{x^2-3}{x\ \ x-4}dx;$ в) $\int\frac{x^2-13x+40}{x+1\ \ \ x^2-4x+13}dx.$

11. $\int\frac{dx}{1+\sqrt{2x+1}}.$

12. $\int\frac{dx}{4\cos x-\sin x}.$

Вычислить определенный интеграл с точностью до двух знаков после запятой:

13. $\int\limits_0^1\frac{x^2dx}{1+x^6}.$

Вычислить несобственный интеграл или доказать его расходимость:

14. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{3\sin^3 xdx}{\sqrt{\cos x}}.$

Найти площадь фигуры, ограниченной линиями:

15. $y=\frac{1}{4}x^2,\ \ y=-\frac{1}{2}x^2+3x.$

16. Найти объем продукции, произведенной за 4 года, если функция Кобба–Дугласа имеет вид $g\ \ t\ =\ 4+t\ \ e^t.$

Вариант 16

Вычислить неопределенные интегралы (в заданиях 1–6 результаты проверить дифференцированием):

1. $\int \frac{\sqrt{x^3}-3x^4-2}{x}dx.$

2. $\int \frac{dx}{8x^2+512}.$

3. $\int \frac{dx}{\sin^2 x\ \sqrt[5]{ctgx}}.$

4. $\int 6-\arcsin x\ ^3 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx.$

5. $\int e^x-1\ ^4 e^x dx.$

6. $\int \frac{3xdx}{9x^2+2}.$

Вычислить неопределенные интегралы:

7. $\int \frac{5-4x}{\sqrt{1-x^2}}dx.$

8. $\int \sin^5 x\cos^4 xdx.$

9. а) $\int x-2\ \cos 3xdx;$ б) $\int x\ln 2xdx.$

10. а) $\int \frac{dx}{x^2+x-2};$ б) $\int \frac{x^5+x-3}{x^2-1}dx;$ в) $\int \frac{3-9x}{x^3-1}dx.$

11. $\int \frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}.$

12. $\int \frac{dx}{2\sin x+3\cos x+1}.$

Вычислить определенный интеграл с точностью до двух знаков после запятой:

13. $\int_0^1 e^x-1\ ^4 e^x dx.$

Вычислить несобственный интеграл или доказать его расходимость:

14. $\int_3^\infty \frac{dx}{x^2-3x+2}.$

Найти площадь фигуры, ограниченной линиями:

15. $y=4x-x^2,\ y=0.$

16. Найти объем продукции, произведенной за 4 года, если функция Кобба–Дугласа имеет вид $g\ t\ =\ 1-t\ e^t$.

Вариант 17

Вычислить неопределенные интегралы (в заданиях 1–6 результаты проверить дифференцированием):

1. $\int\left(\frac{\sqrt{x}}{2}-4x^2+\frac{x^2}{x^3}\right)dx.$

2. $\int\frac{dx}{9x^2-9}.$

3. $\int\cos^2 x\cdot\sin^3 x dx.$

4. $\int\frac{4-6\ln 2x\ ^5}{x}dx.$

5. $\int\frac{dx}{\cos^2 4x\sqrt{tg4x}}.$

6. $\int\frac{7xdx}{7x^2+1}.$

Вычислить неопределенные интегралы:

7. $\int\frac{5x-1}{\sqrt{x^2-3}}dx.$

8. $\int\sin 5x\cos 3x dx.$

9. а) $\int\ 2x-4\ \sin x dx;$ б) $\int\arccos 7x dx.$

10. а) $\int\frac{dx}{x^2+4x-5};$ б) $\int\frac{x^5+x+4}{x^3+1}dx;$ в) $\int\frac{x^2+3x-6}{x+2\quad x^2+6x+13}dx.$

11. $\int\frac{\sqrt{x}}{x+2}dx.$

12. $\int\frac{dx}{\sin x-3\cos x+2}.$

Вычислить определенный интеграл с точностью до двух знаков после запятой:

13. $\int\limits_0^{\frac{\sqrt{\pi}}{4}}\frac{x}{\cos^2\ x^2}dx.$

Вычислить несобственный интеграл или доказать его расходимость:

14. $\int\limits_1^{\infty}\frac{xdx}{6x^2-5x+1\ \ln\frac{3}{4}}.$

Найти площадь фигуры, ограниченной линиями:

15. $y=x^2,\ y=\sqrt{x}.$

16. Найти объем продукции, произведенной за 4 года, если функция Кобба–Дугласа имеет вид $g\ t\ =\ 1-3t\ e^t.$

Вариант 18

Вычислить неопределенные интегралы (в заданиях 1–6 результаты проверить дифференцированием):

1. $\int \frac{3x^2 - \sqrt{x^7} + 7}{x} dx.$

2. $\int \frac{8dx}{\sqrt{6x^2 - 36}}.$

3. $\int 2^{\cos 2x} \sin 2x dx.$

4. $\int x^2 \sqrt{1 - x^3} dx.$

5. $\int \sqrt{\frac{\arccos 3x}{1 - 9x^2}} dx.$

6. $\int \frac{\cos \ \ln x}{x} dx.$

Вычислить неопределенные интегралы:

7. $\int \frac{1 - 3x}{4x^2 - 1} dx.$

8. $\int \cos^7 x dx.$

9. а) $\int \ 3x + 1 \ \sin \frac{x}{2} dx;$ б) $\int \ln \ 2x + 1 \, dx.$

10. а) $\int \frac{dx}{3x^2 - 9x + 6};$ б) $\int \frac{x^3 + 1}{x^2 \ \ x + 2} dx;$ в) $\int \frac{xdx}{x^2 + 4 \ \ x - 1}.$

11. $\int \frac{xdx}{1 - \sqrt[3]{x}}.$

12. $\int \frac{dx}{3\sin x + 4\cos x}.$

Вычислить определенный интеграл с точностью до двух знаков после запятой:

13. $\int_0^{\frac{\pi}{6}} \cos^3 x dx.$

Вычислить несобственный интеграл или доказать его расходимость:

14. $\int_1^{e^2} \frac{\sin \ \ln x}{x} dx.$

Найти площадь фигуры, ограниченной линиями:

15. $y = \ x - 2 \ ^2, \ y = x.$

16. Найти объем продукции, произведенной за 4 года, если функция Кобба–Дугласа имеет вид $g \ t \ = \ 1 + 4t \ e^{2t}.$

Вариант 19

Вычислить неопределенные интегралы (в заданиях 1–6 результаты проверить дифференцированием):

1. $\int \frac{5x^4+\sqrt[5]{x^2}+1}{x^2}dx.$

2. $\int \frac{6dx}{\sqrt{9-9x^2}}.$

3. $\int \frac{\cos x dx}{\sqrt[3]{\sin^2 x}}.$

4. $\int \frac{2\ln x+1}{x}dx.$

5. $\int \frac{xdx}{6x^2+4}.$

6. $\int \frac{e^{ctg\,5x}}{\sin^2 5x}dx.$

Вычислить неопределенные интегралы:

7. $\int \frac{x-5}{3-2x^2}dx.$

8. $\int \sin^4 \frac{x}{2}dx.$

9. а) $\int x\cos\frac{x}{5}dx;$ б) $\int \arccos\frac{x}{2}dx.$

10. а) $\int \frac{dx}{x^2-2x-3};$ б) $\int \frac{x^3-1}{4x^3-x}dx;$ в) $\int \frac{2x^2-x+3}{x\ \ x^2+3}dx.$

11. $\int \frac{\sqrt{x}dx}{1-\sqrt[4]{x}}.$

12. $\int \frac{dx}{5+3\cos x+\sin x}.$

Вычислить определенный интеграл с точностью до двух знаков после запятой:

13. $\int_1^e \frac{\ln x}{x}dx.$

Вычислить несобственный интеграл или доказать его расходимость:

14. $\int_{e^2}^{\infty} \frac{dx}{x\ \ 4\ln x+3}.$

Найти площадь фигуры, ограниченной линиями:

15. $y=-x^2,\ y=x^2-2x-4.$

16. Найти объем продукции, произведенной за 4 года, если функция Кобба–Дугласа имеет вид $g\ \ t\ =\ 1+3t\ \ e^{5t}$.

Вариант 20

Вычислить неопределенные интегралы (в заданиях 1–6 результаты проверить дифференцированием):

1. $\int\left(\sqrt[5]{x^3}-\frac{2}{x^4}+9\right)dx.$

2. $\int\frac{5dx}{7x^2-343}.$

3. $\int 20x^4-14x\cdot\sqrt[3]{4x^5-7x^2+12}dx.$

4. $\int\frac{5+3\ln x}{x}^4dx.$

5. $\int\frac{\arcsin^2 2x}{\sqrt{1-4x^2}}dx.$

6. $\int\sin^3 4x\cos 4xdx.$

Вычислить неопределенные интегралы:

7. $\int\frac{x+4}{\sqrt{9-x^2}}dx.$

8. $\int\frac{dx}{4+\cos^2 x}.$

9. а) $\int 3x+2\ e^{-x}dx;$ б) $\int x\arccos 3xdx.$

10. а) $\int\frac{dx}{2x^2-3x-2};$ б) $\int\frac{x^5+x^4-8}{x^3-4x}dx;$ в) $\int\frac{3x+5}{x+1\quad x^2+4}dx.$

11. $\int\frac{x^2dx}{\sqrt{x-7}}.$

12. $\int\frac{dx}{5+3\cos x+4\sin x}.$

Вычислить определенный интеграл с точностью до двух знаков после запятой:

13. $\int_1^5\frac{xdx}{\sqrt{4x+5}}.$

Вычислить несобственный интеграл или доказать его расходимость:

14. $\int_{\frac{1}{2}}^{1}\frac{dx}{\sqrt{1-2x}}.$

Найти площадь фигуры, ограниченной линиями:

15. $y=\frac{6}{x},\ y=7-x.$

16. Найти объем продукции, произведенной за 4 года, если функция Кобба–Дугласа имеет вид $g\ t\ =\ 1+2t\ e^{4t}$.

Вариант 21

Вычислить неопределенные интегралы (в заданиях 1–6 результаты проверить дифференцированием):

1. $\int \frac{3\sqrt{x}-2x^2+6}{x}dx.$

2. $\int \frac{5dx}{7x^2+343}.$

3. $\int 1+e^{3x}\ ^{2}\cdot e^{3x}dx.$

4. $\int \frac{4x^3}{\sqrt{1+x^4}}dx.$

5. $\int \frac{\sqrt[3]{arctg\,2x}}{1+4x^2}dx.$

6. $\int \cos^5 x \sin x dx.$

Вычислить неопределенные интегралы:

7. $\int \frac{2x-7}{x^2-5}dx.$

8. $\int \cos 4x \sin 5x dx.$

9. а) $\int x-1\ e^{4x}dx;$ б) $\int \arcsin 5x dx.$

10. а) $\int \frac{dx}{x^2+6x+5};$ б) $\int \frac{x^2+1}{x\ \ x-1}dx;$ в) $\int \frac{x^2-3}{x^2+5\ \ x^2}dx.$

11. $\int \frac{\sqrt{x+4}dx}{x}.$

12. $\int \frac{7+6\sin x-5\cos x}{1+\cos x}dx.$

Вычислить определенный интеграл с точностью до двух знаков после запятой:

13. $\int_1^3 \frac{4x}{x^2-2}dx.$

Вычислить несобственный интеграл или доказать его расходимость:

14. $\int_{\frac{1}{3}}^{\infty} \frac{\pi dx}{1+9x^2\ \ arctg^2 3x}.$

Найти площадь фигуры, ограниченной линиями:

15. $y=x^2-6x+7,\ y=x+1.$

16. Найти объем продукции, произведенной за 4 года, если функция Кобба–Дугласа имеет вид $g\ \ t\ =\ 2-t\ \ e^{3t}$.

Вариант 22

Вычислить неопределенные интегралы (в заданиях 1–6 результаты проверить дифференцированием):

1. $\int\left(\sqrt{x}+\frac{5\sqrt[8]{x^5}}{x}-2\right)dx.$

2. $\int\frac{2dx}{4x^2+7}.$

3. $\int\frac{5^{arctg\,4x}}{1+16x^2}dx.$

4. $\int\frac{\sin\ \ln 3x}{x}dx.$

5. $\int x\cdot e^{-3x^2+2}dx.$

6. $\int\sin\frac{x}{3}\cos\frac{x}{3}dx.$

Вычислить неопределенные интегралы:

7. $\int\frac{7x-2}{\sqrt{x^2-1}}dx.$

8. $\int\sin 3x\cos 6x dx.$

9. а) $\int\ 2+x\ \sin\frac{x}{3}dx;$ б) $\int\ln\ x+1\ dx.$

10. а) $\int\frac{5dx}{2x^2-3x-2};$ б) $\int\frac{x^3+x+1}{x\ \ x^2-1}dx;$ в) $\int\frac{xdx}{x^3+8}.$

11. $\int\frac{\sqrt{x}dx}{x-10}.$

12. $\int\frac{dx}{3+\sin x+\cos x}.$

Вычислить определенный интеграл с точностью до двух знаков после запятой:

13. $\int\limits_0^{\sqrt{3}} x\cdot\sqrt{1+x^2}dx.$

Вычислить несобственный интеграл или доказать его расходимость:

14. $\int\limits_0^{\infty} e^{-3x}dx.$

Найти площадь фигуры, ограниченной линиями:

15. $y=x^3,\ y=2x$.

16. Найти объем продукции, произведенной за 4 года, если функция Кобба–Дугласа имеет вид $g\ \ t\ =\ 1-2t\ \ e^{3t}$.

Вариант 23

Вычислить неопределенные интегралы (в заданиях 1-6 результаты проверить дифференцированием):

1. $\int \frac{2\sqrt{x}+x^2-8x}{\sqrt{x}}dx.$

2. $\int \frac{dx}{3x^2-27}.$

3. $\int \frac{4e^{\frac{1}{x}}}{x^2}dx.$

4. $\int 1+e^{3x}\ ^2 \cdot e^{3x}dx.$

5. $\int \frac{\arcsin^2 5x}{\sqrt{1-25x^2}}dx.$

6. $\int \frac{\ln\ 3x+5}{3x+5}dx.$

Вычислить неопределенные интегралы:

7. $\int \frac{1+3x}{\sqrt{x^2+1}}dx.$

8. $\int \sin^3 3xdx.$

9. а) $\int x\sin 2xdx;$ б) $\int arctg\,2xdx.$

10. а) $\int \frac{dx}{x^2+3x+2};$ б) $\int \frac{5x^3+2}{x^3-5x^2+4x}dx;$ в) $\int \frac{xdx}{x^3+64}.$

11. $\int \frac{dx}{\sqrt{x}\ \ x-1}.$

12. $\int \frac{6\sin x+\cos x}{1+\cos x}dx.$

Вычислить определенный интеграл с точностью до двух знаков после запятой:

13. $\int_1^2 \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2}dx.$

Вычислить несобственный интеграл или доказать его расходимость:

14. $\int_2^\infty \frac{dx}{4+x^2\ \sqrt{\pi arctg\frac{x}{2}}}.$

Найти площадь фигуры, ограниченной линиями:

15. $y=x^2+4x,\ y=x+4.$

16. Найти объем продукции, произведенной за 4 года, если функция Кобба–Дугласа имеет вид $g\ \ t\ =\ 1+2t\ \ e^{3t}$.

Вариант 24

Вычислить неопределенные интегралы (в заданиях 1–6 результаты проверить дифференцированием):

1. $\int\left(\sqrt[5]{x}-\frac{4}{x^3}+7\right)dx.$

2. $\int\frac{dx}{3x^2+27}.$

3. $\int\frac{\sqrt{\ln^5 x+1}}{x+1}dx.$

4. $\int\sin^2 3x\cos 3x dx.$

5. $\int\frac{dx}{\sqrt{1-9x^2}e^{\arcsin 3x}}.$

6. $\int\frac{4^{tgx}}{\cos^2 x}dx.$

Вычислить неопределенные интегралы:

7. $\int\frac{x-5}{x^2+7}dx.$

8. $\int\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{4}dx.$

9. а) $\int x\cos 2x dx;$ б) $\int 4^x\ x+2\ dx.$

10. а) $\int\frac{dx}{2x^2-3x+1};$ б) $\int\frac{x^3-3}{x-1\ \ x^2-1}dx;$ в) $\int\frac{x+1}{x^2+4\ x}dx.$

11. $\int\frac{x^3dx}{\sqrt{x-2}}.$

12. $\int\frac{dx}{3\cos x-4\sin x}.$

Вычислить определенный интеграл с точностью до двух знаков после запятой:

13. $\int\limits_e^{e^2}\frac{2\ln x+1}{x}dx.$

Вычислить несобственный интеграл или доказать его расходимость:

14. $\int\limits_0^{\infty}x\sin x dx.$

Найти площадь фигуры, ограниченной линиями:

15. $y=2x-x^2,\ y=x.$

16. Найти объем продукции, произведенной за 4 года, если функция Кобба–Дугласа имеет вид $g\ t\ =\ 3+t\ e^{3t}$.

Вариант 25

Вычислить неопределенные интегралы (в заданиях 1–6 результаты проверить дифференцированием):

1. $\int\left(\frac{\sqrt[3]{x}}{x}-\frac{2}{x^2}+\frac{1}{x}\right)dx.$

2. $\int\frac{dx}{\sqrt{5x^2+3}}.$

3. $\int e^{3\cos x+2}\sin x dx.$

4. $\int\frac{arctg^7 5x}{1+25x^2}dx.$

5. $\int\frac{\cos x dx}{\sin x+2}.$

6. $\int\frac{\sqrt[3]{\ln^4 \ x-4}}{x-4}dx.$

Вычислить неопределенные интегралы:

7. $\int\frac{3x+4}{\sqrt{1-x^2}}dx.$

8. $\int\sin\frac{x}{2}\cos\frac{3x}{2}dx.$

9. а) $\int 1-3x \ e^x dx;$ б) $\int 1-2x \ \ln x dx.$

10. а) $\int\frac{dx}{x^2-5x+4};$ б) $\int\frac{x^3-4x+5}{x-1 \quad x^2-1}dx;$ в) $\int\frac{4x^2+x+10}{x^3+8}dx.$

11. $\int\frac{dx}{1+\sqrt{x-2}}.$

12. $\int\frac{dx}{5+3\cos x}.$

Вычислить определенный интеграл с точностью до двух знаков после запятой:

13. $\int\limits_{-2}^{1} x^2\sqrt{1-x^3}dx.$

Вычислить несобственный интеграл или доказать его расходимость:

14. $\int\limits_{1}^{\infty}\frac{4dx}{x \ 1+\ln^2 x}.$

Найти площадь фигуры, ограниченной линиями:

15. $y=x^2+4x-2,\ y=2x-2.$

16. Найти объем продукции, произведенной за 4 года, если функция Кобба–Дугласа имеет вид $g \ t \ = \ 4+t \ e^{3t}$.

Вариант 26

Вычислить неопределенные интегралы (в заданиях 1–6 результаты проверить дифференцированием):

1. $\int\left(\frac{2x^2}{\sqrt{x}}-\frac{5}{x}+3\right)dx.$

2. $\int\frac{dx}{5x^2-75}.$

3. $\int\frac{9x}{\sqrt{1-9x^2}}dx.$

4. $\int\frac{\sin 4x}{\sqrt[3]{\cos 4x}}dx.$

5. $\int\frac{dx}{e^{arctg 3x}\cdot\ 1+9x^2}.$

6. $\int\frac{ctg^2 6x}{\sin^2 6x}dx.$

Вычислить неопределенные интегралы:

7. $\int\frac{2x+5}{x^2+25}dx.$

8. $\int\sin 5x\sin 7xdx.$

9. а) $\int\ x+7\ \cos 5xdx;$ б) $\int x\cdot 2^{-x}dx.$

10. а) $\int\frac{2dx}{3x^2-6x-9}$; б) $\int\frac{2x^3+2x^2+4x+3}{x^3+x^2}dx$; в) $\int\frac{4x^2+7x+5}{x-1\quad x^2+2x+5}dx.$

11. $\int\frac{\sqrt{x-4}dx}{x}.$

12. $\int\frac{dx}{4\sin x-6\cos x}.$

Вычислить определенный интеграл с точностью до двух знаков после запятой:

13. $\int\limits_1^e\frac{\cos\ \ln x}{x}dx.$

Вычислить несобственный интеграл или доказать его расходимость:

14. $\int\limits_0^1\frac{dx}{2x^2-2x+1}.$

Найти площадь фигуры, ограниченной линиями:

15. $y=\frac{1}{2}x^2,\ y=2-\frac{3}{2}x.$

16. Найти объем продукции, произведенной за 4 года, если функция Кобба–Дугласа имеет вид $g\ \ t\ =\ 5+t\ \ e^{3t}$.

Вариант 27

Вычислить неопределенные интегралы (в заданиях 1–6 результаты проверить дифференцированием):

1. $\int\left(\frac{5x^2}{\sqrt{x}}+\sqrt[3]{x^2}-4\right)dx.$

2. $\int\frac{dx}{5x^2+75}.$

3. $\int\frac{7x^3}{2x^4-5}dx.$

4. $\int\frac{dx}{\cos^2 x\cdot ctg^3 x}.$

5. $\int\sin^2 2x\cos 2xdx.$

6. $\int\frac{\sqrt{\ln^7\ 2x+1}}{2x+1}dx.$

Вычислить неопределенные интегралы:

7. $\int\frac{5x-4}{\sqrt{x^2+10}}dx.$

8. $\int\sin^2\frac{x}{2}dx.$

9. а) $\int\ x-4\ \sin 6xdx;$ б) $\int\arccos 3xdx.$

10. а) $\int\frac{dx}{x^2-2x+1};$ б) $\int\frac{x^3-4x^2+2x-1}{x^3-x^2}dx;$ в) $\int\frac{x+1}{x^2+1}dx.$

11. $\int\frac{dx}{x\sqrt{x-2}}.$

12. $\int\frac{dx}{3\cos x-3+5\sin x}.$

Вычислить определенный интеграл с точностью до двух знаков после запятой:

13. $\int\limits_0^2\frac{x^2}{\sqrt{2x^3+1}}dx.$

Вычислить несобственный интеграл или доказать его расходимость:

14. $\int\limits_1^\infty\frac{dx}{9x^2-9x+2}.$

Найти площадь фигуры, ограниченной линиями:

15. $y=\frac{4}{x},\ y=5-x.$

16. Найти объем продукции, произведенной за 4 года, если функция Кобба–Дугласа имеет вид $g\ t\ =\ 1-t\ e^{2t}$.

Вариант 28

Вычислить неопределенные интегралы (в заданиях 1–6 результаты проверить дифференцированием):

1. $\int \frac{4x^5 + 2\sqrt{x^3} - x\sqrt{x}}{x^6} dx.$

2. $\int \frac{dx}{18x^2 - 9}.$

3. $\int \frac{\cos\sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx.$

4. $\int x(2x^2 + 5)^{10} dx.$

5. $\int \frac{\sin x\, dx}{\cos^5 x}.$

6. $\int \frac{\sqrt[3]{1 + \ln x}}{x} dx.$

Вычислить неопределенные интегралы:

7. $\int \frac{2x - 5}{x^2 - 25} dx.$

8. $\int \sin^3 \frac{x}{4} dx.$

9. а) $\int 2 - x \ \sin\frac{x}{3} dx;$ б) $\int x^2 \ln 3x dx.$

10. а) $\int \frac{dx}{1 - 2x - 3x^2};$ б) $\int \frac{4x^4 + 8x^3 - 1}{x^2 + x \quad x + 1} dx;$ в) $\int \frac{dx}{x \ \ x^2 + 2}.$

11. $\int \frac{x - 1}{x\sqrt{x - 2}} dx.$

12. $\int \frac{dx}{\cos x - 3\sin x}.$

Вычислить определенный интеграл с точностью до двух знаков после запятой:

13. $\int_0^{\sqrt{3}} x \cdot \sqrt{1 + x^2} dx.$

Вычислить несобственный интеграл или доказать его расходимость:

14. $\int_1^e \frac{\ln^2 x}{x} dx.$

Найти площадь фигуры, ограниченной линиями:

15. $y = x + 1$; $y = \cos x$; $y = 0$.

16. Найти объем продукции, произведенной за 4 года, если функция Кобба–Дугласа имеет вид $g\ t\ =\ 1 + 2t\ e^{3t}$.

Вариант 29

Вычислить неопределенные интегралы (в заданиях 1–6 результаты проверить дифференцированием):

1. $\int\left(3x^3+5\sqrt{x^3}-\frac{4\sqrt{x}}{x}\right)dx.$

2. $\int\frac{dx}{4x^2-3}.$

3. $\int e^{\sin^2 x}\sin 2x dx.$

4. $\int\sin^3 x\cos x\, dx.$

5. $\int ctg 5x dx.$

6. $\int\frac{dx}{x\sqrt{1-\ln x^{\ 2}}}.$

Вычислить неопределенные интегралы:

7. $\int\frac{5x+2}{\sqrt{x^2-10}}dx.$

8. $\int\cos^2 4x dx.$

9. а) $\int\ 2x+7\ e^x dx;$ б) $\int x\cdot arcctgx dx.$

10. а) $\int\frac{dx}{5x^2-3x-2};$ б) $\int\frac{x^3+1}{x\ \ x-1}dx;$ в) $\int\frac{4dx}{x(x^2+5)}.$

11. $\int\frac{dx}{3+\sqrt{x-6}}.$

12. $\int\frac{dx}{4-4\sin x+3\cos x}.$

Вычислить определенный интеграл с точностью до двух знаков после запятой:

13. $\int\limits_1^3\frac{x}{(x-2)^2}dx.$

Вычислить несобственный интеграл или доказать его расходимость:

14. $\int\limits_0^\infty\sqrt{\frac{2}{\pi}}\cdot\frac{\sqrt{arctg 2x}}{1+4x^2}dx.$

Найти площадь фигуры, ограниченной линиями:

15. $y = x^3$; $y = 1$; $x = 0$.

16. Найти объем продукции, произведенной за 4 года, если функция Кобба–Дугласа имеет вид $g\ \ t\ =\ 1+3t\ \ e^{3t}$.

Вариант 30

Вычислить неопределенные интегралы (в заданиях 1–6 результаты проверить дифференцированием):

1. $\int\left(2x^5-4x\sqrt{x^3}+\frac{3\sqrt{x}}{x^2}\right)dx.$

2. $\int\frac{dx}{9x^2-9}.$

3. $\int e^{tg^2x}\frac{4}{\cos^2 x}dx.$

4. $\int x^3\sqrt[5]{x^4+1}dx.$

5. $\int\frac{\cos 3x}{\sqrt[3]{1-\sin 3x}}dx.$

6. $\int\frac{arctg^6 4x}{1+16x^2}dx.$

Вычислить неопределенные интегралы:

7. $\int\frac{x-2}{\sqrt{x^2+5}}dx.$

8. $\int\cos^5 x\sin^2 x dx.$

9. а) $\int\ x-9\ e^{-2x}dx;$ б) $\int\ln\ 1-x\ dx;$

10. а) $\int\frac{dx}{x^2+2x+1};$ б) $\int\frac{5x^3+2}{x^3-5x^2+4x}dx;$ в) $\int\frac{x^2+3}{x+2\quad x^2+x+1}dx$.

11. $\int\frac{dx}{3+\sqrt{x+5}}.$

12. $\int\frac{dx}{3\sin x-\cos x}.$

Вычислить определенный интеграл с точностью до двух знаков после запятой:

13. $\int_1^e\frac{\sin\ \ln x}{x}dx.$

Вычислить несобственный интеграл или доказать его расходимость:

14. $\int_{e^2}^{1}\frac{dx}{x\ \ln x-1\ ^2}.$

Найти площадь фигуры, ограниченной линиями:

15. $y=x^2+6x+3,\ y=x+3.$

16. Найти объем продукции, произведенной за 4 года, если функция Кобба–Дугласа имеет вид $g\ t\ =\ 1+t\ e^{2t}$.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Учебное пособие посвящено важному разделу математического анализа – интегральному исчислению функции одной переменной и включает в себя теоретический материал, примеры и задачи, упражнения для самостоятельного решения по курсу, предусмотренному программой подготовки бакалавров, обучающихся в ДВГУПС.

Представленный материал поможет студентам в овладении данного курса, а также в организации самостоятельной работы при выполнении расчётно-графических работ, при подготовке к зачетам и экзаменам.

Авторы надеются, что данное пособие поможет студентам при решении математических задач, профессиональных задач, а также будет способствовать формированию общекультурных и профессиональных компетенций.

В заключение отметим, что при изучении математики очень существенно решение задач. Еще Ньютон высказывал мнение, что эта сторона дела важнее, чем усвоение теории. Конечно, полностью с этим согласиться нельзя, но нет сомнения, что для будущего специалиста одно лишь теоретическое знакомство с материалом было бы бесполезно. Поэтому студенты должны сочетать изучение лекционного материала с решением задач из учебных и методических пособий по высшей математике.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Данко, П.Е. Высшая математика в упражнениях и задачах. В 2 ч. Ч. 2. / П.Е. Данко, А.Г. Попов, Т.Я. Кожевникова. – 6-е изд. – М. : ОНИКС 21 век: Мир и образование, 2003. – 304 с.

2. Пискунов, Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисления : учеб. для вузов. В 2 т. Т. 1 / Н.С. Пискунов. – М. : Интеграл-Пресс, 2000. – 416 с.

3. Самаров, К.Л. Задачи с решениями по высшей математике и математическим методам в экономике : учеб. пособие для вузов / К.Л. Самаров, А.С. Шапкин. – 2-е изд. – М. : Дашков и К, 2009. – 548 с.

4. Шипачев, В.С. Высшая математика : учеб. для вузов / В.С. Шипачев. – 7-е изд., стер. – М. : Высш. шк., 2005. – 479 с.

5. Шнейдер, В.Е. Краткий курс высшей математики / В.Е. Шнейдер, А.И. Слуцкий, А.С. Шумов. – М. : Высш. шк., 2006. – Т. 1. – 305 с.

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ 3

1. НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ 4
   1.1. Понятие первообразной функции и неопределенного интеграла 4
   1.2. Основные свойства неопределенного интеграла 5
   1.3. Таблица основных интегралов 7
   1.4. Метод непосредственного интегрирования 8
   1.5. Замена переменной в неопределенном интеграле (метод подстановки) 15
   1.6. Интегрирование по частям 17
   1.7. Интегрирование дробно-рациональных функций 21
   1.8. Интегрирование простейших иррациональных функций 32
   1.9. Интегрирование тригонометрических функций 35
   1.10. Обзор методов интегрирования 39

2. ОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ 42
   2.1. Понятие определенного интеграла. Площадь криволинейной трапеции 42
   2.2. Экономический смысл определенного интеграла 45
   2.3. Свойства определенного интеграла 46
   2.4. Определенный интеграл с переменным верхним пределом. Формула Ньютона–Лейбница 49
   2.5. Замена переменной и интегрирование по частям в определенном интеграле 51

3. НЕСОБСТВЕННЫЕ ИНТЕГРАЛЫ 53
   3.1. Несобственные интегралы с бесконечными пределами интегрирования 53
   3.2. Несобственные интегралы от разрывных функций 56

4. ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ПРИЛОЖЕНИЯ ОПРЕДЕЛЕННОГО ИНТЕГРАЛА 58
   4.1. Вычисление площадей плоских фигур 58
   4.2. Вычисление объемов тел по известным площадям поперечных сечений 62
   4.3. Вычисление длины дуги плоской кривой 65

5. ПРИМЕРЫ ПРИМЕНЕНИЯ ОПРЕДЕЛЕННОГО ИНТЕГРАЛА В ЭКОНОМИКЕ 66

ВАРИАНТЫ ИНДИВИДУАЛЬНЫХ ЗАДАНИЙ 70

ЗАКЛЮЧЕНИЕ 100

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК 101

Учебное издание

Виноградова Полина Витальевна
Королева Татьяна Эдуардовна

ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИИ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

Учебное пособие

Редактор *Г.Ф. Иванова*
Технический редактор *И.А. Нильмаер*

План 2014 г. Поз. 9.4. Подписано в печать 18.02.2014 г.
Формат $60\times84^{1}/_{16}$. Гарнитура «Times New Roman». Уч.-изд. л. 6,5.
Усл. печ. л. 6,0. Зак. 7. Тираж 250 экз. Цена 122 руб.

Издательство ДВГУПС
680021, г. Хабаровск, ул. Серышева, 47.

П.В. Виноградова, Т.Э. Королева

ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИИ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

Учебное пособие

Хабаровск
2014