МИНИСТЕРСТВО ПУТЕЙ СООБЩЕНИЯ РФ
ИРКУТСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ПУТЕЙ СООБЩЕНИЯ



ТЕОРИЯ ФУНКЦИЙ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО. ОПЕРАЦИОННОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

Учебное пособие
для студентов заочного отделения
всех специальностей

ИРКУТСК
2003

КОМПЛЕКС МЕТОДИЧЕСКИХ ПОСОБИЙ ПО МАТЕМАТИКЕ ДЛЯ ЗАОЧНОГО ОБУЧЕНИЯ

Под редакцией доктора технических наук,
профессора А. П. Хоменко

- Комплексные числа. Основы линейной алгебры. Системы линейных уравнений
- Векторная алгебра и аналитическая геометрия
- Введение в анализ
- Дифференциальное исчисление функций одной переменной
- Дифференциальное исчисление функций нескольких переменных
- Линейное программирование. Динамическое программирование
- Интегральное исчисление функций одной переменной
- Кратные, криволинейные и поверхностные интегралы. Элементы теории поля
- Обыкновенные дифференциальные уравнения
- Ряды
- **Теория функций комплексного переменного. Операционное исчисление**
- Вариационное исчисление. Уравнения математической физики
- Теория вероятностей
- Математическая статистика
- Марковские случайные процессы и теория игр
- Дискретная математика

МИНИСТЕРСТВО ПУТЕЙ СООБЩЕНИЯ РФ

ИРКУТСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ПУТЕЙ СООБЩЕНИЯ

ТЕОРИЯ ФУНКЦИЙ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО. ОПЕРАЦИОННОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

Учебное пособие
для студентов заочного отделения
всех специальностей

Под редакцией
доктора технических наук, профессора А. П. Хоменко

Иркутск
2003

ББК 22.161
УДК 517.53
Т 54
Толстых О.Д. Байкова Л.А. Теория функций комплексного переменного. Операционное исчисление: Учебное пособие. Иркутск, 2003. 100 с.

В учебном пособии достаточно полно изложены основные вопросы теории функций комплексного переменного и операционного исчисления, соответствующие требованиям к минимуму основной обязательной программы по подготовке дипломированных специалистов. Пособие содержит большое количество подробно разобранных примеров, задач, геометрических иллюстраций. В пособие включены вопросы для самоконтроля и десять вариантов заданий контрольной работы.

Пособие предназначено для студентов всех специальностей, как заочной, так и дневной формы обучения.

Ил. 23. Табл. 3. Библиогр.: 13 назв.

Рецензенты: канд.физ.-мат. наук, доц. С. Н. Александренко (ИГУ);
д.- р. техн. наук, проф. В. А. Подвербный (ИрГУПС)

© Иркутский государственный университет путей сообщения, 2003

ОГЛАВЛЕНИЕ

1. Теория функций комплексного переменного.....4
1.1. Комплексные числа.....4
1.1.1. Комплексные числа в алгебраической форме. Геометрическая интерпретация.....4
1.1.2. Комплексные числа в тригонометрической и показательной форме. Формулы Эйлера.....7
1.2. Аналитические функции.....11
1.2.1. Геометрические понятия.....11
1.2.2. Элементарные функции комплексного переменного.....12
1.2.3. Предел и непрерывность функции комплексного переменного.....16
1.2.4. Дифференцируемость и аналитичность функции. Условия Коши-Римана.....17
1.2.5. Геометрический смысл модуля и аргумента производной. Конформные отображения.....27
1.3. Интегрирование функций комплексного переменного.....32
1.3.1. Интеграл от функции комплексного переменного.....32
1.3.2. Основные интегральные теоремы.....36
1.3.3. Интегральные формулы Коши и бесконечная дифференцируемость аналитической функции.....38
1.4. Ряды в комплексной области.....43
1.4.1. Степенные ряды. Ряд Тейлора.....43
1.4.2. Ряды Лорана.....45
1.4.3. Особые точки.....46
1.5. Вычеты и их приложения.....52
1.5.1. Теоремы о вычетах.....52
1.5.2. Вычисление вычетов.....53
1.5.3. Вычисление определенных интегралов с применением вычетов.....56
Вопросы для самоконтроля.....60
2. Операционное исчисление.....61
2.1. Преобразование Лапласа.....61
2.2. Свойства оригиналов и изображений. Изображения основных элементарных функций.....64
Таблица 2.1. Основные теоремы операционного исчисления.....80
Таблица 2.2. Изображения элементарных функций.....82
2.3.Применение операционного исчисления к решению обыкновенных дифференциальных уравнений и систем.....83
2.4.Расчет электрических контуров.....91
Вопросы для самоконтроля.....94
Задачи контрольной работы.....95
Библиографический список.....100

1. ТЕОРИЯ ФУНКЦИЙ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО

К появлению комплексных чисел привели вполне реальные задачи, например, задача извлечения квадратных корней из отрицательных чисел. Отказ от рассмотрения таких выражений часто приводил к противоречиям. Геометрическая интерпретация комплексных чисел способствовала их широкому распространению. С помощью комплексных чисел можно описать динамику процессов, происходящих в природе, в технике, в экономике и т.д. К примеру, с конца 19 века стали широко применяться генераторы переменного тока. Для расчета цепей переменного тока оказались непригодными старые методы, разработанные для цепей постоянного тока на основе закона Ома. Эффективный метод расчета цепей переменного тока основан на применении комплексных чисел и функции комплексного переменного.

Как самостоятельная дисциплина ТФКП оформилась к середине 19 века в качестве теории аналитических функций. Основополагающими здесь были работы О. Коши, К. Вейерштрасса, Б. Римана, которые подходили к развитию теории с различных позиций. По Вейерштрассу функция комплексного переменного аналитическая в области D, если в окрестности каждой точки области она разлагается в степенной ряд. О. Коши в своем построении теории аналитических функций исходил из понятия моногенности функции, т.е. однозначной и непрерывно дифференцируемой функции в области D за исключением быть может полюсов. Коши развил теорию аналитических функций, доказав важнейшие теоремы о вычетах и так называемые интегральные теоремы и формулы Коши.

Для Б. Римана более важным было то обстоятельство, что аналитическая функция при определенных условиях осуществляет конформное отображение области D на некоторую другую область E на комплексной плоскости. Связь аналитических функций с конформными отображениями открывает путь для решения ряда задач математической физики.

В настоящее время комплексные числа и функции комплексного переменного находят широкое применение в картографии, электротехнике, аэро- и гидродинамике, теории фильтрации почв, теоретической физике, теории упругости, в расчетах различных конструкций на прочность, в квантовой механике, при изучении движения спутников.

1.1. Комплексные числа

1.1.1. Комплексные числа в алгебраической форме. Геометрическая интерпретация

В математике принята ***алгебраическая форма комплексного числа***

$$z = x + iy, \tag{1.1}$$

$$i = \sqrt{-1}, \quad i^2 = -1; \tag{1.2}$$

i – мнимая единица, $x = Re\, z$ – вещественная, $y = Im\, z$ – мнимая часть комплексного числа z.

Числа, отличающиеся знаками мнимой части, называются ***комплексно-сопряженными***:

$$z = x + iy, \quad \bar{z} = x - iy. \tag{1.3}$$

Геометрически комплексное число z изображается на комплексной плоскости C либо точкой (x, y), либо радиус-вектором этой точки (рис.1.1). Комплексно-сопряженные числа изображаются векторами, симметричными относительно вещественной оси Ox. Комплексно-сопряженные числа позволяют ввести метрику в пространстве C: $|z| = \sqrt{z \cdot \bar{z}}$.

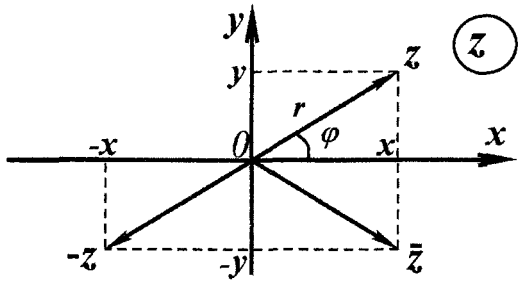


Рис. 1.1

Над комплексными числами в алгебраической форме вводятся операции сложения, вычитания, умножения, деления на число, отличное от нуля. Для операций сложения и умножения справедливы ***переместительный (коммутативный), сочетательный (ассоциативный) и распределительный (дистрибутивный) законы***.

1^0. Сложение (вычитание): $z_1 = x_1 + iy_1$, $z_2 = x_2 + iy_2 \Rightarrow$

$$z_1 \pm z_2 = (x_1 \pm x_2) + i(y_1 \pm y_2).$$

2^0. Умножение: $z_1 \cdot z_2 = x_1x_2 - y_1y_2 + i(x_1y_2 + x_2y_1)$.

Следствие. $z \cdot \bar{z} = x^2 + y^2 \geq 0; \quad z\bar{z} > 0 \Leftrightarrow z \neq 0.$

Заметим, что эти операции проводятся так же, как при действии с многочленами: раскрытие скобок, приведение подобных с заменой $i^2 = -1$. Операции сложения и вычитания можно также сравнить с со-

ответствующими операциями над векторами в координатной форме (рис. 1.2).

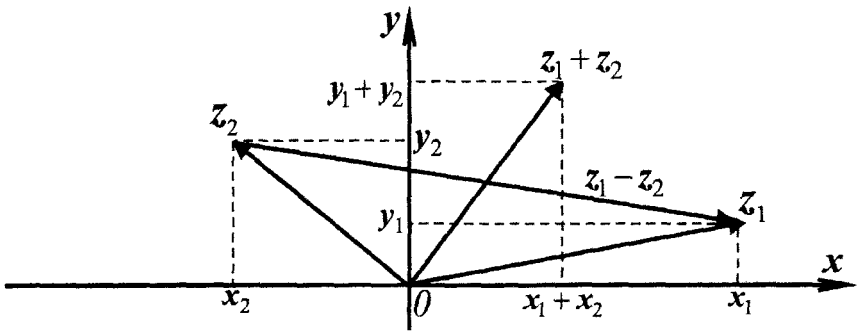


Рис. 1.2

3⁰. Деление. Чтобы поделить комплексные числа, нужно числитель и знаменатель дроби умножить на число, сопряженное к знаменателю:

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{z_1\cdot\bar{z}_2}{z_2\cdot\bar{z}_2},\ z_2\neq 0.$$

Пример 1.1.1. Даны комплексные числа $z_1=2-3i,\ z_2=-3+4i.$

Найти: *а)* $2z_1-3z_2$, *б)* $z_1\cdot z_2$, *в)* $\frac{z_1}{z_2}$, $Re\frac{z_1}{z_2}$, $Im\frac{z_1}{z_2}$.

Решение.

а) $2z_1-3z_2=2(2-3i)-3(-3+4i)=4-6i+9-12i\Rightarrow$

$$2z_1-3z_2=13-18i.$$

б) $z_1\cdot z_2=(2-3i)(-3+4i)=-6+9i+8i-12i^2.$

Приводя подобные после раскрытия скобок, с учетом $i^2=-1$ получаем $z_1\cdot z_2=6+17i.$

в) $$\frac{z_1}{z_2}=\frac{z_1\cdot\bar{z}_2}{z_2\cdot\bar{z}_2}=\frac{(2-3i)(-3-4i)}{(-3+4i)(-3-4i)}=\left\{z\bar{z}=x^2+y^2\right\}=$$

$$=\frac{-6+9i-8i+12i^2}{9+16}=\frac{-18+i}{25}\Rightarrow$$

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{-18+i}{25},\ Re\frac{z_1}{z_2}=-\frac{18}{25},\ Im\frac{z_1}{z_2}=\frac{1}{25}.$$

Заметим, что возведение в степень и извлечение корней из комплексных чисел в алгебраической форме затруднительно. В этом случае удобны так называемые тригонометрическая и показательная формы.

1.1.2. *Комплексные числа в тригонометрической и показательной форме. Формулы Эйлера*

Тригонометрическая и показательная формы комплексного числа связаны с представлением декартовых координат точки в полярной системе координат (рис.1.1).

Полярную ось совмещаем с вещественной осью, а полюс помещаем в начало координат. Тогда (r, φ) – полярные координаты точки :

$$z = x + iy, \; x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi,$$

откуда получается ***тригонометрическая форма комплексного числа***

$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi). \tag{1.4}$$

Полярный радиус r комплексного числа z называется ***модулем комплексного числа*** (определяется однозначно):

$$r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2} \geq 0 \; ; \tag{1.5}$$

полярный угол $\varphi = Argz = arctg\dfrac{y}{x}$ ***- аргумент комплексного числа***

(определяется с точностью до кратного 2π).

Главное значение аргумента $\varphi : -\pi < arg\, z \leq \pi$ (часто $0 \leq arg\, z < 2\pi$) нетрудно определить по геометрическому изображению комплексного числа.

Для этого напомним, что главное значение $arctg\dfrac{y}{x} \in \left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right)$.

$$\varphi = arg\, z = \begin{cases} arctg\dfrac{y}{x} & \text{для I и IV четверти} \\ arctg\dfrac{y}{x} \pm \pi & \text{для II и III четверти.} \end{cases} \tag{1.6}$$

Связь показательной и тригонометрических функций выражают формулы Эйлера.

Формулы Эйлера:

$$e^{i\varphi} = \cos\varphi \pm i\sin\varphi, \quad e^{-i\varphi} = \cos\varphi - i\sin\varphi, \tag{1.7}$$

$$\cos\varphi = \frac{1}{2}(e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}), \; \sin\varphi = \frac{1}{2i}(e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}). \tag{1.8}$$

Формулы Эйлера позволяют записать комплексное число z более компактно в так называемой ***показательной форме***:

$$z = re^{i\varphi} = r\,exp(i\varphi)\,. \qquad (1.9)$$

Замечание 1. Так как $\cos\varphi, \sin\varphi$ – функции, периодические с периодом 2π: $\cos(\varphi + 2\pi n) = \cos\varphi,\ \sin(\varphi + 2\pi n) = \sin\varphi$, то

$$e^{i(\varphi+2\pi n)} = e^{i\varphi},\ n \in Z\,. \qquad (1.10)$$

Замечание 2. Аргументы противоположных чисел отличаются на π.

Замечание 3. Аргумент положительных вещественных чисел $\varphi = 0$, а отрицательных $-\varphi = \pi$. Аргумент чисто мнимых чисел вида iy:

$$\varphi = \frac{\pi}{2} \text{ при } y > 0,\ \varphi = -\frac{\pi}{2} \text{ или } \varphi = \frac{3\pi}{2} \text{ при } y < 0.$$

В частности, $e^{2\pi i} = 1$, $e^{\pi i} = -1$, $e^{\pm\frac{\pi}{2}i} = \pm i$.

Замечание 4. Комплексные числа в тригонометрической или показательной форме считаются равными, если их модули равны, а аргументы отличаются на число, кратное 2π.

Пользуясь тригонометрическими тождествами и правилами действий со степенями, можно доказать следующие ***правила действий над комплексными числами в тригонометрической и показательной формах*** (табл. 1.1).

Таблица 1.1

Действия над комплексными числами

В показательной форме	***В тригонометрической форме***
$z = re^{i\varphi} = exp\,i\varphi$	$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$
$1^0.\ z_1 \cdot z_2 = r_1 r_2 e^{i(\varphi_1+\varphi_2)}$	$1^0.\ z_1 \cdot z_2 = r_1 r_2 (\cos(\varphi_1+\varphi_2) + i\sin(\varphi_1+\varphi_2))$
$2^0.\ \frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\varphi_1-\varphi_2)}$	$2^0.\ \frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}(\cos(\varphi_1-\varphi_2) + i\sin(\varphi_1-\varphi_2))$
$3^0.\ z^n = r^n e^{in\varphi}$	3^0. **Формула Муавра** $z^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi)$
$4^0.\ \sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}\,e^{i\frac{\varphi+2k\pi}{n}}$, $k = 0,1,2,\ldots,n-1$	$4^0.\ \sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi+2k\pi}{n} + i\sin\frac{\varphi+2k\pi}{n}\right)$, $k = 0,1,2,\ldots,n-1$

Пример 1.1.2. Комплексное число $a = \dfrac{2\sqrt{2}}{-1-i}$:

а) записать в алгебраической форме, изобразить геометрически;

б) представить в тригонометрической и показательной формах;

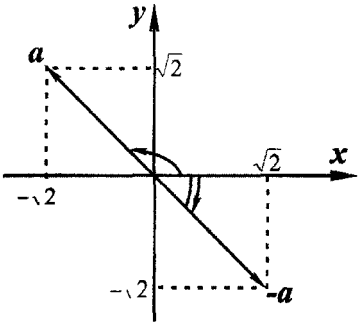
в) найти a^{10}.

Решение. а) Используем правило деления комплексных чисел в алгебраической форме.

$$a = \frac{2\sqrt{2}(-1+i)}{(-1-i)(-1+i)} = \frac{2\sqrt{2}(-1+i)}{1-i^2} = \{i^2 = -1\} = \frac{2\sqrt{2}(-1+i)}{2} \Rightarrow$$

Алгебраическая форма комплексного числа $a = \sqrt{2}(-1+i)$.

Геометрическое изображение (рис.1.3):



$$x = Re\, a = -\sqrt{2},\ y = Im\, a = \sqrt{2};$$

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2} \Rightarrow |a| = 2;$$

$$\varphi = \arg a = arctg\frac{y}{x} + \pi \Rightarrow$$

$$\varphi = arctg(-1) + \pi = -\frac{\pi}{4} + \pi \Rightarrow \varphi = \frac{3\pi}{4}$$

(число a во второй четверти).

Рис. 1.3

б) Тригонометрическая форма: $a = 2\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right)$.

Показательная форма: $a = 2\exp\left(\frac{3\pi}{4}i\right) = 2e^{\frac{3\pi}{4}i}$.

в) $a^{10} = 2^{10}\exp\left(\frac{3\pi}{4}i \cdot 10\right) = 2^{10}\exp\left(\frac{15\pi}{2}i\right) = 2^{10}\exp\left(\frac{3\pi}{2}i\right) \Rightarrow$

$$a^{10} = 1024\left(\cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2}\right) = -1024i.$$

Пример 1.1.3. Изобразить геометрически множества комплексных чисел:

а) $|Re\, z| < 2$; б) $|z+1| \le 2$; в) $|z-i| > 2$; г) $\frac{\pi}{4} \le \varphi \le \pi$.

Решение. Запишем комплексное число в алгебраической форме $z = x + iy$.

а) $Re\, z = x \Rightarrow |x| < 2 \Rightarrow -2 < x < 2,$

т.е. множество комплексных чисел $|Re\, z| < 2$ представляет собой вертикальную полосу (*рис.1.4а*).

б) $z + 1 = x + 1 + iy,$

$$|z+1| = \sqrt{(x+1)^2 + y^2} \le 2 \Rightarrow (x+1)^2 + y^2 \le 4.$$

Множество комплексных чисел представляет собой замкнутый круг радиуса 2 с центром в точке $(-1,0)$ (рис.1.4 б).

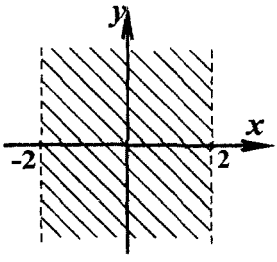


Рис.1.4 а

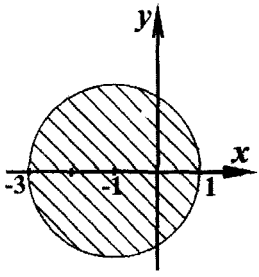


Рис.1.4 б

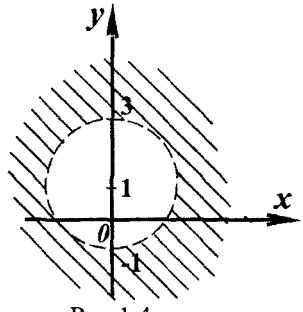


Рис.1.4 в

в) $z - i = x + iy - i = x + i(y-1),$

$$|z-i| = \sqrt{x^2 + (y-1)^2} > 2 \Rightarrow x^2 + (y-1)^2 > 2.$$

Геометрическое изображение множества комплексных чисел в этом случае – внешность круга радиуса 2 с центром в точке (0,1) (рис.1.4 в).

Замечание. В области комплексных чисел уравнение $|z - z_0| = R$ – задаёт окружность с центром в точке z_0 радиуса R, $|z - z_0| < R$ – круг, $|z - z_0| > R$ – внешность круга с центром в точке z_0 радиуса R.

г) Комплексное число z представим в показательной форме $z = re^{i\varphi}$. Тогда неравенство, задающее область, примет вид $\frac{\pi}{4} \le \varphi \le \pi$. Соответствующая область комплексных чисел изображена на рис.1.4 г .

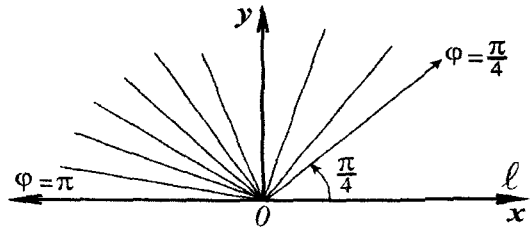


Рис. 1.4 г

1.2. Аналитические функции

1.2.1. Геометрические понятия

В п.1.1 было показано, что множество комплексных чисел можно представлять как множество точек на плоскости. Областью $D \subset C$ в пространстве комплексных чисел называется ***открытое связное множество*** точек на плоскости.

1⁰. Свойство открытости: вместе с каждой точкой из D этому множеству принадлежит и достаточно малый круг (окрестность) с центром в этой точке.

2⁰. Свойство связности: любые две точки из D можно соединить непрерывной линией, целиком лежащей в D.

Простейший пример области $-\varepsilon$- окрестность точки a на комплексной плоскости или открытый круг с центром в точке a радиуса ε: $D = \{z \in C : |z - a| < \varepsilon\}$.

Границей Γ области D называется ***совокупность граничных точек***, которые сами не принадлежат D, но в любой окрестности содержат точки из D. ***Область*** D ***с присоединенной границей*** Γ называют ***замкнутой областью*** и обозначают $\overline{D} = D \cup \Gamma$. Мы будем предполагать, что граница состоит из конечного числа точек, кусочно-гладких замкнутых линий и разрезов на плоскости, т.е. граница может быть задана параметрически кусочно-непрерывными и дифференцируемыми функциями: $x = x(t),\ y = y(t),\ t \in (t_0, T)$. В случае ограниченной области D ***число связных частей границы*** называется ***порядком связности области***. Если граница Γ области связна, то область D называется ***одно связной*** (на рис.1.5 изображена четырехсвязная область).

Пусть D – односвязная область и Γ - ее граница. ***Положительным направлением обхода границы считается такое, при котором область остается слева*** (рис. 1.6). При этом некоторые точки будут обходиться один раз (точка А), другие несколько (В два, С три раза). ***Точки первого***

типа называются ***простыми, второго типа – кратными точками контура*** Γ (В – двойная, С – тройная точка). Понятие кратности точки распространяется и на многосвязные области.

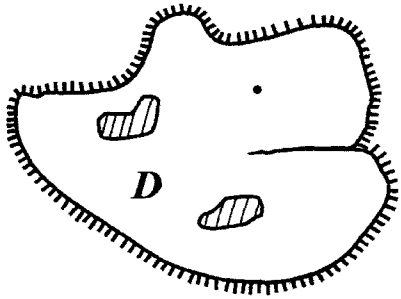


Рис. 1.5

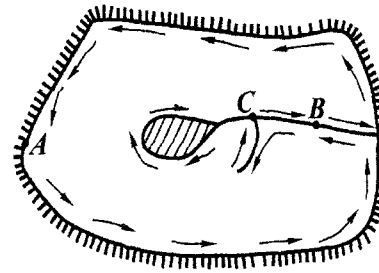


Рис. 1.6

1.2.2. Элементарные функции комплексного переменного.

Если каждому комплексному числу z из множества D ставится в соответствие определенное комплексное число w (или совокупность чисел $w \in E$), то говорят, что в области D задана ***функция комплексного переменного*** $w = f(z)$, $z \in D$. Функция называется ***однозначной***, если каждому $z \in D$ соответствует только одно значение $w \in E$, иначе – ***многозначной***.

Множество D – ***область определения функции***, E – ***область значений функции***, z – ***аргумент***.

Мы будем рассматривать важный случай, когда множества D и E являются ***областями***.

Заметим, что не всякая функция комплексного переменного отображает область в область. Например, функция $w = Re\, z$ отображает всю комплексную плоскость в вещественную ось, а $w = Im\, z$ – в мнимую ось.

Если положить $z = x + iy$, $w = u + iv$, то задание функции $w = f(z)$ комплексного переменного эквивалентно заданию двух функций двух вещественных переменных $u = u(x, y)$, $v = v(x, y)$ (выделение вещественной и мнимой части функции).

$$w = u + iv, \quad u = u(x, y), \quad v = v(x, y). \qquad (1.11)$$

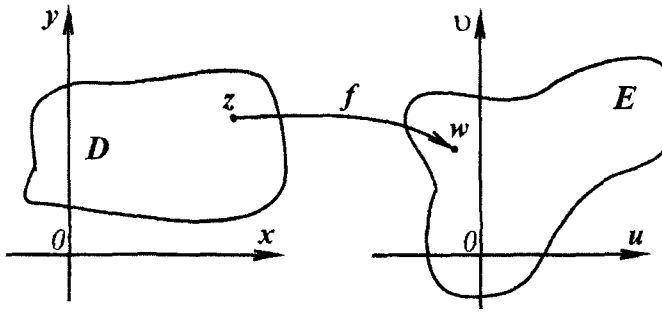


Рис. 1.7

Если изобразить значения z и w в разных комплексных плоскостях, то функцию $w = f(z)$ ***можно геометрически интерпретировать как отображение множества*** D ***на*** E (рис. 1.7). Если функция однозначная и разным значениям аргумента соответствуют разные значения функции, то говорят: функция (отображение) ***взаимнооднозначна*** или ***однолистна*** в D. Для функции $w = f(z)$ определяется ***обратная функция*** $z = g(w)$, которая каждому $w \in E$ ставит в соответствие некоторую совокупность точек $z \in D$. Очевидно, что отображение ***однолистно*** только в том случае, когда обе функции f и g ***однозначны.***

Как и для функций вещественной переменной, аналогично определяется сложная функция. Функция $w_1 = f(z)$ отображает множество D на E, а $w = g(w_1)$ соответственно E на G. Тогда функция $w = h(z) = g(f(z))$ отображает D на G и называется ***сложной***, а соответствующее отображение $h = f \circ g$ – ***суперпозицией отображений*** f и g.

Элементарными функциями комплексного переменного являются естественные распространения в комплексную область обычных для анализа элементарных функций:

$$az + b,\ \ z^n,\ \ \sqrt[n]{z},\ \ \sin z,\ \ \cos z,\ \ e^z,\ \ \ln z,\ \ \ldots\ .$$

Основные свойства их сохраняются, однако при таком распространении функции приобретают иногда новые свойства, например, ***показательная функция***

$$e^z = e^{x+iy} = e^x(\cos y + i \sin y)$$

становится периодической с периодом $2\pi i$: $e^{z+2\pi i} = e^z$, $n \in Z$ (ср.(1.10)), функции

$$\sin z = \frac{1}{2i}(e^{iz} - e^{-iz}),\ \cos z = \frac{1}{2}(e^{iz} + e^{-iz})$$

перестают быть *ограниченными* $(z = iy \Rightarrow \cos iy = ch\, y)$, приобретает смысл *логарифм отрицательных чисел:*

$$Lnz = \ln|z| + i\arg z = \ln|z| + i(\varphi + 2k\pi),\ k \in Z.$$

Особый интерес представляет изучение природы многозначных функций, возможность выделения однозначных ветвей, которые являются аналитическими функциями. К примеру, $\sqrt[n]{z}$ является n-листной функцией, имеет ровно n разных значений (п.1.1.2).

Важную роль в практических приложениях играет простая дробно-рациональная функция $w = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$ – *функция Жуковского.*

Заметим, что функцию $\sin z$ можно представить с помощью функции Жуковского посредством суперпозиции:

$$\frac{1}{i}e^{iz} = -ie^{iz} \equiv w \ \Rightarrow\ \sin z = \frac{1}{2}\left(w + \frac{1}{w}\right).$$

Аналогично вещественному случаю определяются *гиперболические функции комплексного переменного* (синус, косинус, тангенс, котангенс):

$$shz = \frac{1}{2}(e^z - e^{-z}),\ chz = \frac{1}{2}(e^z + e^{-z}),$$

$$thz = \frac{shz}{chz} = \frac{e^z - e^{-z}}{e^z + e^{-z}},\quad cthz = \frac{1}{thz} = \frac{chz}{shz} = \frac{e^z + e^{-z}}{e^z - e^{-z}},$$

которые очень просто выражаются через соответствующие тригонометрические функции:

$$shz = -i\sin iz,\quad chz = \cos iz,$$
$$thz = -itgiz,\quad cthz = ictgiz.$$

Таким образом, тригонометрические и гиперболические функции выражаются через показательную. Можно показать, что *обратные функции*

выражаются через логарифмы. Например, получим формулу для ***arcsin z.***

По определению

$$z = \sin w = \frac{1}{2i}(e^{iw} - e^{-iw}) \Rightarrow$$

$$2iz = e^{iw} - e^{-iw} \Big| \cdot e^{iw} \Rightarrow e^{2iw} - 2ize^{iw} - 1 = 0.$$

Решая квадратное уравнение относительно e^{iw}, получим

$$e^{iw} = \{i^2 = -1\} = iz \pm \sqrt{1 - z^2} \Rightarrow w = \arcsin z = \frac{1}{i} Ln\left(iz \pm \sqrt{1 - z^2}\right).$$

Знаки $\pm$ можно опустить, если понимать корень как двузначную функцию. В силу соотношения $\left(iz - \sqrt{1 - z^2}\right)\left(iz + \sqrt{1 - z^2}\right) = -1$ изменение знака перед корнем сводится к изменению знака перед логарифмом, поэтому знак "–" в формулах можно не писать.

Аналогично можно получить все следующие формулы для обратных тригонометрических и гиперболических функций.

$$\arccos z = iLn(z + \sqrt{z^2 - 1}),$$

$$\arcsin z = \frac{\pi}{2} - \arccos z = -iLn(iz + \sqrt{1 - z^2}),$$

$$\operatorname{arctg} z = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arcctg} z = \frac{1}{2i} Ln \frac{1 + iz}{1 - iz},$$

$$\operatorname{arch} z = Ln(z + \sqrt{z^2 - 1}), \qquad \operatorname{arsh} z = Ln(z + \sqrt{z^2 + 1}),$$

$$\operatorname{arcth} z = \frac{1}{2} Ln \frac{z + 1}{z - 1}, \qquad \operatorname{arth} z = \frac{1}{2} Ln \frac{1 + z}{1 - z}.$$

Через экспоненту можно выразить также общую ***степенную*** и ***показательную*** функции:

$$a = \alpha + i\beta, \quad z^a = e^{aLnz} = e^{aLn|z|} \cdot e^{ai \arg z} = |z|^a e^{ai \arg z},$$

$$a^z = e^{zLna} = e^{z \ln|a|} \cdot e^{zi \arg a} = |a|^z e^{zi \arg a}.$$

1.2.3. Предел и непрерывность функции комплексного переменного

Определение предела функции $w = f(z)$ в точке z_0 можно сформулировать в геометрической интерпретации через ε – окрестность: число w_0 является пределом функции $w = f(z)$ при $z \to z_0$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta = \delta_\varepsilon > 0$, что для всех точек z из δ-окрестности точки z_0 соответствующие значения $w = f(z)$ лежат в ε-окрестности w_0 : $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = w_0 \Leftrightarrow$

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta = \delta_\varepsilon > 0 : \forall z : |z - z_0| < \delta \Rightarrow |f(z) - w_0| < \varepsilon.$$

Из определения ясно, что стремление к пределу происходит независимо от способа приближения z к z_0, т.е. по любому закону, по любой линии.

Существование предела функции комплексного переменного эквивалентно существованию двух двойных пределов. Пусть $z_0 = x_0 + iy_0$,

$$\left.\begin{array}{l} w_0 = u_0 + iv_0 \\ w = f(z) = u + iv \end{array}\right| \lim\limits_{z \to z_0} f(z) = w_0 \Leftrightarrow \begin{cases} \lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} u(x, y) = u_0, \\ \lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} v(x, y) = v_0. \end{cases}$$

Можно показать, что при этом ***сохраняются основные свойства пределов***: предел суммы, произведения и частного двух функций равен соответственно сумме, произведению и частному пределов, если все пределы существуют и предел знаменателя отличен от нуля.

Очевидно, предел функции не всегда существует, например, $\lim\limits_{z \to 0} \sin \dfrac{1}{z}$ не существует даже, если z принимает лишь вещественные значения.

В дальнейшем будем предполагать, не оговаривая это, что предел существует.

Иногда условно пишут $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = \infty$, если для любого сколь угодно большого $M > 0$ можно найти $\delta > 0$ такое, что из $|z - z_0| < \delta$ следует $|f(z)| > M$.

Например, $\lim\limits_{z\to a}\dfrac{1}{z-a}=\infty$, так как $\dfrac{1}{|z-a|}>M$, если $|z-a|<\dfrac{1}{M}=\delta$.

Аналогично определяют $\lim\limits_{z\to\infty} f(z)=w_0$, $\lim\limits_{z\to\infty} f(z)=\infty$.

Функция $w=f(z)$ называется ***непрерывной*** в точке z_0, если она определена в самой точке z_0 и некоторой ее окрестности и $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)=f(z_0)$.

Очевидно, для того чтобы функция $w=f(z)=u+iv$, $z=x+iy$, была непрерывна в точке $z_0=x_0+iy_0$, ***необходимо и достаточно***, чтобы ***вещественная и мнимая части функции*** $u=u(x,y)$, $v=v(x,y)$ ***были непрерывными*** в точке (x_0,y_0).

Функция $w=f(z)$ ***непрерывна*** в области D, если она непрерывна в каждой ее точке.

Если нарушается какое-либо из условий непрерывности функции в точке, то такая точка называется точкой разрыва.

Из теорем о пределах суммы, произведения и частного следует, что соответствующие операции над непрерывными функциями дают непрерывные функции (для частного знаменатель не равен нулю), что сумма и произведение могут иметь точку разрыва лишь в точках разрыва слагаемых или сомножителей, точка же разрыва дроби может быть либо в точке разрыва числителя или знаменателя, либо в точке, где знаменатель равен нулю.

В заключение отметим, что элементарные функции комплексного переменного непрерывны там, где определены.

1.2.4. Дифференцируемость и аналитичность. Условия Коши-Римана

Производная от функции комплексного переменного определяется так же, как и для функции действительного переменного.

Производной функции $w=f(z)$ называется предел отношения изменения функции к соответствующему изменению аргумента, когда последнее стремится к нулю:

$$w'=f'(z)=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{\Delta w}{\Delta z}=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z}, \qquad (1.12)$$

если этот предел существует и конечен.

Если производная существует, то функцию называют ***дифференцируемой.***

Еще раз отметим, что существование предела подразумевает его независимость от характера стремления $\Delta z \to 0$. Это очень жесткое условие. Оказывается, что большой произвол в способе, каким точка $z_1 = z + \Delta z$ может стремиться к точке z, приводит к тому, что даже очень простые функции комплексного переменного могут не иметь производной.
Поясним это на примерах.

Пример 1.2.1. Пусть $w = Re\, z = x.$

$$z = x + iy,\ \Delta z = \Delta x + i\Delta y,\ \Delta w = Re(z + \Delta z) - Re\, z = \Delta x,$$

$$\lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta w}{\Delta z} = \lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \frac{\Delta x}{\Delta x + i\Delta y}.$$

Последний предел существенно зависит от направления, по которому $\Delta z \to 0$.

Действительно, если $\Delta y = k\Delta x$, то

$$\lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta w}{\Delta z} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta x + ik\Delta x} = \frac{1}{1 + ki}.$$

Пример 1.2.2. Функция $w = \bar{z} = x - iy$ не является дифференцируемой.

Справедливость этого утверждения показывается, как и в примере 1.2.1.

Пример 1.2.3. Производная линейной функции $w = f(z) = az + b$ существует и $w' = a$.

Действительно,

$$w' = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta w}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{a(z + \Delta z) + b - (az + b)}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{a\Delta z}{\Delta z} = a.$$

Таким образом, такие простые функции, как $Re\, z$, $Im\, z$, $\bar{z}$, $f(\bar{z})$, $|z|$ ***не дифференцируемы***. Можно аналогично последнему примеру, пользуясь определением производной, доказать, что ***основные элементарные функции являются дифференцируемыми.***

Функция $w = f(z)$, ***дифференцируемая в каждой точке области*** D, ***называется аналитической.***

Определение аналитической функции предполагает ее однозначность, так как понятие предела и производной даны для однозначных функций.

Определение аналитичности функции $w = f(z)$ в терминах ее действительной и мнимой частей $u = u(x, y), \quad v = v(x, y)$ выражают условия Коши-Римана (Эйлера-Даламбера).

Теорема 1.2.1. Условия Коши-Римана (Эйлера-Даламбера) (КРЭД). Для того чтобы функция $w = u + iv, u = u(x, y), v = v(x, y)$ была аналитической в области D, необходимо и достаточно, чтобы в этой области выполнялись условия Коши-Римана (Эйлера-Даламбера):

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}. \tag{1.13}$$

При этом

$$w' = f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} - i\frac{\partial u}{\partial y}. \tag{1.14}$$

Уравнения (1.13) получены в связи с гидродинамическими задачами Даламбером (1752) и Эйлером (1755). В 1777 г. Эйлер вновь получает эти уравнения при рассмотрении интегралов от функций комплексного переменного.

Доказательство. Необходимость. Пусть функция $f(z)$ аналитическая в области D, т.е. в каждой точке z существует производная $f'(z)$.

Воспользуемся замечанием о независимости предела от способа стремления $\Delta z \to 0$. Следовательно, если $\Delta z = \Delta x + i\Delta y \to 0$ вдоль прямой, параллельной действительной оси $(\Delta y = 0, \ \Delta x \to 0)$, и вдоль прямой, параллельной мнимой оси $(\Delta x = 0, \ \Delta y \to 0)$, то предельный переход дает одно и то же значение. В этих случаях соответственно

$$f'(z) = \lim_{\Delta z = \Delta x \to 0} \frac{u(x+\Delta x, y) + iv(x+\Delta x, y) - u(x, y) - iv(x, y)}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{u(x+\Delta x, y) - u(x, y)}{\Delta x} + i \lim_{\Delta x \to 0} \frac{v(x+\Delta x, y) - v(x, y)}{\Delta x},$$

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x}. \tag{*}$$

$$f'(z)=\lim_{\Delta z=i\Delta y\to 0}\frac{u(x,y+\Delta y)+iv(x,y+\Delta y)-u(x,y)-iv(x,y)}{i\Delta y}=$$

$$=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{u(x,y+\Delta y)-u(x,y)}{i\Delta y}+\lim_{\Delta y\to 0}\frac{v(x,y+\Delta y)-v(x,y)}{\Delta y}=$$

$$f'(z)=\frac{1}{i}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial y}=\frac{\partial v}{\partial y}-i\frac{\partial u}{\partial y}\ . \qquad (2^*)$$

Из сравнения формул (*) и (2*) следует равенство (1.14) и условия КРЭД (1.13).

Достаточность. Пусть теперь $u(x,y)$, $v(x,y)$ дифференцируемые функции двух вещественных переменных, для которых выполнены условия (1.13). Тогда по определению дифференцируемости

$$\Delta w=f(z+\Delta z)-f(z)=$$

$$=u(x+\Delta x,y+\Delta y)-u(x,y)+i[v(x+\Delta x,y+\Delta y)-v(x,y)]=$$

$$=\frac{\partial u}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial u}{\partial y}\Delta y+i\left(\frac{\partial v}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial v}{\partial y}\Delta y\right)+o(\Delta z),\quad \frac{o(\Delta z)}{\Delta z}\underset{\Delta z\to 0}{\to}0.$$

С учетом условий (1.13) изменение функции можно записать в виде

$$\Delta w=f(z+\Delta z)-f(z)=\left(\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x}\right)(\Delta x+i\Delta y)+o(\Delta z),$$

$$\Delta w=\left(\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x}\right)\Delta z+o(\Delta z),$$

откуда следует, что существует

$$f'(z)=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z}=\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x},$$

что и требовалось доказать.

Так как обычные свойства алгебраических действий и предельного перехода сохраняются при переходе к функциям комплексного переменного, то сохраняются ***правила дифференцирования и таблица производных основных элементарных функций*** (см., напр., [12]):

$$(f\pm g)'=f'\pm g',\ (fg)'=f'g+fg',\ (cf)'=cf',$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)'=\frac{f'g-fg'}{g^2},\left(\frac{c}{g}\right)'=-\frac{cg'}{g^2},\left(\frac{f}{c}\right)'=\frac{f'}{c},$$

$$(f[g(z)])' = f'[g(z)] \cdot g'(z), \quad w'_z = \frac{1}{z'_w}.$$

Таблица производных основных элементарных функций комплексного переменного может быть получена по определению производной с учетом приведенных правил. Существование производных основных элементарных функций можно доказать, проверяя условия Коши-Римана (Даламбера-Эйлера).

Условия Коши-Римана в полярных координатах:

$$\frac{\partial u}{\partial \varphi} = -r\frac{\partial v}{\partial r}, \quad \frac{\partial v}{\partial \varphi} = r\frac{\partial u}{\partial r}, \tag{1.15}$$

$$f'(z) = e^{-i\varphi}\left(\frac{\partial u}{\partial r} + i\frac{\partial v}{\partial r}\right) = \frac{r}{z}\left(\frac{\partial u}{\partial r} + i\frac{\partial v}{\partial r}\right). \tag{1.16}$$

Аналитические функции составляют незначительную часть всех функций комплексного переменного. Однако все элементарные функции являются аналитическими там, где определены. Более того, именно аналитические функции имеют многочисленные и важные приложения в аэро- и гидродинамике, в теории упругости, в теории электричества и в других науках, а также в различных математических дисциплинах, особенно в теории чисел и в дифференциальных уравнениях.

Для аналитической функции $w = u + iv$, вещественная часть $u = u(x, y)$ и мнимая часть $v = v(x, y)$ являются гармоническими функциями, т.е. удовлетворяют уравнениям Лапласа $\Delta u = 0$, $\Delta v = 0$.

Действительно, $\Delta u = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial u}{\partial x}\right) + \dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial u}{\partial y}\right)$. Учитывая условия Коши-Римана (1.13), получаем

$$\Delta u = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} = 0.$$

Заметим, что во многих приложениях аналитических функций приходится решать задачу о построении аналитической функции по известной вещественной части $u(x, y)$ или мнимой части $v(x, y)$. Решение связано с криволинейными интегралами (см. напр. [1,2,13]).

Задача 1.2.1. Выделить вещественную и мнимую части для функций:

а) $w = \mathrm{Re}\, z$, б) $w = \bar{z}$, в) $w = e^{iz}$, г) $w = z \sin z$,

т.е. представить в виде $w = u + iv$, $u = u(x, y)$, $v = v(x, y)$.

Проверить, являются ли они аналитическими, если да, то найти производные.

Решение. Чтобы представить функцию в виде $w = u + iv$, записываем комплекснозначный аргумент в алгебраической форме $z = x + iy$, а затем преобразуем функцию, выделяя вещественную $u(x, y)$ и мнимую $v = v(x, y)$ части. Для проверки аналитичности используем условия Коши-Римана (КРЭД). Заметим, что функции из пп. а), б) рассмотрены в примерах 1.2.1, 1.2.2, где показана их неаналитичность по определению производной. Проверим в этих случаях условия Коши-Римана:

а) $w = \mathrm{Re}\, z.\ z = x + iy \Rightarrow w = x,\ u(x, y) = x,\ v(x, y) = 0.$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 1,\ \frac{\partial v}{\partial x} = 0,\ \frac{\partial u}{\partial y} = 0,\ \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial x} \neq \frac{\partial v}{\partial y},\ \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Первое из условия КРЭД не выполнено, следовательно, функция $w = \mathrm{Re}\, z$ не является аналитической.

б) $w = \bar{z},\ z = x + iy \Rightarrow w = x - iy,$

$$u(x, y) = x,\ v(x, y) = -y.$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 1,\ \frac{\partial v}{\partial x} = 0,\ \frac{\partial u}{\partial y} = 0,\ \frac{\partial v}{\partial y} = -1 \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial x} \neq \frac{\partial v}{\partial y},\ \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Условия КРЭД (1.13) нарушены, следовательно, функция $w = \bar{z}$ не является аналитической.

в) $w = e^{iz},\ z = x + iy \Rightarrow w = e^{i(x+iy)} = \{i^2 = -1\} = e^{ix-y}.$

$$w = e^{-y} e^{ix} = e^{-y}(\cos x + i \sin x).$$

Вещественная и мнимая части:

$$u(x, y) = e^{-y} \cos x,\quad v(x, y) = e^{-y} \sin x.$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -e^{-y} \sin x, \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = -e^{-y} \cos x,$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = e^{-y} \cos x, \qquad \frac{\partial v}{\partial y} = -e^{-y} \sin x.$$

Сравнивая полученные частные производные, убеждаемся, что выполнены условия КРЭД: $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial \upsilon}{\partial y},\ \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial \upsilon}{\partial x}$. Стало быть, функция $w=e^{iz}$ аналитическая на всей комплексной плоскости, ее производная

$$w'=\left\{\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial \upsilon}{\partial x}\right\}=-e^{-y}\sin x+ie^{-y}\cos x,$$

$$w'=ie^{-y}(\cos x+i\sin x)=ie^{-y}e^{ix}=ie^{-y+ix}=ie^{i(x+iy)}\ \Rightarrow$$

$$w'=ie^{iz}.$$

Производную можно было получить, пользуясь таблицей производных:

$$w'=\left\{(e^u)'=e^u\cdot u'\right\}=e^{iz}\cdot(iz)'=ie^{iz}.$$

Вычислим производную в некоторых точках :

в точке $z=-i\Rightarrow w'(-i)=ie^{i(-i)}=ie;$

в точке $z=0\Rightarrow w'(0)=i;$

в точке $z=\frac{\pi}{2}\Rightarrow w'\left(\frac{\pi}{2}\right)=ie^{i\frac{\pi}{2}}=i\left(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}\right)=i^2\Rightarrow w'\left(\frac{\pi}{2}\right)=-1.$

г) $w=z\sin z.$

Функция $f(z)=z$, очевидно, является аналитической (ср. пр. 1.2.3). Функция $g(z)=\sin z=\frac{1}{2i}(e^{iz}-e^{-iz})$ так же является аналитической (ср. п.в этой задачи), как сумма аналитических функций

$$(\sin z)'=\frac{1}{2i}(ie^{iz}+ie^{-iz})=\frac{1}{2}(e^{iz}+e^{-iz})=\cos z.$$

Тогда их произведение $w=fg$ также аналитическая функция в комплексной плоскости, и по правилу дифференцирования произведения $(fg)'=f'g+fg':\ w'=\sin z+z\cos z.$

Можно доказать дифференцируемость функции, пользуясь условиями КРЭД, но непосредственные вычисления достаточно громоздкие даже для функции $w = \sin z$.

Задача 1.2.2. Выяснить, является ли аналитической функция $w = |z|$.

Решение. $z = x + iy = re^{i\varphi} \Rightarrow w = |z| = \sqrt{x^2 + y^2} = r.$

Проверим условия КРЭД в полярных координатах (условия (1.15)).

$w = u + i\upsilon,\ u(r,\varphi) = r,\ \upsilon(r,\varphi) = 0.$

$$\frac{\partial u}{\partial r} = 1,\ \frac{\partial u}{\partial \varphi} = 0,\ \frac{\partial \upsilon}{\partial r} = 0,\ \frac{\partial \upsilon}{\partial \varphi} = 0 \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial \varphi} = -r\frac{\partial \upsilon}{\partial r},\ \frac{\partial \upsilon}{\partial \varphi} \neq r\frac{\partial u}{\partial r}.$$

Условия КРЭД нарушены, стало быть, функция $w = |z|$ не является аналитической.

Упражнение. Проверить для этой функции условия аналитичности в декартовых координатах.

Задача 1.2.3. Доказать, что функция $w = \ln z$ является аналитической в комплексной плоскости с выколотой точкой $z = 0$, и $(\ln z)' = \frac{1}{z}$.

Решение. Как упражнение, предлагаем доказать аналитичность функции $w = e^z$ и показать, что $(e^z)' = e^z$ (ср. задачу 1.2.1). Для нахождения производной функции $w = \ln z$ воспользуемся правилом дифференцирования обратной функции $z = e^w$:

$$w'_z = \frac{1}{z'_w} \Rightarrow (\ln z)' = \frac{1}{(e^w)'} = \frac{1}{e^w} = \frac{1}{z}.$$

Докажем это непосредственно, пользуясь условиями КРЭД в полярных координатах (1.15).

$$\ln z = \ln|z| + iArgz,\ z = re^{i\varphi},\ |z| = r,\ Argz = \varphi \Rightarrow$$

$$\ln z = \ln r + i\varphi,\ u(r,\varphi) = \ln r,\ \upsilon(r,\varphi) = \varphi.$$

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{r},\ \frac{\partial u}{\partial \varphi} = 0,\ \frac{\partial \upsilon}{\partial r} = 0,\ \frac{\partial \upsilon}{\partial \varphi} = 1 \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial \varphi} = -r\frac{\partial \upsilon}{\partial r},\ \frac{\partial \upsilon}{\partial \varphi} = r\frac{\partial u}{\partial r}.$$

Условия (1.15) выполнены, следовательно, функция $w = \ln z$ аналитична везде, кроме $z = 0$:

$$w' = \left\{\frac{r}{z}\left(\frac{\partial u}{\partial r} + i\frac{\partial \upsilon}{\partial r}\right),(1.16)\right\} = \frac{r}{z}\frac{1}{r} = \frac{1}{z}.$$

Задача 1.2.4. Восстановить аналитическую функцию $w = f(z) = u + iv$ по известной вещественной части $u(x, y)$ и значению $f(z_0)$:

$$u(x,y) = x + \frac{x}{x^2 + y^2},\ f(1) = 2.$$

Решение. Так как функция $w = u + iv$ аналитическая, то выполнены условия аналитичности (КРЭД):

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y},\ \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Согласно данным задачи,

$$\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x} = \left[x + \frac{x}{x^2 + y^2}\right]'_x,\ \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y} = -\left[x + \frac{x}{x^2 + y^2}\right]'_y.$$

Напомним, что при нахождении частной производной по x на y смотрим как на константу, а при нахождении частной производной по y считаем постоянной x.

Таким образом,

$$\frac{\partial v}{\partial y} = 1 + \frac{x^2 + y^2 - x2x}{(x^2 + y^2)^2} = 1 + \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2},\ \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2}.$$

Интегрируя последнее равенство по x, имеем

$$v = \int \frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2} dx = y \int \frac{d(x^2 + y^2)}{(x^2 + y^2)^2} = \left\{ \int \frac{du}{u^2} = -\frac{1}{u} + c \right\} \Rightarrow$$

$$v = -\frac{y}{x^2 + y^2} + c(y). \qquad (*)$$

Используя выражения для $\frac{\partial v}{\partial y}$ и v, получаем уравнение для нахождения функции $c(y)$:

$$\frac{\partial v}{\partial y} = 1 + \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2} = c'(y) - \frac{x^2 + y^2 - y \cdot 2y}{(x^2 + y^2)^2} \Rightarrow$$

$$1 + \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2} = c'(y) + \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2},$$

откуда $c'(y) = 1$ или $c(y) = y + c$.

Таким образом,

$$v = v(x,y) \overset{(*)}{=} -\frac{y}{x^2+y^2} + y + c.$$

Используя начальное условие $f(1)=2$, т.е. при $z=1$ $(x=1, y=0)$ $w = u + iv = 2$ $(u=2,\ v=0)$, получаем

$$v(1,0) = 0 = 0 + c - 0, \text{ т.е. } c = 0.$$

Следовательно, искомая мнимая часть аналитической функции $v = y - \frac{y}{x^2+y^2}$, а сама функция

$$w = \{u + iv\} = x + \frac{x}{x^2+y^2} + i\left(y - \frac{y}{x^2+y^2}\right).$$

В последнем выражении нужно вернуться к переменной $z = x + iy$. С этой целью прежде всего перегруппируем слагаемые $w = x + iy + \frac{x - iy}{x^2+y^2}$ и вспомним, что $x + iy = z$, $x - iy = \bar{z}$, $x^2 + y^2 = |z|^2 = z\bar{z}$.

Стало быть, $w = z + \frac{\bar{z}}{z\bar{z}}$.

Таким образом, по известной вещественной части $u(x,y)$ и начальному значению $f(z_0)$ восстановлена функция Жуковского $w = z + \frac{1}{z}$.

Задача 1.2.5. Восстановить аналитическую функцию $w = f(z) = u + iv$ в окрестности точки z_0 по известной мнимой части $v = v(x,y)$ и значению $f(z_0)$: $v = 2xy + x$, $f(0) = 0$.

Решение. Согласно условиям КРЭД аналитичности функции и данным задачи:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} = (2xy + x)'_y \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial x} = 2x,$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} = -(2xy + x)'_x \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial y} = -2y - 1.$$

Таким образом, вещественная часть искомой функции определяется соотношениями:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -2y - 1.$$

Если проинтегрируем, например, второе равенство по переменной y, то получим

$$u = \int(-2y - 1)dy + c(x) \;\Rightarrow\; u = u(x,y) = -y^2 - y + c(x).$$

Дифференцируем функцию $u(x,y)$ по x, тогда с учетом

$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x$ имеем $\frac{\partial u}{\partial x} = c'(x) = 2x,$ т.е. $c(x) = x^2 + c.$

Стало быть, общий вид вещественной части функции

$$u = u(x,y) = -y^2 - y + x^2 + c. \qquad (*)$$

Значение произвольной постоянной c определим, используя начальные условия $f(0) = 0$:

$$z = x + iy = 0 \;(x = 0, y = 0) \Rightarrow f(z) = u + i\upsilon = 0 \;(u = 0, \upsilon = 0).$$

Имеем

$$u(0,0) = -0 - 0 + 0 + c = 0 \;\Rightarrow\; c = 0.$$

Таким образом, $\overset{(*)}{u} = x^2 - y^2 - y,$

$$w = \{u + i\upsilon\} = x^2 - y^2 - y + i(2xy + x).$$

Преобразуем w к виду $f(z)$, где $z = x + iy$:

$$w = x^2 - y^2 - y + 2xyi + ix = \{i^2 = -1\} = (x^2 + 2xiy + i^2y^2) + i(x + iy),$$

$$w = (x + iy)^2 + i(x + iy).$$

Следовательно, искомая аналитическая функция имеет вид $w = z^2 + iz.$

1.2.5. Геометрический смысл модуля и аргумента производной. Конформные отображения

Определение производной функции $w = f(z)$

$$f'(z) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta w}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z}$$

в случае $f'(z) \neq 0$ подразумевает два равенства:

$$\lim_{\Delta z \to 0} \arg \frac{\Delta w}{\Delta z} = \arg f'(z), \tag{1.17}$$

$$\lim_{\Delta z \to 0} \left| \frac{\Delta w}{\Delta z} \right| = |f'(z)|. \tag{1.18}$$

Пусть L некоторая непрерывная кривая, а Λ – ее образ при непрерывном отображении f.

Геометрическое истолкование равенства (1.18) см. рис. 1.8.

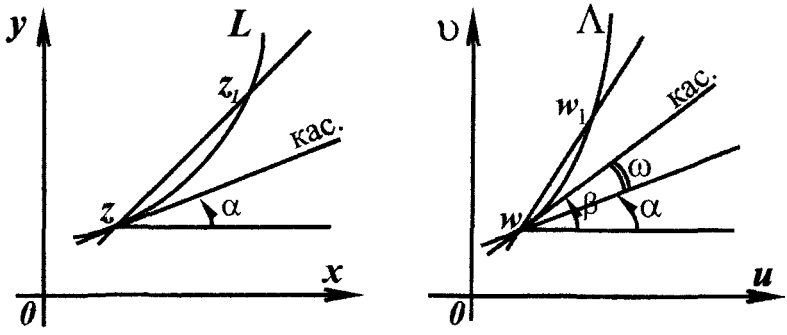


Рис. 1.8

Как известно (п.1.1.2), аргумент дроби равен разности аргументов числителя и знаменателя:

$$\arg f'(z) = \lim_{\Delta z \to 0} (\arg \Delta w - \arg \Delta z).$$

Но аргумент разности $\Delta w = w_1 - w$ есть угол наклона к оси Ox секущей $\overline{ww_1}$. Если $z_1 \to z$ по кривой L, то $w_1 \to w$ по кривой Λ, секущие приближаются к касательным в точках z и w. Поэтому

$$\lim_{\Delta z \to 0} \arg \Delta z = \lim_{z_1 \to z} \arg(z_1 - z) = \alpha,$$

$$\lim_{\Delta z \to 0} \arg \Delta w = \lim_{z_1 \to z} \arg(w_1 - w) = \beta,$$

где α, β – углы наклона к вещественной оси касательных в точке z и в точке w соответственно. Следовательно, (см. (1.17)) $\arg f'(z) = \beta - \alpha = \omega$ задает ***угол поворота касательной*** к кривой

L в точке z против часовой стрелки до совпадения с направлением касательной к кривой Λ в точке w.

Перейдем к истолкованию равенства (1.18). Как известно, модуль разности комплексных чисел есть расстояние между точками (п.1.1), т.е. $|\Delta w| = |w_1 - w|$ и $|\Delta z| = |z_1 - z|$ есть длины хорд $\overline{ww_1}$, $\overline{zz_1}$ соответственно. Бесконечно малые дуги $\overset{\smile}{ww_1}$, $\overset{\smile}{zz_1}$ эквивалентны стягивающим их хордам, т.е. соответствующие отношения стремятся к 1. Следовательно,

$$|f'(z)| = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{|\Delta w|}{|\Delta z|} = \lim_{z_1 \to z} \frac{дл.ww_1}{дл.zz_1}$$

задает ***коэффициент деформации*** (растяжения) бесконечно малой дуги в точке z при отображении $w = f(z)$: $|f'(z)| > 1$ – растяжение, удлинение, $|f'(z)| < 1$ – сжатие, укорачивание.

Так как производная не зависит от того, по какой кривой $z_1 \to z$, то все бесконечно малые дуги, выходящие из точки z, при отображении на плоскость w получают одно и то же растяжение, равное $|f'(z)|$, и поворачиваются на один и тот же угол, равный $arg\, f'(z)$, если $f'(z) \neq 0$. Отсюда следует, что угол между двумя кривыми при отображении не меняется, так как касательная к обеим кривым повернутся на один и тот же угол. Точнее, если кривые L_1 и L_2 отображаются в кривые Λ_1 и Λ_2 и в плоскости z мы переходим от L_1 к L_2 поворотом на угол ω против часовой стрелки, то и в плоскости w переход от Λ_1 к Λ_2 совершается поворотом на тот же угол ω и против часовой стрелки.

Итак, доказана следующая теорема.

Теорема 1.2.2. Если производная $f'(z) \neq 0$, то аргумент производной задает угол поворота касательной, а модуль $|f'(z)|$ – коэффициент деформации бесконечно малых дуг.

Отображение $w = f(z)$ одной области на другую называется ***конформным*** в точке z, если взаимооднозначная функция $f(z)$ сохраняет подобие бесконечно малых фигур, в частности, сохраняет углы между линиями и ориентацию. Иначе, конформное отображение обладает свойством консерватизма углов и подобия в малом. Легко видеть, что этими свойствами обладает аналитическая функция, если $f'(z) \neq 0$.

Следствием теоремы 1.2.2 является теорема 1.2.3.

Теорема 1.2.3. Отображение с помощью аналитической функции конформно в каждой точке, в которой производная отлична от нуля.

Естественно, возникает вопрос, верно ли обратное утверждение, вытекает ли из свойств конформного отображения существование производной $f'(z) \neq 0$? Положителен ответ на этот вопрос даже при выполнении любого из свойств конформного отображения, т.е. фактически справедлива следующая теорема.

Теорема 1.2.4. Для того чтобы функция $w = f(z)$ осуществляла конформное отображение области D, необходимо и достаточно, чтобы она была: 1) однолистной; 2) аналитической; 3) $f'(z) \neq 0 \quad \forall z \in D.$

Задача 1.2.6. Найти коэффициент растяжения и угол поворота при отображении $w = z^2$ в точке $z_0 = \sqrt{2}(1+i).$

Решение. Имеем $w' = 2z,\ w'(z_0) = 2\sqrt{2}(1+i),$ или, в тригонометрической форме , $w'(z_0) = 4\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right).$

Следовательно, искомый коэффициент растяжения $|w(z_0)| = 4,$ а угол поворота $\arg w'(z_0) = \frac{\pi}{4}.$

Простейшее однолистное конформное изображение всей комплексной плоскости на себя осуществляет дробно-линейная функция

$$w = \frac{az+b}{cz+d},\ \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc \neq 0,\ \text{т.к. } w' = \frac{ad-bc}{(cz+d)^2} \neq 0.$$

Можно показать, что она единственная из всех функций, обладающая таким свойством: она отображает окружность в $z-$плоскости в окружность $w-$плоскости (***круговое свойство***) и сохраняет ***свойство симметричности*** точек (прямые интерпретируются как окружности радиуса $R = \infty$).

Задача 1.2.7. Найти образ прямой $y = x + 2$ при отображении

$$w = \frac{z+1}{z-1}.$$

Решение. Данная прямая не проходит через точку $z = 1$, следовательно, функция w определена для точек z на этой прямой.

Запишем функцию w в виде $w = 1 + \frac{2}{z-1}.$ Отсюда

$$w-1=\frac{2}{z-1} \Rightarrow z-1=\frac{2}{w-1}=\frac{2(\overline{w}-1)}{|w-1|^2},\quad z=x+iy,\ w=u+i\upsilon \Rightarrow$$

$$x-1+iy=\frac{2(u-1-i\upsilon)}{(u-1)^2+\upsilon^2} \Rightarrow x-1=\frac{2(u-1)}{(u-1)^2+\upsilon^2},\ y=\frac{-2\upsilon}{(u-1)^2+\upsilon^2}.$$

На прямой $y=x+2$ имеем

$$\frac{-2\upsilon}{(u-1)^2+\upsilon^2}=3+\frac{2(u-1)}{(u-1)^2+\upsilon^2} \Rightarrow -2\upsilon=3\left[(u-1)^2+\upsilon^2\right]+2(u-1) \Rightarrow$$

$$3u^2-4u+3\upsilon^2+2\upsilon+1=0,$$

откуда

$$u^2-\frac{4}{3}u+\upsilon^2+\frac{2}{3}\upsilon+\frac{1}{3}=0 \Rightarrow \left(u-\frac{2}{3}\right)^2+\left(\upsilon+\frac{1}{3}\right)^2=\frac{2}{9}-$$

уравнение окружности с центром в точке $\left(\frac{2}{3},-\frac{1}{3}\right)$ радиуса $\frac{\sqrt{2}}{3}$ (рис.1.9).

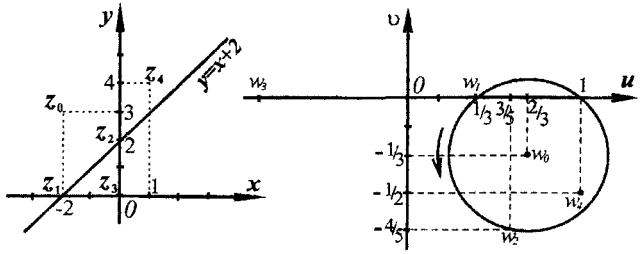


Рис.1.9

Точка $z_1=-2$ переходит в $w_1=\frac{1}{3}$, точка $z_2=2i$ – в

$$w_2=\frac{2i+1}{2i-1}=\frac{-(2i+1)^2}{5}=\frac{3-4i}{5},\quad z_3=0 \rightarrow w_3=-1,$$

$$z_4=1+4i \rightarrow w_4=\frac{2+4i}{4i}=1-\frac{1}{2}i, z_0=-2+3i \rightarrow w_0=\frac{-1+3i}{-3+3i}=\frac{2}{3}-\frac{1}{3}i.$$

При движении по прямой $y=x+2$ в направлении от z_1 к z_2 движение по окружности происходит против часовой стрелки, множество точек под прямой $y=x+2$ переходит во внешность круга (определяем по

точкам z_3 и w_3), а множество точек над прямой – во внутренность круга (по точкам z_0 и w_0).

1.3. Интегрирование функций комплексного переменного

Здесь мы рассмотрим понятие интеграла от функции комплексного переменного и важнейшие свойства аналитических функций, связанные с этим понятием.

1.3.1. Интеграл от функции комплексного переменного

Пусть задана ориентированная кривая L и на ней функция $w = f(z)$.

Рассмотрим разбиение P кривой L с концами в точках a и b (рис.2.13).

$$P: a = z_0,\ z_1,\ldots,z_k,\ z_{k+1},\ \ldots,\ z_{n-1},\ z_n = b.$$

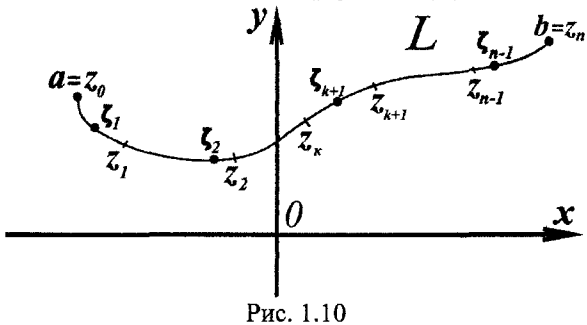


Рис. 1.10

Диаметр разбиения $d(P) = \max\limits_{k=0,n-1} |\Delta z_k| = \max\limits_{k=0,n-1} |z_{k+1} - z_k|$.

По определению интегралом от $f(z)$ по кривой L называют предел интегральных сумм при диаметре разбиения, стремящемся к нулю:

$$\lim_{\substack{d(P)\to 0 \\ n\to\infty}} \sum_{k=0}^{n-1} f(\zeta_k)\Delta z_k = \int_L f(z)dz, \qquad (1.19)$$

если он существует независимо от способа разбиения и выбора точек $\zeta_k \in z_k z_{k+1}$.

Теорема 1.3.1 (***существования***). Если функция $f(z) = u + iv$ кусочно-непрерывна и ограничена на кусочно-гладкой кривой L, то интеграл (1.19) существует.

Доказательство сводится к вычислению криволинейных интегралов от функций вещественных переменных (см.[1,2,13]):

$$f(z)=u+i\upsilon,\quad z=x+iy,\quad u=u(x,y),\quad \upsilon=\upsilon(x,y),$$

$$dz=dx+idy.$$

$$\int_L f(z)dz=\int_L (u+i\upsilon)(dx+idy)=\int_L udx+i(\upsilon dx+udy)+i^2\upsilon dy,$$

$$\int_L f(z)dz=\int_L udx-\upsilon dy+i\int_L \upsilon dx+udy. \qquad (1.20)$$

Если кусочно-гладкая кривая L задана параметрическими уравнениями $z(t)=x(t)+iy(t),\ t\in(t_0,T)$, то из (1.20) легко получить формулу замены переменной в интеграле :

$$\int_L f(z)dz=\int_{t_0}^{T} f(z(t))z'(t)dt.$$

Для аналитической функции в односвязной области справедливы формулы Ньютона-Лейбница и интегрирования по частям:

$$\int_a^b f(z)dz=F(z)\Big|_a^b=F(b)-F(a),$$

$F(z)$ – первообразная, т.е. $F'(z)=f(z)$;

$$\int_a^b udv=uv\Big|_a^b-\int_a^b \upsilon du.$$

Все свойства криволинейных интегралов сохраняются для интегралов от функций комплексного переменного. Предлагаем выписать их самостоятельно.

Пример 1.3.1. Вычислить $\int_L \frac{dz}{(z-a)^n}$, где n – целое число; L – окружность $|z-a|=R$.

Решение. Полярное уравнение окружности $z-a=Re^{i\varphi}, \varphi\in[0;2\pi]$;

$$\int_L \frac{dz}{(z-a)^n}=\int_0^{2\pi}\frac{Rie^{i\varphi}d\varphi}{R^n e^{in\varphi}}=\frac{i}{R^{n-1}}\int_0^{2\pi} e^{i(1-n)\varphi}d\varphi.$$

а) $n\neq 1 \Rightarrow \int_{|z-a|=R}\frac{dz}{(z-a)^n}=\frac{i}{R^{n-1}}\frac{e^{i(1-n)\varphi}}{i(1-n)}\Big|_0^{2\pi}=0,$

т.к. $e^{2k\pi i}=1,\ k=0,\pm1,\ \dots\ ;$

б) $n=1\ \Rightarrow\ \int\limits_{|z-a|=R}\frac{dz}{z-a}=i\int\limits_0^{2\pi}d\varphi=i\varphi\Big|_0^{2\pi}\Rightarrow\int\limits_{|z-a|=R}\frac{dz}{z-a}=2\pi i.$

Замечание. С учетом теоремы 1.3.4 интегралы от функции $f(z)=(z-a)^{-n}$ будут иметь те же значения по любому контуру, окружающему точку $z=a$.

Пример 1.3.2. Вычислить интегралы:

а) $I_1=\int\limits_0^i z\cos 2z\,dz;$ б) $I_2=\int\limits_0^i z(z^2+3)^3\,dz;$

в) $I_3=\int\limits_L z|z|dz;\ \ L:\{|z|=1,\operatorname{Im}z\ge 0\};$

г) $I_4=\int\limits_{AB}z\,\operatorname{Im}z^2dz;$ AB – отрезок прямой, $z_A=0,\ z_B=1+2i.$

Решение. а) Функция $f(z)=z\cos 2z$ – аналитическая, интеграл берем по частям.

$$I_1=\int\limits_0^i\underbrace{z}_{u}\underbrace{\cos 2z\,dz}_{d\upsilon}=\left\{\begin{array}{l}\int ud\upsilon=u\upsilon-\int\upsilon du\\ du=dz,\upsilon=\dfrac{\sin 2z}{2}\end{array}\right\}=$$

$$=z\frac{\sin 2z}{2}\Big|_0^i-\int\limits_0^i\frac{\sin 2z}{2}dz=\frac{i\sin 2i}{2}+\frac{\cos 2z}{4}\Big|_0^i\ \Rightarrow$$

$$I_1=\{\sin iz=ish z,\cos iz=ch z\}=\frac{i^2sh2}{2}+\frac{\cos 2i-1}{4}=-\frac{sh2}{2}+\frac{ch2-1}{4}.$$

Таким образом, $I_1=\dfrac{-2sh2+ch2-1}{4}$ или, с учетом определения гиперболических функций $sh2=\dfrac{e^2-e^{-2}}{2}$, $ch2=\dfrac{e^2+e^{-2}}{2}$,

$$I_1=\frac{3e^{-2}-e^2-2}{8}.$$

б) Подынтегральная функция $z(z^2+3)^3$ в интеграле I_2 также аналитическая. Интеграл можно вычислить непосредственно или подстановкой.

$$I_2=\int_0^i z(z^2+3)^3\,dz=\left\{\begin{matrix} z^2+3=u \\ du=2zdz \end{matrix}\ \begin{matrix} |z|\,0|\,i| \\ |u|\,3|\,2| \end{matrix}\right\}=\int_3^2 u^3\frac{du}{2}=\left.\frac{u^4}{2\cdot 4}\right|_3^2 \Rightarrow$$

$$I_2=\frac{1}{8}(2^4-3^4)=-\frac{65}{8}.$$

в) В отличие от первых двух интегралов в третьем подынтегральная функция не является аналитической, согласно замечанию п.1.2.4.

Для вычисления интеграла по определению сводим его к криволинейным интегралам по линии $L:\{|z|=1, Im\,z\geq 0\}$ – верхней части окружности $|z|=\sqrt{x^2+y^2}=1,\ y\geq 0.$

$$I_3=\int_L z|z|dz=\int_L (x+iy)\sqrt{x^2+y^2}\,d(x+idy)=$$

$$=\int_L (x\sqrt{x^2+y^2}+iy\sqrt{x^2+y^2})(dx+idy)=\{i^2=-1\}=$$

$$I_3=\int_L (x\sqrt{x^2+y^2}dx-y\sqrt{x^2+y^2}dy)+$$

$$+i\int_L (y\sqrt{x^2+y^2}dx+x\sqrt{x^2+y^2}dy).$$

Последние интегралы вычислим по верхней полуокружности, например, против часовой стрелки, т.е. x изменяется от 1 до –1, y от 0 до 1 и затем до 0, $x^2+y^2=1.$

Следовательно, $I_3=\int_L (xdx-ydy)+i\int_L (ydx+xdy).$

Этот интеграл можно получить гораздо проще, если сразу воспользоваться уравнением окружности $|z|=1$:

$$I_3=\int_L z|z|dz=\left\{\begin{matrix} |z|=1, \\ z=x+iy, \\ dz=dx+idy. \end{matrix}\right\}=\int_L (x+iy)(dx+idy),$$

$$I_3=\int_L xdx-ydy+i\int_L ydx+xdy.$$

Используем параметрические уравнения окружности

$x=\cos t,\ y=\sin t,\ t\in[0,\pi]\ (y\geq 0).$

$$I_3 = \int_0^{\pi} (\cos t\ d\cos t - \sin t\ d\sin t) + i\int_0^{\pi} (\sin t\ d\cos t + \cos t\ d\sin t),$$

$$I_3 = \frac{\cos^2 t}{2}\Big|_0^{\pi} - \frac{\sin^2 t}{2}\Big|_0^{\pi} + i\int_0^{\pi} (\sin t(-\sin t dt) + \cos t \cos t dt),$$

$$I_3 = i\int_0^{\pi} \cos 2t dt = i\frac{\sin 2t}{2}\Big|_0^{\pi} = 0.$$

г) $I_4 = \int_{AB} z\,\mathrm{Im}\, z^2 dz;\ AB$ – отрезок прямой, $z_A = 0,\ z_B = 1 + 2i$.

Предлагаем читателям построить точки A, B на комплексной плоскости и убедиться, что отрезок AB задается уравнением $y = 2x, x \in [0,1]$.

Для преобразования подынтегральной функции найдем z^2:

$$z^2 = (x+iy)^2 = x^2 + 2xiy + i^2 y^2,\ \ i^2 = -1 \Rightarrow$$

$$z^2 = x^2 - y^2 + 2ixy,\ \ \mathrm{Re}\, z^2 = x^2 - y^2,\ \ \mathrm{Im}\, z^2 = 2xy.$$

$$I_4 = \int_{AB} (x+iy)2xy(dx+idy) = \left\{ \begin{array}{l} y = 2x, \\ dy = 2dx,\ x \in [0,1] \end{array} \right\} =$$

$$= \int_0^1 (x+2ix)2x \cdot 2x(dx+2idx).$$

$$I_4 = 4\int_0^1 (1+2i)^2 x^3 dx = (1+4i+4i^2)\cdot x^4\Big|_0^1.$$

Таким образом, $I_4 = -3 + 4i$.

1.3.2. Основные интегральные теоремы

В общем случае интеграл (1.19) зависит от функции $f(z)$ и кривой L. Однако, если кривая лежит в области аналитичности функции, то интеграл полностью определяется положением концов кривой и не зависит от ее формы. Этот фундаментальный факт теории аналитических функций вытекает из условий независимости криволинейного интеграла от пути интегрирования (см., напр., [1,2,13]), которые как раз совпадают с условиями КРЭД аналитичности функции. Таким образом, можно показать, что справедлива основная теорема Коши.

Теорема 1.3.2 (Коши). Если функция $f(z)$ аналитична в односвязной области D и непрерывна в замкнутой области $\overline{D}$, то интеграл от $f(z)$ по любому замкнутому контуру $\gamma \in D$ равен нулю:

$$\int_{\gamma} f(z)dz = 0. \qquad (1.21)$$

Действительно, $f(z)$ аналитическая, т.е. выполнены условия КРЭД $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$, $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$, а это означает, что $vdx + udy$, $udx - vdy$ являются полными дифференциалами, и по теореме Грина $\int_{\gamma} vdx + udy$, $\int_{\gamma} udx - vdy$ по замкнутому контуру γ равны нулю. Тогда с учетом (1.20) справедливо утверждение (1.21).

Теорема 1.2.3 (***теорема Коши для многосвязной области***). Если функция $f(z)$ аналитична в многосвязной области D и непрерывна в $\overline{D}$, то ее интеграл вдоль ориентированной границы Γ (точки области при обходе контура остаются все время с одной стороны) равен нулю.

Теорема сводится к теореме 1.3.2, если в области D (рис.1.11) сделать разрезы γ и учесть, что обход по ним происходит дважды в разных направлениях, т.е. интегралы по ним отличаются знаком и не влияют на суммарное значение интеграла по границе Γ.

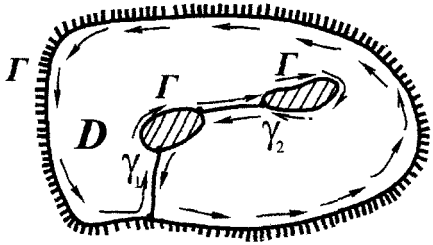


Рис. 1.11

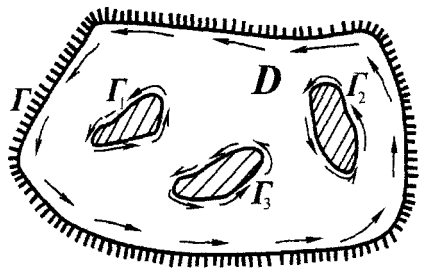


Рис.1.12

Как следствие этой теоремы, получается следующая теорема, важная для практических применений.

Теорема 1.3.4. Если функция $f(z)$ аналитична в многосвязной области D и непрерывна в $\overline{D}$, то интеграл по внешнему контуру границы

равен сумме интегралов по внутренним (все контуры обходятся в одном направлении, например, положительном, против часовой стрелки, рис.1.12):

$$\oint_{\Gamma} f(z)dz = \sum_{k} \oint_{\Gamma_k} f(z)dz. \qquad (1.22)$$

1.3.3. Интегральные формулы Коши и бесконечная дифференцируемость аналитической функции

Основная теорема Коши (теорема 1.3.2) позволяет вывести формулу, являющуюся основной в теории функций комплексного переменного (см., напр., [4], гл. I, §4).

Теорема 1.3.5. Пусть функция $f(z)$ аналитична в области D и непрерывна в замкнутой области $\overline{D}$. Тогда справедлива формула Коши

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\oint_{\Gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta \quad \forall z \in D, \qquad (1.23)$$

т.е. значения функции $f(z)$ внутри области D вполне определяются ее значениями на границе Γ.

Доказательство. Для доказательства из области D выбросим кружок радиуса r (рис.1.13) с центром в точке z и рассмотрим функцию $\varphi(\zeta) = \dfrac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z}$, которая является аналитической везде за исключением точки z. По теореме 1.3.4 независимо от r

$$\oint_{\gamma} \varphi(\zeta)d\zeta = \oint_{|\zeta - z| = r} \varphi(\zeta)d\zeta = \oint_{\Gamma} \varphi(\zeta)d\zeta.$$

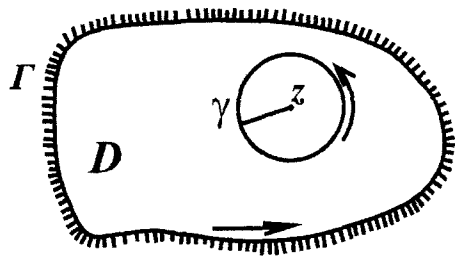


Рис. 1.13

В силу аналитичности функции $f(z)$ имеем $\lim\limits_{\zeta \to z} \varphi(\zeta) = f'(z);$

тогда функцию $\varphi(\zeta)$ можно считать непрерывной в $\overline{D}$, а, следовательно, ограниченной: $|\varphi(\zeta)| \le M \ \forall\ \zeta \in D$, если положить $\varphi(z) = f'(z)$.

Тогда

$$\left| \oint_{\Gamma} \varphi(\zeta) d\zeta \right| = \left| \oint_{\gamma} \varphi(\zeta) d\zeta \right| \le M \cdot \oint_{|\zeta - z| = r} d\zeta = M \cdot 2\pi r \underset{r \to 0}{\to} 0.$$

С учетом примера 1.3.1

$$\oint_{\Gamma} \varphi(\zeta) d\zeta = \oint_{\Gamma} \frac{f(\zeta) d\zeta}{\zeta - z} - f(z) \oint_{\Gamma} \frac{d\zeta}{\zeta - z} = \oint_{\Gamma} \frac{f(\zeta) d\zeta}{\zeta - z} - f(z) \cdot 2\pi i = 0,$$

откуда следует (1.23).

Теорема 1.3.6 (Коши, 1842 г.). Если функция $f(z)$ аналитична в области D и непрерывна вплоть до границы Γ, то она бесконечно дифференцируема в D и $\forall n = 1,2,...$

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \oint_{\Gamma} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}} d\zeta. \qquad (1.24)$$

Доказательство проводится для $n = 1$ на основании понятия производной $f'(z)$ и формулы Коши (1.23), затем методом математической индукции, предполагая теорему справедливой для производных $n - 1$ порядка, доказывают ее справедливость для любого n (см., напр., [4]).

Тот факт, что для функций комплексного переменного из существования в некоторой области первой производной следует автоматически существование и непрерывность производных любого порядка, резко отличает функции действительного переменного от функций комплексного переменного. В трудах зарубежных и советских математиков (Принсгейм, Н.Н. Лузин, И.И. Привалов и др.) доказано, что приведенные здесь теоремы справедливы для области не только с кусочно-гладкой границей, достаточно только ее спрямляемости.

Замечание. Для практических применений формулы Коши лучше переписать в следующем виде.

Первая интегральная формула Коши

$$f(z_0)=\frac{1}{2\pi i}\oint_{\Gamma}\frac{f(z)}{z-z_0}dz$$

или

$$\oint_{\Gamma}\frac{f(z)}{z-z_0}dz=2\pi i\, f(z_0)\,. \qquad (1.25)$$

Вторая интегральная формула Коши

$$f^{(n)}(z_0)=\frac{n!}{2\pi i}\oint_{\Gamma}\frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}dz$$

или

$$\oint_{\Gamma}\frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}dz=\frac{2\pi i}{n!}f^{(n)}(z_0)\,. \qquad (1.26)$$

Пример 1.3.3. Вычислить $I=\int_{\Gamma}\frac{z^2}{z+1}dz$, если:

а) $\Gamma:|z|=2$, б) $\Gamma:|z|=\frac{1}{2}$.

Решение. Здесь особая точка подынтегральной функции $\frac{z^2}{z+1}$ там, где знаменатель обращается в нуль. В случае б) $z=-1$ не лежит внутри круга $|z|\le\frac{1}{2}$, т.е. подынтегральная функция аналитическая в этом круге, и по теореме Коши интеграл равен нулю. В случае а) окружность $|z|=2$ окружает точку $z=-1$, и тогда по формуле Коши (1.25): $I=2\pi i f(-1)$, где $f(z)=z^2$, т.е. $I=2\pi i(-1)^2=2\pi i$.

Пример 1.3.4. Вычислить $I=\int_{\Gamma}\frac{\sin z}{z^2+1}dz$, если контур Γ – окружность $|z|=3$.

Решение. Заметим, что контур (см. рис. 1.14) окружает точки $\pm i$, где знаменатель подынтегральной функции равен нулю. В остальных точках функция аналитична.

По теореме Коши для многосвязной области

$$I = \oint\limits_{\Gamma_1:|z-i|=1} \frac{\sin z}{z+i}\frac{dz}{z-i} + \oint\limits_{\Gamma_2:|z+i|=1} \frac{\sin z}{z-i}\frac{dz}{z+i}.$$

К каждому из этих интегралов применим формулу Коши (1.25).

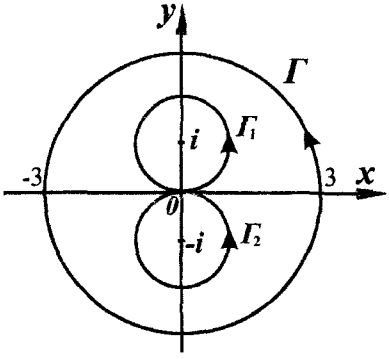


Рис. 1.14

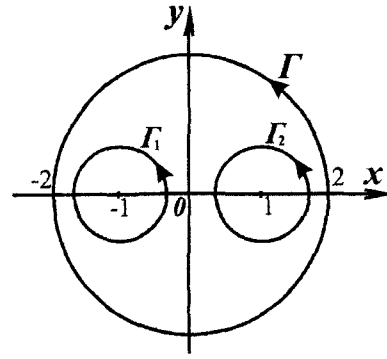


Рис. 1.15

$$I = 2\pi i\left[\frac{\sin z}{z+i}\bigg|_{z=i} + \frac{\sin z}{z-i}\bigg|_{z=-i}\right] = 2\pi i\left[\frac{\sin i}{2i} + \frac{\sin(-i)}{-2i}\right] =$$

$$= \{\sin(-i) = -\sin i\} = 2\pi \sin i \ \ \{\sin iz = ishz, n.1.2.2\} \Rightarrow$$

$$I = 2\pi i sh1 = \pi i(e - e^{-1}) = \frac{\pi i(e^2-1)}{e}.$$

Пример 1.3.5. $I = \int\limits_{|z|=2} \frac{shz}{(z+1)^3(z-1)}dz.$

Решение. Подынтегральная функция аналитична везде, кроме точек $z = \pm 1$. Обе точки лежат внутри круга $|z| \le 2$. Окружим их непересекающимися окружностями (рис. 1.15) $\Gamma_1 : |z+1| = r, \Gamma_2 : |z-1| = r, r < 1$.

По теореме Коши для многосвязной области

$$I=\oint_{\Gamma_1}\frac{chz}{z-1}\frac{dz}{(z+1)^3}+\oint_{\Gamma_2}\frac{chz}{(z+1)^3}\frac{dz}{z-1}.$$

К первому из этих интегралов применяем интегральную формулу Коши (1.26), а ко второму – (1.25).

1) $n=2,\ f(z)=\dfrac{chz}{z-1},\ f'(z)=\dfrac{(z-1)shz-chz}{(z-1)^2},$

$$f''(z)=\frac{(z^2-2z+3)chz-2(z-1)shz}{(z-1)^3}\ \Rightarrow$$

$$\oint_{\Gamma_1}=\frac{2\pi i}{2!}f''(-1)=\{ch(-z)=chz,sh(-z)=-shz\},$$

$$\oint_{\Gamma_1}=\frac{\pi i}{4}(2sh1-3ch1).$$

2) $$\oint_{\Gamma_2}=2\pi i f(1)=\left\{f(z)=\frac{chz}{(z+1)^3}\right\}=2\pi i\frac{ch1}{8}=\frac{\pi i}{4}ch1.$$

$$I=\oint_{\Gamma_1}+\oint_{\Gamma_2}=\frac{\pi i}{4}(2sh1-3ch1+ch1)\ ,\ I=\frac{\pi i}{2}(sh1-ch1),$$

$$\left\{shz=\frac{1}{2}(e^z-e^{-z}),chz=\frac{1}{2}(e^z+e^{-z})\right\}\ \Rightarrow$$

$$I=-\frac{\pi ie^{-1}}{2}\Rightarrow\quad I=-\frac{\pi i}{2e}.$$

Этот пример предлагаем самостоятельно решить другим способом, разлагая дробь $\dfrac{1}{(z+1)^3(z-1)}$ в сумму простых дробей и применяя затем к интегралам по Γ_1 и Γ_2 формулы Коши (1.25)и (1.26).

Пример 1.3.6. Вычислить $I=\int_{\Gamma}\dfrac{e^{2z}}{(z-1)^4}dz$, если контур Γ – окружность $|z|=3$.

Решение. Особая точка $z=1$ подынтегральной функции лежит в круге $|z|<3$.Применяем вторую интегральную формулу Коши (1.26):

$$n=3,\quad f(z)=e^{2z}\Rightarrow I=\frac{2\pi i}{3!}f'''(1).$$

$$f'(z)=2e^{2z},\quad f''(z)=4e^{2z},\quad f'''(z)=8e^{2z}.$$

Таким образом, $I=\dfrac{2\pi i}{6}\cdot 8e^{2}=\dfrac{8\pi e^{2}}{3}i.$

1.4. Ряды в комплексной области

В этом параграфе рассмотрим вопрос о представлении аналитических функций с помощью степенных рядов и их обобщения – рядов по отрицательным и положительным степеням. Основные теоретические положения уже известны из курса математического анализа функций вещественной переменной. Под ***рядом*** будем понимать бесконечную сумму чисел или функций в комплексной области

$$\sum_{n=0}^{\infty}w_n=\sum_{n=0}^{\infty}u_n+i\sum_{n=0}^{\infty}v_n.$$

Сходимость числового ряда определяется как существование конечного предела последовательности частичных сумм. Для функциональных рядов речь следует вести об области сходимости ряда, области равномерной и абсолютной сходимости.

В 1859 г. доказаны общие теоремы о равномерно сходящихся рядах из аналитических функций в односвязной области: такие ряды определяют аналитические функции, их можно почленно интегрировать и дифференцировать. В дальнейшем основную роль будут играть степенные ряды.

1.4.1. Степенные ряды. Ряд Тейлора

Теорема 1.4.1. (***Первая теорема Абеля***). Если степенной ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty}c_n(z-a)^n \tag{1.27}$$

сходится в точке z_0, то он сходится абсолютно и равномерно в круге

$$K:|z-a|<R,\quad R=|z_0-a|.$$

Доказательство. Действительно, $c_n(z-a)^n=c_n(z_0-a)^n\left(\dfrac{z-a}{z_0-a}\right)^n.$

В силу сходимости ряда в точке z_0 его общий член стремится к нулю при $n \to \infty$, и, следовательно, члены ряда ограничены: $|c_n(z_0 - a)^n| \le M$ для всех $n \in N$; $\left|\frac{z-a}{z_0-a}\right| = q < 1$ по предположению, и геометрическая прогрессия с таким знаменателем сходится. Следовательно, для всех $z \in K$

$$\left|\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n\right| \le \sum_{n=0}^{\infty}\left|c_n(z-a)^n\right| \le M\sum_{n=0}^{\infty} q^n < \infty,$$

т.е. ряд (1.27) сходится равномерно и абсолютно.

Из теоремы Абеля вытекает, что областью сходимости степенного ряда может быть только круг с центром в точке a радиуса R (радиус сходимости). Вычислительные формулы для R дает теорема Коши-Адамара.

Теорема 1.4.2 (***Коши-Адамара***). Радиус сходимости степенного ряда

$$R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_n}{c_{n+1}}\right|, \quad R = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|c_n|}}. \tag{1.28}$$

Следствие из теоремы Абеля и Вейерштрасса: сумма степенного ряда в круге сходимости является аналитической функцией.

Теорема 1.4.3. Функция $f(z)$, аналитическая в круге $K: |z-a| < R$, представима рядом Тейлора

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(z-a)^n = \tag{1.29}$$

$$= f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(z-a) + \frac{f''(a)}{2!}(z-a)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}}{n!}(z-a)^n + \ldots .$$

Для основных элементарных функций справедливы уже известные тейлоровские разложения в окрестности точки $a = 0$:

1) $e^z = \sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!} = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \ldots + \frac{z^n}{n!} + \ldots, \qquad |z| < \infty;$

2) $\sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \ldots + (-1)^n\frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} + \ldots, \qquad |z| < \infty;$

3) $\cos z = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \ldots + (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!} + \ldots, \qquad |z| < \infty;$

4) $\ln(1+z) = z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \ldots + (-1)^{n-1} \frac{z^n}{n} + \ldots, \qquad |z| < 1;$

5) $(1+z)^\alpha = 1 + \alpha z + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} z^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!} z^3 + \ldots +$

$$+ \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!} z^n + \ldots, \qquad |z| < 1;$$

6) $\frac{1}{1 \pm z} = 1 \mp z + z^2 \mp z^3 + z^4 \mp \ldots, \qquad |z| < 1.$

Оказывается, что любой степенной ряд является рядом Тейлора своей суммы (***теорема единственности***) и коэффициенты

$$c_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!} = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-a|=R} \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}} dz, \quad n \in N.$$

1.4.2. Ряды Лорана

Ряд Тейлора удобен для описания аналитических функций в круге. Нетрудно показать, что ряд по отрицательным степеням $z-a: \sum_{n=1}^{\infty} c_n (z-a)^{-n}$ $\left(\text{степенной ряд относительно } t = \frac{1}{z-a} \right)$ сходится вне некоторого круга радиуса r с центром в точке a:

$$r = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{c_{n+1}}{c_n} \right|, \quad r = \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|c_n|}.$$

Для функций, аналитических в кольце K, справедлива следующая теорема Лорана.

Теорема 1.4.4. Функция $f(z)$, аналитическая в кольце $K: r < |z-a| < R$, может быть представлена равномерно сходящимся в нем ***рядом Лорана***:

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z-a)^n, \qquad (1.30)$$

$$c_n = \frac{1}{2\pi i}\int_{|z-a|=\rho} \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}}dz, \qquad (1.31)$$

$n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, $r < \rho < R$.

Ряд по положительным степеням

$$f_1(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n \qquad (1.32)$$

называется ***правильной частью*** лорановского разложения, сходится в круге $|z-a| < R$, см (2.4.2), а ряд по отрицательным степеням

$$f_2(z) = \sum_{n=1}^{\infty} c_{-n} (z-a)^{-n} \qquad (1.33)$$

его ***главной частью***, сходится вне круга $|z-a| < r$, где,

$$r = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{c_{-n-1}}{c_{-n}}\right|, \qquad r = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_{-n}|}\ . \qquad (1.34)$$

Для нахождения коэффициентов ряда Лорана редко используют формулу (1.31). Обычно стараются представить функцию в виде суммы или произведения функций:

$$f(z) = f_1(z) + f_2(z),\ f(z) = f_1(z) f_2(z),$$

из которых одна аналитична внутри большого круга $|z-a| < R$ (ее разлагают по положительным степеням), а другая – вне малого круга $|z-a| > r$ (ее разлагают по отрицательным степеням). При этом часто применяют приведенные в п.1.4.1 разложения в степенные ряды основных элементарных функций, приемы деления многочленов, разложение дробей в сумму простейших, формула суммы членов бесконечно убывающей геометрической прогрессии $\dfrac{1}{1-q} = \sum_{n=0}^{\infty} q^n$.

1.4.3. Особые точки

Точка a называется ***особой изолированной точкой*** функции $f(z)$, если в некоторой окрестности $0 < |z-a| < R$ с исключенной точкой a функция аналитична. Различают три типа особых точек в зависимости от поведения функции в их окрестности.

1°. ***Правильная или устранимая особая точка***, если существует конечный предел $\lim\limits_{z\to a} f(z)$ функции $f(z)$ в точке a.

2°. ***Полюс***, если функция $f(z)$ является бесконечно большой в точке a: $|f(z)| \to \infty$ при $z \to a$ $(\lim\limits_{z\to a} f(z) = \infty)$.

3°. ***Существенная особая точка***, если не существует $\lim\limits_{z\to a} f(z)$.

Оказывается, характер особых точек тесно связан с лорановским разложением функции $f(z)$ в окрестности этих точек, т.е. справедлива следующая теорема.

Теорема 1.4.5. В точке a функция $f(z)$ имеет ***устранимую особенность*** тогда и только тогда, когда ее ***лорановское разложение*** в окрестности точки a ***не содержит главной части*** (***разложение по положительным степеням***). Для того чтобы точка a была ***полюсом*** функции $f(z)$, необходимо и достаточно, чтобы ***главная часть*** ряда Лорана в окрестности этой точки содержала ***конечное число отрицательных степеней***:

$$f(z) = \frac{c_{-n}}{(z-a)^n} + \ldots + \frac{c_{-1}}{z-a} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n. \quad (1.35)$$

Номер старшей отрицательной степени n – ***порядок полюса***. Точка a является ***существенно особой*** для функции $f(z)$ тогда и только тогда, когда ***главная часть ряда Лорана содержит бесконечно много отрицательных степеней.***

Поведение функции в окрестности существенно особой точки поясняет теорема Сохоцкого-Казорати.

Теорема 1.4.6 (Сохоцкого-Казорати). В окрестности существенно особой точки функция может принимать любые наперед заданные значения.

По характеру особых точек различаются два простейших класса однозначных аналитических функций.

1°. ***Целые функции*** (***голоморфные***): не имеют особых точек или имеют устранимые особенности.

2°. ***Дробные функции (мероморфные)***: особые точки являются полюсами.

Характер особых точек можно для дроби выяснить по характеру нулей знаменателя.

Нулем функции $f(z)$ ***кратности (порядка)*** n является число a:

$$f(a) = 0, \quad f'(a) = 0, \ldots, \quad f^{(n-1)}(a) = 0, \quad f^{(n)}(a) \neq 0,$$

т.е. в окрестности точки a функцию $f(z)$ можно представить в виде

$$f(z)=(z-a)^n\varphi(z),\ \varphi(a)\neq 0.$$

Нуль знаменателя кратности n является полюсом порядка n для дроби, если числитель не обращается в нуль. Для бесконечно удаленной особой точки $z=\infty$ следует рассмотреть $\zeta=\dfrac{1}{z}=0$ и сделать соответствующие выводы о характере этой точки.

Пример 1.4.1. Найти ряд Лорана для функции $f(z)=e^{z+1/z}$.

Решение. Функция $f(z)=e^{z+1/z}$ аналитична при $0<|z|<\infty$,

$$e^{z+1/z}=e^z e^{1/z}.$$

$$e^z=1+z+\frac{z^2}{2!}+\ldots+\frac{z^n}{n!}+\ldots,$$

$$e^{1/z}=\left\{z\sim\frac{1}{z}\right\}=1+\frac{1}{z}+\frac{1}{2!z^2}+\ldots+\frac{1}{n!z^n}+\ldots\ .$$

Перемножая полученные ряды, можно убедиться, что коэффициенты c_n при z^n и c_{-n} при z^{-n} $(n=0,1,2,\ldots)$ равны

$$c_n=c_{-n}=\frac{1}{n!}+\frac{1}{(n+1)!}+\frac{1}{(n+2)!2!}+\frac{1}{(n+3)!3!}+\ldots\ .$$

Таким образом, искомый ряд Лорана

$$e^{z+1/z}=\sum_{n=0}^{\infty}c_n\left(z^n+\frac{1}{z^n}\right).$$

Пример 1.4.2. Разложить в ряд Лорана функцию $f(z)$ в окрестности изолированной особой точки $z_0=a$ и выяснить ее характер.

а) $f(z)=\dfrac{2z-3}{z^2-3z+2}$; б) $f(z)=\dfrac{1}{(2z+3)^3}$;

в) $f(z)=\dfrac{1-\cos z}{z^2}$; г) $f(z)=\sin\dfrac{z}{z+1}$.

Решение. а) Разложим данную дробь в сумму простейших:

$$f(z)=\frac{2z-3}{z^2-3z+2}=\frac{1}{z-1}+\frac{1}{z-2}.$$

Изолированные особые точки $z=1$, $z=2$.

Разложим функцию в окрестностях этих точек, т.е. в кольцах $0<|z-1|<1,\ 0<|z-2|<1$ (см. рис. 1.16).

Получим ряд Лорана в окрестности точки $z=1$. Преобразуем нашу функцию к виду $f(z)=\dfrac{1}{z-1}-\dfrac{1}{1-(z-1)}$ и применим ряд

$$\frac{1}{1-q}=1+q+q^2+\ldots+q^n+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}q^n,\ q\sim z-1.$$

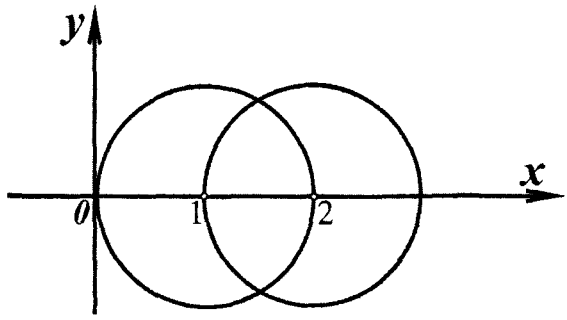


Рис. 1.16

Получим $\dfrac{2z-3}{z^2-3z+2}=\dfrac{1}{z-1}-\sum_{n=0}^{\infty}(z-1)^n,\ 0<|z-1|<1.$

Аналогично получаем разложение в окрестности точки $z=2$:

$$\frac{2z-3}{z^2-3z+2}=\frac{1}{z-2}+\frac{1}{1+(z-2)}=\frac{1}{z-2}+\sum_{n=0}^{\infty}(2-z)^n,$$

$0<|z-2|<1.$

В обоих разложениях только по одной отрицательной степени, т.е. *изолированные особые точки* $z=1,\ z=2$ *являются простыми полюсами* данной дроби.

б) $f(z)=\dfrac{1}{(2z+3)^3}$. Изолированная особая точка $z=-\dfrac{3}{2}$. Разложение в окрестности этой точки (в кольце $0<\left|z-\dfrac{3}{2}\right|<\infty$)

$\frac{1}{(2z+3)^3} = \frac{1}{8}\frac{1}{\left(z+\frac{3}{2}\right)^3}$ имеет конечное число отрицательных степеней

номером старшего члена $n=3$, т.е. точка $z=-\frac{3}{2}$ является полюсом функции порядка $n=3$.

в) $f(z)=\frac{1-\cos z}{z^2}$. Изолированная особая точка $z=0$.

$$\cos z = 1-\frac{z^2}{2!}+\frac{z^4}{4!}-\ldots+(-1)^n\frac{z^{2n}}{(2n)!}+\ldots \ .$$

Лорановское разложение

$$\frac{1-\cos z}{z^2}=\frac{1}{2!}-\frac{z^2}{4!}+\frac{z^4}{6!}-\ldots+(-1)^{n-1}\frac{z^{2(n-1)}}{(2n)!}+\ldots$$

не имеет главной части, а только регулярную (нет отрицательных степеней), т.е. точка $z=0$ является устранимой особой точкой. Ряд сходится при $|z|<\infty$, т.е. функция является аналитической во всей комплексной плоскости (целая функция).

г) $f(z)=\sin\frac{1}{z+1}$. Изолированная особая точка $z=-1$ является существенной. Действительно, не существует $\lim\limits_{z\to -1}\sin\frac{1}{z+1}$. Это можно определить также по разложению функции в ряд по степеням $z+1$.

В формуле

$$\sin t = t-\frac{t^3}{3!}+\frac{t^5}{5!}-\ldots+(-1)^n\frac{t^{2n+1}}{(2n+1)!}+\ldots,\ |t|<\infty$$

заменим t на $\frac{1}{z+1}$ и получим ряд Лорана

$$\sin\frac{1}{z+1}=\frac{1}{z+1}-\frac{1}{3!(z+1)^3}+\frac{1}{5!(z+1)^5}-\ldots \ .$$

Главная часть ряда Лорана содержит бесконечно много отрицательных степеней, следовательно, особая точка $z=-1$ является существен-

ной. Так как ряд сходится при $\frac{1}{|z+1|} < \infty$, т.е. при $|z+1| > 0$, то областью сходимости лорановского разложения является комплексная плоскость с выколотой точкой $z = -1$.

Пример 1.4.3. Дана функция $f(z) = \dfrac{\sin z}{z^3 + z^2 - z - 1}$.

Выяснить характер изолированных особых точек, если они есть.

Решение. Нетрудно убедиться, что $f(z) = \dfrac{\sin z}{(z-1)(z+1)^2}$, т.е. $f(z)$ имеет две особые изолированные точки $z = \pm 1$ (нули знаменателя). Представим функцию $f(z)$ в виде $f(z) = \dfrac{\sin z}{z-1}\dfrac{1}{(z+1)^2}$. Функция $\varphi(z) = \dfrac{\sin z}{z-1}$ аналитична при $z = -1$, $\varphi(-1) = \dfrac{1}{2}\sin 1 \neq 0$. Так как $z = -1$ является нулем знаменателя кратности $k = 2$, то в этой точке данная функция имеет полюс второго порядка. Аналогично, $z = 1$ простой полюс.

Пример 1.4.4. Определить характер особой точки $z = 0$ функции $f(z) = \dfrac{1}{2 + z^2 - 2\operatorname{ch} z}$.

Решение. При $z = 0$ знаменатель дроби $\varphi(z) = 2 + z^2 - 2\operatorname{ch} z$ обращается в нуль.

$$\varphi(0) = 2 + z^2 - 2\operatorname{ch} z\big|_{z=0} = 0,$$

$$\varphi'(0) = 2z - 2\operatorname{sh} z\big|_{z=0} = 0,$$

$$\varphi''(0) = 2 - 2\operatorname{ch} z\big|_{z=0} = 0,$$

$$\varphi'''(0) = -2\operatorname{sh} z\big|_{z=0} = 0,$$

$$\varphi^{(IV)}(0) = -2\operatorname{ch} z\big|_{z=0} = -2 \neq 0.$$

Таким образом, $z = 0$ является нулем знаменателя четвертого порядка, а следовательно, полюсом четвертого порядка данной функции.

1.5. Вычеты и их приложения

1.5.1. Теоремы о вычетах

Рассмотрим интеграл от однозначной аналитической функции $w = f(z)$ по замкнутому контуру Γ, причем в области D, ограниченной этим контуром, функция имеет лишь особые изолированные точки однозначного характера (полюсы). Их может быть лишь конечное число, иначе изолированные точки имеют хотя бы одну предельную точку, которая также будет особой, но не изолированной. Пусть z_k $(k = \overline{1,n})$ особые точки функции $f(z)$.

По теореме Коши (теорема 1.3.4)

$$\oint_{\Gamma} f(z)dz = \sum_{k=1}^{n} \oint_{\gamma_k} f(z)dz \ , \ \gamma_k : |z - z_k| = \rho_k ,$$

т.е. вопрос сводится к вычислению интегралов по окружностям, окружающим лишь одну особую точку.

В окрестности z_k функцию $f(z)$ разложим в ряд Лорана и проинтегрируем почленно (это возможно в силу равномерной сходимости):

$$\oint_{\gamma_k} f(z)dz = \sum_{m=-\infty}^{\infty} c_m^{(k)} \oint_{\gamma_k} f(z)dz \ \Rightarrow$$

$$\oint_{\gamma_k} f(z)dz = \left\{ \oint_{\gamma_k} (z - z_k)^m dz = \begin{cases} 0, m \neq -1, \\ 2\pi i, m = -1 \end{cases} \right\} = 2\pi i c_{-1}^{(k)}.$$

Итак,

$$\oint_{\Gamma} f(z)dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} c_{-1}^{(k)} = 2\pi i (c_{-1}^{(1)} + c_{-1}^{(2)} + ... + c_{-1}^{(n)}). \quad (1.36)$$

Таким образом, интеграл зависит лишь от коэффициентов при $(z - z_k)^{-1}$, т.е. вычетов.

Определение. Вычетом функции $w = f(z)$ ***относительно изолированной особой точки*** a называют коэффициент при $(z-a)^{-1}$ в ряде Лорана функции $f(z)$ в окрестности точки a **:**

$$\underset{z=a}{\text{Выч}} f(z) = \underset{z=a}{Res} f(z) = c_{-1} = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z-a|=\rho} f(z)dz; \quad (1.37)$$

вычет в бесконечно удаленной точке

$$\underset{z=\infty}{\textbf{Выч}}\, f(z) = \underset{z=\infty}{\textbf{Res}}\, f(z) = \frac{1}{2\pi i}\oint_{|z-a|=\rho\to\infty} f(z)dz = -c_{-1}. \quad (1.38)$$

Понятие вычета принадлежит Коши, который указал на многочисленные его приложения. Обозначение оправдано тем, что Коши рассматривал разность между интегралами по путям с общим началом и концом, которые окружают полюсы функции. Формула (1.36) выражает следующую теорему.

Теорема 1 о вычетах. Интеграл от функции $f(z)$ по замкнутому контуру Γ, содержащемуся в области, где функция однозначна и аналитична, за исключением конечного числа полюсов, и не проходящему через них, равен сумме вычетов функции относительно полюсов, заключенных внутри контура, умноженной на $2\pi i$:

$$\oint_{\Gamma} f(z)dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \underset{z=z_k}{\textbf{Выч}} f(z). \quad (1.39)$$

Теорема 2 о вычетах. Если $f(z)$ аналитична в области D за исключением изолированных особых точек $z_1, z_2, \ldots, z_n$ и $z_{n+1} = \infty$, то

$$\sum_{k=1}^{n+1} \underset{z=z_k}{\textbf{Выч}} f(z) = 0 \Rightarrow \underset{z=\infty}{\textbf{Выч}}\, f(z) = -\sum_{k=1}^{n} \underset{z=z_k}{\textbf{Выч}} f(z). \quad (1.40)$$

1.5.2. Вычисление вычетов

1°. a ***– простой полюс функции*** $f(z)$ **:**

$$f(z) = \frac{c_{-1}}{z-a} + c_0 + c_1(z-a) + c_2(z-a)^2 + \ldots$$

или

$$f(z)(z-a) = c_{-1} + c_0(z-a) + c_1(z-a)^2 + c_2(z-a)^3 + \ldots \Rightarrow$$

$$\underset{z=a}{\textbf{Выч}}\, f(z) = c_{-1} = \lim_{z\to a}\left[f(z)(z-a)\right]. \quad (1.41)$$

Вычисление вычетов упрощается, если $f(z) = \dfrac{\varphi(z)}{\psi(z)}$.

$\varphi(a) \neq 0,\ \psi(a) = 0,\ \psi'(a) \neq 0$ (a – простой нуль $\psi(z)$),

$$\underset{z=a}{\textbf{Выч}} \frac{\varphi(z)}{\psi(z)} = c_{-1} = \lim_{z\to a} \frac{\varphi(z)(z-a)}{\psi(z)} = \lim_{z\to a} \frac{\varphi(z)}{\dfrac{\psi(z)-\psi(a)}{z-a}} \Rightarrow$$

$$\underset{z=a}{\textbf{Выч}}\frac{\varphi(z)}{\psi(z)}=c_{-1}=\frac{\varphi(a)}{\psi'(a)}. \qquad (1.42)$$

2°. ***a* – полюс кратности** $k>1$**:**

$$f(z)=\frac{c_{-k}}{(z-a)^k}+\ldots+\frac{c_{-1}}{z-a}+c_0+c_1(z-a)+\ldots \Rightarrow$$

$$f(z)(z-a)^k=c_{-k}+\ldots+c_{-1}(z-a)^{k-1}+c_0(z-a)^k+\ldots .$$

Дифференцируя равенство почленно $k-1$ раз, получим

$$\frac{d^{k-1}\left[f(z)(z-a)^k\right]}{dz^{k-1}}=(k-1)!c_{-1}+k(k-1)\ldots 2c_0(z-a)+\ldots ,$$

$$(k-1)!c_{-1}=\lim_{z\to a}\frac{d^{k-1}\left[f(z)(z-a)^k\right]}{dz^{k-1}},$$

$$\underset{z=a}{\textbf{Выч}}\,f(z)=c_{-1}=\frac{1}{(k-1)!}\lim_{z\to a}\frac{d^{k-1}\left[f(z)(z-a)^k\right]}{dz^{k-1}}. \qquad (1.43)$$

В следующих примерах найти вычеты.

Пример 1.5.1. $\underset{z=i}{\textbf{Выч}}\frac{e^{iz}}{z^2+1}$. Имеем $z=i$ – простой полюс; $\psi(z)=z^2+1$, $\varphi(z)=e^{iz}$. Применим формулу (1.42).

$$\varphi(i)=e^{iz}\Big|_{z=i}=e^{-1}\neq 0,\ \psi(i)=z^2+1\Big|_{z=i}=0,$$

$$\psi'(i)=2z\big|_{z=i}=2i\neq 0,\ \text{т.е.}\ \underset{z=i}{\textbf{Выч}}\frac{e^{iz}}{z^2+1}=\frac{e^{-1}}{2i}=-\frac{i}{2e}.$$

Пример 1.5.2. $\underset{z=-2}{\textbf{Выч}}\,e^{\frac{5}{z+2}}$. По определению $\underset{z=a}{\textbf{Выч}}\,f(z)=c_{-1}$.

Воспользуемся разложением $e^z=1+z+\frac{z^2}{2!}+\ldots,\ |z|<\infty$;

заменим $z\sim\frac{5}{z+2}$:

$$e^{\frac{5}{z+2}}=1+\frac{5}{z+2}+\frac{1}{2!}\frac{5^2}{(z+2)^2}+\ldots ,\quad c_{-1}=5.$$

Таким образом, $\underset{z=-2}{\textbf{Выч}}\, e^{\frac{5}{z+2}} = 5.$

Пример 1.5.3. $\underset{z=1}{\textbf{Выч}}\dfrac{\cos 4z}{(z-1)^3} = \{z=1 - \text{полюс 3-го порядка, (1.43)}\} =$

$$= \frac{1}{2!}\lim_{z\to 1}\frac{d^2}{dz^2}\left[\frac{\cos 4z}{(z-1)^3}(z-1)^3\right] = \frac{1}{2}\lim_{z\to 1}\left[-4^2\cos 4z\right] = -8\cos 4.$$

Итак, $\underset{z=1}{\textbf{Выч}}\dfrac{\cos 4z}{(z-1)^3} = -8\cos 4$.

В следующих примерах вычислить интегралы с помощью вычетов.

Пример 1.5.4. $\oint\limits_{|z|=2}\dfrac{e^z}{z^2+1}dz.$ Контур $|z|=2$ – окружность, внутри контура два простых полюса $z=\pm i.$

$$\oint\limits_{|z|=2}\frac{e^z}{z^2+1}dz = 2\pi i\left[\underset{z=i}{\textbf{Выч}}\frac{e^z}{z^2+1} + \underset{z=-i}{\textbf{Выч}}\frac{e^z}{z^2+1}\right] = \{(1.43)\} = 2\pi i\left[\frac{e^i}{2i} - \frac{e^{-i}}{2i}\right],$$

$$\oint\limits_{|z|=2}\frac{e^z}{z^2+1}dz = 2\pi\sin 1.$$

Пример 1.5.5. $I = \oint\limits_{|z|=2}\dfrac{dz}{1+z^{10}}.$

Решение. Простые полюса функции $z_k = e^{\frac{(2k+1)\pi i}{10}}, k = 0,1,...,9,$ $(|z_k| = 1 < 2).$

$$I = \sum_{k=0}^{9}\underset{z=z_k}{\textbf{Выч}}\frac{1}{1+z^{10}} = \{\text{ теорема 2 о вычетах }\} = -\underset{z=\infty}{\textbf{Выч}}\frac{1}{1+z^{10}} = 0.$$

Используя сумму членов бесконечной убывающей прогрессии, получим разложение подынтегральной функции в ряд в окрестности бесконечно удаленной точки:

$$\frac{1}{1+z^{10}} = \frac{1}{z^{10}\left(1+\frac{1}{z^{10}}\right)} = \left\{q = \frac{1}{z^{10}},\ \frac{1}{1+q} = 1-q+q^2-...\right\} =$$

$$= \frac{1}{z^{10}}\left(1 - \frac{1}{z^{10}} + \frac{1}{z^{20}} - \frac{1}{z^{30}} + ...\right),$$

Таким образом, ряд Лорана в окрестности $z=\infty$ имеет вид

$$\frac{1}{1+z^{10}}=\frac{1}{z^{10}}-\frac{1}{z^{20}}+\frac{1}{z^{30}}-\ldots \Rightarrow$$

$$\operatorname*{Выч}_{z=\infty}\frac{1}{1+z^{10}}=-c_{-1}=0\Rightarrow \oint_{|z|=2}\frac{1}{1+z^{10}}=0.$$

1.5.3. Вычисление определенных интегралов с применением вычетов

Используя теорию вычетов, можно доказать следующий факт.

Теорема. Пусть $F(x)=\dfrac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ рациональная функция, не имеющая полюсов на вещественной оси, степень знаменателя по крайней мере на 2 единицы больше степени числителя, т.е. $m\geq n+2$ $(F(x)\underset{x\to\infty}{\to}0)$. Знаменатель $Q_m(x)$ имеет комплексно-сопряженные корни z_k, т.е. z_k – полюса $F(z)$.

Тогда

$$\int_{-\infty}^{\infty}F(x)dx=2\pi i\sum_k \operatorname*{Выч}_{z=z_k}F(z),\ \ Im\, z_k>0; \tag{1.44}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}F(x)\cos\lambda x dx=Re\left[2\pi i\sum_k \operatorname*{Выч}_{Im\, z_k>0}(F(z)e^{i\lambda z})\right],\lambda>0; \tag{1.45}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}F(x)\sin\lambda x dx=Im\left[2\pi i\sum_k \operatorname*{Выч}_{Im\, z_k>0}(F(z)e^{i\lambda z})\right],\ \ \lambda>0. \tag{1.46}$$

Пример 1.5.6. $I=\int_{-\infty}^{\infty}\dfrac{dx}{(x^2+9)^2}$.

Решение. Рассмотрим функцию

$$F(z)=\frac{1}{(z^2+9)^2}=\frac{1}{(z+3i)^2(z-3i)^2}.$$

Функция $F(z)=\dfrac{1}{(z^2+9)^2}$ имеет полюса $z=\pm 3i$ второго порядка, в верхней полуплоскости один полюс (см. (1.44)).

$$\operatorname*{Выч}_{z=3i}\frac{1}{(z^2+9)^2}=\{(1.43)\}=\lim_{z\to 3i}\frac{d}{dz}\left[\frac{1}{(z^2+9)^2}(z-3i)^2\right]=$$

$$=\lim_{z\to 3i}\frac{d}{dz}\left(\frac{1}{(z+3i)^2}\right)=\lim_{z\to 3i}\frac{-2}{(z+3i)^3}\Rightarrow$$

$$\operatorname*{Выч}_{z=3i}\frac{1}{(z^2+9)^2}=-\frac{2}{(6i)^3}=-\frac{2}{216i^3}.$$

$$I=2\pi i\operatorname*{Выч}_{z=3i}\frac{1}{(z^2+9)^2}=2\pi i\left(-\frac{2}{216i^3}\right)=-\frac{\pi}{54i^2},$$

$$i^2=-1\ \Rightarrow\ I=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dz}{\left(x^2+9\right)^2}=\frac{\pi}{54}.$$

Пример 1.5.7. Вычислить несобственные интегралы

$$I_1=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos\lambda x}{(x^2+4x+5)^2}dx,\quad I_2=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin\lambda x}{(x^2+4x+5)^2}dx.$$

Решение. Рассмотрим функцию

$$F(z)=\frac{1}{(z^2+4z+5)^2}=\frac{1}{((z+2)^2+1)^2}$$

и найдем ее полюса: $z^2+4z+5=0\Rightarrow z=-2\pm i$ – полюса порядка $k=2$.

Таким образом, $F(z)=\dfrac{1}{(z+2+i)^2(z+2-i)^2}$.

Согласно формулам (1.45) и (1.46), нужно найти вычеты функции $F(z)e^{i\lambda z}$ относительно полюсов в верхней полуплоскости $Im\,z_k>0$. В нашем примере – относительно полюса $z=-2+i$ порядка $k=2$.

$$\operatorname*{Выч}_{z=-2+i}F(z)e^{i\lambda z}=\operatorname*{Выч}_{z=-2+i}\frac{e^{i\lambda z}}{(z+2+i)^2(z+2-i)^2}=$$

$$= \{(1.43), k=2\} = \lim_{z\to -2+i} \frac{d}{dz}\left[\frac{e^{i\lambda z}}{(z+2+i)^2}\right] =$$

$$= \lim_{z\to -2+i} \frac{i\lambda e^{i\lambda z}(z+2+i)^2 - e^{i\lambda z}2(z+2+i)}{(z+2+i)^4} =$$

$$= \lim_{z\to -2+i} \frac{e^{i\lambda z}[i\lambda(z+2+i)-2]}{(z+2+i)^3} = \frac{e^{i\lambda(-2+i)}[i\lambda 2i-2]}{(2i)^3}$$

$$\underset{z=-2+i}{\text{Выч}} F(z)e^{i\lambda z} = \frac{e^{\lambda(-1-2i)}2(-\lambda-1)}{8i^3} = \{i^2=-1\} = \frac{e^{\lambda(-1-2i)}(\lambda+1)}{4i}.$$

Учитывая формулу Эйлера, получим:

$$2\pi i \underset{z=-2+i}{\text{Выч}} F(z)e^{i\lambda z} = 2\pi i \frac{e^{\lambda(-1-2i)}(\lambda+1)}{4i},$$

$$2\pi i \underset{z=-2+i}{\text{Выч}} F(z)e^{i\lambda z} = \frac{\pi(\lambda+1)}{2} e^{-\lambda}(\cos 2\lambda - i\sin 2\lambda).$$

Тогда интеграл I_1 – вещественная, а I_2 – мнимая часть полученного выражения:

$$I_1 = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos \lambda x}{(x^2+4x+5)^2} dx = Re\left[2\pi i \underset{z=-2+i}{\text{Выч}} F(z)e^{i\lambda z}\right],$$

$$I_2 = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin \lambda x}{(x^2+4x+5)^2} dx = Im\left[2\pi i \underset{z=-2+i}{\text{Выч}} F(z)e^{i\lambda z}\right].$$

Итак, $I_1 = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos\lambda x}{(x^2+4x+5)^2} dx = \frac{\pi(\lambda+1)}{2} e^{-\lambda}\cos 2\lambda.$

$$I_2 = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin\lambda x}{(x^2+4x+5)^2} dx = -\frac{\pi(\lambda+1)}{2} e^{-\lambda}\sin 2\lambda.$$

Например, $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos 2x}{(x^2+4x+5)^2} dx = \{I_1, \lambda=2\} = \frac{3\pi}{2} e^{-2}\cos 4,$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin 3x}{(x^2+4x+5)^2} dx = \{I_2, \lambda=3\} = -2\pi e^{-3}\sin 6.$$

С учетом вычисленных интегралов можно получить

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{4\cos 2x - 3\sin 3x}{(x^2+4x+5)^2}\,dx =$$

$$= 4\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos 2x}{(x^2+4x+5)^2}\,dx - 3\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin 3x}{(x^2+4x+5)^2}\,dx.$$

$$I = 4\cdot\frac{3\pi}{2}e^{-2}\cos 4 + 6\pi e^{-3}\sin 6.$$

Окончательно

$$I = 6\pi e^{-2}(\cos 4 + e^{-1}\sin 6) \Rightarrow I = 6\pi e^{-3}(e\cos 4 + \sin 6).$$

Вопросы для самоконтроля

1. Комплексные числа в алгебраической форме. Мнимая единица. Вещественная и мнимая части. Геометрическая интерпретация. Комплексно-сопряженные числа.
2. Тригонометрическая и показательная формы комплексного числа. Формулы Эйлера.
3. Действия над комплексными числами в алгебраической, показательной и тригонометрической формах.
4. Понятие области в пространстве комплексных чисел. Односвязные и многосвязные области.
5. Понятие функции комплексного переменного. Элементарные функции.
6. Предел и непрерывность функции комплексного переменного.
7. Понятие производной. Аналитичность функции. Условия Коши-Римана аналитичности функции.
8. Геометрический смысл модуля и аргумента производной. Конформные отображения.
9. Интеграл от функции комплексного переменного.
10. Основные интегральные теоремы Коши для односвязной и многосвязной областей.
11. Первая и вторая интегральные формулы Коши.
12. Степенной ряд в комплексной области. Ряды Тейлора и Лорана.
13. Изолированные особые точки и лорановское разложение функции. Целые (голоморфные) и дробные (мероморфные) функции.
14. Вычет функции относительно изолированной особой точки и в бесконечно удаленной точке.
15. Основные теоремы о вычетах.
16. Вычисление вычетов.

2. ОПЕРАЦИОННОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

В прошлом веке многие математики, в том числе и в России (Ващенко-Захарченко, Летников), занимались так называемым символическим исчислением. В его основе лежит построение математического анализа как системы формальных операций над символом $p = \frac{d}{dt}$ производной по независимой переменной t (см., напр., линейные дифференциальные уравнения (ЛДУ) с постоянными коэффициентами). Операция интегрирования $\int_0^t x(t)dt$ рассматривается как применение символа $\frac{1}{p}$. Символическое исчисление оказалось очень удобным для решения различных задач, связанных с линейными дифференциальными уравнениями. Популяризации символического исчисления в двадцатом веке способствовал английский инженер-электрик О. Хевисайд (1880-1925), который успешно использовал его в электротехнике. Обоснование символического или операционного исчисления дано в двадцатых годах 20 века Бромвичем и Карлсоном, связавшими этот метод с известным из теории функций комплексной переменной методом интегральных преобразований. При этом символ (оператор) p получил новое толкование как комплексная переменная $p = s + i\sigma$, а вместе с ним новую трактовку получил и сам операционный метод.

2.1. Преобразование Лапласа

Функция-оригинал – любая комплекснозначная функция $f(t)$ вещественной переменной t, удовлетворяющая свойствам:

1°. $f(t) = 0$ при $t < 0$;

2°. $f(t)$ – кусочно-непрерывная функция вместе со своими производными достаточно высокого порядка при всех t, за исключением конечного или счетного числа точек разрыва первого рода;

3°. $f(t)$ возрастает не быстрее показательной функции, т.е. существуют константы $M > 0$, $s_0 \geq 0$, такие, что для всех $t > 0$

$$|f(t)| \leq Me^{s_0 t}. \tag{2.1}$$

Число $s_0 = s_0(f)$ (s_0^f) – ***показатель роста*** функции.

Для ограниченных оригиналов можно, очевидно, принять $s_0 = 0$.

С точки зрения физических приложений условия 2^0 и 3^0 не нуждаются в пояснениях – они выполняются для большинства функций $f(t)$,

описывающих физические процессы, t интерпретируется как время. Условие 1^0 на первый взгляд кажется искусственным. Однако следует иметь ввиду, что операционный метод приспособлен к задачам, приводящим к решению дифференциальных уравнений с данными начальными условиями, и по сути совершенно безразлично, как ведут себя искомые функции до начального момента, который всегда можно принять за момент $t = 0$. Таким образом, и условие 1^0 физически естественно.

Простейшей функцией-оригиналом является так называемая ***единичная функция Хевисайда*** $\sigma_0(t)$ $(\eta(t),\ 1)$:

$$\sigma_0(t) = \begin{cases} 1, & t > 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases} \quad \text{или} \quad \sigma_0(t) = 1 \ (t > 0).$$

Для простоты обычно пишут $f(t)$ вместо $f(t)\sigma_0(t)$, $\sin\omega t$ вместо $\sin\omega t\,\sigma_0(t)$ и т.д., считая выполненным условие 1^0.

Изображение $F(p)$ функции $f(t)$ по Лапласу определяется формулой (***преобразование Лапласа***)

$$F(p) = L(f(t), p) = \int_0^\infty f(t)e^{-pt}dt, \ p = s + i\sigma. \quad (2.2)$$

Обозначения: $f(t) \doteq F(p) = L(f(t), p)$ $(\to, \leftrightarrow, \|)$.

Можно показать, что для всякого оригинала $f(t)$ изображение $F(p)$ определено в полуплоскости $\mathrm{Re}\, p > s_0$, где s_0 – показатель роста функции $f(t)$, и является там аналитической функцией. В большинстве случаев практических задач область определения изображения гораздо шире этой полуплоскости, поэтому часто рассматривают аналитическое продолжение изображений за прямую $\mathrm{Re}\, p = s_0$. Заметим также, что если $\mathrm{Re}\, p \to \infty$, то $F(p) \to 0$.

Можно показать, что формула

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{s-i\infty}^{s+i\infty} F(p)e^{pt}dp \quad (2.3)$$

обращает формулу (2.2), т.е. в любой точке своей непрерывности выражает оригинал $f(t)$ через его изображение $F(p)$, где интеграл вдоль прямой $\mathrm{Re}\, p = s > s_0$ понимается в смысле главного значения, т.е. как

$$\lim_{\sigma\to\infty} \int_{s-i\sigma}^{s+i\sigma} F(p)e^{pt}dp.$$

Таким образом, оригинал $f(t)$ вполне определяется своим изображением $F(p)$ с точностью до значений в точках разрыва $f(t)$.

Если функция $F(p)$ аналитична в полуплоскости $Re\, p > s_0$ и $F(p) \to 0$ при $|p| \to \infty$ в любой полуплоскости $Re\, p = s > s_0$ равномерно относительно $arg\, p$ и $\int_{s-i\infty}^{s+i\infty} F(p)dp$ абсолютно сходится, то $F(p)$ является изображением функции вида (2.3).

Замечание. Если $Re\, p > s_0$, $p = s + i\sigma$, то

$$\lim_{t\to\infty} e^{-(p-s_0)t} = 0. \qquad (*)$$

В самом деле, $e^{-(p-s_0)t} = e^{-(s-s_0)t} \cdot e^{-i\sigma t}$, $e^{-i\sigma t} = \cos\sigma t - i\sin\sigma t$, $|e^{-i\sigma t}| = 1$, т.е. $e^{-i\sigma t}$ – ограниченная величина, а $\lim_{t\to\infty} e^{-(p-s_0)t} = \{s - s_0 > 0, [e^{-\infty}]\} = 0$, т.е. $e^{-(p-s_0)t}$ бесконечно малая при $t \to 0$.

По свойствам бесконечно малых произведение ограниченной величины на бесконечно малую есть бесконечно малая, т.е. соотношение (*) верно.

В частности,

$$\lim_{t\to\infty} e^{-pt} = 0, \quad Re\, p > 0. \qquad (2^*)$$

Этим соотношением будем пользоваться в дальнейшем, без дополнительных пояснений и доказательств.

Непосредственно из (2.2) с учетом (*) и (2*) получаем два простых примера преобразования Лапласа:

$$1 \to \frac{1}{p}, \quad Re\, p > 0; \qquad (2.4)$$

$$e^{-\alpha t} \to \frac{1}{p+\alpha}, \quad Re(p+\alpha) > 0; \qquad (2.5)$$

$$e^{\alpha t} \to \frac{1}{p-\alpha}, \quad Re(p-\alpha) > 0, \qquad (2.6)$$

Действительно,

$$L(1,p) = \int_0^\infty e^{-pt}dt = -\frac{1}{p}e^{-pt}\Big|_0^\infty = \frac{1}{p}, \quad Re\, p > 0;$$

$$L(e^{-\alpha t}, p) = \int_0^\infty e^{-\alpha t} e^{-pt} dt = \int_0^\infty e^{-(p+\alpha)t} dt =$$

$$= -\frac{1}{p+\alpha} e^{-(p+\alpha)t} \Big|_0^\infty = \frac{1}{p+\alpha}, \quad Re\, p > -\alpha.$$

2.2. Свойства оригиналов и изображений. Изображения основных элементарных функций

Непосредственно из свойств интегралов получаем следующие теоремы.

1^0. ***Теорема единственности.*** Если две непрерывные функции $f(t)$, $g(t)$ имеют одно и то же изображение $F(p)$, то они тождественно равны $f(t) \equiv g(t)$.

Отсюда следует, что если $f(t) \not\equiv 0$, то $F(p)$ непериодична.

2^0. ***Теорема линейности.*** Для любых комплексных чисел α, β

$$\alpha f(t) + \beta g(t) \to \alpha F(p) + \beta G(p), \quad Re\, p > max\{s_0^f, s_0^g\}.$$

Например, по теореме 2^0 линейности с учетом (2.5), (2.6)

$$\sin \beta t = \frac{e^{i\beta t} - e^{-i\beta t}}{2i} \to \frac{1}{2i}\left(\frac{1}{p - i\beta} - \frac{1}{p + i\beta}\right),$$

$$\sin \beta t \to \frac{\beta}{p^2 + \beta^2}, \quad Re\, p > 0. \tag{2.7}$$

Аналогично,

$$\cos \beta t \to \frac{p}{p^2 + \beta^2}, \quad Re\, p > 0; \tag{2.8}$$

$$sh\alpha t \to \frac{\alpha}{p^2 - \alpha^2}, \quad ch\alpha t \to \frac{p}{p^2 - \alpha^2}, \quad Re\, p > |\alpha|. \tag{2.9}$$

Пример 2.2.1. Найти изображение функции

$$f(t) = 3\sigma_0(t) + 2\cos 3t.$$

Решение. В силу (2.4) и теоремы 2^0

$$f(t) \to \frac{3}{p} + \frac{2p}{p^2 + 9} = \frac{5p^2 + 27}{p(p^2 + 9)}, \quad Re\, p > 0.$$

Пример 2.2.2. Найти оригинал изображения

$$F(p)=\frac{2}{p}+\frac{2}{p^2+16}.$$

Решение. Представим $F(p)$ в виде $F(p)=2\cdot\frac{1}{p}+\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{p^2+4^2}$;

$\frac{1}{p}\to\sigma_0(t)=1$, $\frac{4}{p^2+4^2}\to sin\,4t$; тогда по теореме 2^0

$$f(t)=2\sigma_0(t)+\frac{1}{2}sin4t=2+\frac{1}{2}sin4t \quad (t>0).$$

3^0. ***Теорема подобия.*** Для любого постоянного числа $\alpha>0$

$$f(\alpha t)\to\frac{1}{\alpha}F\left(\frac{p}{\alpha}\right), \quad Re\,p>max\{s_0,\alpha s_0\}.$$

Действительно,

$$L(f(\alpha t),p)=\int_0^\infty f(\alpha t)e^{-pt}dt=\{\alpha t=\tau\}=$$

$$=\frac{1}{\alpha}\int_0^\infty f(\tau)e^{-\frac{p}{\alpha}\tau}d\tau=\frac{1}{\alpha}F\left(\frac{p}{\alpha}\right).$$

4^0. ***Теорема смещения.*** Для любого комплексного числа α

$$e^{-\alpha t}f(t)\to F(p+\alpha), \quad Re(p+\alpha)>s_0.$$

Доказательство провести самостоятельно.

Например, если $cos\beta t\to\frac{p}{p^2+\beta^2}$, то

$$e^{-\alpha t}cos\beta t\to\frac{p+\alpha}{(p+\alpha)^2+\beta^2}, \quad Re(p+\alpha)>0, \quad (2.10)$$

$$(Re\,p>-\alpha,\ \alpha\in R)$$

Аналогично,

$$e^{-\alpha t}sin\beta t\to\frac{\beta}{(p+\alpha)^2+\beta^2}, \quad Re\,p>-\alpha \ (\alpha\in R). \quad (2.1')$$

Пример 2.2.3. Найти оригинал изображения $F(p)=\dfrac{1}{p^2+2p+5}$.

Решение. Имеем

$$F(p)=\frac{1}{(p+1)^2+4}=\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{(p+1)^2+2^2}\to$$

$$\frac{2}{p^2+2^2}\to \sin 2t.$$

Таким образом, по теореме смещения изображения оригинал $f(t)=\dfrac{1}{2}e^{-t}\sin 2t.$

5^0. ***Дифференцирование изображения.***

$$F^{(n)}(p)\to(-1)^n t^n f(t),\ \ Re\, p>s_0,$$

т.е. дифференцирование изображения сводится к умножению оригинала на $(-t)^n$.

Например,

$$t^n\to\frac{n!}{p^n+1},\ \ t^n e^{-\alpha t}\to\frac{n!}{(p+\alpha)^{n+1}},\quad Re\, p>-\alpha\ , \tag{2.12}$$

$$t\sin\beta t\to\frac{2p\beta}{(p^2+\beta^2)^2},\ \ t\cos\beta t\to\frac{p^2-\beta^2}{(p^2+\beta^2)^2},\quad Re\, p>0. \tag{2.13}$$

Доказательство. Очевидно, что $\forall n=1,\ 2,\ \ldots$

$$\frac{d^n}{dp^n}\left(\int_0^\infty e^{-pt}f(t)dt\right)=\int_0^\infty(-t)^n e^{-pt}f(t)dt.$$

иначе

$$F^{(n)}(p)=L(f(t)(-t)^n,p). \tag{!}$$

Получим по этой теореме одну из формул (2.13). Известно, что оригиналу $f(t)=\cos\beta t$ соответствует изображение

$$F(p)=\frac{p}{p^2+\beta^2}:\ f(t)=\cos\beta t\to F(p)=\frac{p}{p^2+\beta^2}.$$

По правилу дифференцирования дроби

$$F'(p)=\frac{p^2+\beta^2-p\cdot 2p}{(p^2+\beta^2)^2}=\frac{\beta^2-p^2}{(p^2+\beta^2)^2}.$$

По теореме 5^0

$$tf(t) = -F'(p) \Rightarrow t\cos\beta t \to \frac{p^2 - \beta^2}{(p^2 + \beta^2)^2}.$$

Предлагаем читателю как упражнение доказать вторую формулу (2.13) и формулу (2.12).

Пример 2.2.4. Получить оригинал $f(t)$ по изображению

$$F(p) = \frac{1}{(p^2 + \beta^2)^2}.$$

Решение. Преобразуем $F(p)$ так, чтобы можно было воспользоваться полученными выше формулами:

$$F(p) = \frac{1}{(p^2 + \beta^2)^2} = \frac{1}{2\beta^3} \frac{\beta(p^2 + \beta^2) - \beta(p^2 - \beta^2)}{(p^2 + \beta^2)^2} =$$

$$= \frac{1}{2\beta^3}\left[\frac{\beta}{p^2 + \beta^2} - \beta\frac{p^2 - \beta^2}{(p^2 + \beta^2)^2}\right].$$

Учитывая теорему 2^0 линейности, имеем

$$F(p) = \frac{1}{(p^2 + \beta^2)^2} \to f(t) = \frac{1}{2\beta^3}\left[\sin\beta t - \beta t\cos\beta t\right]. \quad (2.14)$$

Применяя теорему смещения изображения к оригиналам в формулах (2.13) и (2.14), получаем:

$$te^{-\alpha t}\sin\beta t \to \frac{2(p + \alpha)\beta}{\left[(p + \alpha)^2 + \beta^2\right]^2}, \quad (2.15)$$

$$te^{-\alpha t}\cos\beta t \to \frac{(p + \alpha)^2 - \beta^2}{\left[(p + \alpha)^2 + \beta^2\right]^2}, \quad (2.16)$$

$$\frac{1}{\left[(p + \alpha)^2 + \beta^2\right]^2} \to \frac{e^{-\alpha t}}{2\beta^3}\left[\sin\beta t - \beta t\cos\beta t\right]. \quad (2.17)$$

6^0. ***Дифференцирование оригинала.*** Если функция $f(t)$ непрерывна, имеет кусочно-непрерывную производную $f'(t)$ на $[0, \infty)$ с разрывами первого рода и с тем же показателем роста s_0, то

$$L(f'(t), p) = pL(f(t), p) - f(0)$$

или

$$f'(t) \to pF(p) - f(0), \quad Re\, p > s_0.$$

Доказательство. Имеем

$$L(f'(t),p) = \int_0^\infty e^{-pt} f'(t)dt = \left\{ \begin{array}{l} \int u dv = uv - \int v du \\ du = -pe^{-pt}dt, v = f(t) \end{array} \right\} =$$

$$= e^{-pt} f(t)\Big|_0^\infty + p\int_0^\infty e^{-pt} f(t)dt =$$

$$= -f(0) + pL(f(t),p) = -f(0) + pF(p),$$

так как при $Re\, p = s > s_0$ $(s - s_0 > 0, \ |e^{i\sigma}| = 1)$

$$\lim_{t\to\infty} |e^{-pt} f(t)| \le \lim_{t\to\infty} |e^{-(s+i\sigma)} M e^{s_0 t}| = M \lim_{t\to\infty} e^{-(s-s_0)t} |e^{-i\sigma}| = [e^{-\infty}] = 0.$$

Следствие. Если функция $f(t)$ n раз непрерывно дифференцируема и показатели роста всех производных равны s_0, то

$$f'(t) \to pF(p) - f(0),$$

$$f''(t) \to p^2 F(p) - pf(0) - f'(0),$$

$$f'''(t) \to p^3 F(p) - p^2 f(0) - pf'(0) - f''(0), \ldots,$$

$$f^{(n)}(t) \to p^n F(p) - p^{n-1} f(0) - p^{n-2} f'(0) - \ldots - pf^{(n-2)}(0) - f^{(n-1)}(0),$$

$Re\, p > s_0$.

7^0. ***Интегрирование изображения.*** Если $\int_p^\infty F(q)dq$ сходится, то он является изображением функции $\frac{f(t)}{t}$:

$$\frac{f(t)}{t} \to \int_p^\infty F(q)dq.$$

Следствие.

$$\int_0^\infty \frac{f(t)}{t} dt = \int_0^\infty F(q)dq.$$

Пример 2.2.5. Найти изображение функции $g(t)=\dfrac{e^t-1}{t}$.

Решение. Заметим, что оригинал $f(t)=e^t-1$ в силу теоремы линейности имеет изображение $F(p)=\dfrac{1}{p-1}-\dfrac{1}{p},\ Re\,p>1.$

По теореме 7^0 об интегрировании изображения имеем

$$g(t)=\frac{f(t)}{t}=\frac{e^t-1}{t}\to$$

$$\int_p^\infty F(p)dp=\int_p^\infty\left(\frac{1}{p-1}-\frac{1}{p}\right)dp=\ln|p-1|-\ln|p|\Big|_p^\infty=\ln\left|\frac{p-1}{p}\right|\Big|_p^\infty$$

$$g(t)=\frac{e^t-1}{t}\to G(p)=\ln\left|\frac{p-1}{p}\right|\Big|_p^\infty=\ln\left|\frac{p}{p-1}\right|.$$

Пример 2.2.6. Найти изображение функции $f(t)=\dfrac{\sin t}{t}$.

Решение. Так как $\sin t\to\dfrac{1}{p^2+1}$, то по теореме 7^0

$$\frac{\sin t}{t}\to\int_p^\infty\frac{1}{q^2+1}dq=arctg\ q\Big|_p^\infty=\frac{\pi}{2}-arctg\ p.$$

Используя следствие к теореме 7^0, заметим, что

$$\int_0^\infty\frac{\sin t}{t}dt=\int_0^\infty\frac{dq}{q^2+1}=arctg\ q\Big|_0^\infty=\frac{\pi}{2}. \qquad (2.18)$$

8^0. ***Интегрирование оригинала.*** Если функция $F(p)$ является изображением оригинала $f(t):\ f(t)\to F(p)$, то при $Re\,p>s_0$

$$\int_0^t f(t)dt\to\frac{F(p)}{p}.$$

Доказательство. Найдем преобразование Лапласа, меняя порядок интегрирования, что возможно при условии равномерной абсолютной сходимости интеграла.

$$L\left(\int_0^t f(\tau)d\tau,\ p\right)=\int_0^\infty\left(\int_0^t f(\tau)d\tau\right)e^{-pt}dt=$$

$$=\int_0^\infty f(\tau)d\tau\int_\tau^\infty e^{-pt}dt=\int_0^\infty f(\tau)\frac{e^{-pt}}{p}\Bigg|_\tau^\infty d\tau,$$

Учитывая замечания (*), 2(*), получаем

$$L\left(\int_0^t f(\tau)d\tau,\ p\right)=\frac{1}{p}\int_0^\infty f(\tau)e^{-p\tau}d\tau$$

или, иначе,

$$\int_0^t f(t)dt\to\frac{F(p)}{p},\quad Re\,p>s_0.$$

Пример 2.2.7. Найти изображение функции $\int_0^t \sin 2\tau d\tau$.

Решение. Имеем $\sin 2\tau\to\frac{2}{p^2+4}$. По теореме 8^0

$$\int_0^t \sin 2\tau d\tau\to\frac{2}{p(p^2+4)}.$$

Этой теоремой удобно пользоваться при нахождении оригинала $g(t)$ дроби $\frac{F(p)}{p^n}$, если известен оригинал изображения $F(p)$. В этом случае функция-оригинал $g(t)$ получается последовательным n −кратным интегрированием функции $f(t)$.

Пример 2.2.8. По изображению $G(p)=\frac{1}{p^3(p^2+1)}$ найти оригинал $g(t)$.

Решение. Заметим, что функция $F(p)=\frac{1}{p^2+1}$ является изображением оригинала $f(t)=\sin t$:

$$F(p)=\frac{1}{p^2+1}\to f(t)=\sin t.$$

Тогда по теореме 8^0 об интегрировании оригинала

$$\frac{F(p)}{p}=\frac{1}{p(p^2+1)}\to\int_0^t f(t)dt=\int_0^t \sin t\,dt=\cos t\Big|_0^t=1-\cos t.$$

$$\frac{F(p)}{p^2}=\frac{1}{p^2(p^2+1)}\to\int_0^t dt\int_0^t f(t)dt=\int_0^t(1-\cos t)dt=$$

$$=t-\sin t\Big|_0^t=t-\sin t.$$

Аналогично,

$$G(p)=\frac{1}{p^3(p^2+1)}\to g(t)=\int_0^t(t-\sin t)dt=\frac{t^2}{2}+\cos t\Big|_0^t.$$

Стало быть, оригиналом дроби $G(p)=\dfrac{1}{p^3(p^2+1)}$ является функция $g(t)=\dfrac{t^2}{2}+1-\cos t=\dfrac{t^2}{2}+2\sin^2\dfrac{t}{2}$.

Заметим, что этот оригинал можно получить, разлагая функцию $G(p)$ на простейшие дроби и используя приведенные выше формулы.

9^0. ***Запаздывание оригинала.*** Пусть $f(t)=0,\ t<\tau$, тогда

$$L\big(f(t-\tau),p\big)=e^{-p\tau}L(f(t),p)$$

или

$$f(t-\tau)\to e^{-p\tau}F(p),\quad Re\,p>s_0.$$

Доказательство. Изображение Лапласа

$$L(f(t-\tau),p)=\int_0^\infty e^{-pt}f(t-\tau)dt=\big\{f(t-\tau)=0,t<\tau_0\big\}=$$

$$=\int_{\tau_0}^\infty e^{-pt}f(t-\tau)dt=\left\{\begin{array}{l}t-\tau=u\\ dt=du\end{array}\ \begin{array}{|c|c|c|}\hline t & \tau_0 & \infty\\ \hline u & 0 & \infty\\ \hline\end{array}\right\}=$$

$$=\int_0^\infty e^{-p(u+\tau)}f(u)du=e^{-p\tau}\int_0^\infty e^{-pu}f(u)du\ \Rightarrow$$

$$L(f(t-\tau),p)=e^{-p\tau}L(f(t),p)$$

или

$$f(t-\tau)\to e^{-p\tau}F(p),\quad Re\,p>s_0.$$

По теореме 9^0 о запаздывании оригинала смещенной функции Хевисайда

$$\sigma_0(t-\tau),\ s_0=0\quad(\sigma_0(t-\tau)=1\text{ при }t>\tau)$$

соответствует изображение $\frac{e^{-p\tau}}{p}$.

В самом деле,

$$\sigma_0(t)=1 \rightarrow \frac{1}{p},\ t>0;$$

$$\sigma_0(t-\tau)=1 \rightarrow \frac{e^{-p\tau}}{p},\ t>\tau,\ Re\, p>0. \qquad (2.19)$$

Аналогично,

$$sin\beta(t-\tau) \rightarrow \frac{\beta e^{-p\tau}}{p^2+\beta^2},\ Re\, p>0, \qquad (2.20)$$

$$cos\beta(t-\tau) \rightarrow \frac{pe^{-p\tau}}{p^2+\beta^2},\ Re\, p>0. \qquad (2.21)$$

Используя теорему 9^0 запаздывания, можно найти изображение кусочно-линейной функции (рис. 2.1).

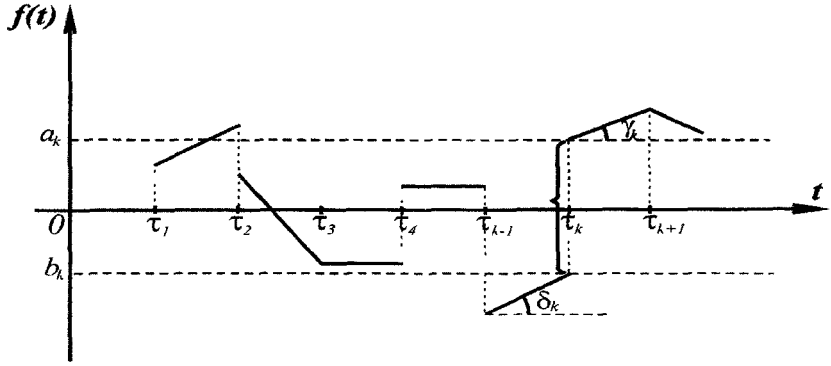


Рис. 2.1

Пусть τ_k – точки разрыва первого рода функции $f(t)$ или $f'(t)$.

$\alpha_k = a_k - b_k$ – скачки функций в точках «стыка» τ_k;

$\beta_k = tg\gamma_k - tg\delta_k$ – скачки производной $f'(t)$ в точках стыка τ_k.

Тогда изображение такой полигональной функции имеет вид

$$F(p)=\sum_k e^{-p\tau_k}\left(\frac{\alpha_k}{p}+\frac{\beta_k}{p^2}\right). \qquad (2.22)$$

Пример 2.2.8. Найти изображение функции на рис. 2.2.

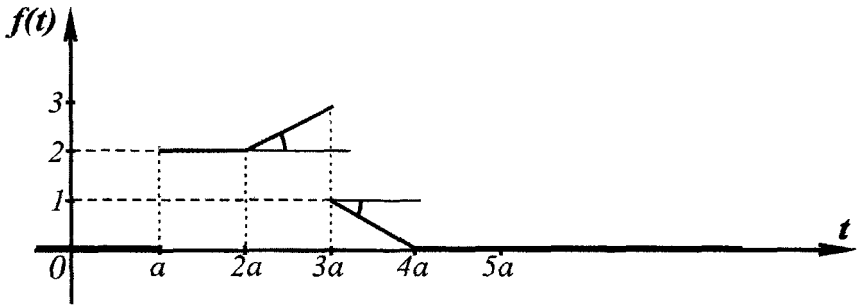


Рис. 2.2

Функцию $f(t)$ на рис. 2.2 и ее производную $f'(t)$ запишем в аналитической форме, используя формулы уравнения прямой на плоскости:

$$f(t)=\begin{cases}0,\ t<a,\\ 2,\ a<t\le 2a,\\ \dfrac{t}{a},\ 2a<t<3a,\\ 4-\dfrac{t}{a},\ 3a<t<4a,\\ 0,\ t\ge 4a.\end{cases}\quad,\quad f'(t)=\begin{cases}0,\ t\le 2a,\\ \dfrac{1}{a},\ 2a<t<3a,\\ -\dfrac{1}{a},\ 3a<t<4a,\\ 0,\ t\ge 4a.\end{cases}$$

Разрывы функции $f(t)$ первого рода в двух точках:

$\tau_1 = a$, скачок $\alpha_1 = 2$;

$\tau_2 = 3a$, скачок $\alpha_2 = -2$.

Разрывы производной $f'(t)$ первого рода в точках:

$\tau_3 = 2a$, скачок $\beta_3 = \dfrac{1}{a} - 0 = \dfrac{1}{a}$;

$\tau_4 = 3a$, скачок $\beta_4 = -\dfrac{1}{a} - \dfrac{1}{a} = -\dfrac{2}{a}$;

$\tau_5 = 4a$, скачок $\beta_5 = 0 - \left(-\dfrac{1}{a}\right) = \dfrac{1}{a}$.

Согласно формуле (2.22), получаем

$$F(p)=e^{-pa}\frac{2}{p}+e^{-3pa}\left(-\frac{2}{p}\right)+e^{-2pa}\frac{1}{ap^2}+e^{-3pa}\left(-\frac{2}{ap^2}\right)+e^{-4pa}\frac{1}{ap^2},$$

$$F(p)=\frac{2}{p}(e^{-pa}-e^{-3pa})+\frac{1}{ap^2}(e^{-2pa}-2e^{-3pa}+e^{-4pa}).$$

Пример 2.2.9. Найти оригинал $g(t)$ по изображению:

а) $G(p)=\dfrac{pe^{-3p}}{p^2+64}$, б) $G(p)=\dfrac{e^{4p}}{p^2+4p+5}$,

в) $G(p)=\dfrac{e^{4p}}{(p^2+4p+5)^2}$.

Решение. а) Заметим, что функция $F(p)=\dfrac{p}{p^2+64}$ является изображением оригинала $f(t)=\cos 8t$.

Множитель e^{-3p} при $F(p)$ означает запаздывание оригинала на величину $\tau=3$:

$$G(p)=\frac{pe^{-3p}}{p^2+64}\to f(t-3)=\cos 8(t-3),\quad t-3>0.$$

б) Рассмотрим изображение $F(p)=\dfrac{1}{p^2+4p+5}=\dfrac{1}{(p+2)^2+1}$ оригинала $f(t)=e^{-2t}\sin t$.

По виду $G(p)=e^{4p}F(p)$ определяем запаздывание оригинала на величину $\tau=-4$, следовательно, искомый оригинал $g(t)$ получаем путем замены t на $t-\tau=t+4$: $g(t)=e^{-2(t+4)}\sin(t+4)$, $t+4>0$.

в) Согласно формуле (2.17), имеем $(\alpha=2,\ \beta=1)$.

$$F(p)=\frac{1}{(p^2+4p+5)^2}=\frac{1}{\left[(p+2)^2+1\right]^2}\Rightarrow f(t)=\frac{e^{-2t}}{2}[\sin t-t\cos t].$$

Множитель e^{4p} при $F(p)$ означает запаздывание оригинала на величину $\tau=-4$, т.е. при $Re(p+2)>0$, $t+4>0$ получаем

$$G(p)=\frac{e^{4p}}{(p^2+4p+5)^2}\to g(t)=\frac{e^{-2(t+4)}}{2}\left[\sin(t+4)-(t+4)\cos(t+4)\right].$$

Определение. Сверткой функций $f(t)$ и $g(t)$ называется

$$f*g=\int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau.$$

Нетрудно проверить, что $f*g=g*f$ (надо сделать замену $t-\tau=u$).

10^0. ***Свертка функций.*** Изображение свертки функций $f(t)$, $g(t)$ с одинаковыми показателями роста ($s_0^f=s_0^g$) равно произведению изображений:

$$f*g\to F(p)G(p),\ \ Re\,p>s_0$$

или

$$L(f*g,p)=L(f,p)L(g,p).$$

Следствие. Формула Дюамеля.

$$pF(p)G(p)\to f(t)g(t)+\int_0^t f(\tau)g'(t-\tau)d\tau=f(t)g(0)+f*g'.$$

Доказательство.

$$F(p)G(p)\to f*g=\int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau.$$

По теореме о дифференцировании оригинала $(f*g|_{t=0}=0)$

$$pF(p)G(p)\to(f*g)'=\left[\int_0^t f(\tau)a(t-\tau)d\tau\right]_t'=$$

$$=f(t)g(0)+\int_0^t f(\tau)g'(t-\tau)d\tau. \qquad (!)$$

Пример 2.2.10. Найти изображение свертки функции $f(t)=\sin t$, $g(t)=e^{3t}$.

Решение. Свертка функции определяется интегралом

$$f * g = \int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau = g * f,$$

т.е. в нашем случае

$$f * g = g * f = \int_0^t \sin\tau e^{3(t-\tau)}d\tau = \int_0^t \sin(t-\tau)e^{3\tau}d\tau.$$

Изображением свертки служит произведение изображений (см. (2.6), (2.7)):

$$f(t) = \sin t \to F(p) = \frac{1}{p^2+1},$$

$$g(t) = e^{3t} \to G(p) = \frac{1}{p-3},$$

$$f * g = \int_0^t \sin\tau e^{3(t-\tau)}d\tau \to F(p)G(p) = \frac{1}{(p^2+1)(p-3)}.$$

Пример 2.2.11. По изображению $\dfrac{p}{(p^2+4)(p^2+9)}$ найти оригинал.

Решение. Данное изображение представим, например, в виде

$$F(p)G(p) = \frac{p}{p^2+4}\frac{1}{p^2+9},$$

$$F(p) = \frac{p}{p^2+4} \to f(t) = \cos 2t,$$

$$G(p) = \frac{1}{p^2+9} \to g(t) = \frac{1}{3}\sin 3t$$

(см. (2.7) и (2.8)).

Тогда по теореме 10^0 о свертке функций

$$F(p)G(p) = \frac{p}{p^2+4}\frac{1}{p^2+9} \to I(t) = \frac{1}{3}\int_0^t \cos 2\tau \sin 3(t-\tau)d\tau.$$

Для вычисления последнего интеграла применим формулу

$$\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\left[\sin(\alpha-\beta)+\sin(\alpha+\beta)\right]:$$

$$I(t) = \frac{1}{6}\int_0^t \left[\sin(3t-5\tau)+\sin(3t-\tau)\right]d\tau =$$

$$= \frac{1}{6}\left[\frac{1}{5}\cos(3t-5\tau)+\cos(3t-\tau)\right]\Bigg|_0^t,$$

$$I(t)=\frac{1}{6}\left[\frac{1}{5}(\cos 2t-\cos 3t)+\cos 2t-\cos 3t\right]=\frac{1}{5}[\cos 2t-\cos 3t].$$

Таким образом,

$$\frac{p}{(p^2+4)(p^2+9)} \to \frac{1}{5}[\cos 2t-\cos 3t].$$

Замечание. Тот же результат можно получить, разлагая дробь на простейшие и используя теорему линейности.

В самом деле,

$$\frac{p}{(p^2+4)(p^2+9)} = \frac{Ap+B}{p^2+4}+\frac{Cp+D}{p^2+9} \Rightarrow$$

$$p=(Ap+B)(p^2+9)+(Cp+D)(p^2+4).$$

Сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях p слева и справа, получаем систему

p^3	$A+C=0,$	$(1)\Rightarrow$	$C=-A\Rightarrow$	в $(3)\Rightarrow$
p^2	$B+D=0,$	$(2)\Rightarrow$	$D=-B\Rightarrow$	в $(4)\Rightarrow$
p	$9A+4C=1,$	(3)	$9A-4A=1\Rightarrow$	$5A=1,$
1	$9B+4D=0,$	(4)	$9B-4B=0\Rightarrow$	$5B=0.$

Решение этой системы

$$A=\frac{1}{5},\quad B=0,\quad C=-\frac{1}{5},\quad D=0.$$

Таким образом, согласно (2.8),

$$F(p)=\frac{p}{(p^2+4)(p^2+9)}=\frac{1}{5}\left(\frac{p}{p^2+4}-\frac{p}{p^2+9}\right)\to$$

$$f(t)=\frac{1}{5}(\cos 2t-\cos 3t).$$

*11⁰. **Первая теорема разложения**.* Пусть $F(p)$ – аналитическая функция на расширенной комплексной плоскости $C \cup \{p = \infty\}$ и $F(\infty) = 0$, т.е. ряд Лорана имеет вид $F(p) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{c_k}{p^k}$. Тогда оригиналом этого изображения при $t > 0$ является функция $f(t) = \sum_{k=0}^{\infty} c_{k+1} \frac{t^k}{k!}$.

12⁰. ***Вторая теорема разложения***. Пусть $F(p)$ – дробно-рациональная функция, p_k – изолированные особые точки $F(p)$, $k = \overline{1,m}$. Тогда изображение $F(p)$ имеет своим оригиналом функцию

$$f(t) = \sum_{k=1}^{m} \underset{p_k}{Выч}(F(p)e^{pt}).$$

Следствие. Если p_k – простые полюса $F(p) = \frac{A(p)}{B(p)}$, где $k = \overline{1,m}$; $A(p)$, $B(p)$ – многочлены, не имеющие общих корней, то

$$f(t) = \sum_{k=1}^{m} \frac{A(p_k)}{B'(p_k)} e^{p_k t}.$$

Замечание Вычисление вычетов см. п 1 5.1.

Пример 2.2.12 Найти оригинал функции $F(p) = \frac{1}{(p-1)(p^2+1)}$.

Решение. 1 способ. Дробь раскладываем на простые дроби :

$$F(p) = \frac{1}{(p-1)(p^2+1)} = \frac{A}{p-1} + \frac{Bp+C}{p^2+1} \Rightarrow$$

$$1 = A(p^2+1) + (Bp+C)(p-1).$$

Коэффициенты ищем, подставляя частные значения p в это равенство и прежде всего вещественные корни знаменателя:

$$p = 1 \Rightarrow 1 = 2A \Rightarrow A = \frac{1}{2};$$

$$p = 0 \Rightarrow 1 = A - C \Rightarrow C = A - 1 = -\frac{1}{2};$$

$$p = -1 \Rightarrow 1 = 2A - 2(-B + C) = 2A + 2B - 2C \Rightarrow$$

$$B = \frac{1-2A+2C}{2} = -\frac{1}{2}$$

$$F(p) = \frac{1}{2}\frac{1}{p-1} - \frac{1}{2}\frac{p+1}{p^2+1} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{p-1} - \frac{p}{p^2+1} - \frac{1}{p^2+1}\right).$$

Используя найденные выше изображения основных элементарных функций, получаем

$$f(t) = \frac{1}{2}(e^t - \cos t - \sin t).$$

2 способ. Воспользуемся теоремой 12^0. Здесь $A(p) = 1$, $B(p) = (p-1)(p^2+1)$.

Простые полюса $F(p)$ – корни $B(p)$: $p = 1$, $p = \pm i$.

$$B'(p) = \left[(p-1)(p^2+1)\right]' = \left[p^3 - p^2 + p - 1\right]' = 3p^2 - 2p + 1.$$

$$\underset{p=1}{\text{Выч}}\, F(p) = \left.\frac{1}{3p^2-2p+1}\right|_{p=1} = \frac{1}{2},$$

$$\underset{p=i}{\text{Выч}}\, F(p) = \left.\frac{1}{3p^2-2p+1}\right|_{p=i} = -\frac{1}{2(1+i)} = -\frac{1-i}{4},$$

$$\underset{p=-i}{\text{Выч}}\, F(p) = \left.\frac{1}{3p^2-2p+1}\right|_{p=-i} = -\frac{1}{2(1-i)} = -\frac{1+i}{4}.$$

$$f(t) = \frac{1}{2}e^t - \frac{1-i}{4}e^{it} - \frac{1+i}{4}e^{-it}.$$

Применяем формулы Эйлера $e^{\pm i\varphi} = \cos\varphi \pm i\sin\varphi$ и правило умножения комплексных чисел:

$$f(t) = \frac{1}{2}e^t - \frac{1-i}{4}(\cos t + i\sin t) - \frac{1+i}{4}(\cos t - i\sin t).$$

Приводя подобные, имеем $f(t) = \frac{1}{2}(e^t - \cos t - \sin t)$.

Для удобства все свойства и изображения основных элементарных функций представлены в табл. 2.1 и 2.2 соответственно (см. также [4, 10]). Таблица 2.2 может быть легко выведена самостоятельно из свойств интегралов с учетом определения изображения и с помощью основных теорем операционного исчисления (табл 2.1).

Таблица 2.1

Основные теоремы операционного исчисления

№	Оригинал	Изображение
	Преобразование Лапласа	
0°.	$\lvert f(t)\rvert \le Me^{s_0 t}, t \ge 0;$	$f(t) \to F(p), f(t) = F(p), Re\, p > s_0$
	$s_0 = s_0^f$ – показатель роста функции	$F(p) = L(f(t), p) = \int_0^\infty f(t)e^{-pt}dt$
	Теорема единственности	
1°.	$f(t) \equiv g(t), \; s_0^f = s_0^g = s_0$	$F(p) = G(p), \; Re\, p > s_0$
	Теорема подобия	
2°.	$f(\alpha t), \; \alpha > 0$	$\frac{1}{\alpha} F(\frac{p}{\alpha}), \quad Re\, p > max\{s_0, \alpha s_0\}$
	Теорема линейности	
3°.	$\alpha f(t) + \beta g(t), \; \alpha, \beta \in C$	$\alpha F(p) + \beta G(p), \; Re\, p > max\{s_0^f, s_0^g\}$
	Смещение изображения	
4°.	$e^{-\alpha t} f(t)$	$F(p + \alpha), \quad Re(p + \alpha) > s_0$
	Дифференцирование изображения	
5°.	$t^n f(t)$	$(-1)^n F^{(n)}(p), \quad Re\, p > s_0$
	Дифференцирование оригинала	
6°.	$f'(t)$	$pF(p) - f(0), \quad Re\, p > s_0$
	$f''(t)$	$p^2 F(p) - pf(0) - f'(0)$
	.....	.....
	$f^{(n)}(t)$	$p^n F(p) - p^{n-1} f(0) - p^{n-2} f'(0) - \ldots - pf^{(n-2)}(0) - f^{(n-1)}(0)$
	Интегрирование изображения	
7°.	$\frac{f(t)}{t}$	$\int_p^\infty F(q)dq, \quad Re\, p > s_0$
	Следствие. $\int_0^\infty \frac{f(t)}{t} dt = \int_0^\infty F(q)dq$	
	Интегрирование оригинала	
8°.	$\int_0^t f(\tau)d\tau$	$\frac{F(p)}{p}, \quad Re\, p > s_0$
	Запаздывание оригинала	
9°.	$f(t - \tau_0)$	$e^{-p\tau_0} F(p), \quad Re\, p > s_0$

№	Оригинал	Изображение
	Свертка функций(Теорема умножения, Э. Борель)	
10°.	$f * g = \int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau,\ s_0^f = s_0^g = s_0$	$F(p)G(p),\ Re\ p > s_0$
	Следствие. Формула Дюамеля	
	$f(t)g(0) + \int_0^t f(\tau)g'(t-\tau)d\tau$	$pF(p)G(p)$
	Преобразование Фурье	
11°.	$F(f(x),y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-ixy}dx$	$\sqrt{2\pi}F(f(x),y) = L(f(x),iy) + L(f(-x),-iy)$
	Первая теорема разложения	
12°.	$f(t) = \sum_{k=0}^{\infty} c_{k+1}\frac{t^k}{k!},\ t \geq 0$	$F(p) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{c_k}{p^k}$
	(целая функция)	(ряд Лорана в бесконечно удаленной точке)
	Вторая теорема разложения	
13°.	$f(t) = \sum_{k=1}^{m} Выч_{p_k}(F(p)e^{pt})$	$p_k,\ k = \overline{1,m}$ – особые точки $F(p)$
14°.	Следствие	
	$f(t) = \sum_{k=1}^{m} \frac{A(p_k)}{B'(p_k)}e^{p_k t}$	$F(p) = \frac{A(p)}{B(p)}$ – правильная рациональная функция, имеет простые полюса в точках $p_k, k = \overline{1,m}$

Таблица 2.2

Изображения элементарных функций

№	Оригинал	Изображение
1.	$\sigma_0(t)=\begin{cases}1, t\ge 0,\\ 0, t<0,\end{cases}$ $s_0=0$	$\frac{1}{p}$, $Re\, p>0$
2.	$\sin\beta t$, $s_0=0$	$\frac{\beta}{p^2+\beta^2}$, $Re\, p>0$
3.	$\cos\beta t$, $s_0=0$	$\frac{p}{p^2+\beta^2}$, $Re\, p>0$
4.	$e^{-\alpha t}$, $\alpha\in R$ $s_0=-\alpha$	$\frac{1}{p+\alpha}$, $Re\, p>-\alpha$
5.	$sh\alpha t=\frac{e^{\alpha t}-e^{-\alpha t}}{2}$, $s_0=\lvert\alpha\rvert$	$\frac{\alpha}{p^2-\alpha^2}$, $Re\, p>\lvert\alpha\rvert$
6.	$ch\alpha t=\frac{e^{\alpha t}+e^{-\alpha t}}{2}$, $s_0=\lvert\alpha\rvert$	$\frac{p}{p^2-\alpha^2}$, $Re\, p>\lvert\alpha\rvert$
7.	$e^{-\alpha t}\sin\beta t$, $s_0=-\alpha$	$\frac{\beta}{(p+\alpha)^2+\beta^2}$, $Re(p+\alpha)>0$
8.	$e^{-\alpha t}\cos\beta t$, $s_0=-\alpha$	$\frac{p+\alpha}{(p+\alpha)^2+\beta^2}$, $Re(p+\alpha)>0$
9.	t^n, $n\in N$, $s_0=0$	$\frac{n!}{p^{n+1}}$, $Re\, p>0$
10	t^α, $\alpha\in R$, $s_0=0$	$\frac{\Gamma(\alpha+1)}{p^{\alpha+1}}$, $\Gamma(\alpha+1)=\int_0^\infty e^{-t}t^\alpha dt=L(t^\alpha,1)$
11.	$t\sin\beta t$, $s_0=0$	$\frac{2p\beta}{(p^2+\beta^2)^2}$, $Re\, p>0$
12.	$t\cos\beta t$, $s_0=0$	$\frac{p^2-\beta^2}{(p^2+\beta^2)^2}$, $Re\, p>0$
13.	$te^{-\alpha t}$, $s_0=-\alpha$	$\frac{1}{(p+\alpha)^2}$, $Re(p+\alpha)>0$
14.	$t^n e^{-\alpha t}$, $s_0=-\alpha$	$\frac{n!}{(p+\alpha)^{n+1}}$, $Re(p+\alpha)>0$
15.	$te^{-\alpha t}\sin\beta t$, $s_0=-\alpha$	$\frac{2(p+\alpha)\beta}{[(p+\alpha)^2+\beta^2]^2}$, $Re(p+\alpha)>0$
16.	$te^{-\alpha t}\cos\beta t$, $s_0=-\alpha$	$\frac{(p+\alpha)^2-\beta^2}{[(p+\alpha)^2+\beta^2]^2}$, $Re(p+\alpha)>0$

№	Оригинал	Изображение
17.	$e^{-\alpha t}[\sin\beta t - \beta t\cos\beta t],\ s_0 = -\alpha$	$\frac{2\beta^3}{[(p+\alpha)^2+\beta^2]^2},\ Re(p+\alpha)>0$
18.	$\sigma_0(t-\tau),(\sigma_0(t-\tau)=1,\ t>\tau)\ \ s_0=0$	$\frac{e^{-p\tau}}{p},\ Re\,p>0$
19.	$\cos\beta(t-\tau),\qquad s_0=0$	$\frac{pe^{-p\tau}}{p^2+\beta^2},\ Re\,p>0$
20.	$\sin\beta(t-\tau),\qquad s_0=0$	$\frac{\beta e^{-p\tau}}{p^2+\beta^2},\ Re\,p>0$

2.3. Применение операционного исчисления к решению обыкновенных дифференциальных уравнений и систем

Операционный метод широко применяется к решению линейных дифференциальных уравнений (ЛДУ) с постоянными коэффициентами и систем таких уравнений. Пусть дано линейное дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами

$$L[x] = a_0x^{(n)} + a_1x^{(n-1)} + ... + a_{n-1}x' + a_nx = f(t). \quad (2.23)$$

Требуется решить его при начальных условиях

$$x(0) = x_0,\ \ x'(0) = x_0',\ ...,\ x^{(n-1)}(0) = x_0^{(n-1)}. \quad (2.24)$$

Предположим, что $a_0 \neq 0$, функция $f(t)$ и решение $x(t)$ вместе с производными до порядка n являются оригиналами.

Обозначим изображения: $x(t) \to X(p),\ \ f(t) \to F(p).$

По правилу дифференцирования оригинала и свойству линейности уравнения (2.23) с начальными условиями (2.24) получаем операторное уравнение

$$(a_0p^n + a_1p^{n-1} + ... + a_{n-1}p + a_n)X(p) =$$
$$= F(p) + x_0(a_0p^{n-1} + a_1p^{n-2} + ... + a_{n-1}) +$$
$$+ x_0'(a_0p^{n-2} + a_1p^{n-3} + ... + a_{n-2}) + ... + x_0^{(n-1)}a_0$$

или

$$L(p)X(p) = F(p) + B(p), \tag{2.25}$$

где $L(p)$, $B(p)$ – известные многочлены. Отсюда получаем операторное решение

$$X(p) = \frac{F(p) + B(p)}{L(p)}. \tag{2.26}$$

Можно доказать, что в принятых условиях всегда существует решение $x(t)$, которое является оригиналом изображения $X(p)$.

Аналогичным образом можно решать дифференциальные уравнения в частных производных, интегродифференциальные уравнения и системы таких уравнений.

Суть операторного метода сводится к следующему:

1) от искомой функции $x(t)$ (оригинала) переходят к функции $X(p)$ комплексного переменного p – изображению оригинала $x(t)$;
2) над изображением $X(p)$ проводят операции, соответствующие операциям над $x(t)$, получают операторное уравнение относительно $X(p)$, как правило, более простое, чем исходное, алгебраическое;
3) решают операторное уравнение относительно $X(p)$;
4) от найденного изображения $X(p)$ переходят к искомому оригиналу $x(t)$.

При решении ЛНДУ с постоянными коэффициентами (2.23) при начальных условиях

$$x(0) = 0,\ x'(0) = 0,\ \ldots,\ x^{(n-1)}(0) = 0 \tag{2.27}$$

можно искать решение $X(t)$ по одной из формул Дюамеля:

$$x(t) = \int_0^t x_1'(\tau) f(t-\tau) d\tau,$$

$$x(t) = \int_0^t x_1'(t-\tau) f(\tau) d\tau,$$

$$x(t) = f(0)x_1(t) + \int_0^t f'(\tau) x_1(t-\tau) dt, \tag{2.28}$$

$$x(t) = f(0)x_1(t) + \int_0^t f'(t-\tau) x_1(\tau) d\tau,$$

где функция $x_1(t)$ – решение ЛНДУ (2.23) правой частью $f(t) = 1$: $L(x_1) = 1$.

Докажем эти формулы.

Пусть $L(p)$ – характеристический многочлен уравнения (2.23), $X_1(p)$ – изображение решения $x_1(t)$, $X(p)$ – изображение $x(t)$, $F(p)$ – изображение правой части $f(t)$, $1 \to \frac{1}{p}$. Из формулы (2.26) $X(p) = \frac{F(p)}{L(p)}$, $X_1(p) = \frac{1}{pL(p)}$ (учитывая начальные условия (2.27), получаем $B(p) = 0$).

Из последнего равенства характеристический многочлен $L(p) = \frac{1}{pX_1(p)}$, следовательно, $X(p) = pX_1(p)F(p)$.

Теперь для нахождения решения оригинала $x(t)$ применим формулу Дюамеля при $G(p) = X_1(p)$ (см. теорему 10^0, следствие, п.2.2).

$$pX_1(p)F(p) \to x(t) = f(t)x_1(0) + \int_0^t f(\tau)x_1'(t-\tau)d\tau.$$

С учетом начального условия $x_1(0) = 0$,

$$pX_1(p)F(p) \to x(t) = f * x_1' = \int_0^t f(\tau)x_1'(t-\tau)d\tau.$$

В силу симметрии свертки

$$x(t) = x_1' * f = \int_0^t x_1'(\tau)f(t-\tau)d\tau.$$

Если последний интеграл взять по частям:

$$\int udv = uv - \int vdu, \quad u = f(t-\tau), \quad dv = x_1'(\tau)d\tau,$$
$$du = -f'(t-\tau)d\tau, \quad v = x_1(\tau),$$

то получим еще одну формулу Дюамеля

$$x(t) = f(t-\tau)x_1(\tau)\Big|_0^t + \int_0^t x_1(\tau)f'(t-\tau)d\tau.$$

Окончательно

$$x(t) = f(0)x_1(t) + x_1 * f' = f(0)x_1(t) + \int_0^t x_1(\tau)f'(t-\tau)d\tau.$$

В силу симметрии свертки $x_1 * f' = f' * x_1$ верна также формула

$$x(t) = f(0)x_1(t) + \int_0^t x_1(t-\tau)f'(\tau)d\tau.$$

Формулы Дюамеля (2.28) применяются, если нахождение изображения $F(p)$ правой части $f(t)$ уравнения вызывает затруднения или при многократном решении уравнения (2.23) при различных правых частях $f(t)$.

Заменой искомой функции задачу с ненулевыми начальными условиями (2.22) можно свести к задаче с нулевыми начальными условиями (2.27).

Пример 2.3.1. Найти решение задачи Коши

$$x'' + 4x = 2, \quad x(0) = x'(0) = 0.$$

Решение. Пусть искомое решение – оригинал $x(t)$, а его изображение $X(p)$. Тогда, пользуясь табл. 2.1. и 2.2, получим

$$x(t) \to X(p), \quad x'(t) \to pX(p) - x(0) = pX(p),$$

$$x''(t) \to p^2X(p) - px(0) - x'(0) = p^2X(p) \text{ (табл. 2.1, 6);}$$

$$f(t) = 2 \to \frac{2}{p} \text{ (табл. 2.2, 1).}$$

Пользуясь свойством линейности данного дифференциального уравнения, заменяем его операторным:

$$p^2X(p) + 4X(p) = \frac{2}{p}, \quad (p^2+4)X(p) = \frac{2}{p},$$

$$X(p) = \frac{2}{p(p^2+4)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{p} - \frac{p}{p^2+4}\right)$$

(рациональную дробь разложим в сумму простейших дробей).
По табл. 2.2 для каждой дроби определяем оригинал (табл. 2.2; 1,3):

$$\frac{1}{p} \to 1, \quad \frac{p}{p^2+4} \to \cos 2t.$$

По свойству линейности

$$X(p) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{p} - \frac{p}{p^2+4}\right) \to x(t) = \frac{1}{2}(1 - \cos 2t) = \sin^2 t.$$

Замечание. Можно использовать теорему интегрирования оригинала:

$$F(p) = \frac{2}{p^2+4} \to f(p) = \sin 2t;$$

$$\frac{F(p)}{p} \to \int_0^t f(t)dt = \int_0^t \sin 2t dt = \left.\frac{-\cos 2t}{2}\right|_0^t \Rightarrow$$

$$x(t) = \frac{1-\cos 2t}{2} = \sin^2 t.$$

Ответ: $x(t) = \sin^2 t.$

Пример 2.3.2. Решить операторным методом задачу Коши

$$y'' + 2y' + 5y = \sin x, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1.$$

Решение. Как и в предыдущем примере, заменяем данное дифференциальное уравнение операторным:

$$y(x) \to Y(p), \quad y'(x) \to pY(p) - y(0) = pY(p),$$

$$y''(x) \to p^2Y(p) - py(0) - y'(0) = p^2Y(p) - 1,$$

$$\sin x \to \frac{1}{p^2+1} \Rightarrow \text{в ЛДУ} \Rightarrow$$

$$p^2Y(p) - 1 + 2pY(p) + 5Y(p) = \frac{1}{p^2+1},$$

$$(p^2 + 2p + 5)Y(p) = \frac{1}{p^2+1} + 1 = \frac{p^2+2}{p^2+1},$$

$$Y(p) = \frac{p^2+2}{(p^2+1)(p^2+2p+5)}.$$

Полученную дробь разлагаем в сумму простых:

$$Y(p) = \frac{p^2+2}{(p^2+1)(p^2+2p+5)} = \frac{Ap+B}{p^2+1} + \frac{Cp+D}{p^2+2p+5},$$

$$p^2 + 2 = (Ap+B)(p^2+2p+5) + (Cp+D)(p^2+1).$$

Коэффициенты A, B, C, D находим из системы, сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях p:

$$\begin{array}{l|l} p^3 & A+C=0, \\ p^2 & B+2A+D=1, \\ p & 2B+5A+C=0, \Rightarrow \\ 1 & 5B+D=2, \end{array} \qquad A=-\frac{1}{10}, \quad C=-A=\frac{1}{10}, \quad B=\frac{1}{5}, \quad D=2-5B=1.$$

$$Y(p)=-\frac{1}{10}\frac{p}{p^2+1}+\frac{1}{5}\frac{1}{p^2+1}+\frac{1}{10}\frac{p+10}{p^2+2p+5};$$

$$\frac{p}{p^2+1}\to \cos x, \quad \frac{1}{p^2+1}\to \sin x,$$

$$\frac{p+10}{(p+1)^2+4}=\frac{p+1}{(p+1)^2+4}+\frac{9}{2}\frac{2}{(p+1)^2+4}\to$$

$$\to e^{-x}\left(\cos 2x+\frac{9}{2}\sin 2x\right)$$

(табл. 2.2: соответственно 3, 2, 18, 17).

$$Y(p)\to y(x)=-\frac{1}{10}\cos x+\frac{1}{5}\sin x+\frac{1}{10}e^{-x}\left(\cos 2x+\frac{9}{2}\sin 2x\right).$$

Пример 2.3.3. Применить операторный метод при нахождении частного решения системы линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами:

$$\begin{cases} 2\dot{x}+\dot{y}+x=1, \\ \dot{x}+3\dot{y}+2y=0, \end{cases} \qquad x(0)=0, \quad y(0)=0.$$

Решение. Перейдем к операторной системе (табл. 2.1, 6).

$$x(t)\to X(p), \quad \dot{x}(t)\to pX(p)-x(0)=pX(p),$$

$$y(t)\to Y(p), \quad \dot{y}(t)\to pY(p)-y(0)=pY(p),$$

$$1\to\frac{1}{p}, \quad 0=0\cdot 1\to 0\cdot\frac{1}{p}=0 \text{ (табл. 2.2, 1)} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} 2pX(p)+pY(p)+X(p)=\dfrac{1}{p}, \\ pX(p)+3pY(p)+2Y(p)=0, \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} (2p+1)X(p)+pY(p)=\dfrac{1}{p}, \\ pX(p)+(3p+2)Y(p)=0. \end{cases}$$

Решая эту линейную алгебраическую систему любым из известных методов (исключения, Крамера и т.д.) и разлагая дроби, получаем

$$X(p)=\frac{3p+2}{p(5p^2+7p+2)}=\frac{1}{p}-\frac{5p+4}{5p^2+7p+2}=\frac{1}{p}-\frac{p+0{,}8}{p^2+1{,}4p+0{,}4},$$

$$Y(p)=-\frac{1}{5p^2+7p+2}=-\frac{1}{5(p^2+1{,}4p+0{,}4)}.$$

Преобразуем дроби, чтобы можно было применить формулы 5, 6 из табл. 2.2 и теорему 4^0 из табл. 2.1:

$$X(p)=\frac{1}{p}-\frac{p+0{,}7}{(p+0{,}7)^2-0{,}3^2}-\frac{1}{3}\frac{0{,}3}{(p+0{,}7)^2-0{,}3^2}\rightarrow$$

$$x(t)=1-e^{-0{,}7t}ch0{,}3t-\frac{1}{3}e^{-0{,}7t}sh0{,}3t,$$

$$Y(p)=-\frac{1}{5\cdot 0{,}3}\cdot\frac{0{,}3}{(p+0{,}7)^2-0{,}3^2}=-\frac{2}{3}\cdot\frac{0{,}3}{(p+0{,}7)^2-0{,}3^2}\rightarrow$$

$$y(t)=-\frac{2}{3}e^{-0{,}7t}sh0{,}3t.$$

Ответ:

$$x(t)=1-\frac{1}{3}e^{-0{,}7t}(3ch0{,}3t+sh0{,}3t),\ y(t)=-\frac{2}{3}e^{-0{,}7}sh0{,}3t.$$

Замечание. Решение любого уравнения или системы такого вида можно проверить, применяя метод характеристического многочлена (см., напр. [2,6]).

Пример 2.3.4. С помощью формулы Дюамеля решить задачу Коши

$$x'' + x = \frac{1}{1+\cos^2 t}, \quad x(0) = 0, \quad x'(0) = 0.$$

Решение. Сначала найдем решение $x_1(t)$ задачи Коши с $f(t) = 1$:

$$x_1'' + x_1 = 1, \quad x_1(0) = 0, \quad x_1'(0) = 0.$$

Применим операторный метод.

$x_1(t),\ x_1'(t),\ x_1''(t)$ – оригиналы, $1 \to \frac{1}{p}$.

$$x_1(t) \to X_1(p),\ x_1'(t) \to pX_1(p),\ x_1''(t) \to p^2 X_1(p),$$

(теорема о дифференцировании оригинала).

Получаем изображение нашего уравнения

$$p^2 X_1(p) + X_1(p) = \frac{1}{p},$$

откуда

$$X_1(p) = \frac{1}{p(p^2+1)}.$$

$$\frac{1}{p^2+1} \to \sin t \quad \text{(табл. 2.2, 2).}$$

По теореме об интегрировании оригинала (табл. 2.3, 8).

$$\frac{1}{p(p^2+1)} \to \int_0^t \sin t dt = -\cos t\Big|_0^t = 1 - \cos t.$$

Итак,

$$x_1(t) = 1 - \cos t.$$

По формуле Дюамеля (2.28)

$$x(t) = f * x_1' = \int_0^t x_1'(t-\tau) f(\tau) d\tau.$$

$$x(t) = \int_0^t \frac{\sin(t-\tau)}{1+\cos^2\tau} d\tau = \int_0^t \frac{\sin t \cos\tau - \cos t \sin\tau}{1+\cos^2\tau} d\tau =$$

$$= \sin t \int_0^t \frac{\cos\tau d\tau}{1+\cos^2\tau} - \cos t \int_0^t \frac{\sin\tau}{1+\cos^2\tau} d\tau,$$

$$x(t)=\left\{sin^2\tau+cos^2\tau=1\right\}=sint\int_0^t\frac{d\sin\tau}{2-sin^2\tau}+cost\int_0^t\frac{d\cos\tau}{1+cos^2\tau}.$$

При вычислении последнего интеграла применяем формулы:

$$\int\frac{du}{u^2+a^2}=\frac{1}{a}arctg\frac{u}{a},\quad \int\frac{du}{u^2-a^2}=\frac{1}{2a}ln\left|\frac{u-a}{u+a}\right|.$$

Таким образом,

$$x(t)=-sint\ ln\left|\frac{sin\tau-\sqrt{2}}{sin\tau+\sqrt{2}}\right|_0^t+cost\ arctg\cos\tau\Big|_0^t,$$

$$x(t)=-sint\,ln\left|\frac{sint-\sqrt{2}}{sint+\sqrt{2}}\right|+cost\left(arctg\cos t-\frac{\pi}{4}\right).$$

2.4. Расчет электрических контуров

Как известно, ток $i(t)$ и напряжение $u(t)$ на концах элемента цепи, содержащего активное сопротивление R, самоиндукцию L или емкость C, связаны соответственно соотношениями

$$u(t)=Ri(t),\ u(t)=Li'(t),\ u(t)=\frac{1}{C}\left(\int_0^t i(t)dt+q_0\right),\quad (2.29)$$

где q_0 – начальный заряд на обкладках конденсатора.

Если ввести изображения оригиналов $i(t)$, $u(t)$ – операторный ток $I(p)$ и операторное напряжение $U(p)$, то эти соотношения перейдут в следующие (табл. 2.1; 6,8):

$$U=RI,\ U=L(pI-i_0),\ U=\frac{1}{Cp}(I+q_0),\quad (2.30)$$

где $i_0=i(0)$ – начальный ток.

Если считать $i_0=0$, $q_0=0$ (задачи включения), то

$$U=RI,\quad U=LpI,\ U=\frac{1}{Cp}I.\quad (2.31)$$

Последние соотношения объединяются в форме «операторного» закона Ома

$$U=ZI,$$

где Z – «операторное» сопротивление (***импеданс***), которое в случае активного сопротивления, самоиндукции и емкости соответственно равно

$$Z_R = R, \quad Z_L = Lp, \quad Z_C = \frac{1}{Cp}.$$

Далее заметим, что при последовательном соединении двух элементов с импеданцами Z_1, Z_2 получим

$$U_1 = Z_1 I, \quad U_2 = Z_2 I, \quad U = U_1 + U_2 = (Z_1 + Z_2)I = ZI,$$

отсюда $Z = Z_1 + Z_2$.

Аналогично, при параллельном соединении $\frac{1}{Z} = \frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2}$.

Таким образом, операторные сопротивления цепей в случае задач включения можно подсчитать по обычным правилам соединения элементов.

Если начальные ток и заряд отличны от нуля, то в уравнении (2.31) появляются дополнительные члены, например, в случае последовательно соединенных сопротивления, емкости, самоиндукции

$$U = \left(R + Lp + \frac{1}{Cp}\right)I - Li_0 + \frac{q_0}{Cp} = ZI - Li_0 + \frac{q_0}{Cp},$$

где $Z = R + Lp + \frac{1}{Cp}$ – операторное сопротивление контура.

При расчетах электрических контуров пользуются законами Кирхгофа о сумме токов и напряжений в точках разветвления. Большую роль при решении задач включения имеет формула Дюамеля (см., напр., [4]).

Покажем, например, как можно с помощью формулы Дюамеля рассчитать реакцию электрической цепи, фактически не зная ее параметров, если удалось получить ток $i_1(t)$ – реакцию цепи на единичное напряжение.

Предположим, что электрическая цепь состоит из индуктивности L, сопротивления R и емкости C. Пусть к цепи приложена ЭДС $u(t)$ (электродвижущая сила). Вид электрической цепи изображен на рис. 2.3.

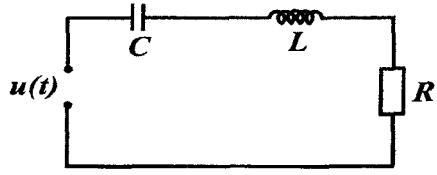


Рис. 2.3

Пусть i – ток в цепи, q – заряд конденсатора. Тогда, как известно, все указанные параметры цепи связаны уравнением

$$Li' + Ri + \frac{q}{C} = U, \quad q' = i.$$

Предположим, что в начальный момент времени $t = 0$, $q(0) = 0$, $i(0) = 0$.

Тогда $q = \int_0^t i(t)dt$ и, следовательно, ток $i(t)$ удовлетворяет интегро-дифференциальному уравнению

$$Li'(t) + Ri(t) + \frac{1}{C}\int_0^t i(t)dt = u(t).$$

Учитывая введенные выше понятия операторного тока и напряжения: $i(t) \to I(p)$, $i'(t) \to pI(p)$, $u(t) \to U(p)$, получаем операторное уравнение электрической цепи

$$LpI + RI + \frac{I}{pC} = U,$$

откуда

$$I = \frac{U(p)}{Lp + R + \frac{1}{pC}} = \frac{U(p)}{Z(p)},$$

где $Z(p) = Lp + R + \frac{1}{pC}$ – операторное сопротивление (см. выше).

Предположим сначала, что в цепь включено постоянное единичное напряжение $u_1(t) = 1$ и $i_1(t)$ – реакция цепи на это напряжение. Тогда

$$u_1(t) = 1 \to \frac{1}{p}. \quad I_1 = \left\{\frac{U(p)}{Z(p)}\right\} = \frac{1}{pZ(p)} \Rightarrow \frac{1}{Z(p)} = pI_1.$$

Стало быть, реакция цепи $i(t)$ на произвольное напряжение $u(t)$ может быть найдена по формуле Дюамеля

$$i(t) = \int_0^t i_1'(\tau)u(t-\tau)d\tau \quad (i(0) = 0)$$

или

$$i(t) = \int_0^t u'(\tau)i_1(t-\tau)d\tau + u(0)i_1(t),$$

если известна реакция электрического контура $i_1(t)$ на единичное напряжение $u_1(t) = 1$.

Вопросы для самоконтроля

1. Преобразование Лапласа. Оригинал и изображение.
2. Основные теоремы операционного исчисления:.
- теоремы единственности и линейности;
- теорема подобия;
- теорема смещения;
- дифференцирование изображения и оригинала;
- интегрирование изображения и оригинала;
- запаздывание оригинала;
- свертка функции, формула Дюамеля;
- теоремы разложения.
3. Изображения основных элементарных функций.
4. Применение операционного исчисления к решению обыкновенных дифференциальных уравнений. Суть операторного метода.
5. Формулы Дюамеля для решения линейных неоднородных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами при нулевых начальных условиях.

ЗАДАЧИ КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ
(10 вариантов)

Задача 1. Изобразить область комплексных чисел, заданную неравенствами.

Вариант №1. $|z-1|\le 1,\quad |z+1|>2.$

Вариант №2. $|z+i|\ge 1,\quad |z|<2.$

Вариант №3. $|z-1|\le 2,\quad \mathrm{Re}\, z>1.$

Вариант № 4. $|z+1|\ge 1,\quad |z+i|\le 1.$

Вариант №5. $|z+1|<1,\quad |z-i|\le 1.$

Вариант №6. $|z+i|\le 2,\quad |z-i|>2.$

Вариант №7. $|z-1-i|\le 1,\quad \mathrm{Im}\, z>1,\quad \mathrm{Re}\, z\ge 1.$

Вариант №8. $|z-1+i|\ge 1,\quad \mathrm{Re}\, z<1,\quad \mathrm{Im}\, z\le -1.$

Вариант №9. $|z-2-i|\le 2,\quad \mathrm{Re}\, z\ge 3,\quad \mathrm{Im}\, z<1.$

Вариант №10. $|z-i|\le 2,\quad 0<\mathrm{Im}\, z<2.$

Задача 2. Выяснить, являются ли функции аналитическими. В случае положительного ответа, найти их производные.

Вариант №1. а) $w=\mathrm{Re}\, z^2-2\bar{z}$; б) $w=e^{3z}$.

Вариант №2. а) $w=z+\mathrm{Im}\, z^2$; б) $w=z^3-2z$.

Вариант №3. а) $w=z^2+z\bar{z}$; б) $w=e^{z^2-2z}$.

Вариант №4. а) $w=3\bar{z}+z\,\mathrm{Re}\, z$; б) $w=(z+2)^2$.

Вариант №5. а) $w=5z-\bar{z}\,\mathrm{Im}\, z$; б) $w=e^{iz}-2z$.

Вариант №6. а) $w=\bar{z}\,\mathrm{Re}\, z-z^2$; б) $w=4z-z^3$.

Вариант №7. а) $w=2\bar{z}^2+z\,\mathrm{Re}\, z$; б) $w=z+e^{-z}$.

Вариант №8. а) $w=z\,\mathrm{Im}\, z+2\bar{z}$; б) $w=3i-z^3$.

Вариант №9. а) $w=2\bar{z}-z^2\,\mathrm{Re}\, z$ б) $w=e^{1-3z}$.

Вариант №10. а) $w=z^2-2\bar{z}\,\mathrm{Im}\, z$; б) $w=(z-2i)^2$.

Задача 3. Восстановить аналитическую в окрестности точки z_0 функцию $f(z)$ по известной действительной части $u(x,y)$ или мнимой части $v(x,y)$ и значению $f(z_0)$.

Вариант №1. $u = x^2 - y^2 + x,$ $f(0) = 0.$

Вариант №2. $u = x^3 - 3xy + 1,$ $f(0) = 1.$

Вариант №3. $u = x^2 - y^2 - 2y,$ $f(0) = 0.$

Вариант № 4. $v = e^{-y}\sin x + y,$ $f(0) = 1.$

Вариант №5. $v = e^x \cos y,$ $f(0) = 1 + i.$

Вариант №6. $u = e^{-y}\cos x,$ $f(0) = 1.$

Вариант №7. $u = y - 2xy,$ $f(0) = 0.$

Вариант №8. $v = 3x^2 y - y^3 - y,$ $f(0) = 0.$

Вариант №9. $v = 2xy + y,$ $f(0) = 0.$

Вариант №10. $v = 3x^2 y - y^3,$ $f(0) = 1.$

Задача 4. Вычислить интеграл от функции комплексного переменного по данной кривой.

Вариант №1. $\int\limits_{AB} \bar{z}^2 dz; \quad AB: \{y = x^2; z_A = 0, z_B = 1 + i\}$

Вариант №2. $\int\limits_{AB} Im\, z^3 dz;$

AB – отрезок прямой, $z_A = 0, z_B = 2 + 2i.$

Вариант №3. $\int\limits_{ABC} |z| dz;$

ABC – ломаная, $z_A = 0, \quad z_B = -1 + i, z_C = 1 + i.$

Вариант №4. $\int\limits_{AB} \bar{z}^2 dz;$

AB – отрезок прямой, $z_A = 0, z_B = 1 + i.$

Вариант №5. $\int\limits_{L} |z| \bar{z} dz; \quad L: \{|z| = 4; Re\, z \geq 0\}.$

Вариант №6. $\int\limits_{L} |z|\, Re\, z^2 dz; \quad L: \{|z| = R; Im\, z \geq 0\}.$

Вариант №7. $\int\limits_{L} z\, Re\, z^2 dz; \quad L: \{|z| = R; \ Im\, z \geq 0\}.$

Вариант №8. $\int\limits_{AB} e^{|z|^2}\, Im\, z dz;$

AB – отрезок прямой, $z_A = 1+i, \quad z_B = 0.$

Вариант №9. $\int\limits_{AB} z\, Re\, z^2 dz;$

AB – отрезок прямой, $z_A = 0, \quad z_B = 1+2i.$

Вариант №10. $\int\limits_{ABC} z\bar{z} dz; \quad AB: \{|z| = 1; \ Re\, z \geq 0, \ Im\, z \geq 0\},$

BC – отрезок, $z_B = 1, \ z_C = 0.$

Задача 5. Вычислить интегралы по интегральным теоремам и формулам Коши или с помощью вычетов.

Вариант №1

$$\oint\limits_{|z|=\frac{1}{2}} \frac{dz}{z\left(z^2+1\right)}.$$

Вариант №2

$$\oint\limits_{|z-1-i|=\frac{5}{4}} \frac{2dz}{z^2(z-1)}.$$

Вариант №3

$$\oint\limits_{|z|=1} \frac{2+\sin z}{z(z+2i)} dz.$$

Вариант №4

$$\oint\limits_{|z-3|=1} \frac{\sin 3z+2}{z^2(z-\pi)} dz.$$

Вариант №5

$$\oint\limits_{\left|z-\frac{1}{2}\right|=1} \frac{e^z+1}{z(z-1)} dz.$$

Вариант №6

$$\oint\limits_{|z-2|=3} \frac{\cos^2 z+1}{z^2-\pi^2} dz.$$

Вариант №7

$$\oint\limits_{|z-6|=3} \frac{\sin^3 z+2}{z^2-4\pi^2} dz.$$

Вариант №8

$$\oint\limits_{\left|z+\frac{3}{2}\right|=1} \frac{\cos^2 z+3}{2z^2+\pi z} dz.$$

Вариант №9

$$\oint\limits_{|z+1|=2} \frac{\sin^2 z-3}{z^2+2\pi z} dz.$$

Вариант №10

$$\oint\limits_{|z|=2} \frac{z^2+\sin z+2}{z^2+\pi z} dz$$

Задача 6. Найти оригинал по заданному изображению.

Вариант №1. а) $\frac{4p-3}{p^2-3p}$; б) $\frac{p+4}{p^2+4p+5}$.

Вариант №2. а) $\frac{p}{p^2-3p+2}$; б) $\frac{2p-3}{p^2-4p+5}$.

Вариант №3. а) $\frac{p+8}{p^2+p-2}$; б) $\frac{1-2p}{p^2+2p+5}$.

Вариант №4. а) $\frac{5p-1}{p^2-p-2}$.; б) $\frac{p-2}{p^2+4p+8}$.

Вариант №5. а) $\frac{2p+5}{p^2+3p+2}$; б) $\frac{2p-5}{p^2+2p+2}$.

Вариант №6. а) $\frac{p+7}{p^2-p-6}$; б) $\frac{3p-1}{p^2-2p+2}$.

Вариант №7. а) $\frac{3p-1}{p^2+p-6}$; б) $\frac{2p+3}{p^2-6p+10}$.

Вариант №8. а) $\frac{p}{p^2-5p+6}$; б) $\frac{2-p}{p^2+6p+10}$.

Вариант №9. а) $\frac{2p+3}{p^2+5p+6}$; б) $\frac{5p+2}{p^2-4p+8}$.

Вариант №10. а) $\frac{5p+8}{p^2+2p-8}$; б) $\frac{3-4p}{p^2-2p+5}$.

Задача 7. Операционным методом решить задачу Коши.

Вариант №1

$y'' + y = 6e^{-t}$,
$y(0) = 3, y'(0) = 1.$

Вариант №2

$y'' - y' = t^2$,
$y(0) = 0, y'(0) = 1.$

Вариант №3

$y'' + y' = t^2 + 2t$,
$y(0) = 0, y'(0) = -2.$

Вариант №4

$y'' - y = cos3t$,
$y(0) = 0, y'(0) = 1.$

Вариант №5

$$y'' + y' + y = 7e^{2t},$$
$$y(0) = 1, y'(0) = 4.$$

Вариант №6

$$y'' + y' - 2y = -2(t+1),$$
$$y(0) = 1, y'(0) = 1.$$

Вариант №7

$$y'' - 9y = \sin t - \cos t,$$
$$y(0) = -3, y'(0) = 2.$$

Вариант №8

$$y'' + 2y' = 2 + e^{t},$$
$$y(0) = 1, y'(0) = 2.$$

Вариант №9

$$2y'' - y' = \sin 3t,$$
$$y(0) = 2, y'(0) = 1.$$

Вариант №10

$$y'' + 4y = \sin 2t,$$
$$y(0) = 0, y'(0) = 1.$$

Задача 8. Решить систему дифференциальных уравнений операторным методом.

Вариант №1

$$\begin{cases} \dot{x} = x + 3y + 2, \\ \dot{y} = x - y + 1; \end{cases}$$
$$x(0) = -1, y(0) = 2.$$

Вариант №2

$$\begin{cases} \dot{x} = -x + 3y + 1, \\ \dot{y} = x + y; \end{cases}$$
$$x(0) = 1, y(0) = 2.$$

Вариант №3

$$\begin{cases} \dot{x} = x + 4y, \\ \dot{y} = 2x - y + 9; \end{cases}$$
$$x(0) = 1, y(0) = 0.$$

Вариант №4

$$\begin{cases} \dot{x} = x + 2y + 1, \\ \dot{y} = 4x - y; \end{cases}$$
$$x(0) = 0, y(0) = 1.$$

Вариант №5

$$\begin{cases} \dot{x} = 2x + 5y, \\ \dot{y} = x - 2y + 2; \end{cases}$$
$$x(0) = 1, y(0) = 1.$$

Вариант №6

$$\begin{cases} \dot{x} = -2x + 5y + 1, \\ \dot{y} = x + 2y + 1; \end{cases}$$
$$x(0) = 0, y(0) = 2.$$

Вариант №7

$$\begin{cases} \dot{x} = 3x + y, \\ \dot{y} = -5x - 3y + 2; \end{cases}$$
$$x(0) = 2, y(0) = 0.$$

Вариант №8

$$\begin{cases} \dot{x} = -3x - 4y + 1, \\ \dot{y} = 2x + 3y; \end{cases}$$
$$x(0) = 0, y(0) = 2.$$

Вариант №9

$$\begin{cases} \dot{x} = -2x + 6y + 1, \\ \dot{y} = 2x + 2; \end{cases}$$
$$x(0) = 0, y(0) = 1.$$

Вариант №10

$$\begin{cases} \dot{x} = 2x + 3y + 1, \\ \dot{y} = 4x - 2y; \end{cases}$$
$$x(0) = -1, y(0) = 0.$$

Библиографический список

1. Будак Б.М., Фомин С.В. Кратные интегралы и ряды. – М.: Наука, 1967. –608с.
2. Бугров Я.С., Никольский С.М. Высшая математика. Дифференциальные уравнения. Кратные интегралы. Ряды. Функции комплексного переменного. – М.:Наука, 1985. – 464 с.
3. Краснов М.Л., Киселев А.И., Макаренко Г.И. Функции комплексного переменного. Операционное исчисление. Теория устойчивости. – М.: Наука, 1981. – 302с.
4. Лаврентьев М.А. Шабат Б.В. Методы теории функций комплексного переменного. –М.:Наука, 1965. – 716с.
5. Маркушевич А.И. Краткий курс теории аналитических функций.–М.: Наука, 1978. – 416с.
6. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисление. – М.:Наука, 1985.–Т.2. –560 с.
7. Смирнов В.И. Курс высшей математики. –М.:Наука, 1958. – Т.3. – 675с.
8. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. –М.:Наука, 1970. –Т.2.– 800 с., Т.3.– 656с.
9. Чудесенко В.Ф. Сборник задач по специальным курсам высшей математики. –М.:Высшая школа, 1983. –112 с.
10. Сборник задач по математике для втузов. Специальные разделы математического анализа/ Под ред. А.В. Ефимова, Б.Г. Демидовича. –М.:Наука, 1981. –Т.2.–368 с.
11. Толстых О.Д. Попова Л.Н. Комплексные числа. Основы линейной алгебры. Системы линейных уравнений: Учебное пособие.-Иркутск:ИрГУПС,2003.-109с.
12. Багдуева Х.Н., Толстых О.Д. Дифференциальное исчисление функции одной переменной: Учебное пособие.-Иркутск:ИрГУПС,2003. –73с.
13. Петрякова Е.А., Синюкович Ю.И. Кратные, криволинейные и поверхностные интегралы. Элементы теории поля: Учебное пособие.-Иркутск:ИрГУПС,2003. –59с.

Толстых Ольга Дмитриевна

Байкова Людмила Анатольевна

Теория функций комплексного переменного. Операционное исчисление

Учебное пособие
для студентов заочного отделения
всех специальностей

Редактор Л. И. Рубанова
Компьютерная верстка Л. А. Байкова

Подписано в печать 15.12.03
Формат 60×84/16. Печать офсетная.
Усл. печ. л. – 6,2. Уч. – изд. л. – 6,4.
План 2003 г.
Заказ 1275

Глазковская типография, г. Иркутск, ул. Гоголя, 53