Министерство транспорта Российской Федерации
Федеральное агентство железнодорожного транспорта
Государственное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Дальневосточный государственный
университет путей сообщения»

Кафедра «Высшая математика»

Е.В. Кузнецова

# ПРЕДЕЛ И НЕПРЕРЫВНОСТЬ

Сборник задач

3-е издание, исправленное и дополненное

Хабаровск
Издательство ДВГУПС
2011

УДК 517.1(075.8)
ББК В16я73
К 891

Рецензенты:

Кафедра «Информатики и информационных технологий»
Дальневосточного государственного гуманитарного университета
(заведующий кафедрой кандидат физико - математических наук,
доцент *В.А. Казинец*)

Профессор кафедры «Прикладная математика и информатика»,
Хабаровского государственного технического университета
доктор физико-математических наук,
*А.Г. Зарубин*

**Кузнецова, Е.В.**
**К 891** Предел и непрерывность: Сборник задач: 3-е изд., испр. и доп. / Е.В. Кузнецова. – Хабаровск: Изд-во ДВГУПС, 2011. — 80 с.

Данное пособие соответствует государственному образовательному стандарту курса математического анализа по разделам: предел и непрерывность функции одного переменного.

Большая часть задач в пособии сопровождается решениями, поэтому оно может быть полезно при самостоятельном изучении предмета.

Предназначено для студентов специольности «Информационные системы и технологии» дневной формы обучения.

**УДК 517.1(075.8)**
**ББК В16я73**

# ВВЕДЕНИЕ

Предлагаемое пособие «Предел и непрерывность» предназначено для студентов специальности «Информационные системы и технологии».

Задачи ставят целью выяснение смысла основных понятий анализа — предела и непрерывности функции одного переменного. Решение задач представляет для начинающих значительные трудности. Поэтому пособие начинается с решения типовых примеров.

# ЧАСТЬ I. ПОНЯТИЕ ФУНКЦИИ. СВОЙСТВА ФУНКЦИЙ. ТЕХНИКА НАХОЖДЕНИЯ ПРЕДЕЛОВ ФУНКЦИЙ

## §1. Элементарные преобразования графиков

Основными элементарными функциями считаются: степенная функция $y = x^\alpha$, показательная функция $y = a^x$, $a > 0$, $a \neq 1$, логарифмическая функция $y = \log_a x$, $a > 0$, $a \neq 1$, тригонометрические функции $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \operatorname{tg} x$, $y = \operatorname{ctg} x$ и обратные тригонометрические функции $y = \arcsin x$, $y = \arccos x$, $y = \operatorname{arctg} x$, $y = \operatorname{arcctg} x$.

*Элементарной* называется функция, полученная из основных элементарных функций конечным числом их композиций и арифметических операций.

Рассмотрим вопрос построения графиков функций с помощью элементарных преобразований. Допустим, что построен график функции $y = f(x)$, $x \in X$. В следующей таблице описано, как изменяется этот график при определенном преобразовании функции $f(x)$ или ее аргумента.

| Функция | Преобразование, которое следует провести с графиком $y = f(x)$ на плоскости $XOY$. |
|---|---|
| $f(x) + A,\ A \neq 0$ | Сдвиг вверх по оси $Oy$ графика функции $y = f(x)$ на $A$ единиц, если $A > 0$, и сдвиг вниз на $\lvert A\rvert$, если $A < 0$. |
| $f(x - a),\ a \neq 0$ | Сдвиг вправо по оси $Ox$ графика функции $y = f(x)$ на $a$ единиц, если $a > 0$, и сдвиг влево на $\lvert a\rvert$ единиц, если $a < 0$. |
| $k \cdot f(x),\ k > 0,$ $k \neq 1$ | Растяжение графика функции $y = f(x)$ вдоль оси $Oy$ относительно оси $Ox$ в $k$ раз, если $k > 1$, и сжатие вдоль оси $Oy$ в $\frac{1}{k}$ раз, если $0 < k < 1$. |
| $f(k \cdot x),\ k > 0,$ $k \neq 1$ | Сжатие графика функции $y = f(x)$ вдоль оси $Ox$ относительно оси $Oy$ в $k$ раз, если $k > 1$, и растяжение вдоль оси $Ox$ в $\frac{1}{k}$ раз, если $0 < k < 1$. |
| $-f(x)$ | Симметричное отображение графика функции $y = f(x)$ относительно оси $Ox$. |
| $\lvert f(x)\rvert$ | Часть графика $y = f(x)$, расположенная ниже оси $Ox$, симметрично отображается относительно этой оси, остальная часть остается без изменения. |

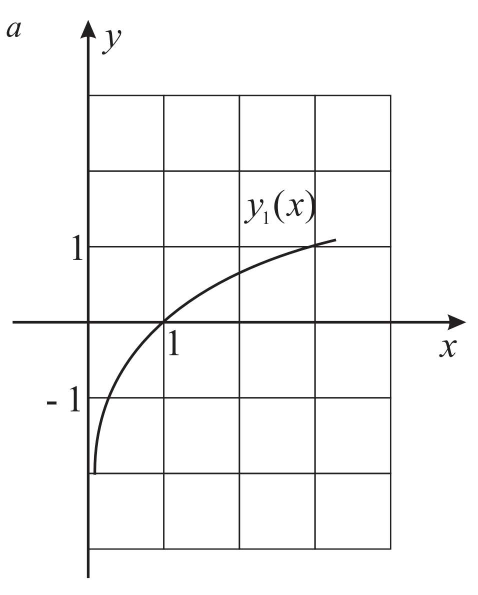
| Функция | Преобразование, которое следует провести с графиком $y = f(x)$ на плоскости $XOY$. |
|---|---|
| $f(-x)$ | Симметричное отображение графика функции $y = f(x)$ относительно оси $Oy$. |
| $f(\lvert x \rvert)$ | Стереть часть графика функции $y = f(x)$, лежащую слева от оси $Oy$; оставить часть графика $y = f(x)$, лежащую справа от оси $Oy$ и на ней; часть графика функции $y = f(x)$, расположенную в области $x \geq 0$, симметрично отобразить относительно оси $Oy$ в область $x < 0$. |

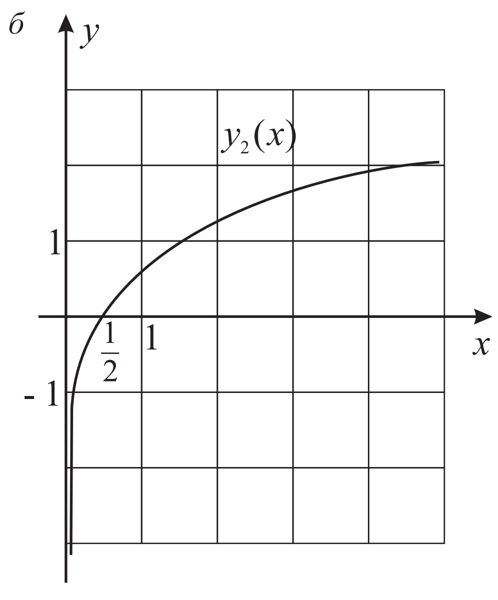
**Пример 1.** Построим эскиз графика функции

$$y(x) = \log_3(1 - 2x).$$

Для этого нужно выполнить следующие построения:

1. $y_1(x) = \log_3 x$ (рис. 1 а);
2. $y_2(x) = \log_3(2 \cdot x)$ — сжатие графика функции $y_1(x)$ вдоль оси $Ox$ относительно оси $Oy$ в два раза (рис. 1 б);
3. $y_3(x) = \log_3(-2 \cdot x)$ — симметричное отображение графика функции $y_2(x)$ относительно оси $Oy$ (рис. 1 в);
4. $y_4(x) = \log_3\left[-2 \cdot \left(x - \frac{1}{2}\right)\right] \equiv y(x)$ — сдвиг графика функции $y_3(x)$ на $\frac{1}{2}$ вправо вдоль оси $Ox$ (рис. 1 г).



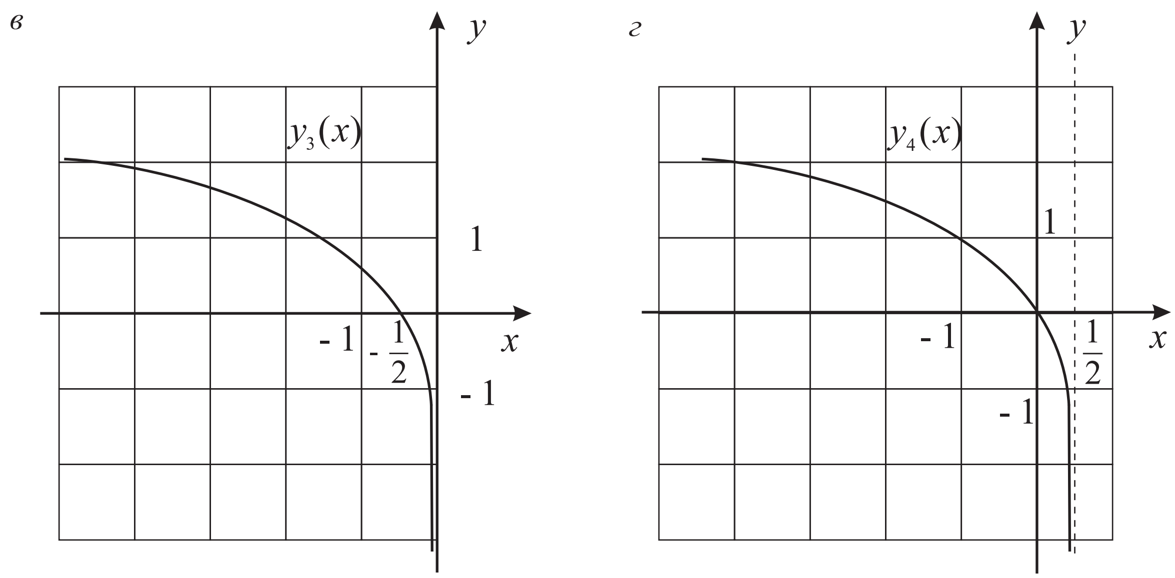



Рис. 1

**Пример 2.** Построим эскиз графика функции

$$y(x) = \log_{\frac{1}{2}} \left| 1 - \frac{1}{3} ||x| - 1| \right|.$$

Для этого нужно выполнить следующие построения:

1. $y_1(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$ (рис. 2 а);

2. $y_2(x) = \log_{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{3} \cdot x\right)$ — растяжение графика функции $y_1(x)$ вдоль оси $Ox$ относительно оси $Oy$ в три раза (рис. 2 б);

3. $y_3(x) = \log_{\frac{1}{2}} \left|\frac{1}{3} \cdot x\right|$ — стереть часть графика функции $y_2(x)$, лежащую слева от оси $Oy$; оставить часть графика функции $y_2(x)$, лежащую справа от оси $Oy$ и на ней; часть графика функции $y_2(x)$, расположенную в области $x \geq 0$, симметрично отобразить относительно оси $Oy$ в область $x < 0$ (рис. 2 в);

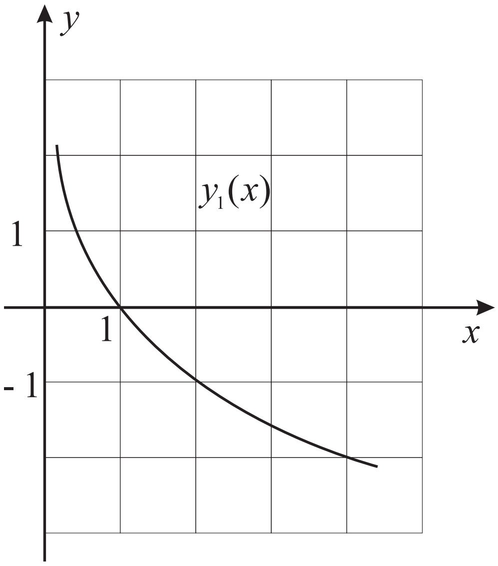
4. $y_4(x) = \log_{\frac{1}{2}} \left|\frac{1}{3} \cdot (x - 3)\right| \equiv \log_{\frac{1}{2}} \left|\frac{1}{3} \cdot x - 1\right| \equiv \log_{\frac{1}{2}} \left|1 - \frac{1}{3} \cdot x\right|$ (рис. 2 г);

5. $y_5(x) = \log_{\frac{1}{2}} \left|1 - \frac{1}{3} \cdot |x|\right|$ (рис. 2 д);

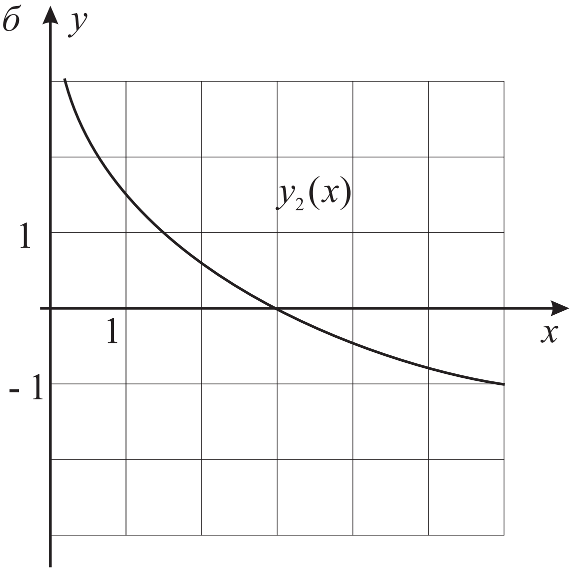
6. $y_6(x) = \log_{\frac{1}{2}} \left|1 - \frac{1}{3} \cdot |x - 1|\right|$ (рис. 2 е);

7. $y_7(x) = \log_{\frac{1}{2}} \left|1 - \frac{1}{3} \cdot ||x| - 1|\right| \equiv y(x)$ (рис. 2 ж).

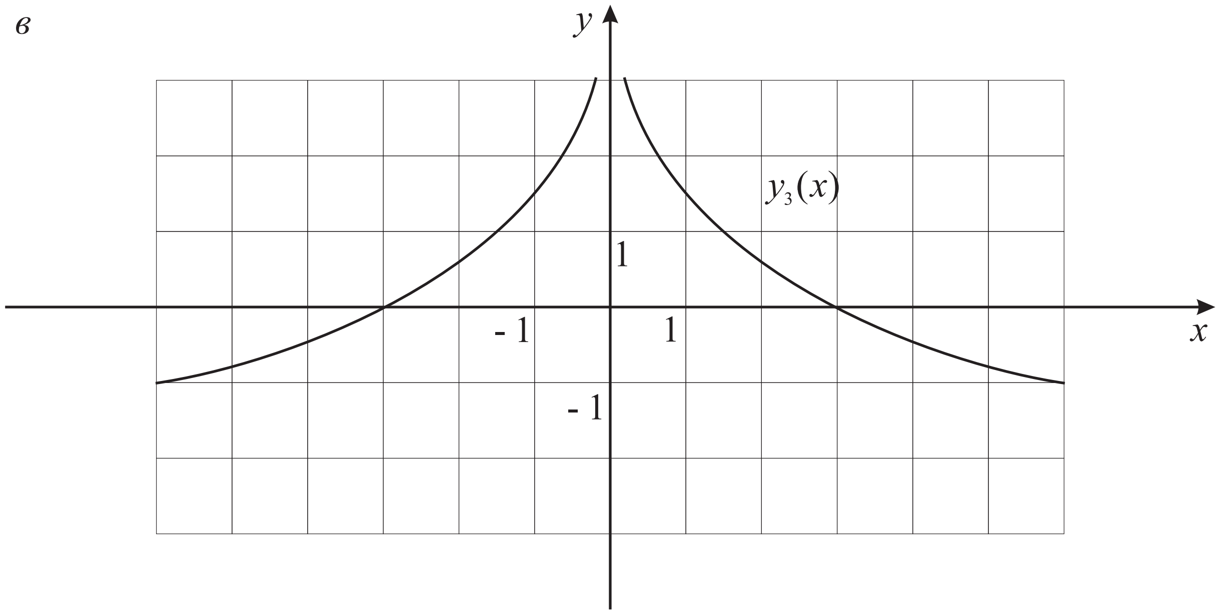
*а*



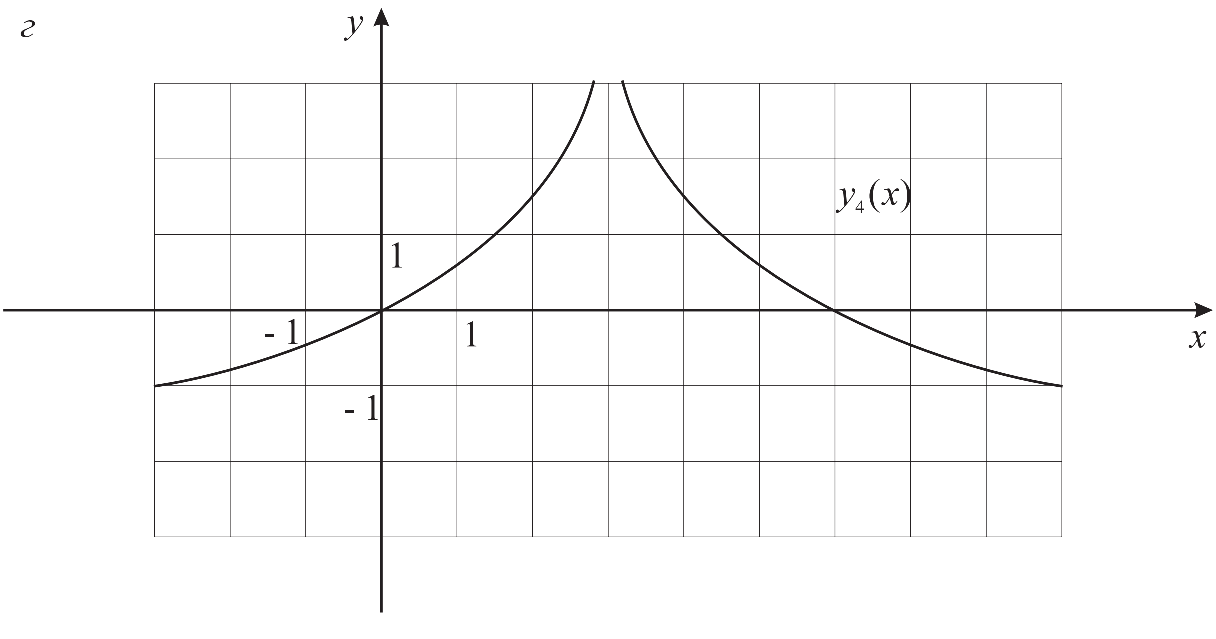

*б*

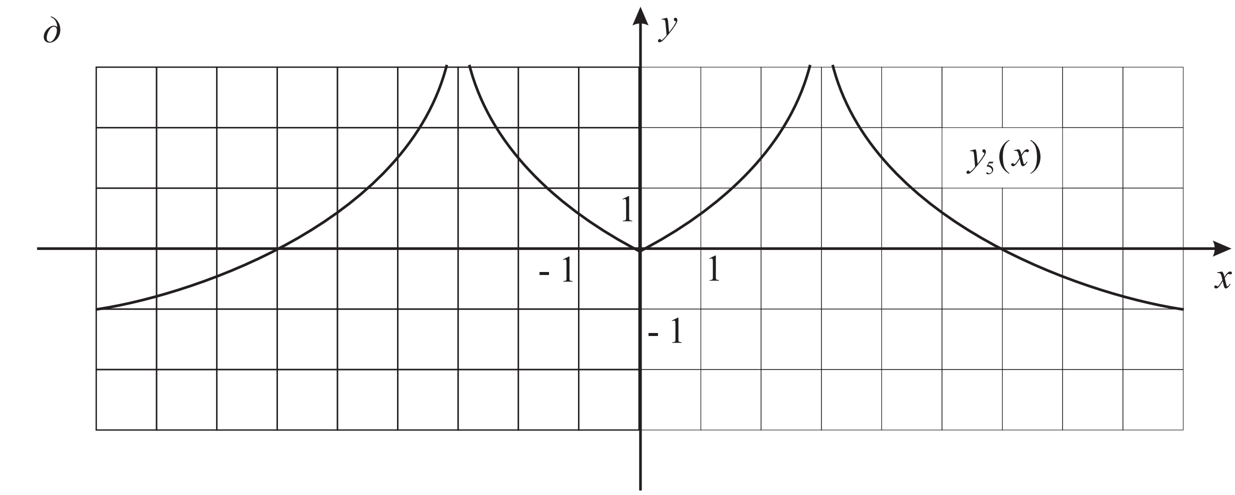


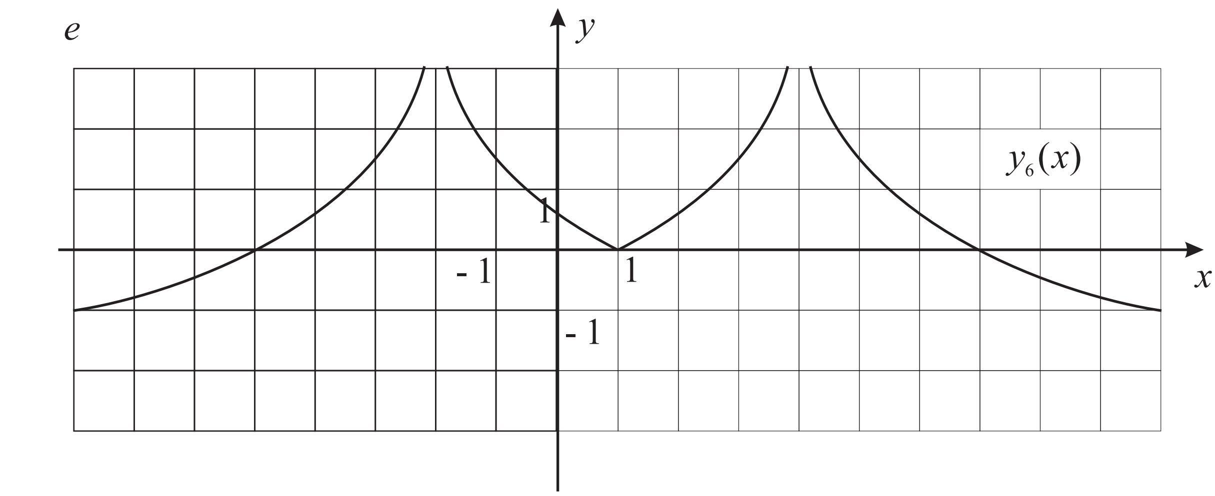

*в*




*г*





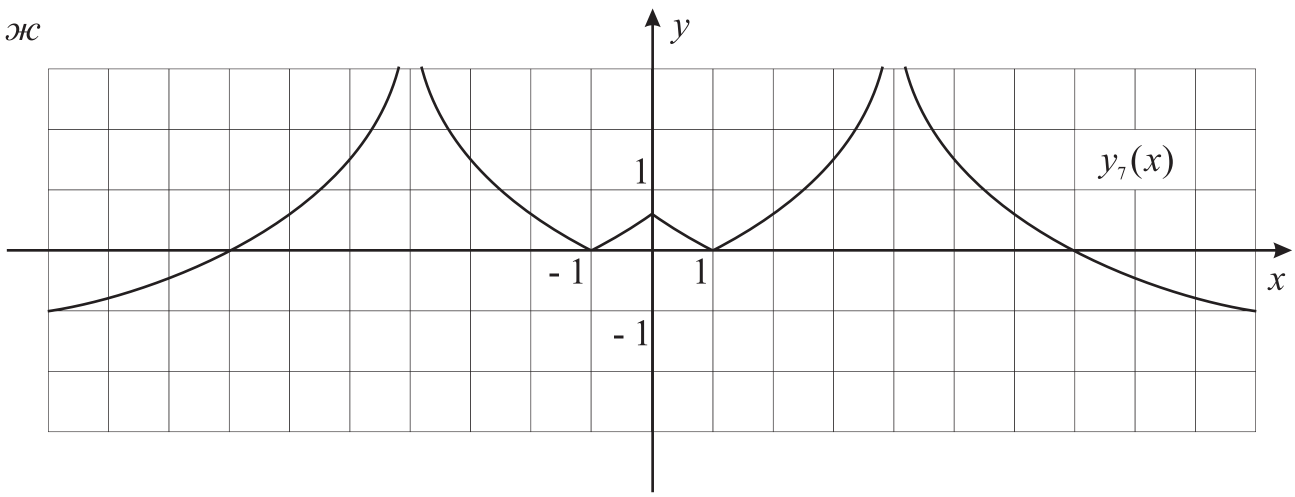




Рис. 2

**Пример 3.** Построим эскиз графика функции

$$y(x) = 2\sin\left(3x + \frac{\pi}{4}\right) + 1.$$

Для этого нужно выполнить следующие построения:

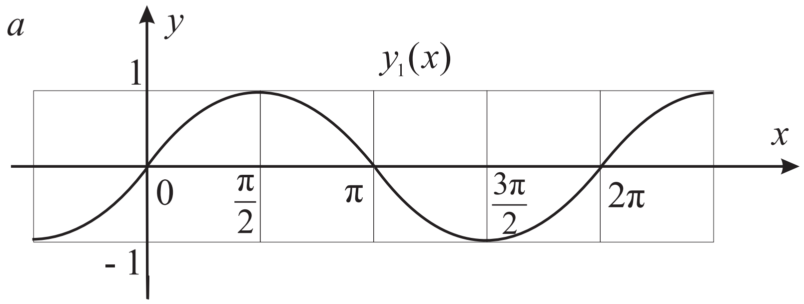
1. $y_1(x) = \sin x$ (рис. 3 а);

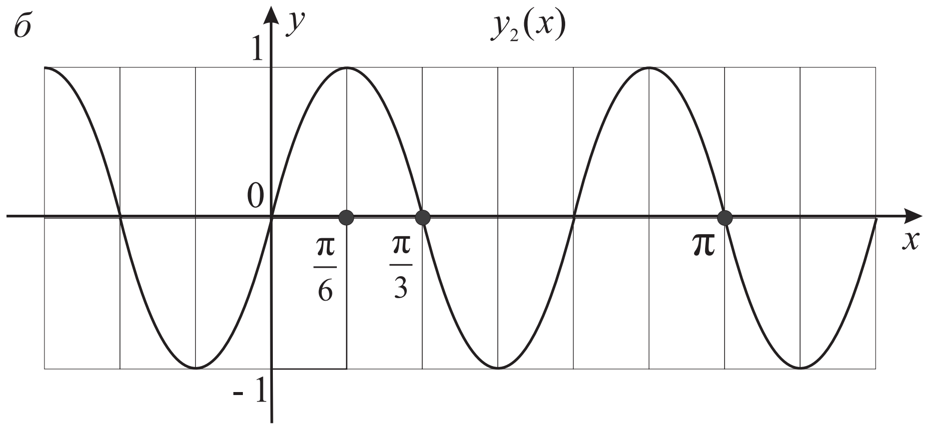
2. $y_2(x) = \sin(3 \cdot x)$ — сжатие графика функции $y_1(x)$ вдоль оси $Ox$ относительно оси $Oy$ в три раза (рис. 3 б);

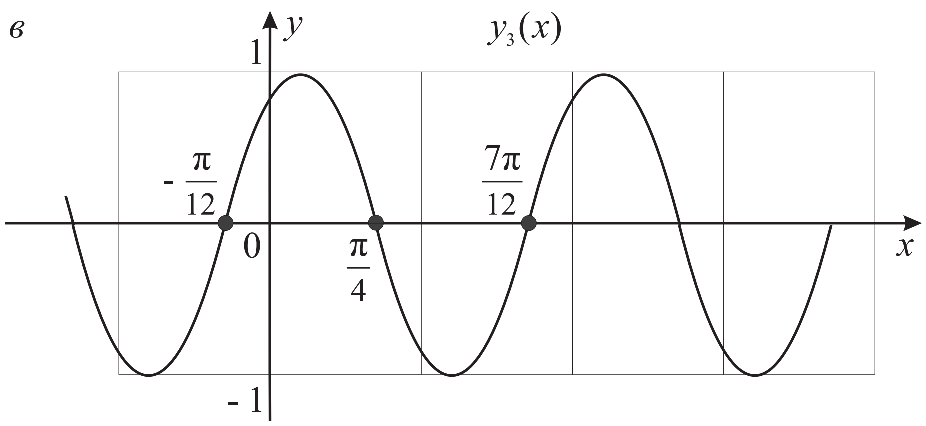
3. $y_3(x) = \sin\left[3\left(x + \frac{\pi}{12}\right)\right] \equiv \sin\left(3x + \frac{\pi}{4}\right)$ — сдвиг графика функции $y_2(x)$ на $\frac{\pi}{12}$ влево вдоль оси $Ox$ (рис. 3 в);

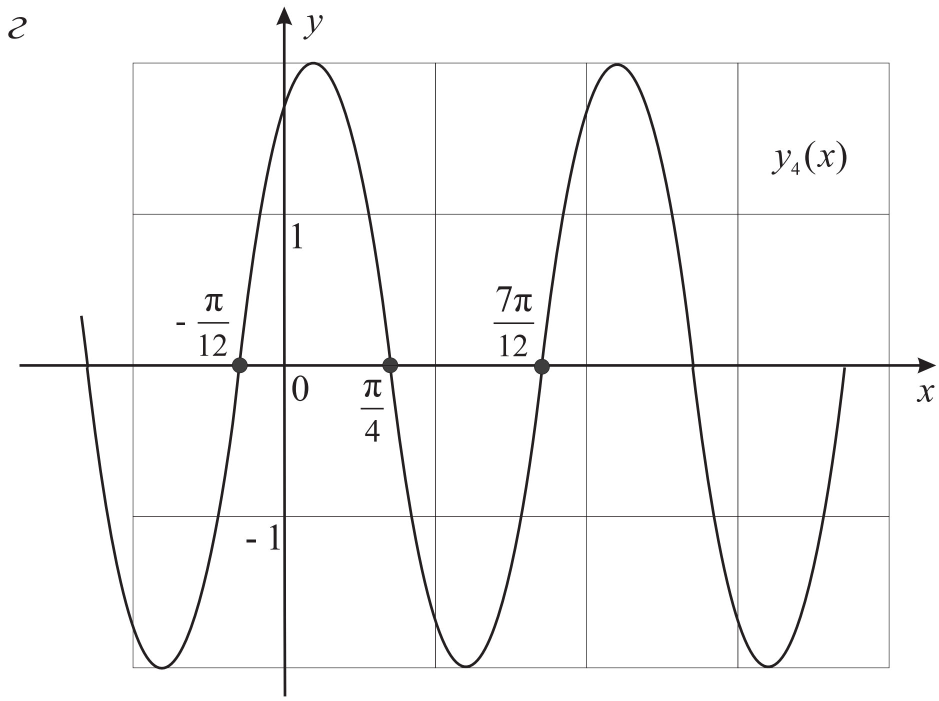
4. $y_4(x) = 2\sin\left(3x + \frac{\pi}{4}\right)$ — растяжение графика функции $y_3(x)$ вдоль оси $Oy$ относительно оси $Ox$ в два раза (рис. 3 г);

5. $y_5(x) = 2\sin\left(3x + \frac{\pi}{4}\right) + 1 \equiv y(x)$ — сдвиг графика функции $y_4(x)$ вверх на единицу (рис. 3 д).





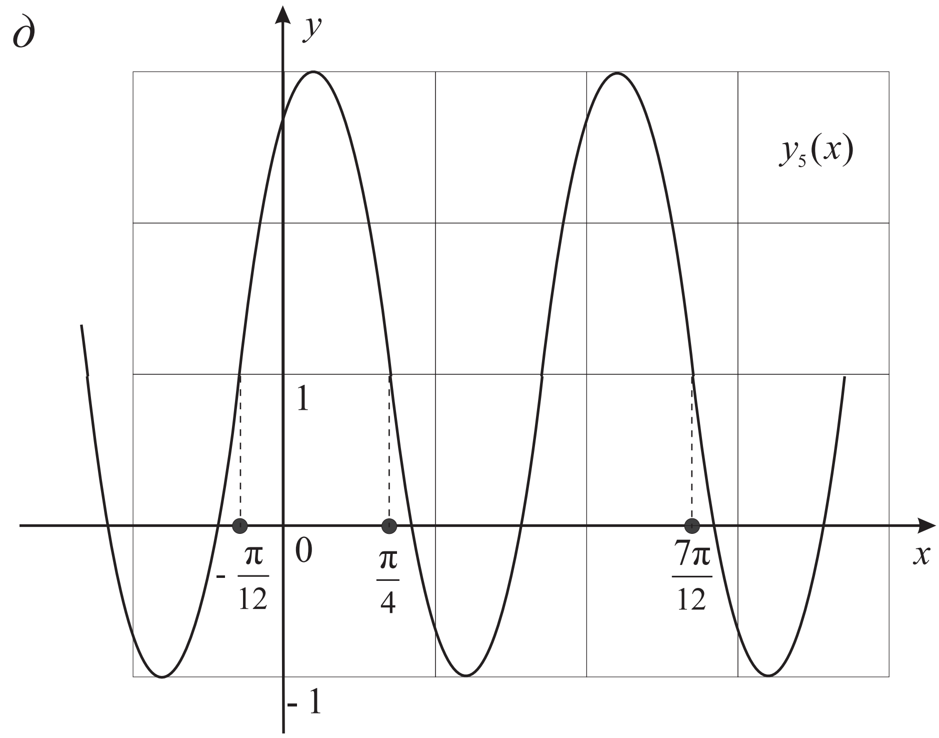




Рис. 3

## §2. Область определения функции. Четность, нечетность функции

**Определение 1.** Если каждому значению переменной $x$ из множества $X$ ставится в соответствие по некоторому закону единственное число $y$ из множества $Y$, то говорят, что *на множестве* $X$ *задана функция* $y = y(x)$

*или* $y = f(x)$. При этом переменная $x$ называется *аргументом* или *независимой переменной*, множество $X$ — *областью определения функции*, число $y$ — *значением функции*, множество $Y$ — *множеством значений функции.*

Области определения основных элементарных функций приведены в следующей таблице.

| Функция | $\frac{f(x)}{g(x)}$ | $\sqrt[2n]{f(x)}$ | $\ln f(x)$ | $\operatorname{tg} f(x)$ |
|---|---|---|---|---|
| Область определения | $g(x) \neq 0$ | $f(x) \geq 0$ | $f(x) > 0$ | $f(x) \neq \frac{\pi}{2} + \pi k,\ k \in Z$ |

| Функция | $\operatorname{ctg} f(x)$ | $\arcsin f(x)$ | $\arccos f(x)$ |
|---|---|---|---|
| Область определения | $f(x) \neq \pi k,\ k \in Z$ | $-1 \leq f(x) \leq 1$ | $-1 \leq f(x) \leq 1$ |

**Пример 1.** Найти область определения функции

$$y(x) = \frac{3x-1}{2x^2-3x-1}.$$

**Решение.** При каждом значении $x$ из интервала $(-\infty; +\infty)$ числитель и знаменатель дроби являются действительными числами. Их отношение есть также действительное число при всех значениях $x$, кроме $x$, при которых знаменатель $2x^2-3x-1=0$, то есть $x = \frac{3\pm\sqrt{17}}{4}$.

**Ответ.** $x \in \left(-\infty; \frac{3-\sqrt{17}}{4}\right) \cup \left(\frac{3-\sqrt{17}}{4}; \frac{3+\sqrt{17}}{4}\right) \cup \left(\frac{3+\sqrt{17}}{4}; +\infty\right)$.

**Пример 2.** Найти область определения функции

$$y(x) = \frac{1}{\sqrt{|x|+x}}.$$

**Решение.** Выражение $\sqrt{|x|+x}$ имеет смысл при $|x|+x \geq 0$. Учитывая, что выражение $\sqrt{|x|+x}$ является знаменателем, нужно, чтобы $\sqrt{|x|+x} \neq 0$. Таким образом, область определения исходной функции определяется из решения неравенства

$$|x|+x > 0.$$

Решая данное неравенство, получим

$$|x|+x > 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \geq 0 \\ x+x > 0 \end{cases} \\ \begin{cases} x < 0 \\ -x+x > 0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x > 0 \\ x \in \varnothing \end{array}\right. \Leftrightarrow x > 0.$$

**Ответ.** $x > 0$.

**Пример 3.** Найти область определения функции

$$y(x) = \sqrt{9 - x^2} + \lg \frac{x+1}{x-2}.$$

**Решение.** Выражение $\sqrt{9-x^2}$ имеет смысл при $9-x^2 \geq 0$, а выражение $\lg \frac{x+1}{x-2}$ — при $\frac{x+1}{x-2} > 0$ и $x - 2 \neq 0$. Таким образом, область определения исходной функции определяется системой

$$\begin{cases} 9 - x^2 \geq 0 \\ \frac{x+1}{x-2} > 0 \\ x - 2 \neq 0. \end{cases}$$

Решая ее, найдем, что $x \in [-3; -1) \cup (2; 3]$.

**Ответ.** $x \in [-3; -1) \cup (2; 3]$.

**Пример 4.** Найти область определения функции

$$y(x) = \arccos \frac{2x-5}{3x+8}.$$

**Решение.** Область определения функции $\arccos f(x)$ задается двойным неравенством $-1 \leq f(x) \leq 1$ или $|f(x)| \leq 1$. Следовательно, нахождение области определения исходной функции сводится к решению неравенства

$$\left| \frac{2x-5}{3x+8} \right| \leq 1.$$

Возводя в квадрат, получим эквивалентное неравенство

$$\frac{(2x-5)^2}{(3x+8)^2} \leq 1,$$

или

$$\begin{cases} (2x-5)^2 \leq (3x+8)^2 \\ 3x + 8 \neq 0. \end{cases}$$

Решая полученную систему, найдем, что $x \in (-\infty; -13] \cup \left[-\frac{3}{5}; +\infty\right)$.

**Ответ.** $x \in (-\infty; -13] \cup \left[-\frac{3}{5}; +\infty\right)$.

**Определение 2.** Функция $y = f(x)$ называется *четной* на множестве $X$, если:

1. для любого $x \in X$ следует, что $-x \in X$, то есть множество $X$, на котором задана функция, симметрично относительно начала координат;

2. для всех $x \in X$ имеет место соотношение: $f(-x) = f(x)$.

**Определение 3.** Функция $y = f(x)$ называется *нечетной* на множестве $X$, если:

1. для любого $x \in X$ следует, что $-x \in X$, то есть множество $X$, на котором задана функция, симметрично относительно начала координат;
2. для всех $x \in X$ имеет место соотношение: $f(-x) = -f(x)$.

**Пример 5.** Исследовать на четность и нечетность функцию

$$y(x) = \sqrt{1 - x^2}.$$

**Решение.** Функция $y(x) = \sqrt{1 - x^2}$ определена на множестве $1 - x^2 \geq 0$, то есть на множестве $|x| \leq 1$, которое симметрично относительно начала координат. Далее,

$$y(-x) = \sqrt{1 - (-x)^2} = \sqrt{1 - x^2} = y(x).$$

Таким образом, функция $y(x) = \sqrt{1 - x^2}$ является четной.

**Пример 6.** Исследовать на четность и нечетность функцию

$$y(x) = x^{2n+1} + 3.$$

**Решение.** Функция $y(x) = x^{2n+1}+3$ определена на множестве $x \in (-\infty; +\infty)$, которое симметрично относительно начала координат. Далее,

$$y(-x) = (-x)^{2n+1} + 3 = -x^{2n+1} + 3 \neq y(x)$$

и

$$y(-x) = -x^{2n+1} + 3 = -(x^{2n+1} - 3) \neq -y(x).$$

Таким образом, функция $y(x) = x^{2n+1} + 3$ является ни четной, ни нечетной, то есть является функцией общего вида.

**Пример 7.** Исследовать на четность и нечетность функцию

$$y(x) = \frac{1}{\sqrt{x - 1}}.$$

**Решение.** Функция $y(x) = \frac{1}{\sqrt{x-1}}$ определена на множестве $x - 1 > 0$, то есть на множестве $x > 1$, которое несимметрично относительно начала координат. Поэтому, функция $y(x) = \frac{1}{\sqrt{x-1}}$ является ни четной, ни нечетной, то есть является функцией общего вида.

**Пример 8.** Исследовать на четность и нечетность функцию

$$y(x) = \frac{x^3 + \sin x}{1 - x^4}.$$

**Решение.** Функция $y(x) = \frac{x^3+\sin x}{1-x^4}$ определена на множестве $x \in (-\infty; +\infty)$, $x \neq \pm 1$, которое симметрично относительно начала координат. Далее,

$$y(-x) = \frac{(-x)^3 + \sin(-x)}{1-(-x)^4} = \frac{-x^3 - \sin x}{1-x^4} = -\frac{x^3 + \sin x}{1-x^4} = -y(x).$$

Таким образом, функция $y(x) = \frac{x^3+\sin x}{1-x^4}$ является нечетной.

## §3. Предел числовой последовательности, дробно-рациональных и иррациональных функций

Рассмотрим частное $\frac{f(x)}{g(x)}$ и предположим, что обе функции одновременно стремятся к нулю при $x \to x_0$, то есть

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} g(x) = 0.$$

О пределе этого отношения ничего определенного сказать нельзя, как это показывают конкретные примеры:

$$\text{если } f(x) = \frac{1}{x},\ g(x) = \frac{1}{x^2},\ \text{то } \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{x} = \lim_{x\to\infty} x = \infty;$$

$$\text{если } f(x) = \frac{1}{x^2},\ g(x) = \frac{1}{x},\ \text{то } \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{x}{x^2} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0;$$

$$\text{если } f(x) = \frac{a}{x},\ g(x) = \frac{1}{x},\ \text{то } \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{ax}{x} = \lim_{x\to\infty} a = a;$$

$$\text{если } f(n) = \frac{(-1)^n}{n},\ g(n) = \frac{1}{n},\ \text{то } \lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = \lim_{n\to\infty} \frac{(-1)^n n}{n} = \lim_{n\to\infty} (-1)^n \text{ и}$$

этот предел не существует.

Таким образом, для нахождения предела $\frac{f(x)}{g(x)}$ недостаточно знать, что $f(x) \to 0$, $g(x) \to 0$ при $x \to x_0$.

**Определение 1.** Говорят, что выражение $\frac{f(x)}{g(x)}$, если $f(x) \to 0$, $g(x) \to 0$ при $x \to x_0$ представляет собой *неопределенность вида* $\frac{0}{0}$.

Аналогично можно ввести понятия неопределенностей вида

$$\frac{\infty}{\infty},\ 0\cdot\infty,\ \infty - \infty,\ 1^\infty,\ \infty^0,\ 0^0.$$

В этих случаях приходится, учитывая закон изменения функций $f(x)$ и $g(x)$, непосредственно исследовать интересующее нас выражение. Подобное исследование получило название *раскрытие неопределенности.*

**Рассмотрим основные неопределенности.**

**1. Неопределенность типа $\frac{0}{0}$.**

**Правило 1.** Если числитель и знаменатель дроби представляют собой многочлены, то нужно их разложить на множители.

**Пример 1.** Вычислить предел

$$\lim_{x\to -1}\frac{x^2-1}{x^2-x-2}=\left|\frac{0}{0}\right|.$$

**Решение.** Разложим числитель и знаменатель на множители. Получим

$$\lim_{x\to -1}\frac{x^2-1}{x^2-x-2}=\left|\frac{0}{0}\right|=\lim_{x\to -1}\frac{(x-1)(x+1)}{(x+1)(x-2)}=$$

$$=\lim_{x\to -1}\frac{x-1}{x-2}=\left|\frac{-2}{-3}\right|=\frac{2}{3}.$$

**Пример 2.** Вычислить предел

$$\lim_{x\to \frac{4}{3}}\frac{6x^2-5x-4}{3x^2+17x-28}=\left|\frac{0}{0}\right|.$$

**Решение.** Разложим числитель и знаменатель на множители:

$$\lim_{x\to \frac{4}{3}}\frac{6x^2-5x-4}{3x^2+17x-28}=\left|\frac{0}{0}\right|=\lim_{x\to \frac{4}{3}}\frac{6\left(x+\frac{1}{2}\right)\left(x-\frac{4}{3}\right)}{3\left(x+7\right)\left(x-\frac{4}{3}\right)}=$$

$$=\lim_{x\to \frac{4}{3}}\frac{2\left(x+\frac{1}{2}\right)}{x+7}=\left|\frac{\frac{11}{3}}{\frac{25}{3}}\right|=\frac{11}{25}.$$

**Пример 3.** Вычислить предел

$$\lim_{x\to -\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^2 x-\sin x-2}{\sin^2 x-1}=\left|\frac{0}{0}\right|.$$

**Решение.** Разложим числитель и знаменатель на множители:

$$\lim_{x\to -\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^2 x-\sin x-2}{\sin^2 x-1}=\left|\frac{0}{0}\right|=\lim_{x\to -\frac{\pi}{2}}\frac{(\sin x-2)(\sin x+1)}{(\sin x+1)(\sin x-1)}=$$

$$=\lim_{x\to -\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x-2}{\sin x-1}=\left|\frac{-3}{-2}\right|=\frac{3}{2}.$$

**Правило 2.** Если числитель или знаменатель дроби (или оба вместе) представляют собой иррациональности, то нужно избавиться от иррациональности надлежащим образом, воспользовавшись формулами

$$a^2-b^2=(a-b)(a+b),$$

$$a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2),$$
$$a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2),$$

или заменой переменного.

**Пример 4.** Вычислить предел

$$\lim_{x\to 5}\frac{4-\sqrt{21-x}}{\sqrt[3]{x-13}+2}=\left|\frac{0}{0}\right|.$$

**Решение.** Умножая числитель и знаменатель на сопряженное выражение для числителя, то есть на $4+\sqrt{21-x}$ и на неполный квадрат разности выражения $\sqrt[3]{x-13}+2$, то есть на $\sqrt[3]{(x-13)^2}-2\sqrt[3]{x-13}+4$, получим

$$\lim_{x\to 5}\frac{4-\sqrt{21-x}}{\sqrt[3]{x-13}+2}=\left|\frac{0}{0}\right|=$$

$$=\lim_{x\to 5}\frac{(4-\sqrt{21-x})(4+\sqrt{21-x})(\sqrt[3]{(x-13)^2}-2\sqrt[3]{x-13}+4)}{(4+\sqrt{21-x})(\sqrt[3]{x-13}+2)(\sqrt[3]{(x-13)^2}-2\sqrt[3]{x-13}+4)}=$$

$$=\lim_{x\to 5}\frac{(16-(21-x))(\sqrt[3]{(x-13)^2}-2\sqrt[3]{x-13}+4)}{(4+\sqrt{21-x})(x-13+8)}=$$

$$=\lim_{x\to 5}\frac{(x-5)(\sqrt[3]{(x-13)^2}-2\sqrt[3]{x-13}+4)}{(4+\sqrt{21-x})(x-5)}=$$

$$=\lim_{x\to 5}\frac{\sqrt[3]{(x-13)^2}-2\sqrt[3]{x-13}+4}{4+\sqrt{21-x}}=\left|\frac{12}{8}\right|=\frac{3}{2}.$$

**Пример 5.** Вычислить предел

$$\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt[3]{25+x}-\sqrt[3]{29-x}}{x-\sqrt{2x}}=\left|\frac{0}{0}\right|.$$

**Решение.** Умножая числитель и знаменатель на сопряженное выражение для знаменателя, то есть на $x+\sqrt{2x}$ и на неполный квадрат суммы выражения $\sqrt[3]{25+x}-\sqrt[3]{29-x}$, то есть на $\sqrt[3]{(25+x)^2}+\sqrt[3]{25+x}\sqrt[3]{29-x}+\sqrt[3]{(29-x)^2}$, получим

$$\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt[3]{25+x}-\sqrt[3]{29-x}}{x-\sqrt{2x}}=\left|\frac{0}{0}\right|=$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{(\sqrt[3]{25+x}-\sqrt[3]{29-x})\left(\sqrt[3]{(25+x)^2}+\sqrt[3]{25+x}\sqrt[3]{29-x}+\sqrt[3]{(29-x)^2}\right)}{(x-\sqrt{2x})\left(\sqrt[3]{(25+x)^2}+\sqrt[3]{25+x}\sqrt[3]{29-x}+\sqrt[3]{(29-x)^2}\right)}=$$

$$= \lim_{x\to 2} \frac{(25+x)-(29-x)}{(x-\sqrt{2x})\left(\sqrt[3]{(25+x)^2}+\sqrt[3]{25+x}\,\sqrt[3]{29-x}+\sqrt[3]{(29-x)^2}\right)} =$$

$$= \lim_{x\to 2} \frac{2(x-2)}{27(x-\sqrt{2x})} = \lim_{x\to 2} \frac{2(x-2)(x+\sqrt{2x})}{27(x-\sqrt{2x})(x+\sqrt{2x})} =$$

$$= \lim_{x\to 2} \frac{8(x-2)}{27(x^2-2x)} = \lim_{x\to 2} \frac{8(x-2)}{27x(x-2)} = \lim_{x\to 2} \frac{8}{27x} = \frac{4}{27}.$$

**Пример 6.** Вычислить предел

$$\lim_{x\to 1} \frac{1-\sqrt[3]{x}}{1-\sqrt{x}} = \left|\frac{0}{0}\right|.$$

**Решение.** Для вычисления данного предела сделаем замену переменного таким образом, чтобы избавиться от иррациональности:

$$\lim_{x\to 1} \frac{1-\sqrt[3]{x}}{1-\sqrt{x}} = \left|\frac{0}{0}\right| = \left|x = t^{\text{НОК}(2,3)} = t^6\right| = \lim_{t\to 1} \frac{1-\sqrt[3]{t^6}}{1-\sqrt{t^6}} = \lim_{t\to 1} \frac{1-t^2}{1-t^3} =$$

$$= \left|\frac{0}{0}\right| = \lim_{t\to 1} \frac{(1-t)(1+t)}{(1-t)(1+t+t^2)} = \lim_{t\to 1} \frac{1+t}{1+t+t^2} = \frac{2}{3}.$$

**Правило 3.** Если числитель или знаменатель дроби (или оба вместе) содержат трансцендентные функции или обратные к ним, то следует воспользоваться первым замечательным пределом, или следствиями из него, или эквивалентными бесконечно малыми (см. §4).

### 2. Неопределенность типа $\frac{\infty}{\infty}$.

**Правило.** Если числитель дроби — многочлен степени $n$, а знаменатель — многочлен степени $m$, тогда

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n}{b_0x^m + b_1x^{m-1} + \ldots + b_m} = \begin{cases} \frac{a_0}{b_0}, & \text{если } n = m, \\ 0, & \text{если } n < m, \\ \pm\infty, & \text{если } n > m, \end{cases}$$

(в последнем случае знак «+»или «−» определяется в зависимости от знака $\frac{a_0}{b_0}$).

Предыдущее правило можно сформулировать следующим образом. Сравним степени числителя и знаменателя. Возможны случаи:

1. если степень числителя меньше степени знаменателя, то предел равен нулю;

2. если степень числителя больше степени знаменателя, то предел равен бесконечности;

3. если степень числителя равна степени знаменателя, то предел равен отношению коэффициентов при старших степенях числителя и знаменателя.

**Пример 7.** Вычислить предел

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{2}{\sqrt{5-x}}+\frac{3}{x}-2\right).$$

**Решение.** Имеем

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{2}{\sqrt{5-x}}+\frac{3}{x}-2\right)=\left|\frac{2}{+\infty}+\frac{3}{-\infty}-2=0-0-2\right|=-2.$$

**Пример 8.** Вычислить предел

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{4x^2+3x-2}}{\sqrt{9x^2-x+3}}=\left|\frac{\infty}{\infty}\right|.$$

**Решение.** Воспользуемся правилом для неопределенности $\frac{\infty}{\infty}$:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{4x^2+3x-2}}{\sqrt{9x^2-x+3}}=\left|\frac{\infty}{\infty}\right|=\left|\frac{\sqrt{4x^2}}{\sqrt{9x^2}}=\frac{2x}{3x}\right|=$$

$$=|\text{степень числителя равна } 1, \text{ а степень знаменателя — } 1|=\frac{2}{3}.$$

**Пример 9.** Вычислить предел

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^5-3x^4+7x-1}{2x+3x^3-4x^4+7x^5}=\left|\frac{\infty}{\infty}\right|.$$

**Решение.**

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^5-3x^4+7x-1}{2x+3x^3-4x^4+7x^5}=\left|\frac{\infty}{\infty}\right|=\left|\frac{x^5}{7x^5}\right|=$$

$$=|\text{степень числителя равна } 5, \text{ а степень знаменателя — } 5|=\frac{1}{7}.$$

**Пример 10.** Вычислить предел

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}+5\sqrt[5]{x}}{\sqrt{3x-2}+\sqrt[3]{2x-3}}=\left|\frac{\infty}{\infty}\right|.$$

**Решение.**

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}+5\sqrt[5]{x}}{\sqrt{3x-2}+\sqrt[3]{2x-3}}=\left|\frac{\infty}{\infty}\right|=\left|\frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{3x}}\right|=\left|\frac{2x^{1/2}}{\sqrt{3}x^{1/2}}\right|=$$

$$=\left|\text{степень числителя равна }\frac{1}{2},\ \text{а степень знаменателя — }\ \frac{1}{2}\right|=\frac{2}{\sqrt{3}}.$$

**Пример 11.** Вычислить предел

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{2x+x^3}+\sqrt{x+x^2+2x^3}}{\sqrt{1-x+5x^3}+\sqrt{1+x+6x^3}}=\left|\frac{\infty}{\infty}\right|.$$

**Решение.**

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{2x+x^3}+\sqrt{x+x^2+2x^3}}{\sqrt{1-x+5x^3}+\sqrt{1+x+6x^3}}=\left|\frac{\infty}{\infty}\right|=\left|\frac{\sqrt{x^3}+\sqrt{2x^3}}{\sqrt{5x^3}+\sqrt{6x^3}}\right|=$$

$$=\left|\frac{x^{3/2}+\sqrt{2}x^{3/2}}{\sqrt{5}x^{3/2}+\sqrt{6}x^{3/2}}=\frac{(1+\sqrt{2})x^{3/2}}{(\sqrt{5}+\sqrt{6})x^{3/2}}\right|=$$

$$=\left|\text{степень числителя равна }\frac{3}{2},\ \text{а степень знаменателя — }\ \frac{3}{2}\right|=\frac{1+\sqrt{2}}{\sqrt{5}+\sqrt{6}}.$$

**Пример 12.** Вычислить предел

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2-3x+5}{3x^4-7x+1}=\left|\frac{\infty}{\infty}\right|.$$

**Решение.**

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2-3x+5}{3x^4-7x+1}=\left|\frac{\infty}{\infty}\right|=\left|\frac{2x^2}{3x^4}\right|=$$

$$=|\text{степень числителя равна }2,\ \text{а степень знаменателя — }4|=0.$$

**Пример 13.** Вычислить предел

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+5}{1000x-1}=\left|\frac{\infty}{\infty}\right|.$$

**Решение.**

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+5}{1000x-1}=\left|\frac{\infty}{\infty}\right|=\left|\frac{x^2}{1000x}\right|=$$

$$=|\text{степень числителя равна }2,\ \text{а степень знаменателя — }1|=\infty.$$

**Пример 14.** Вычислить предел

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)!-(n-1)!}{(n+1)!+(n-1)!}.$$

**Решение.** Выразим факториал $(n+1)!$ через факториал $(n-1)!$. Так как

$$(n-1)! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot (n-1),$$

то

$$(n+1)! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot (n-1) \cdot n \cdot (n+1) = (n-1)! \cdot n \cdot (n+1).$$

Тогда

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)! - (n-1)!}{(n+1)! + (n-1)!} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n-1)! \cdot n \cdot (n+1) - (n-1)!}{(n-1)! \cdot n \cdot (n+1) + (n-1)!} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{(n-1)![n \cdot (n+1) - 1]}{(n-1)![n \cdot (n+1) + 1]} = \lim_{n\to\infty} \frac{n \cdot (n+1) - 1}{n \cdot (n+1) + 1} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n^2 + n - 1}{n^2 + n + 1} = \left|\frac{\infty}{\infty}\right| = \left|\frac{n^2}{n^2}\right| =$$

$$= |\text{степень числителя равна 2, а степень знаменателя — 2}| = 1.$$

**Пример 15.** Вычислить предел

$$\lim_{k\to\infty} \frac{(2k)! \cdot (k+3)}{(2k-1)! \cdot (3k^4+9)}.$$

**Решение.** Выразим факториал $(2k)!$ через факториал $(2k-1)!$. Так как

$$(2k-1)! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot (2k-1),$$

то

$$(2k)! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot (2k-2) \cdot (2k-1) \cdot 2k = (2k-1)! \cdot 2k.$$

Тогда

$$\lim_{k\to\infty} \frac{(2k)! \cdot (k+3)}{(2k-1)! \cdot (3k^4+9)} = \lim_{k\to\infty} \frac{(2k-1)! \cdot 2k \cdot (k+3)}{(2k-1)! \cdot (3k^4+9)} =$$

$$= \lim_{k\to\infty} \frac{2k \cdot (k+3)}{3k^4+9} = \left|\frac{\infty}{\infty}\right| = \left|\frac{2k^2}{3k^4}\right| =$$

$$= |\text{степень числителя равна 2, а степень знаменателя — 4}| = 0.$$

**Правило 2. Теорема Штольца.** Пусть последовательности $\{a_n\} \to +\infty$ и $\{b_n\} \to +\infty$, причем — хотя бы начиная с некоторого места — с возрастанием $n$ и последовательности $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$ возрастают: $a_{n+1} > a_n$, $b_{n+1} > b_n$. Тогда

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n - a_{n-1}}{b_n - b_{n-1}}.$$

**Пример 16.** Вычислить предел

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2^n}{\sqrt{n}}=\left|\frac{\infty}{\infty}\right|.$$

**Решение.** Последовательности $\{2^n\}$ и $\{\sqrt{n}\}$ являются возрастающими для всех $n$. Тогда

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2^n}{\sqrt{n}}=\left|\frac{\infty}{\infty}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{2^n-2^{n-1}}{\sqrt{n}-\sqrt{n-1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{2^{n-1}(\sqrt{n}+\sqrt{n+1})}{n-n+1}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}2^{n-1}(\sqrt{n}+\sqrt{n+1})=|\infty(\infty+\infty)|=\infty.$$

**Пример 17.** Вычислить предел

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2^n+n}{3^n+n}.$$

**Решение.** Последовательности $\{2^n+n\}$ и $\{3^n+n\}$ являются возрастающими для всех $n$ как суммы двух возрастающих последовательностей. Тогда

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2^n+n}{3^n+n}=\left|\frac{\infty}{\infty}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{(2^n+n)-(2^{n-1}+(n-1))}{(3^n+n)-(3^{n-1}+(n-1))}=\lim_{n\to\infty}\frac{2^n-2^{n-1}+1}{3^n-3^{n-1}+1}=$$

$$=|\text{разделим числитель и знаменатель дроби на } 3^n|=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{2}{3}\right)^n-\frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}\right)^n+\left(\frac{1}{3}\right)^n}{1-\frac{1}{3}+\left(\frac{1}{3}\right)^n}=\left|\frac{0-0+0}{1-\frac{1}{3}+0}\right|=0.$$

**3. Неопределенность типа** $\infty-\infty$.

**Правило.** Нужно привести дроби к общему знаменателю.

**Пример 18.** Найти предел

$$\lim_{x\to3}\left(\frac{3x}{x-3}-\frac{5}{x^3-27}\right)=|\infty-\infty|.$$

**Решение.** Приведя дроби к общему знаменателю, получим

$$\lim_{x\to3}\left(\frac{3x}{x-3}-\frac{5}{x^3-27}\right)=|\infty-\infty|=\lim_{x\to3}\frac{3x(x^2+3x+9)-5}{x^3-27}=$$

$$=\lim_{x\to3}\frac{3x^3+9x^2+27x-5}{x^3-27}=\left|\frac{238}{0}\right|=\infty.$$

**Пример 19.** Найти предел

$$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+x-1}-\sqrt{x^2-x+1}\right)=|\infty-\infty|.$$

**Решение.** Приведя дроби к общему знаменателю, получим

$$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+x-1}-\sqrt{x^2-x+1}\right)=|\infty-\infty|=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x^2+x-1}-\sqrt{x^2-x+1}}{1}.$$

Умножим числитель и знаменатель дроби на выражение, сопряженное числителю, то есть на $\sqrt{x^2+x-1}+\sqrt{x^2-x+1}$. Тогда

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x^2+x-1}-\sqrt{x^2-x+1}}{1}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{(\sqrt{x^2+x-1}-\sqrt{x^2-x+1})(\sqrt{x^2+x-1}+\sqrt{x^2-x+1})}{\sqrt{x^2+x-1}+\sqrt{x^2-x+1}}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{(x^2+x-1)-(x^2-x+1)}{\sqrt{x^2+x-1}+\sqrt{x^2-x+1}}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{2x-2}{\sqrt{x^2+x-1}+\sqrt{x^2-x+1}}=\left|\frac{\infty}{\infty}\right|=\left|\frac{2x}{\sqrt{x^2}+\sqrt{x^2}}\right|=\left|\frac{2x}{2x}\right|=$$

$$=|\text{степень числителя равна } 1, \text{ а степень знаменателя} - 1|=\frac{2}{2}=1.$$

**Пример 20.** Вычислить предел

$$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}-\sqrt{x}\right)=|\infty-\infty|.$$

**Решение.** Приведя дроби к общему знаменателю, получим

$$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}-\sqrt{x}\right)=|\infty-\infty|=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}-\sqrt{x}}{1}.$$

Умножим числитель и знаменатель дроби на выражение, сопряженное числителю, то есть на $\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}+\sqrt{x}$. Тогда

$$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}-\sqrt{x}\right)=|\infty-\infty|=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}-\sqrt{x}\right)\left(\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}+\sqrt{x}\right)}{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}+\sqrt{x}}=$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x+\sqrt{x}}}{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}+\sqrt{x}}}=\left|\frac{\infty}{\infty}\right|=\left|\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+\sqrt{x}}\right|=\left|\frac{\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}\right|=\left|\frac{x^{1/2}}{2x^{1/2}}\right|=$$

$$=\left|\text{степень числителя равна } \frac{1}{2},\ \text{а степень знаменателя — } \frac{1}{2}\right|=\frac{1}{2}.$$

**4. Неопределенность типа** $0\cdot\infty$.

**Правило.** Данная неопределенность сводится либо к неопределенности вида $\frac{0}{0}$, либо — к $\frac{\infty}{\infty}$.

**Пример 21.** Вычислить предел

$$\lim_{x\to\infty}(x^2-4)\cdot\sqrt{\frac{8}{x^3-x-1}}=|\infty\cdot 0|.$$

**Решение.** Сведем данный предел к неопределенности $\frac{\infty}{\infty}$, перемножив дроби $\frac{x^2-4}{1}$ и $\frac{\sqrt{8}}{\sqrt{x^3-x-1}}$. Получим

$$\lim_{x\to\infty}(x^2-4)\cdot\sqrt{\frac{8}{x^3-x-1}}=|\infty\cdot 0|=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{8}(x^2-4)}{\sqrt{x^3-x-1}}=\left|\frac{\infty}{\infty}\right|=\left|\frac{\sqrt{8}x^2}{\sqrt{x^3}}\right|=$$

$$=\left|\text{степень числителя равна } 2,\ \text{а степень знаменателя — } \frac{3}{2}\right|=\infty.$$

**5. Неопределенность типа** $1^\infty$.

**Правило.** Предел типа $1^\infty$ есть второй замечательный предел (см. §5).

**6. Неопределенности типа** $\infty^0,\ 0^0$.

**Правило.** Данные неопределенности раскрываются с помощью логарифмирования.

**Пример 22.** Вычислить предел

$$\lim_{x\to+\infty}x^{\frac{1}{x}}=|\infty^0|.$$

**Решение.** Обозначим $y=x^{\frac{1}{x}}$. Тогда $\ln y=\ln x^{\frac{1}{x}}=\frac{1}{x}\ln x=\frac{\ln x}{x}$ и беря предел от левой и правой части последнего равенства при $x\to+\infty$, получим

$$\lim_{x\to+\infty}\ln y=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=\left|\frac{\infty}{\infty}\right|.$$

Для вычисления последнего предела воспользуемся графиками функций $y(x)=x$ и $y(x)=\ln x$, изображенными на рис. 4.

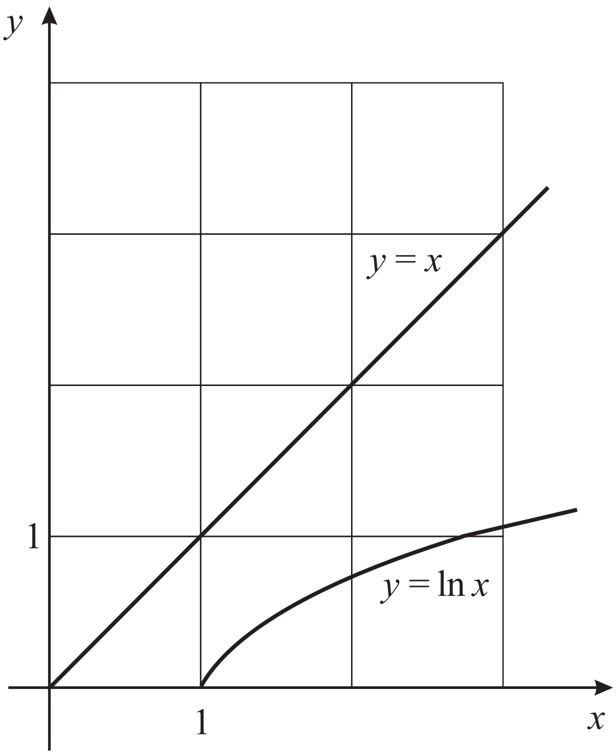



Рис. 4

Как видно из построенных графиков функций, при $x \to +\infty$ значения функции $y(x) = x$ «гораздо быстрее стремятся к бесконечности», чем значения функции $y(x) = \ln x$. Поэтому

$$\lim_{x\to+\infty} \ln y = \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = \left|\frac{\infty}{\infty}\right| = 0.$$

Следовательно,

$$\lim_{x\to+\infty} x^{\frac{1}{x}} = |\infty^0| = e^0 = 1.$$

## §4. Первый замечательный предел. Эквивалентные бесконечно малые. Применение их к вычислению пределов от тригонометрических функций

Неопределенность типа $\frac{0}{0}$, содержащая тригонометрические или обратные тригонометрические функции, может быть «раскрыта» при помощи первого замечательного предела

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = \left|\frac{0}{0}\right| = 1$$

или следствий из него

$$\lim_{x\to 0} \frac{\arcsin x}{x} = \left|\frac{0}{0}\right| = 1,$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} x}{x}=\left|\frac{0}{0}\right|=1,$$
$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{arctg} x}{x}=\left|\frac{0}{0}\right|=1.$$

**Пример 1.** Вычислить предел

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} 5x}{\arcsin 4x}=\left|\frac{0}{0}\right|.$$

**Решение.** Для вычисления предела воспользуемся вторым и третьим следствиями из первого замечательного предела

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} 5x}{\arcsin 4x}=\left|\frac{0}{0}\right|=\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} 5x}{5x}\cdot\frac{4x}{\arcsin 4x}\cdot\frac{5x}{4x}=\lim_{x\to 0}\frac{5x}{4x}=\frac{5}{4}.$$

**Пример 2.** Вычислить предел

$$\lim_{x\to 5}\frac{\operatorname{tg}(x-5)}{x^2-25}=\left|\frac{0}{0}\right|.$$

**Решение.** Разложим знаменатель на множители по формуле разность квадратов. Получим

$$\lim_{x\to 5}\frac{\operatorname{tg}(x-5)}{x^2-25}=\left|\frac{0}{0}\right|=\lim_{x\to 5}\frac{\operatorname{tg}(x-5)}{x-5}\cdot\frac{1}{x+5}=\lim_{x\to 5}\frac{1}{x+5}=\frac{1}{10}.$$

**Пример 3.** Вычислить предел

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 9x-\sin 3x}{\sin x}=\left|\frac{0}{0}\right|.$$

**Решение.** В числители дроби воспользуемся формулой разности синусов. Получим

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 9x-\sin 3x}{\sin x}=\left|\frac{0}{0}\right|=\lim_{x\to 0}\frac{2\cos 6x\sin 3x}{\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin 3x}{\sin x}=$$
$$=2\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{3x}\cdot\frac{x}{\sin x}\cdot\frac{3x}{x}=2\lim_{x\to 0}\frac{3x}{x}=6.$$

**Пример 4.** Вычислить предел

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos 5x-1}{x\sin 3x}=\left|\frac{0}{0}\right|.$$

**Решение.**

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos 5x-1}{x\sin 3x}=\left|\frac{0}{0}\right|=-\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 5x}{x\sin 3x}=$$

$$= \left|\text{воспользуемся формулой } 1-\cos\alpha = 2\sin^2\frac{\alpha}{2}\right| = -\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2\frac{5x}{2}}{x\sin 3x} =$$

$$= -2\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin\frac{5x}{2}}{\frac{5x}{2}}\right)^2\cdot\frac{3x}{\sin 3x}\cdot\frac{\frac{25x^2}{4}}{x\cdot 3x} = -2\lim_{x\to 0}\frac{\frac{25x^2}{4}}{3x^2} = -\frac{25}{6}.$$

**Пример 5.** Вычислить предел

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 4x}{\sqrt{x+1}-1} = \left|\frac{0}{0}\right|.$$

**Решение.** Для вычисления предела нужно избавиться от иррациональности в знаменателе дроби.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 4x}{\sqrt{x+1}-1} = \left|\frac{0}{0}\right| =$$

$$= \left|\text{умножим числитель и знаменатель дроби на } \sqrt{x+1}+1\right| =$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 4x(\sqrt{x+1}+1)}{(\sqrt{x+1}-1)(\sqrt{x+1}+1)} = \lim_{x\to 0}\frac{2\sin 4x}{x} = 2\lim_{x\to 0}\frac{\sin 4x}{4x}\cdot\frac{4x}{x} = 8.$$

Раскрытие неопределености $\frac{0}{0}$, содержащей трансцендентные функции, значительно упрощается при использовании эквивалентных величин.

Эквивалентности при $x \to 0$ :

1. $\sin x \sim x$;
2. $1-\cos x \sim \dfrac{x^2}{2}$;
3. $\operatorname{tg} x \sim x$;
4. $\arcsin x \sim x$;
5. $\operatorname{arctg} x \sim x$;
6. $e^x - 1 \sim x$;
7. $a^x - 1 \sim x\ln a$;
8. $\ln(1+x) \sim x$;
9. $(1+x)^m - 1 \sim mx$.

**Пример 6.** Вычислить предел

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\sqrt{\cos x}}{1-\cos\sqrt{x}} = \left|\frac{0}{0}\right|.$$

**Решение.** Для вычисления предела нужно избавиться от иррациональности в числителе дроби.

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\sqrt{\cos x}}{1-\cos\sqrt{x}}=\left|\frac{0}{0}\right|=$$

$$=\left|\text{умножим числитель и знаменатель дроби на } 1+\sqrt{\cos x}\right|=$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1-\sqrt{\cos x})(1+\sqrt{\cos x})}{(1-\cos\sqrt{x})(1+\sqrt{\cos x})}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{2(1-\cos\sqrt{x})}=\left|\begin{array}{c}1-\cos x\sim\frac{x^2}{2},\ x\to 0\\ 1-\cos\sqrt{x}\sim\frac{x}{2},\ x\to 0\end{array}\right|=$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{\frac{x^2}{2}}{\frac{x}{2}}=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}x=0.$$

**Пример 7.** Вычислить предел

$$\lim_{x\to 9}\left[\frac{\sin(x-9)}{x^2-81}+5^{-\frac{1}{(x-9)^2}}\right].$$

**Решение.** Используя свойства пределов функций, получим

$$\lim_{x\to 9}\left[\frac{\sin(x-9)}{x^2-81}+5^{-\frac{1}{(x-9)^2}}\right]=\lim_{x\to 9}\frac{\sin(x-9)}{x^2-81}+\lim_{x\to 9}5^{-\frac{1}{(x-9)^2}}=$$

$$=\left|5^{-\frac{1}{0}}=5^{-\infty}=\frac{1}{5^{\infty}}=\frac{1}{\infty}=0\right|=\lim_{x\to 9}\frac{\sin(x-9)}{x^2-81}=\left|\frac{0}{0}\right|=$$

$$=\left|\sin(x-9)\sim x-9,\ x\to 9\right|=\lim_{x\to 9}\frac{x-9}{(x-9)(x+9)}=\lim_{x\to 9}\frac{1}{x+9}=\frac{1}{18}.$$

**Пример 8.** Вычислить предел

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\sqrt[3]{\operatorname{tg}x}-1}{2\sin^2 x-1}=\left|\frac{0}{0}\right|.$$

**Решение.** Для вычисления предела нужно избавиться от иррациональности в числителе дроби.

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\sqrt[3]{\operatorname{tg}x}-1}{2\sin^2 x-1}=\left|\frac{0}{0}\right|=$$

$$=\left|\text{умножим числитель и знаменатель дроби на } \sqrt[3]{\operatorname{tg}^2 x}+\sqrt[3]{\operatorname{tg}x}+1\right|=$$

$$=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{(\sqrt[3]{\operatorname{tg}x}-1)\left(\sqrt[3]{\operatorname{tg}^2 x}+\sqrt[3]{\operatorname{tg}x}+1\right)}{\left(2\sin^2 x-1\right)\left(\sqrt[3]{\operatorname{tg}^2 x}+\sqrt[3]{\operatorname{tg}x}+1\right)}=$$

$$= \lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{\operatorname{tg} x - 1}{3(2\sin^2 x - 1)} = \frac{1}{3}\lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x - \cos x}{\cos x(2\sin^2 x - 1)} =$$

$$= \frac{1}{3}\lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x - \cos x}{2\cos x\left(\sin^2 x - \frac{1}{2}\right)} = \frac{1}{3}\lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x - \cos x}{2\cos x\left(\sin x - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(\sin x + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)} =$$

$$= \frac{1}{6}\lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x - \cos x}{\sin x - \frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{1}{6}\lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x - \cos x}{\sin x - \sin\frac{\pi}{4}} =$$

$$= \frac{1}{6}\lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{\sqrt{2}\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)}{2\cos\frac{x+\frac{\pi}{4}}{2}\sin\frac{x-\frac{\pi}{4}}{2}} = \frac{1}{6}\lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)}{\sin\frac{x-\frac{\pi}{4}}{2}} =$$

$$= \left|\begin{array}{c} \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \sim x - \frac{\pi}{4},\ x \to \frac{\pi}{4} \\ \sin\frac{x-\frac{\pi}{4}}{2} \sim \frac{x-\frac{\pi}{4}}{2},\ x \to \frac{\pi}{4} \end{array}\right| = \frac{1}{6}\lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{x - \frac{\pi}{4}}{\frac{x-\frac{\pi}{4}}{2}} = \frac{1}{3}.$$

**Пример 9.** Вычислить предел

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} x - \sin x}{x^3} = \left|\frac{0}{0}\right|.$$

**Решение.**

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} x - \sin x}{x^3} = \left|\frac{0}{0}\right| = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x(1 - \cos x)}{x^3 \cos x} =$$

$$= \left|\begin{array}{c} 1 - \cos x \sim \frac{x^2}{2},\ x \to 0 \\ \sin x \sim x,\ x \to 0 \end{array}\right| = \lim_{x\to 0} \frac{x \cdot \frac{x^2}{2}}{x^3} \cdot \lim_{x\to 0} \frac{1}{\cos x} = \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{2}.$$

**Замечание.** Необходимо обратить особое внимание на то, что в случаях, когда в числителе или в знаменателе (или и в числителе и в знаменателе) стоит сумма (или разность) бесконечно малых функций, то при вычислении предела, вообще говоря, нельзя заменять отдельные слагаемые эквивалентными функциями. Такая замена может привести к неверному результату. В примере 9 при замене $\operatorname{tg} x$ и $\sin x$ на $x$ получили бы $\frac{0}{x^3}$, откуда следовало бы, что предел функции равен 0, что неверно. При нахождении пределов может оказаться полезной замена аргумента функции новой переменной, так чтобы последняя стремилась к нулю.

**Пример 10.** Вычислить предел

$$\lim_{x\to 1}(1 - x)\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2} = |0 \cdot \infty|.$$

**Решение.** Вычисление данного предела осуществим с помощью замены переменного следующим образом

$$\lim_{x\to 1}(1 - x)\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2} = |0 \cdot \infty| = |1 - x = t,\ t \to 0| = \lim_{t\to 0} t \cdot \operatorname{tg}\frac{\pi(1 - t)}{2} =$$

$$= \lim_{t\to 0} t \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi t}{2}\right) = \lim_{t\to 0} t \operatorname{ctg}\frac{\pi t}{2} = \lim_{t\to 0}\frac{t}{\operatorname{tg}\frac{\pi t}{2}} =$$

$$= \left|\operatorname{tg}\frac{\pi t}{2} \sim \frac{\pi t}{2},\ t\to 0\right| = \lim_{t\to 0}\frac{t}{\frac{\pi t}{2}} = \frac{2}{\pi}.$$

**Пример 11.** Вычислить предел

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{1-\sin x}{\left(\frac{\pi}{2}-x\right)^2} = \left|\frac{0}{0}\right|.$$

**Решение.** Сделаем замену переменного. Получим

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{1-\sin x}{\left(\frac{\pi}{2}-x\right)^2} = \left|\frac{0}{0}\right| = \left|x-\frac{\pi}{2}=t,\ t\to 0\right| = \lim_{t\to 0}\frac{1-\sin\left(t+\frac{\pi}{2}\right)}{t^2} =$$

$$= \lim_{t\to 0}\frac{1-\cos t}{t^2} = \left|1-\cos t \sim \frac{t^2}{2},\ t\to 0\right| = \lim_{t\to 0}\frac{\frac{t^2}{2}}{t^2} = \frac{1}{2}.$$

## §5. Второй замечательный предел. Сравнение бесконечно малых. Применение их к вычислению пределов степенно-показательных, показательных и логарифмических функций

Второй замечательный предел имеет вид

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = |1^\infty| = e$$

или

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = |1^\infty| = e.$$

**Пример 1.** Вычислить предел

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{3x^2+1}{3x^2-1}\right)^{\frac{x^3}{2x+1}} = |1^\infty|.$$

**Решение.**

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{3x^2+1}{3x^2-1}\right)^{\frac{x^3}{2x+1}} = |1^\infty| = \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{3x^2+1}{3x^2-1}-1\right)^{\frac{x^3}{2x+1}} =$$

$$= \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{3x^2-1}\right)^{\frac{3x^2-1}{2}\cdot\frac{x^3}{2x+1}\cdot\frac{2}{3x^2-1}} = e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^3}{2x+1}\cdot\frac{2}{3x^2-1}}.$$

Учитывая, что

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^3}{2x+1}\cdot\frac{2}{3x^2-1} = \left|\frac{\infty}{\infty}\right| = \left|\frac{2x^3}{2x\cdot 3x^2} = \frac{2x^3}{6x^3}\right| = \frac{2}{6} = \frac{1}{3},$$

получим

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{3x^2+1}{3x^2-1}\right)^{\frac{x^3}{2x+1}}=e^{\frac{1}{3}}.$$

**Пример 2.** Вычислить предел

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1+\operatorname{tg}x}{1+\sin x}\right)^{-\frac{3}{x^3}}=\left|1^\infty\right|.$$

**Решение.**

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}(\sin x)^{\frac{1}{\operatorname{ctg}x}}=\left|1^\infty\right|=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}(1+(\sin x-1))^{\frac{1}{\sin x-1}\cdot\frac{1}{\operatorname{ctg}x}\cdot(\sin x-1)}=$$

$$=e^{\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{1}{\operatorname{ctg}x}\cdot(\sin x-1)}.$$

Вычислим предел, стоящий в показателе степени, отдельно. Получим

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x-1}{\operatorname{ctg}x}=\left|\frac{0}{0}\right|=\left|x-\frac{\pi}{2}=t,\ t\to 0\right|=-\lim_{t\to 0}\frac{1-\sin\left(t+\frac{\pi}{2}\right)}{\operatorname{ctg}\left(t+\frac{\pi}{2}\right)}=$$

$$=-\lim_{t\to 0}\frac{1-\cos t}{-\operatorname{tg}t}=\left|\begin{matrix}1-\cos t\sim\frac{t^2}{2},\ t\to 0\\ \operatorname{tg}t\sim t,\ t\to 0\end{matrix}\right|=\lim_{t\to 0}\frac{\frac{t^2}{2}}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{t}{2}=0.$$

Следовательно,

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}(\sin x)^{\frac{1}{\operatorname{ctg}x}}=e^0=1.$$

**Пример 3.** Вычислить предел

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1+\operatorname{tg}x}{1+\sin x}\right)^{-\frac{3}{x^3}}=\left|1^\infty\right|.$$

**Решение.**

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1+\operatorname{tg}x}{1+\sin x}\right)^{-\frac{3}{x^3}}=\left|1^\infty\right|=\lim_{x\to 0}\left(1+\frac{1+\operatorname{tg}x}{1+\sin x}-1\right)^{-\frac{3}{x^3}}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\left(1+\frac{\operatorname{tg}x-\sin x}{1+\sin x}\right)^{\frac{1+\sin x}{\operatorname{tg}x-\sin x}\cdot\left(-\frac{3}{x^3}\right)\cdot\frac{\operatorname{tg}x-\sin x}{1+\sin x}}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\left(-\frac{3}{x^3}\right)\cdot\frac{\operatorname{tg}x-\sin x}{1+\sin x}}.$$

Учитывая, что

$$\lim_{x\to 0}\left(-\frac{3}{x^3}\right)\cdot\frac{\operatorname{tg}x-\sin x}{1+\sin x}=-3\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^3}\cdot\frac{1}{\cos x}\cdot\frac{\sin x(1-\cos x)}{1+\sin x}=$$

$$=-3\lim_{x\to 0}\frac{\sin x(1-\cos x)}{x^3}=\left|\begin{matrix}1-\cos x\sim\frac{x^2}{2},\ x\to 0\\ \sin x\sim x,\ x\to 0\end{matrix}\right|=-3\lim_{x\to 0}\frac{x\cdot\frac{x^2}{2}}{x^3}=-\frac{3}{2},$$

получим

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1+\operatorname{tg} x}{1+\sin x}\right)^{-\frac{3}{x^3}} = e^{-\frac{3}{2}}.$$

Для вычисления пределов, содержащих логарифмическую и показательную функции, полезным бывает использование эквивалентностей.

**Пример 4.** Вычислить предел

$$\lim_{x\to e}\frac{\ln x^3-3}{x-e} = \left|\frac{0}{0}\right|.$$

**Решение.**

$$\lim_{x\to e}\frac{\ln x^3-3}{x-e} = \left|\frac{0}{0}\right| = \lim_{x\to e}\frac{3\ln x-3}{x-e} = 3\lim_{x\to e}\frac{\ln x-1}{x-e} = |x-e=t,\ t\to 0| =$$

$$= 3\lim_{t\to 0}\frac{\ln(t+e)-1}{t} = 3\lim_{t\to 0}\frac{\ln(t+e)-\ln e}{t} = 3\lim_{t\to 0}\frac{\ln\left(1+\frac{t}{e}\right)}{t} =$$

$$= \left|\ln\left(1+\frac{t}{e}\right)\sim 1+\frac{t}{e},\ t\to 0\right| = 3\lim_{t\to 0}\frac{\frac{t}{e}}{t} = \frac{3}{e}.$$

**Пример 5.** Вычислить предел

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1-\sin x)}{3^{\operatorname{tg} x}-1} = \left|\frac{0}{0}\right|.$$

**Решение.**

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1-\sin x)}{3^{\operatorname{tg} x}-1} = \left|\frac{0}{0}\right| = \left|\begin{matrix}\ln(1-\sin x)\sim -\sin x,\ x\to 0\\ 3^{\operatorname{tg} x}-1\sim \ln 3\operatorname{tg} x,\ x\to 0\end{matrix}\right| =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{-\sin x}{\ln 3\cdot\operatorname{tg} x} = \left|\begin{matrix}\sin x\sim x,\ x\to 0\\ \operatorname{tg} x\sim x,\ x\to 0\end{matrix}\right| = \lim_{x\to 0}\frac{-x}{\ln 3\cdot x} = -\frac{1}{\ln 3}.$$

**Пример 6.** Вычислить предел

$$\lim_{x\to 2}\frac{2^x-x^2}{x-2} = \left|\frac{0}{0}\right|.$$

**Решение.**

$$\lim_{x\to 2}\frac{2^x-x^2}{x-2} = \left|\frac{0}{0}\right| = |x-2=t,\ t\to 0| = \lim_{t\to 0}\frac{2^{t+2}-(t+2)^2}{t} =$$

$$= \lim_{t\to 0}\frac{4(2^t-1)-t^2-4t}{t} = |2^t-1\sim \ln 2\cdot t,\ t\to 0| = \lim_{t\to 0}\frac{4\ln 2\cdot t-t^2-4t}{t} =$$

$$= \lim_{t\to 0}(4\ln 2-t-4) = 4\ln 2-4.$$

**Пример 7.** Вычислить предел

$$\lim_{x\to\infty} x[\ln(x+a)-\ln x] = |\infty(\infty-\infty)|.$$

**Решение.**

$$\lim_{x\to\infty} x[\ln(x+a)-\ln x] = |\infty(\infty-\infty)| = \lim_{x\to\infty} x\ln\frac{x+a}{x} = \lim_{x\to\infty} x\ln\left(1+\frac{a}{x}\right) =$$

$$= \left|\ln\left(1+\frac{a}{x}\right)\sim\frac{a}{x},\ x\to\infty\right| = \lim_{x\to\infty} x\cdot\frac{a}{x} = a.$$

**Пример 8.** Вычислить предел

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(2+e^{3x})}{\ln(3+e^{2x})} = \left|\frac{\infty}{\infty}\right|.$$

**Решение.**

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(2+e^{3x})}{\ln(3+e^{2x})} = \left|\frac{\infty}{\infty}\right| = \lim_{x\to+\infty}\frac{\ln\left(e^{3x}\cdot\left(\frac{2}{e^{3x}}+1\right)\right)}{\ln\left(e^{2x}\cdot\left(\frac{3}{e^{2x}}+1\right)\right)} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{\ln e^{3x}+\ln\left(\frac{2}{e^{3x}}+1\right)}{\ln e^{2x}+\ln\left(\frac{3}{e^{2x}}+1\right)} = \begin{vmatrix}\ln\left(\frac{2}{e^{3x}}+1\right)\sim\frac{2}{e^{3x}},\ x\to+\infty\\ \ln\left(\frac{3}{e^{2x}}+1\right)\sim\frac{3}{e^{2x}},\ x\to+\infty\end{vmatrix} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{3x+\frac{2}{e^{3x}}}{2x+\frac{3}{e^{2x}}} = \left|\frac{\infty}{\infty}\right| = \frac{3}{2}.$$

**Пример 9.** Вычислить предел

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(x^2+x+1)}{\ln(x^5+x^3+1)} = \left|\frac{\infty}{\infty}\right|.$$

**Решение.**

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(x^2+x+1)}{\ln(x^5+x^3+1)} = \left|\frac{\infty}{\infty}\right| = \lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x^2+\ln\left(1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)}{\ln x^5+\ln\left(1+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^5}\right)} = \lim_{x\to+\infty}\frac{2\ln x}{5\ln x} = \frac{2}{5}.$$

## §6. Непрерывность функции

**Определение 1.** Функция $f(x)$, определенная на интервале $(a,b)$, называется *непрерывной* в точке $x_0\in(a,b)$, если

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0).$$

**Определение 2.** Функция $f(x)$ называется *непрерывной на множестве*, если она непрерывна в каждой точке этого множества.

**Определение 3.** Если в своей области определения функция $f(x)$ не является непрерывной в точке $x_0$, то она называется *разрывной* в точке $x_0$. Точка $x_0$ называется *точкой разрыва* функции $f(x)$.

**Определение 4.** Точка $x_0$ называется *точкой разрыва первого рода* функции $f(x)$, если существуют конечные пределы

$$\lim_{x \to x_0+0} f(x) = f(x_0+0), \quad \lim_{x \to x_0-0} f(x) = f(x_0-0),$$

но они не равны между собой. Величина $f(x_0+0) - f(x_0-0)$ называется *скачком* функции $f(x)$ в точке $x_0$.

**Определение 5.** Точка $x_0$ называется *точкой разрыва второго рода* функции $f(x)$, если хотя бы один из односторонних пределов не существует или бесконечен.

**Определение 6.** Разрыв в точке $x_0$ называется *устранимым*, если существует $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l$, но $l \neq f(x_0)$.

**Пример 1.** Проверить, непрерывна ли функция $f(x) = \frac{1}{x^2-9}$ в точках $x_1 = 1,\ x_2 = 3$. Установить вид разрыва.

**Решение.** В точке $x_1 = 1$ найдем односторонние пределы функции:

$$\lim_{x \to 1+0} \frac{1}{x^2-9} = \left| \frac{1}{-8} \right| = -\frac{1}{8},$$

$$\lim_{x \to 1-0} \frac{1}{x^2-9} = \left| \frac{1}{-8} \right| = -\frac{1}{8},$$

следовательно, существует

$$\lim_{x \to 1} \frac{1}{x^2-9} = -\frac{1}{8}.$$

Учитывая, что

$$f(1) = -\frac{1}{8}$$

получим

$$\lim_{x \to 1} \frac{1}{x^2-9} = f(1),$$

а это означает, что функция $f(x) = \frac{1}{x^2-9}$ непрерывна в точке $x_1 = 1$.

В точке $x_2 = 3$ найдем односторонние пределы функции:

$$\lim_{x \to 3+0} \frac{1}{x^2-9} = \lim_{x \to 3+0} \frac{1}{(x-3)(x+3)} =$$

$$= \left| \frac{1}{(3+0-3)(3+0+3)} = \frac{1}{+0 \cdot 6} = \frac{1}{+0} \right| = +\infty,$$

$$\lim_{x\to 3-0}\frac{1}{x^2-9}=\lim_{x\to 3-0}\frac{1}{(x-3)(x+3)}=$$
$$=\left|\frac{1}{(3-0-3)(3-0+3)}=\frac{1}{-0\cdot 6}=\frac{1}{-0}\right|=-\infty,$$
следовательно, в точке $x_2=3$ функция $f(x)=\frac{1}{x^2-9}$ терпит разрыв второго рода.

**Пример 2.** Найти и исследовать точки разрыва функции $f(x)=e^{\frac{1}{4-x}}$.

**Решение.** Данная функция определена для всех действительных чисел, кроме $x=4$. Таким образом, точка $x=4$ — точка, «подозрительная» на разрыв. Найдем односторонние пределы функции в этой точке:
$$\lim_{x\to 4+0}e^{\frac{1}{4-x}}=\left|e^{\frac{1}{4-(4+0)}}=e^{\frac{1}{-0}}=e^{-\infty}=\frac{1}{e^{+\infty}}=\frac{1}{\infty}\right|=0,$$
$$\lim_{x\to 4-0}e^{\frac{1}{4-x}}=\left|e^{\frac{1}{4-(4-0)}}=e^{\frac{1}{+0}}=e^{+\infty}\right|=+\infty.$$
Следовательно, $x=4$ — точка разрыва второго рода.

**Пример 3.** Найти и исследовать точки разрыва функции $f(x)=\cos\frac{\pi}{2-x}$.

**Решение.** Данная функция определена для всех действительных чисел, кроме $x=2$. Таким образом, точка $x=2$ — точка, «подозрительная» на разрыв. Найдем односторонние пределы функции в этой точке:
$$\lim_{x\to 2+0}\cos\frac{\pi}{2-x}=\left|\cos\frac{\pi}{2-(2+0)}=\cos\frac{\pi}{-0}=\cos(-\infty)\right|\ -\ \text{не существует},$$
$$\lim_{x\to 2-0}\cos\frac{\pi}{2-x}=\left|\cos\frac{\pi}{2-(2-0)}=\cos\frac{\pi}{+0}=\cos(+\infty)\right|\ -\ \text{не существует}.$$
Поэтому, $x=2$ — точка разрыва второго рода.

**Пример 4.** Найти точки разрыва, если они есть и сделать чертеж функции
$$y(x)=\begin{cases}\frac{1}{x+2}, & \text{при } 0\le x<1,\\ x^2+1, & \text{при } x\ge 1.\end{cases}$$

**Решение.** Функция задана различными формулами на различных промежутках. В каждом из промежутков $0\le x<1$, $x\ge 1$ функция непрерывна. Следовательно, разрыв может быть только на стыке промежутков, то есть в точке $x=1$. Найдем односторонние пределы функции в этой точке:
$$\lim_{x\to 1+0}y(x)=\lim_{x\to 1}(x^2+1)=2,$$
$$\lim_{x\to 1-0}y(x)=\lim_{x\to 1}\frac{1}{x+2}=\frac{1}{3}.$$

Односторонние пределы в точке $x = 1$ конечны и различны, следовательно, точка $x = 1$ — точка разрыва первого рода. График функции изображен на рис. 5.

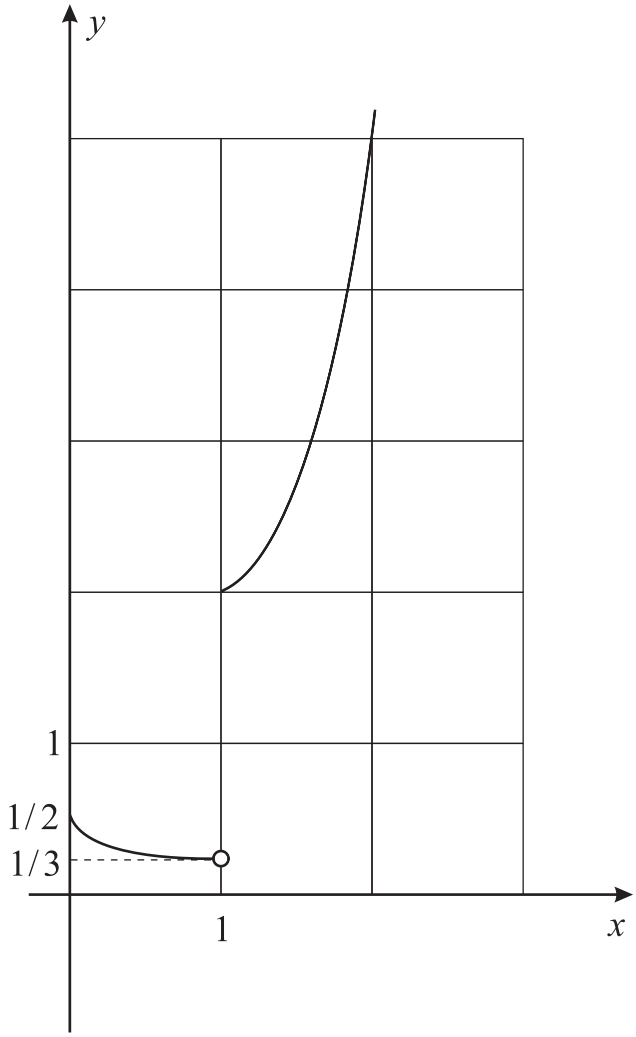



Рис. 5

**Пример 5.** Найти точки разрыва, если они есть и сделать чертеж функции

$$y(x) = \begin{cases} x^2, & \text{при } x < 0, \\ \operatorname{tg} x, & \text{при } 0 \le x < 1, \\ \frac{1}{x+1}, & \text{при } x \ge 1. \end{cases}$$

**Решение.** Функция задана различными формулами на различных промежутках. В каждом из промежутков $x < 0,\ 0 \le x < 1,\ x \ge 1$ функция непрерывна. Следовательно, разрыв может быть только на стыке промежутков, то есть в точках $x = 0,\ x = 1$. Найдем односторонние пределы функции в этих точках.

В точке $x = 0$ имеем:

$$\lim_{x \to 0+0} y(x) = \lim_{x \to 0} \operatorname{tg} x = 0,$$

$$\lim_{x \to 0-0} y(x) = \lim_{x \to 0} x^2 = 0.$$

Односторонние пределы в точке $x = 0$ равны, следовательно, в точке $x = 0$ существует и предел функции

$$\lim_{x \to 0} y(x) = 0.$$

Учитывая, что $y(0) = \operatorname{tg} 0 = 0$, получим

$$\lim_{x \to 0} y(x) = y(0),$$

а это означает, что исходная функция непрерывна в точке $x = 0$.

В точке $x = 1$ имеем:

$$\lim_{x \to 1+0} y(x) = \lim_{x \to 1} \frac{1}{x+1} = \frac{1}{2},$$

$$\lim_{x \to 1-0} y(x) = \lim_{x \to 1} \operatorname{tg} x = \operatorname{tg} 1 \approx \frac{8}{5}.$$

Односторонние пределы в точке $x = 1$ конечны и различны, следовательно, точка $x = 1$ — точка разрыва первого рода. График функции изображен на рис. 6.

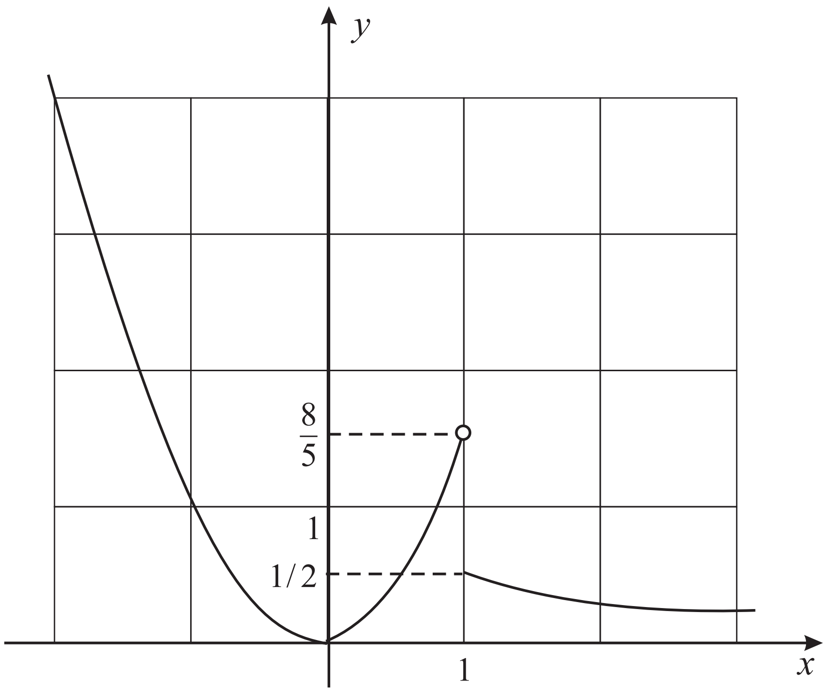



Рис. 6

## ЧАСТЬ II. ИНДИВИДУАЛЬНЫЕ ЗАДАНИЯ

### Вариант 1.

**Задание 1. Область определения функции. Основные элементарные функции и их свойства. Построение графиков.**

1. Найти область определения функций:

   (a) $y(x) = \sqrt[3]{x-4} + \arccos\frac{x-1}{2x}$;

   (b) $y(x) = \lg[\lg(x-2)] + \frac{1}{x-5}$.

2. Определить четность и нечетность функции $y(x) = \operatorname{tg} x^2 + 3x^4 - x^2$.

3. С помощью элементарных преобразований построить график функции $y(x) = \left|2^{|x|+1} - 2\right|$.

**Задание 2. Вычисление пределов последовательностей, дробно-рациональных и иррациональных функций.**

1. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{(n+1)^3-(n-1)^3}{(n+1)^2+(n-1)^2}$;
2. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n!}{(n+1)!-n!}$;
3. $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^4-5x}{x^2-3x+1}$;
4. $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x}}{\sqrt[4]{x^3+x}+x}$;
5. $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x^2-2x+1}{x^3-x}$;
6. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sqrt[3]{1+x^2}-1}{x^2}$;
7. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x}$;
8. $\lim\limits_{x\to\infty} (\sqrt{x+a} - \sqrt{x})$;
9. $\lim\limits_{x\to 2} \left(\frac{1}{x(x-2)^2} - \frac{1}{x^2-3x+2}\right)$.

**Задание 3. Первый замечательный предел. Эквивалентные бесконечно малые. Применение их к вычислению пределов от тригонометрических функций.**

1. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin 4x}{x}$;
2. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\arcsin 2x}{5x}$;
3. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin(a+x)-\sin(a-x)}{\operatorname{tg}(a+x)-\operatorname{tg}(a-x)}$;
4. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x\sin x}-\cos x}{\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}$;
5. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} \frac{\cos\frac{x}{2}-\sin\frac{x}{2}}{\cos x}$.

**Задание 4. Второй замечательный предел. Сравнение бесконечно малых. Применение их к вычислению пределов степенно-показательных, показательных и логарифмических функций.**

1. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{\frac{x+1}{x}}$;
2. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+1}{x^2-1}\right)^{x^2}$;
3. $\lim\limits_{x\to 0}\left(1+\operatorname{tg}^2\sqrt{x}\right)^{\frac{1}{2x}}$;
4. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(x+a)-\ln a}{x}$;
5. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{e^x-e}{x-1}$.

**Задание 5. Непрерывность функции.**

1. Проверить, непрерывна ли функция в точках $x_1=1,\ x_2=3$. Установить вид разрыва, если $y(x)=\frac{2x}{x^2-2x-3}$.
2. Найти точки разрыва, если они есть и сделать чертеж функции

$$y(x)=\begin{cases}0, & \text{при } x\le 0,\\ x+1, & \text{при } 0<x\le 1,\\ 2x, & \text{при } x>1.\end{cases}$$

**Вариант 2.**

**Задание 1. Область определения функции. Основные элементарные функции и их свойства. Построение графиков.**

1. Найти область определения функций:
   (a) $y(x)=\arcsin\frac{x+2}{4-x}$;
   (b) $y(x)=\lg(x-7)+2^{x-3}$.
2. Определить четность и нечетность функции $y(x)=\operatorname{tg}x^3+4x^9$.
3. С помощью элементарных преобразований построить график функции $y(x)=|(|x|-1)^2-7|$.

**Задание 2. Вычисление пределов последовательностей, дробно-рациональных и иррациональных функций.**

1. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(n+1)^4-(n-1)^4}{(n+1)^4+(n-1)^4}$;
2. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(n+3)!+(n+2)!}{(n+3)!-(n+2)!}$;
3. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{(x-1)\sqrt{2+x}}{x^2-1}$;
4. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sqrt[5]{x^7+3}+\sqrt{2x^3-1}}{\sqrt{x^8+x^7+1}-x}$;
5. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1+x-3x^3}{1+x+3x^3}$;
6. $\lim\limits_{x\to 5}\frac{\sqrt{x-1}-2}{x-5}$;
7. $\lim\limits_{h\to 0}\frac{\sqrt[3]{1+h^3}-1}{h^2}$;
8. $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+1}-x)$;
9. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^3}{2x^2-1}-\frac{x^2}{2x+1}\right)$.

**Задание 3. Первый замечательный предел. Эквивалентные бесконечно малые. Применение их к вычислению пределов от тригонометрических функций.**

1. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{\operatorname{tg} x}$;
2. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{arctg} 2x}{\arcsin^2 2x}$;
3. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos(a+x)-\cos(a-x)}{x}$;
4. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{\cos x}-1}{\operatorname{tg}^2 x}$;
5. $\lim\limits_{x\to 1}(1-x)\cdot\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2}$.

**Задание 4. Второй замечательный предел. Сравнение бесконечно малых. Применение их к вычислению пределов степенно-показательных, показательных и логарифмических функций.**

1. $\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{1+x}{2+x}\right)^{\frac{1-\sqrt{x}}{1-x}}$;
2. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{3x-4}{3x+2}\right)^{\frac{x+1}{3}}$;
3. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(1+\cos x)^{\frac{3}{\cos x}}$;
4. $\lim\limits_{x\to\infty} x\cdot[\ln(x+a)-\ln x]$;
5. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{x^2}-1}{x^2}$.

**Задание 5. Непрерывность функции.**

1. Проверить, непрерывна ли функция в точках $x_1=2,\ x_2=4$. Установить вид разрыва, если $y(x)=4^{\frac{1}{x-2}}$.
2. Найти точки разрыва, если они есть и сделать чертеж функции

$$y(x)=\begin{cases}2x, & \text{при } x\le 0,\\ x^2+1, & \text{при } 0<x\le 1,\\ 2, & \text{при } x>1.\end{cases}$$

**Вариант 3.**

**Задание 1. Область определения функции. Основные элементарные функции и их свойства. Построение графиков.**

1. Найти область определения функций:
   (a) $y(x)=\sqrt[3]{\frac{1}{x}}+\arcsin\frac{x+3}{2x-1}$;
   (b) $y(x)=\lg(x^2-3x+2)+\frac{4}{x^2-1}$.
2. Определить четность и нечетность функции $y(x)=x^3\operatorname{arctg} 2x$.

3. С помощью элементарных преобразований построить график функции $y(x) = |2 - 2^{-|x|}|$.

**Задание 2. Вычисление пределов последовательностей, дробно-рациональных и иррациональных функций.**

1. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{(n+2)!+(n+1)!}{(n+2)!-(n+1)!}$;
2. $\lim\limits_{n\to\infty} \left[\frac{1+2+3+...+n}{n+2} - \frac{n}{2}\right]$;
3. $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^2-1}{2x^2+1}$;
4. $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x^2+1}+\sqrt[3]{x^2+1}}{\sqrt[4]{x^4+1}-\sqrt[5]{x^4+1}}$;
5. $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}} \frac{8x^3-1}{6x^2-5x+1}$;
6. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x}-1}{x^2}$;
7. $\lim\limits_{h\to 0} \left(\frac{\sqrt[3]{x+h}-\sqrt[3]{x}}{h}\right)$;
8. $\lim\limits_{x\to\infty} (\sqrt{x^2+1} - \sqrt{x^2-1})$;
9. $\lim\limits_{x\to 1} \left[\frac{x+2}{x^2-5x+4} - \frac{x-4}{3(x^2-3x+2)}\right]$.

**Задание 3. Первый замечательный предел. Эквивалентные бесконечно малые. Применение их к вычислению пределов от тригонометрических функций.**

1. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin 2x}{\sin 3x}$;
2. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\arcsin^2 x}{x^2}$;
3. $\lim\limits_{\alpha\to 0} \frac{(1-\cos\alpha)^2}{\operatorname{tg}^3\alpha-\sin^3\alpha}$;
4. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sqrt{\cos 5x}-\sqrt{\cos 3x}}{\sin^2 x}$;
5. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x-\cos x}{\cos 2x}$.

**Задание 4. Второй замечательный предел. Сравнение бесконечно малых. Применение их к вычислению пределов степенно-показательных, показательных и логарифмических функций.**

1. $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \left(\frac{x+1}{2x-1}\right)^x$;
2. $\lim\limits_{x\to\infty} \left(1 + \frac{1}{x^2}\right)^x$;
3. $\lim\limits_{x\to 0} \left(1 + 3\operatorname{tg}^2 x\right)^{\operatorname{ctg}^2 x}$;
4. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln(3+x)-\ln 3}{x}$;
5. $\lim\limits_{x\to 1} \frac{e^{2x}-e^2}{x-1}$.

**Задание 5. Непрерывность функции.**

1. Проверить, непрерывна ли функция в точках $x_1 = 1,\ x_2 = 2$. Установить вид разрыва, если $y(x) = \frac{x^2}{x-2}$.

2. Найти точки разрыва, если они есть и сделать чертеж функции

$$y(x) = \begin{cases} 2x-1, & \text{при } x \le 0, \\ x^2+1, & \text{при } 0 < x \le 1, \\ 2x, & \text{при } x > 1. \end{cases}$$

**Вариант 4.**

**Задание 1. Область определения функции. Основные элементарные функции и их свойства. Построение графиков.**

1. Найти область определения функций:

   (a) $y(x) = \sqrt[3]{x-3} + \arcsin\frac{x+5}{x-4}$;

   (b) $y(x) = \sqrt[4]{x^2-3x} + \frac{x-1}{2x+6}$.

2. Определить четность и нечетность функции $y(x) = x^4 + 6x^2 + \arcsin 5x$.

3. С помощью элементарных преобразований построить график функции $y(x) = |\log_{\frac{1}{2}}(|x|-1) - 2|$.

**Задание 2. Вычисление пределов последовательностей, дробно-рациональных и иррациональных функций.**

1. $\lim\limits_{k\to\infty} \frac{k!}{(k+1)!-k!}$;
2. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2^n-1}{2^n+1}$;
3. $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^2-3x+1}{x^4-5x}$;
4. $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x^3-2x^2+1}+\sqrt[3]{x^4+1}}{\sqrt[4]{x^6+6x^5+2}-\sqrt[5]{x^7+3x^3+1}}$;
5. $\lim\limits_{x\to 1} \frac{3x^2-5x+2}{x^2-4x+3}$;
6. $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x^2-\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}$;
7. $\lim\limits_{h\to 0} \frac{\sqrt[3]{1+h}-\sqrt[3]{1-h}}{h}$;
8. $\lim\limits_{x\to\infty} \left[\frac{3x^2}{2x+1} - \frac{(2x-1)(3x^2+x+2)}{4x^2}\right]$;
9. $\lim\limits_{x\to\infty} x\cdot(\sqrt{x^2+1}-x)$.

**Задание 3. Первый замечательный предел. Эквивалентные бесконечно малые. Применение их к вычислению пределов от тригонометрических функций.**

1. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin 3x}{\sin 2x}$;
2. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\arcsin 3x}{\operatorname{arctg} 2x}$;
3. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin(b+x)-\sin(b-x)}{x}$;
4. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sqrt{\cos x}-1}{x^2}$;
5. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{3}} \frac{\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)}{1-2\cos x}$.

**Задание 4. Второй замечательный предел. Сравнение бесконечно малых. Применение их к вычислению пределов степенно-показательных, показательных и логарифмических функций.**

1. $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(\frac{2x+1}{x-1}\right)^x$;
2. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x^2}$;
3. $\lim\limits_{x\to 0}(1+\sin x)^{\frac{1}{x}}$;
4. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+\operatorname{tg} x)}{\sin x}$;
5. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{\sin 2x}-e^{\sin x}}{x}$.

**Задание 5. Непрерывность функции.**

1. Проверить, непрерывна ли функция в точках $x_1=-1$, $x_2=1$. Установить вид разрыва, если $y(x)=e^{\frac{1}{x+1}}$.

2. Найти точки разрыва, если они есть и сделать чертеж функции

$$y(x)=\begin{cases}\cos x, & \text{при } x\le 0,\\ 1-x, & \text{при } 0<x\le 1,\\ x^2, & \text{при } x>1.\end{cases}$$

**Вариант 5.**

**Задание 1. Область определения функции. Основные элементарные функции и их свойства. Построение графиков.**

1. Найти область определения функций:

   (a) $y(x)=\arcsin\frac{x-4}{x+2}+\operatorname{arctg}\frac{x+1}{3}$;

   (b) $y(x)=\lg(x-3)+\frac{x^2-1}{3x}$.

2. Определить четность и нечетность функции $y(x)=\sin^5 3x\cos^2 6x$.

3. С помощью элементарных преобразований построить график функции $y(x)=\left|1-3^{|x|-3}\right|$.

**Задание 2. Вычисление пределов последовательностей, дробно-рациональных и иррациональных функций.**

1. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{4n^3}$;
2. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(n+1)!}{(n+2)!n}$;
3. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^4+5x^3+7}{2x^5+3x^4+1}$;
4. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sqrt[5]{1+3x^4}-\sqrt[4]{1+2x}}{x+x^2}$;
5. $\lim\limits_{x\to 3}\frac{x^2-x-6}{2x^2+x-21}$;
6. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2-\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}$;
7. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sqrt[3]{x^2}-2\sqrt[3]{x}+1}{(x-1)^2}$;
8. $\lim\limits_{x\to 2}\left[\frac{1}{x^2-3x+2}-\frac{1}{x(x-2)}\right]$;
9. $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+2x+1}-\sqrt{x^2+3x+1})$.

**Задание 3. Первый замечательный предел. Эквивалентные бесконечно малые. Применение их к вычислению пределов от тригонометрических функций.**

1. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2}{\sqrt{\sin x}}$;
2. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\arcsin(2x-x^2)}{\operatorname{arctg}^2 x}$;
3. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} x-\sin x}{\sin^2 x}$;
4. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+\sin x}-\sqrt{1-2\sin x}}{\sin x}$;
5. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\sqrt{2}\cos x-1}{1-\operatorname{tg}^2 x}$.

**Задание 4. Второй замечательный предел. Сравнение бесконечно малых. Применение их к вычислению пределов степенно-показательных, показательных и логарифмических функций.**

1. $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{x+1}{x}}$;
2. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2x+3}{2x+1}\right)^{x-1}$;
3. $\lim\limits_{x\to 1}(1+\sin\pi x)^{\operatorname{ctg}\pi x}$;
4. $\lim\limits_{x\to a}\frac{\ln x-\ln a}{x-a}$;
5. $\lim\limits_{x\to 0}(x+e^x)^{\frac{2}{x}}$.

**Задание 5. Непрерывность функции.**

1. Проверить, непрерывна ли функция в точках $x=1$, $x=2$. Установить вид разрыва, если $y(x)=2^{\frac{x+2}{x-1}}$.
2. Найти точки разрыва, если они есть и сделать чертеж функции

$$y(x)=\begin{cases}\operatorname{tg} x, & \text{при } x\le 0,\\ x, & \text{при } 0<x\le 1,\\ 2, & \text{при } x>1.\end{cases}$$

**Вариант 6.**

**Задание 1. Область определения функции. Основные элементарные функции и их свойства. Построение графиков.**

1. Найти область определения функций:

   (a) $y(x) = \sqrt[4]{4 + 2x - 2x^2}$;

   (b) $y(x) = \arccos \frac{x-1}{2-x} + \sqrt[3]{\frac{1}{x}}$.

2. Определить четность и нечетность функции $y(x) = \frac{\cos x^3 + 7x^{12}}{x^6 + \sin^2 x^3}$.

3. С помощью элементарных преобразований построить график функции $y(x) = \left|\arcsin(|x| - 1) - \frac{1}{2}\right|$.

**Задание 2. Вычисление пределов последовательностей, дробно-рациональных и иррациональных функций.**

1. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n(n+1)}{(n+2)(n+3)}$;
2. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{(n+3)!}{(n+1)!n^2}$;
3. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2n^4+3n^2+5n-6}{n^3+3n^2+7n-1}$;
4. $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x^2+3x}}{\sqrt[3]{x^3-2x^2}}$;
5. $\lim\limits_{x\to 1} \frac{2x^2+5x-7}{3x^2-x-2}$;
6. $\lim\limits_{x\to 1} \frac{\sqrt{5-x}-2}{\sqrt{2-x}-1}$;
7. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{5x}{\sqrt[3]{1+x}-\sqrt[3]{1-x}}$;
8. $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\frac{2x^2}{3-x} - \frac{2-x^2}{3x}\right)$;
9. $\lim\limits_{x\to\infty} (\sqrt{x^2 - 1} - x)$.

**Задание 3. Первый замечательный предел. Эквивалентные бесконечно малые. Применение их к вычислению пределов от тригонометрических функций.**

1. $\lim\limits_{x\to 0} \left(\operatorname{tg} 3x \operatorname{ctg}^2 2x\right)$;
2. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{3x \operatorname{arctg} 3x}{\arcsin^2 4x}$;
3. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1-\cos(mx)}{x^2}$;
4. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+2\sin x}-\sqrt{1-\sin x}}{x}$;
5. $\lim\limits_{y\to a} \left[\sin \frac{y-a}{2} \operatorname{tg} \frac{\pi y}{2a}\right]$.

**Задание 4. Второй замечательный предел. Сравнение бесконечно малых. Применение их к вычислению пределов степенно-показательных, показательных и логарифмических функций.**

1. $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{x+1}$;
2. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^2-x+1}{x^2+x+1}\right)^{-x}$;
3. $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x-\sin x)^{\frac{1}{x}}$;
4. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{2x}-1}{x}$;
5. $\lim\limits_{x\to 2}\frac{\ln x-\ln 2}{x-2}$.

**Задание 5. Непрерывность функции.**

1. Проверить, непрерывна ли функция в точках $x_1=3,\ x_2=5$. Установить вид разрыва, если $y(x)=\frac{x+3}{x^2-4x+3}$.
2. Найти точки разрыва, если они есть и сделать чертеж функции

$$y(x)=\begin{cases}3x^2, & \text{при } x\le 0,\\ x, & \text{при } 0<x\le 1,\\ 2, & \text{при } x>1.\end{cases}$$

**Вариант 7.**

**Задание 1. Область определения функции. Основные элементарные функции и их свойства. Построение графиков.**

1. Найти область определения функций:
   (a) $y(x)=3\arcsin\frac{x+5}{2x-7}$;
   (b) $y(x)=\lg[\lg(x+1)]-\frac{x}{x^2+4}$.
2. Определить четность и нечетность функции $y(x)=4-2x^4+\sin^2 x$.
3. С помощью элементарных преобразований построить график функции $y(x)=|\sin(1-2|x|)|$.

**Задание 2. Вычисление пределов последовательностей, дробно-рациональных и иррациональных функций.**

1. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(n+1)^2+(n-1)^2}{(n+1)^3-(n-1)^3}$;
2. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3^n(n+2)}{3^{n+2}n^2}$;
3. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^3+2x^2+3x+4}{4x^3+3x^2+2x+1}$;
4. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sqrt[4]{x^5+2}-\sqrt[3]{x^2+1}}{\sqrt[5]{x^4+2}-\sqrt[3]{x^3+1}}$;
5. $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2-5x+6}{x^2-12x+20}$;
6. $\lim\limits_{x\to 2}\frac{\sqrt{1+x+x^2}-\sqrt{7+2x-x^2}}{x^2-2x}$;
7. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{1+x}-\sqrt[3]{1-x}}{5x}$;
8. $\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{1}{1-x}-\frac{3}{1-x^3}\right)$;
9. $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{(x+1)(x-2)}-x)$.

**Задание 3. Первый замечательный предел. Эквивалентные бесконечно малые. Применение их к вычислению пределов от тригонометрических функций.**

1. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{\sin 3x}$;
2. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\arcsin^2 x}{x^2}$;
3. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin(a+x)-\sin(a-x)}{\sin x}$;
4. $\lim\limits_{y\to 0}\frac{\sqrt{1+\sin y}-\sqrt{1-\sin y}}{\operatorname{tg} y}$;
5. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{3}}\frac{1-2\cos x}{\pi-3x}$.

**Задание 4. Второй замечательный предел. Сравнение бесконечно малых. Применение их к вычислению пределов степенно-показательных, показательных и логарифмических функций.**

1. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+1}{x+2}\right)^{\frac{2x+1}{x}}$;
2. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x-1}{x+3}\right)^{x+2}$;
3. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\cos x\right)^{\frac{1}{\sin x}}$;
4. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+5x)}{3x}$;
5. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{\operatorname{tg} 2x}-e^{\operatorname{tg} x}}{x}$.

**Задание 5. Непрерывность функции.**

1. Проверить, непрерывна ли функция в точках $x_1=-3,\ x_2=0$. Установить вид разрыва, если $y(x)=2^{\frac{1}{3+x}}$.
2. Найти точки разрыва, если они есть и сделать чертеж функции

$$y(x)=\begin{cases}1+x^2, & \text{при } x\le 0,\\ 1, & \text{при } 0<x\le 2,\\ x-2, & \text{при } x>2.\end{cases}$$

**Вариант 8.**

**Задание 1. Область определения функции. Основные элементарные функции и их свойства. Построение графиков.**

1. Найти область определения функций:
   (a) $y(x)=\arcsin\frac{x-2}{5x-3}$;
   (b) $y(x)=\lg(3x-x^2)$.
2. Определить четность и нечетность функции $y(x)=\sqrt{1+x^2}-\sqrt{1-x^2}$.

3. С помощью элементарных преобразований построить график функции $y(x) = \left|5^{|x|-2} - 3\right|$.

**Задание 2. Вычисление пределов последовательностей, дробно-рациональных и иррациональных функций.**

1. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{(n+2)(n+3)}{n(n+1)}$;
2. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{(n+7)!-(n+6)!}{(n+7)!}$;
3. $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{2x^4-3x^3+5}{3x^4-5x^2+1}$;
4. $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{(\sqrt{x^2+1}+x)^2}{\sqrt[3]{x^6+1}}$;
5. $\lim\limits_{x\to 1} \frac{2x^3-2x^2+x-1}{x^3-x^2+3x-3}$;
6. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x}{\sqrt[3]{x+8}-2}$;
7. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{a-\sqrt{x^2+a^2}}{b-\sqrt{b^2-x^2}}$;
8. $\lim\limits_{x\to 1} \left(\frac{1}{x-1} - \frac{3}{x^3-1}\right)$;
9. $\lim\limits_{x\to\infty} x^{\frac{4}{3}} \cdot (\sqrt[3]{x^2+1} - \sqrt[3]{x^2-1})$.

**Задание 3. Первый замечательный предел. Эквивалентные бесконечно малые. Применение их к вычислению пределов от тригонометрических функций.**

1. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} 6x}{\sin 9x}$;
2. $\lim\limits_{y\to 0} \frac{\arcsin y}{2y}$;
3. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1-\cos 3x}{x \sin 3x}$;
4. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x\sin x}-\cos x}{\sin^2 \frac{x}{2}}$;
5. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\sqrt[3]{(1-\sin x)^2}}$.

**Задание 4. Второй замечательный предел. Сравнение бесконечно малых. Применение их к вычислению пределов степенно-показательных, показательных и логарифмических функций.**

1. $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\frac{2x+1}{x-1}\right)^{\frac{1}{x}}$;
2. $\lim\limits_{x\to\infty} \left(1 + \frac{k}{x}\right)^{mx}$;
3. $\lim\limits_{x\to 0} \left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\frac{\sin x}{x-\sin x}}$;
4. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln(1+\sin^2 x)}{\sin x}$;
5. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^{\sqrt{x}}-1}{x}$.

**Задание 5. Непрерывность функции.**

1. Проверить, непрерывна ли функция в точках $x_1 = 2,\ x_2 = 3$. Установить вид разрыва, если $y(x) = 3^{\frac{1}{x-2}}$.

2. Найти точки разрыва, если они есть и сделать чертеж функции

$$y(x) = \begin{cases} x+1, & \text{при } x \le 0, \\ 1, & \text{при } 0 < x \le 2, \\ 2x-2, & \text{при } x > 2. \end{cases}$$

**Вариант 9.**

**Задание 1. Область определения функции. Основные элементарные функции и их свойства. Построение графиков.**

1. Найти область определения функций:

   (a) $y(x) = 5 \arcsin \frac{x-3}{2x-7}$;

   (b) $y(x) = \lg \frac{x^2+9}{3x} - \frac{2-x}{3+x}$.

2. Определить четность и нечетность функции $y(x) = \sqrt[3]{(1-2x)^2}$.

3. С помощью элементарных преобразований построить график функции $y(x) = \left|\sin\left(|x| + \frac{1}{2}\right) - \frac{3}{2}\right|$.

**Задание 2. Вычисление пределов последовательностей, дробно-рациональных и иррациональных функций.**

1. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{n^3+1}$;

2. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{(n+4)!+(n+3)!}{(n+4)!-(n+3)!}$;

3. $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{3x^3-2x^2-4}{4x-x^2-5x^3}$;

4. $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x^3-2x^2+1}+\sqrt[3]{x^4+1}}{\sqrt{x^6+6x^5+2}+\sqrt[5]{x^7+3x^3+1}}$;

5. $\lim\limits_{x\to-1} \frac{2x^3+2x^2+3x+3}{x^3+x^2+x+1}$;

6. $\lim\limits_{x\to5} \frac{\sqrt{1+3x}-\sqrt{2x+6}}{x^2-5x}$;

7. $\lim\limits_{x\to0} \frac{x^2+x^3}{\sqrt[3]{1+3x^2}-1}$;

8. $\lim\limits_{t\to2} \left(\frac{3t^2+t}{(t-2)(t^2+t+1)} - \frac{2}{t-2}\right)$;

9. $\lim\limits_{x\to\infty} \left[(x+1)^{\frac{2}{3}} - (x-1)^{\frac{2}{3}}\right]$.

**Задание 3. Первый замечательный предел. Эквивалентные бесконечно малые. Применение их к вычислению пределов от тригонометрических функций.**

1. $\lim\limits_{x\to0} \frac{\arcsin^2 x}{2x}$;

2. $\lim\limits_{x\to0} \frac{\cos mx-\cos nx}{x^2}$;

3. $\lim\limits_{x\to0} \frac{1-\sqrt{\cos x}}{\sin^2 x}$;

4. $\lim\limits_{x\to0} \frac{\sin 3x}{x}$;

5. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{3}} \frac{1-2\cos x}{\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)}$.

**Задание 4. Второй замечательный предел. Сравнение бесконечно малых. Применение их к вычислению пределов степенно-показательных, показательных и логарифмических функций.**

1. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{3}{x}\right)^{2x}$;
2. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n+5}{n+2}\right)^{n}$;
3. $\lim\limits_{x\to 0}(1+5\sin x)^{\frac{1}{\operatorname{tg} x}}$;
4. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+10x)}{7x}$;
5. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-e^{-x}}{\sin x}$.

**Задание 5. Непрерывность функции.**

1. Проверить, непрерывна ли функция в точках $x_1 = 3,\ x_2 = 5$. Установить вид разрыва, если $y(x) = 2^{\frac{1}{x-5}}$.

2. Найти точки разрыва, если они есть и сделать чертеж функции

$$y(x) = \begin{cases} x^2+1, & \text{при } x \le 0, \\ 1-x, & \text{при } 0 < x \le 1, \\ 2x-1, & \text{при } x > 1. \end{cases}$$

**Вариант 10.**

**Задание 1. Область определения функции. Основные элементарные функции и их свойства. Построение графиков.**

1. Найти область определения функций:

   (a) $y(x) = \frac{x^2+1}{x-2} - \sqrt[4]{\frac{x+3}{x^2-x+1}}$;

   (b) $y(x) = \lg(9-x^2) + \sqrt{x-4}$.

2. Определить четность и нечетность функции $y(x) = x^2 \cdot \sqrt[3]{x} + 2\sin x$.

3. С помощью элементарных преобразований построить график функции $y(x) = |2\cdot|\sin(-x)|-1|$.

**Задание 2. Вычисление пределов последовательностей, дробно-рациональных и иррациональных функций.**

1. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^3}{(n+1)(n+2)(n+3)}$;
2. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{(n+2)!2n}{3(n+3)!}$;
3. $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{1-4x}{2x+3}$;
4. $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\sqrt[3]{x^2+1}+\sqrt{x^2+5}}{x}$;
5. $\lim\limits_{x\to-2} \frac{2x^2-5x-18}{3x^2+x-10}$;
6. $\lim\limits_{x\to0} \frac{\sqrt{x^2+9}-3}{\sqrt{x^2+25}-5}$;
7. $\lim\limits_{x\to2} \frac{\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{2}}{x^2-4}$;
8. $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\frac{x^3}{2x^2+1} - \frac{2x^2}{4x-1}\right)$;
9. $\lim\limits_{x\to\infty} x^{\frac{3}{2}} \cdot (\sqrt{x^3+1} - \sqrt{x^3-1})$.

**Задание 3. Первый замечательный предел. Эквивалентные бесконечно малые. Применение их к вычислению пределов от тригонометрических функций.**

1. $\lim\limits_{x\to0} \frac{\sin^2 x}{x}$;
2. $\lim\limits_{x\to0} \frac{\operatorname{arctg} 12x}{x}$;
3. $\lim\limits_{x\to0} \frac{1-\cos x}{x\sin x}$;
4. $\lim\limits_{x\to0} \frac{\sqrt{1+\operatorname{tg} x}-\sqrt{1-\operatorname{tg} x}}{x}$;
5. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{1+\cos 2x}}{\sqrt{\pi}-\sqrt{2x}}$.

**Задание 4. Второй замечательный предел. Сравнение бесконечно малых. Применение их к вычислению пределов степенно-показательных, показательных и логарифмических функций.**

1. $\lim\limits_{x\to0} \left(\frac{\sin 2x}{x}\right)^{1+x}$;
2. $\lim\limits_{x\to\infty} \left(1+\frac{1}{x}\right)^{-nx}$;
3. $\lim\limits_{x\to0} (\cos x)^{\frac{1}{x}}$;
4. $\lim\limits_{x\to\infty} x\left[\ln(x+1) - \ln x\right]$;
5. $\lim\limits_{x\to0} \frac{1-e^{-2x}}{\sin 5x}$.

**Задание 5. Непрерывность функции.**

1. Проверить, непрерывна ли функция в точках $x_1 = 2,\ x_2 = 4$. Установить вид разрыва, если $y(x) = 5^{\frac{1}{x-4}}$.
2. Найти точки разрыва, если они есть и сделать чертеж функции

$$y(x) = \begin{cases} -x, & \text{при } x \le 0, \\ x^2, & \text{при } 0 < x \le 1, \\ x-1, & \text{при } x > 1. \end{cases}$$

**Вариант 11.**

**Задание 1. Область определения функции. Основные элементарные функции и их свойства. Построение графиков.**

1. Найти область определения функций:

   (a) $y(x) = 2\arcsin\frac{x-2}{x+3}$;

   (b) $y(x) = \lg(x^2-1) + \frac{x+3}{x^2+x-1}$.

2. Определить четность и нечетность функции $y(x) = \log_2\frac{2+x}{2-x}$.

3. С помощью элементарных преобразований построить график функции $y(x) = \left|\arccos\frac{1+|x|}{2} - \frac{\pi}{2}\right|$.

**Задание 2. Вычисление пределов последовательностей, дробно-рациональных и иррациональных функций.**

1. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(2n+1)^4+(n+1)^4}{(2n+1)^4-(n-1)^4}$;
2. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(n+1)!}{n!-(n-1)!}$;
3. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{4x^3+4x^2+x+1}{3x^3+2x^2+1}$;
4. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sqrt[3]{x^3+2x-1}}{x+1}$;
5. $\lim\limits_{x\to-1}\frac{2x^2-5x-7}{3x^2+x-2}$;
6. $\lim\limits_{x\to4}\frac{\sqrt{6x+1}-5}{\sqrt{x}-2}$;
7. $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sqrt[3]{1+3x^2}-1}{x^2+x^3}$;
8. $\lim\limits_{x\to3}\left(\frac{1}{x-3}-\frac{6}{x^2-9}\right)$;
9. $\lim\limits_{x\to\infty} x\cdot(\sqrt{x^2+1}-x)$.

**Задание 3. Первый замечательный предел. Эквивалентные бесконечно малые. Применение их к вычислению пределов от тригонометрических функций.**

1. $\lim\limits_{x\to0}\frac{\operatorname{tg}2x}{\sin5x}$;
2. $\lim\limits_{x\to0}\frac{7x}{\operatorname{arctg}3x}$;
3. $\lim\limits_{x\to0}\frac{1-\cos2x}{x\sin3x}$;
4. $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sqrt{1+\operatorname{tg}x}-\sqrt{1-\operatorname{tg}x}}{\sin x}$;
5. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\sin x-\cos x}{\pi-4x}$.

**Задание 4. Второй замечательный предел. Сравнение бесконечно малых. Применение их к вычислению пределов степенно-показательных, показательных и логарифмических функций.**

1. $\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{x-1}{x^2-1}\right)^{1+x}$;
2. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{n}{x}\right)^{x}$;
3. $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{x^2}}$;
4. $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{\ln(1+e^x)}{e^x}$;
5. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{(1-e^{\sqrt{x}})^2}{\sin x}$.

**Задание 5. Непрерывность функции.**

1. Проверить, непрерывна ли функция в точках $x_1 = 4,\ x_2 = 3$. Установить вид разрыва, если $y(x) = 6^{\frac{1}{x-3}}$.
2. Найти точки разрыва, если они есть и сделать чертеж функции

$$y(x) = \begin{cases} x^2+1, & \text{при } x \le 0, \\ 2x, & \text{при } 0 < x \le 3, \\ x+3, & \text{при } x > 3. \end{cases}$$

**Вариант 12.**

**Задание 1. Область определения функции. Основные элементарные функции и их свойства. Построение графиков.**

1. Найти область определения функций:
   (a) $y(x) = \sqrt[3]{\frac{x-1}{x}} + 2^{\frac{1}{x}}$;
   (b) $y(x) = \arccos\frac{x+2}{x-1}$.
2. Определить четность и нечетность функции $y(x) = |x| - 5e^{x^2}$.
3. С помощью элементарных преобразований построить график функции $y(x) = |3\log_2|x| - 1|$.

**Задание 2. Вычисление пределов последовательностей, дробно-рациональных и иррациональных функций.**

1. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(2n+1)^4+(3n+1)^4}{(2n+1)^4-(3n-1)^4}$;
2. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(2n)!-(2n-1)!}{(2n)!}$;
3. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2-2x+3}{x^3+7x-1}$;
4. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x^4-2}{\sqrt{x^8+3x+4}}$;
5. $\lim\limits_{x\to-5}\frac{x^2+2x-15}{2x^2+7x-15}$;
6. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt{x}-1}$;
7. $\lim\limits_{x\to-1}\frac{\sqrt{4+x+x^2}-2}{x+1}$;
8. $\lim\limits_{x\to 2}\left(\frac{1}{x-2}-\frac{12}{x^3-8}\right)$;
9. $\lim\limits_{x\to-\infty}\left[(x+1)^{\frac{2}{3}}-(x-1)^{\frac{2}{3}}\right]$.

**Задание 3. Первый замечательный предел. Эквивалентные бесконечно малые. Применение их к вычислению пределов от тригонометрических функций.**

1. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{2x}{\operatorname{tg} x}$;
2. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\arcsin 5x}{3x}$;
3. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1-\cos(1-\cos x)}{x^4}$;
4. $\lim\limits_{t\to 0} \frac{\sqrt[3]{\cos t}-\cos t}{t^2}$;
5. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\pi-2x}$.

**Задание 4. Второй замечательный предел. Сравнение бесконечно малых. Применение их к вычислению пределов степенно-показательных, показательных и логарифмических функций.**

1. $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\frac{1}{x^2}\right)^{\frac{2x}{x+1}}$;
2. $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\frac{1+x^2}{2+x^2}\right)^{x}$;
3. $\lim\limits_{x\to 1} (3-2x)^{\frac{x}{1-x}}$;
4. $\lim\limits_{x\to\infty} (2x+3)[\ln(x+2)-\ln x]$;
5. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^{\sqrt{x}}-1}{\sqrt{4\sin 4x}}$.

**Задание 5. Непрерывность функции.**

1. Проверить, непрерывна ли функция в точках $x_1 = 7,\ x_2 = 5$. Установить вид разрыва, если $y(x) = 7^{\frac{1}{x-5}}$.
2. Найти точки разрыва, если они есть и сделать чертеж функции

$$y(x) = \begin{cases} -x, & \text{при } x \le 0, \\ x^2, & \text{при } 0 < x \le 2, \\ x+1, & \text{при } x > 2. \end{cases}$$

**Вариант 13.**

**Задание 1. Область определения функции. Основные элементарные функции и их свойства. Построение графиков.**

1. Найти область определения функций:
   (a) $y(x) = \frac{4x-x^2}{x+2}$;
   (b) $y(x) = \sqrt[4]{x^2-4} + \lg(x^2+4x+5)$.
2. Определить четность и нечетность функции $y(x) = 2^x + 2^{-x}$.

3. С помощью элементарных преобразований построить график функции $y(x) = |2\log_2|1-x| - 4|$.

**Задание 2. Вычисление пределов последовательностей, дробно-рациональных и иррациональных функций.**

1. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{(n+1)^4-(n-1)^4}{(n+1)^4+(n-1)^4}$;
2. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2+(n+1)!}{(n+2)!}$;
3. $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{2x^4-x+3}{x^3-8x+5}$;
4. $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{2x+3}{x+\sqrt[3]{x}}$;
5. $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x^2+5x-6}{x^2-3x+2}$;
6. $\lim\limits_{x\to 3} \frac{\sqrt{2x-2}-2}{\sqrt{x+1}-2}$;
7. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sqrt[3]{x+1}-1}{x}$;
8. $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\frac{x^3}{x^2+1} - x\right)$;
9. $\lim\limits_{x\to-\infty} \left[\sqrt[3]{1-x^3} + x\right]$.

**Задание 3. Первый замечательный предел. Эквивалентные бесконечно малые. Применение их к вычислению пределов от тригонометрических функций.**

1. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin 7x}{x}$;
2. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\operatorname{arctg}^2 x}{\arcsin^2 9x}$;
3. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{2x\sin x}{\frac{1}{\cos x}-1}$;
4. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg}^2 x}{\cos x - \sqrt[3]{\cos x}}$;
5. $\lim\limits_{t\to 1} \frac{1-t^2}{\sin \pi t}$.

**Задание 4. Второй замечательный предел. Сравнение бесконечно малых. Применение их к вычислению пределов степенно-показательных, показательных и логарифмических функций.**

1. $\lim\limits_{x\to 0} \left(\frac{x^2-2x+3}{x^2-3x+2}\right)^{\frac{\sin x}{x}}$;
2. $\lim\limits_{x\to 1} (2x-1)^{\frac{3x}{x-1}}$;
3. $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\frac{x^3+1}{x^3-1}\right)^{x}$;
4. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln^2\left(1+\sqrt{x\sin x}\right)}{x}$;
5. $\lim\limits_{x\to\infty} (3x^2-1)\cdot\left(e^{\frac{1}{x}}-1\right)$.

**Задание 5. Непрерывность функции.**

1. Проверить, непрерывна ли функция в точках $x_1 = 6,\ x_2 = 8$. Установить вид разрыва, если $y(x) = 10^{\frac{1}{x-6}}$.

2. Найти точки разрыва, если они есть и сделать чертеж функции

$$y(x) = \begin{cases} x-3, & \text{при } x<0, \\ x+1, & \text{при } 0 \le x \le 4, \\ 3+\sqrt{x}, & \text{при } x>4. \end{cases}$$

**Вариант 14.**

**Задание 1. Область определения функции. Основные элементарные функции и их свойства. Построение графиков.**

1. Найти область определения функций:

   (a) $y(x) = \operatorname{arctg} \frac{x+4}{3x}$;

   (b) $y(x) = \frac{2}{x+2} + \lg(x^2-1)$.

2. Определить четность и нечетность функции $y(x) = \sqrt[3]{(x+1)^2} + \sqrt[3]{(x-1)^2}$.

3. С помощью элементарных преобразований построить график функции $y(x) = |2\sin(|x|+2)-1|$.

**Задание 2. Вычисление пределов последовательностей, дробно-рациональных и иррациональных функций.**

1. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^4 n!}{(n+4)!}$;

2. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2^n\cdot(n+2)^2}{2^{n+1}\cdot n^2}$;

3. $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{2x^2-3x-4}{x^4+1}$;

4. $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{2x^2-3x+4}{\sqrt{x^4-8}}$;

5. $\lim\limits_{x\to-4} \frac{x^3+4x^2}{x^2+x-12}$;

6. $\lim\limits_{x\to-3} \frac{\sqrt{18+x^2}-3\sqrt{2x+9}}{x+3}$;

7. $\lim\limits_{x\to2} \frac{\sqrt[3]{4x}-2}{x-2}$;

8. $\lim\limits_{x\to1} \left(\frac{1}{x(x-1)} - \frac{1}{x^2-3x+2}\right)$;

9. $\lim\limits_{x\to\infty} x^{\frac{4}{3}} \cdot \left(\sqrt[3]{x^2+1} - \sqrt[3]{x^2-1}\right)$.

**Задание 3. Первый замечательный предел. Эквивалентные бесконечно малые. Применение их к вычислению пределов от тригонометрических функций.**

1. $\lim\limits_{x\to0} \frac{\sin^2 6x}{x^3}$;

2. $\lim\limits_{x\to0} \frac{\arcsin(x^2-x)}{2x}$;

3. $\lim\limits_{x\to0} \frac{1-\cos 2x}{x\sin x}$;

4. $\lim\limits_{x\to0} \frac{\cos x - \sqrt[3]{\cos x}}{x^2}$;

5. $\lim\limits_{x\to1} \frac{\cos\frac{\pi x}{2}}{1-\sqrt{x}}$.

**Задание 4. Второй замечательный предел. Сравнение бесконечно малых. Применение их к вычислению пределов степенно-показательных, показательных и логарифмических функций.**

1. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+2}{2x^2+1}\right)^{x^2}$;
2. $\lim\limits_{x\to 1}(2-x)^{\frac{2x}{1-x}}$;
3. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{6+x}{3+x}\right)^{x}$;
4. $\lim\limits_{x\to\infty}(3x-2)\left[\ln(2x-1)-\ln(2x+1)\right]$;
5. $\lim\limits_{x\to 0}(2e^x-1)^{\frac{1}{x}}$.

**Задание 5. Непрерывность функции.**

1. Проверить, непрерывна ли функция в точках $x_1=7,\ x_2=9$. Установить вид разрыва, если $y(x)=12^{\frac{1}{x-9}}$.

2. Найти точки разрыва, если они есть и сделать чертеж функции

$$y(x)=\begin{cases}\sqrt{1-x}, & \text{при } x\le 0,\\ 0, & \text{при } 0<x\le 2,\\ x-2, & \text{при } x>2.\end{cases}$$

**Вариант 15.**

**Задание 1. Область определения функции. Основные элементарные функции и их свойства. Построение графиков.**

1. Найти область определения функций:

   (a) $y(x)=\sqrt[3]{x-4}+\arccos\frac{x-1}{2x+3}$;

   (b) $y(x)=\frac{x}{x+5}+\lg\left[\lg(x-2)\right]$.

2. Определить четность и нечетность функции $y(x)=\frac{1}{2}(a^x+a^{-x})$.

3. С помощью элементарных преобразований построить график функции $y(x)=\left|\left|\cos\left(x-\frac{\pi}{2}\right)\right|-\frac{1}{2}\right|$.

**Задание 2. Вычисление пределов последовательностей, дробно-рациональных и иррациональных функций.**

1. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{(n+1)!2n}{(n+2)!}$;
2. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{3^n-3^{-n}}{3^n+3^{-n}}$;
3. $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{(2x+3)^3(3x-2)^2}{x^5+5}$;
4. $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\sqrt[3]{x^2+5x}}{x+1}$;
5. $\lim\limits_{x\to 1} \frac{2x^2-2}{x^2-3x+2}$;
6. $\lim\limits_{x\to 9} \frac{\sqrt{x}-3}{\sqrt{2x-2}-4}$;
7. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{2\sqrt[3]{x+8}-4}{x}$;
8. $\lim\limits_{x\to 1} \left(\frac{2}{1-x} - \frac{6}{1-x^3}\right)$;
9. $\lim\limits_{x\to\infty} \left[x - \sqrt[3]{x^3-1}\right]$.

**Задание 3. Первый замечательный предел. Эквивалентные бесконечно малые. Применение их к вычислению пределов от тригонометрических функций.**

1. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x}{\sqrt{1-\cos x}}$;
2. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\operatorname{arctg} 3x}{x}$;
3. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1-x\sin x-\cos^2 x}{\sin^2 x}$;
4. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{(1-\cos 4x)\sqrt{\cos 2x}}{x^2}$;
5. $\lim\limits_{x\to\pi} \frac{\sin x}{1-\frac{x^2}{\pi^2}}$.

**Задание 4. Второй замечательный предел. Сравнение бесконечно малых. Применение их к вычислению пределов степенно-показательных, показательных и логарифмических функций.**

1. $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\frac{x+2}{2x-1}\right)^{x^2}$;
2. $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\frac{x+a}{x-a}\right)^{x}$;
3. $\lim\limits_{x\to 2} (2x-3)^{\frac{3x}{x-2}}$;
4. $\lim\limits_{x\to\infty} (x+2)\left[\ln(2x+3) - \ln(2x-4)\right]$;
5. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^{\alpha x}-e^{\beta x}}{\sin\alpha x-\sin\beta x}$.

**Задание 5. Непрерывность функции.**

1. Проверить, непрерывна ли функция в точках $x_1 = 8$, $x_2 = 10$. Установить вид разрыва, если $y(x) = 25^{\frac{1}{x-8}}$.
2. Найти точки разрыва, если они есть и сделать чертеж функции

$$y(x) = \begin{cases} 2x^2, & \text{при } x \le 0, \\ x, & \text{при } 0 < x \le 1, \\ 2, & \text{при } x > 1. \end{cases}$$

**Вариант 16.**

**Задание 1. Область определения функции. Основные элементарные функции и их свойства. Построение графиков.**

1. Найти область определения функций:

   (a) $y(x) = \sqrt{2 + x - x^2}$;

   (b) $y(x) = \frac{3}{4-x^2} + \lg(x^3 - x)$.

2. Определить четность и нечетность функции $y(x) = x^2 \operatorname{arctg} 3x$.

3. С помощью элементарных преобразований построить график функции $y(x) = \left|2^{|x-1|} - 1\right| + 1$.

**Задание 2. Вычисление пределов последовательностей, дробно-рациональных и иррациональных функций.**

1. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1000n^3+3n^2}{0{,}0001n^4-100n^3+1}$;
2. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{5^{n+2}\cdot n^2}{5^n\cdot(n+2)^2}$;
3. $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{2+3x^3-x^5}{2x+3x^2-3x^5}$;
4. $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}$;
5. $\lim\limits_{x\to 4} \frac{x^3-64}{x^2-7x+12}$;
6. $\lim\limits_{x\to 1} \frac{\sqrt{1+3x^2}-2}{x^2-x}$;
7. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x}{\sqrt[3]{1+x}-1}$;
8. $\lim\limits_{t\to 2} \left(\frac{3t^2+t}{(t-2)(t^2+t+1)} - \frac{2}{t-2}\right)$;
9. $\lim\limits_{x\to\infty} x\cdot(\sqrt{x^2+1} - x)$.

**Задание 3. Первый замечательный предел. Эквивалентные бесконечно малые. Применение их к вычислению пределов от тригонометрических функций.**

1. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\operatorname{arctg} 3x}{\arcsin 2x}$;
2. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sqrt[3]{\sin 2x}}{2x}$;
3. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin^2 2x}{\operatorname{tg}(8x^2-x)}$;
4. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1-\sqrt{\cos x}}{1-\cos\sqrt{x}}$;
5. $\lim\limits_{x\to a} \frac{\sin x-\sin a}{x-a}$.

**Задание 4. Второй замечательный предел. Сравнение бесконечно малых. Применение их к вычислению пределов степенно-показательных, показательных и логарифмических функций.**

1. $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{x^2+1}{3x^2-2}\right)^{-x}$;
2. $\lim\limits_{x\to2}(x-1)^{\frac{4x}{x-2}}$;
3. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+2}{3+x}\right)^{\frac{x^2+1}{x}}$;
4. $\lim\limits_{x\to\infty}(x-3)\left[\ln(x-1)-\ln(x-2)\right]$;
5. $\lim\limits_{x\to0}\frac{e^{\alpha x}-e^{\beta x}}{x(\alpha^2-\beta^2)}$.

**Задание 5. Непрерывность функции.**

1. Проверить, непрерывна ли функция в точках $x_1=7,\ x_2=9$. Установить вид разрыва, если $y(x)=9^{\frac{1}{x-7}}$.
2. Найти точки разрыва, если они есть и сделать чертеж функции
$$y(x)=\begin{cases}\sin x, & \text{при } x<0,\\ x, & \text{при } 0\le x\le 2,\\ 0, & \text{при } x>2.\end{cases}$$

**Вариант 17.**

**Задание 1. Область определения функции. Основные элементарные функции и их свойства. Построение графиков.**

1. Найти область определения функций:
   (a) $y(x)=\frac{4-x}{x+5}-\sqrt{x^2-4x}$;
   (b) $y(x)=\arccos\frac{2x-5}{4x+5}$.
2. Определить четность и нечетность функции $y(x)=\sqrt{1+x+x^2}-\sqrt{1-x+x^2}$.
3. С помощью элементарных преобразований построить график функции $y(x)=|2-\lg(|x|+2)|$.

**Задание 2. Вычисление пределов последовательностей, дробно-рациональных и иррациональных функций.**

1. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{0{,}01n^5-10n^3+1}{100n^2+1}$;
2. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n!(n+2)}{(n+3)!}$;
3. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{7x^4-2x^3+2}{x^4+3}$;
4. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x+x^2}{\sqrt[5]{1+3x^4}-\sqrt[4]{1+2x}}$;
5. $\lim\limits_{x\to-1}\frac{3x^2+x-2}{3x^2+4x+1}$;
6. $\lim\limits_{x\to7}\frac{2-\sqrt{x-3}}{x^2-49}$;
7. $\lim\limits_{x\to2}\frac{x^4-16}{\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{2}}$;
8. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2x^3}{3x-2}-\frac{x^2}{3-x}\right)$;
9. $\lim\limits_{x\to\infty}\left[\sqrt{x^2-5x+6}-x\right]$.

**Задание 3. Первый замечательный предел. Эквивалентные бесконечно малые. Применение их к вычислению пределов от тригонометрических функций.**

1. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 6x}{x}$;
2. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\arcsin^2 3x}{1-\cos 4x}$;
3. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos 5x}{\operatorname{arctg}(x^2-x)}$;
4. $\lim\limits_{y\to 0}\frac{\operatorname{tg}^2 y}{(1-\cos y)\sqrt{\cos 2y}}$;
5. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}}\operatorname{tg} 2x\cdot\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-x\right)$.

**Задание 4. Второй замечательный предел. Сравнение бесконечно малых. Применение их к вычислению пределов степенно-показательных, показательных и логарифмических функций.**

1. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x}{x+1}\right)^{\frac{2x}{x-1}}$;
2. $\lim\limits_{x\to 0}(1-2x)^{\frac{1}{x}}$;
3. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+1}{x-2}\right)^{-x^2}$;
4. $\lim\limits_{x\to -\infty}\frac{\ln(1+e^x)}{x}$;
5. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{\alpha x}-1}{\sin\beta x}$.

**Задание 5. Непрерывность функции.**

1. Проверить, непрерывна ли функция в точках $x_1=1,\ x_2=3$. Установить вид разрыва, если $y(x)=4^{\frac{1}{x-1}}$.

2. Найти точки разрыва, если они есть и сделать чертеж функции

$$y(x)=\begin{cases}\cos x, & \text{при } x\le\frac{\pi}{2},\\ 0, & \text{при } \frac{\pi}{2}<x<\pi,\\ \frac{\pi}{2}, & \text{при } x\ge\pi.\end{cases}$$

**Вариант 18.**

**Задание 1. Область определения функции. Основные элементарные функции и их свойства. Построение графиков.**

1. Найти область определения функций:

   (a) $y(x)=\log_2(x^2-3x+2)$;

   (b) $y(x)=\arcsin\frac{x+6}{x-2}$.

2. Определить четность и нечетность функции $y(x)=\operatorname{tg}\frac{x}{2}+\sin x^3$.

3. С помощью элементарных преобразований построить график функции $y(x) = |3\sin(2|x| - 3) - 1|$ .

**Задание 2. Вычисление пределов последовательностей, дробно-рациональных и иррациональных функций.**

1. $\lim\limits_{k\to\infty} \frac{(k+1)^3-(k-1)^3}{(k-1)^2+(k+1)^2}$;
2. $\lim\limits_{k\to\infty} \frac{(k+2)!}{k!\cdot k^2}$;
3. $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\sqrt[5]{x^4+2}-\sqrt{x^3+1}}{\sqrt[4]{x^5+2}-\sqrt[3]{x^2+1}}$;
4. $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{2x^2+1}{3x^2+2x-1}$;
5. $\lim\limits_{x\to 1} \frac{3x^2-5x+2}{x^2-4x+3}$;
6. $\lim\limits_{t\to 0} \frac{\sqrt{1+t}-\sqrt{1-t}}{2t}$;
7. $\lim\limits_{x\to 2} \frac{3x-6}{\sqrt[3]{4x}-2}$;
8. $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\frac{x^3}{2x^2+1} - \frac{2x^2}{4x-1}\right)$;
9. $\lim\limits_{x\to\infty} \left[x^{\frac{4}{3}} - (x^2-1)^{\frac{2}{3}}\right]$.

**Задание 3. Первый замечательный предел. Эквивалентные бесконечно малые. Применение их к вычислению пределов от тригонометрических функций.**

1. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x}{\sqrt[3]{\sin^2 x}}$;
2. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\arcsin 7x}{2x}$;
3. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} x}{\sqrt[3]{(1-\cos x)^2}}$;
4. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin^2 x-\operatorname{tg}^4 x}{3x^2-5x^4}$;
5. $\lim\limits_{x\to \pi} \frac{1-\sin\frac{x}{2}}{\pi-x}$.

**Задание 4. Второй замечательный предел. Сравнение бесконечно малых. Применение их к вычислению пределов степенно-показательных, показательных и логарифмических функций.**

1. $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\frac{x}{x+1}\right)^{\frac{\sin 2x}{x}}$ ;
2. $\lim\limits_{x\to 1} (3x-2)^{\frac{x}{1-x}}$ ;
3. $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\frac{2x+3}{2x-4}\right)^{\frac{x^2+1}{x}}$ ;
4. $\lim\limits_{x\to\infty} (x-4)\cdot[\ln(3x-2)-\ln(3x+2)]$ ;
5. $\lim\limits_{x\to 1} \frac{e^{x^2-1}-1}{x-1}$.

**Задание 5. Непрерывность функции.**

1. Проверить, непрерывна ли функция в точках $x_1 = 4,\ x_2 = 6$. Установить вид разрыва, если $y(x) = 16^{\frac{1}{x-4}}$.

2. Найти точки разрыва, если они есть и сделать чертеж функции

$$y(x) = \begin{cases} x-1, & \text{при } x \le 0, \\ x^2, & \text{при } 0 < x \le 2, \\ 2x, & \text{при } x > 2. \end{cases}$$

**Вариант 19.**

**Задание 1. Область определения функции. Основные элементарные функции и их свойства. Построение графиков.**

1. Найти область определения функций:

   (a) $y(x) = \frac{x-1}{x} + \sqrt[3]{x+3}$;

   (b) $y(x) = \arcsin \frac{x+3}{2x-1}$.

2. Определить четность и нечетность функции $y(x) = 2\cos x + x \cdot \sqrt[3]{x}$.

3. С помощью элементарных преобразований построить график функции $y(x) = |\log_2(1+|x|)| + 1$.

**Задание 2. Вычисление пределов последовательностей, дробно-рациональных и иррациональных функций.**

1. $\lim\limits_{k\to\infty} \frac{k(k+1)}{(k+2)(k+3)}$;
2. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2n(n+5)!}{(n+4)!(n^2+1)}$;
3. $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{3x^4-4x^2+2}{6x^4+2x^3-1}$;
4. $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\sqrt[3]{x^6+1}}{(\sqrt{x^2+1}+x^2)^2}$;
5. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{2x^2+3x^3+4x^4}{3x^2+x^4+x^6}$;
6. $\lim\limits_{x\to 3} \frac{\sqrt{x-1}-\sqrt{2}}{\sqrt{2x+3}-3}$;
7. $\lim\limits_{x\to -8} \frac{\sqrt{1-x}-3}{2+\sqrt[3]{x}}$;
8. $\lim\limits_{t\to\infty} \left(\frac{t^3}{2t^2+1} - \frac{2t^2}{4t-1}\right)$;
9. $\lim\limits_{x\to\infty} \left[\sqrt{x(x+a)} - x\right]$.

**Задание 3. Первый замечательный предел. Эквивалентные бесконечно малые. Применение их к вычислению пределов от тригонометрических функций.**

1. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin^2 x}{x \sin 2x}$;
2. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\operatorname{arctg} 2x}{5x}$;
3. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1-\cos 5x}{x^2}$;
4. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{(1-\cos x)\sqrt{\cos 3x}}{x^2}$;
5. $\lim\limits_{x\to \pi} \frac{\sin 3x}{\sin 2x}$.

**Задание 4. Второй замечательный предел. Сравнение бесконечно малых. Применение их к вычислению пределов степенно-показательных, показательных и логарифмических функций.**

1. $\lim\limits_{x\to 0}(1+2x)^{\frac{x-2}{x+1}}$;
2. $\lim\limits_{x\to 1}(2-x)^{\frac{2x}{1-x}}$;
3. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^3+1}{x^3-1}\right)^{x}$;
4. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x}\cdot[\ln(3+x)-\ln 3]$;
5. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{\gamma x}-e^{\alpha x}}{\operatorname{tg}\beta x}$.

**Задание 5. Непрерывность функции.**

1. Проверить, непрерывна ли функция в точках $x_1=0,\ x_2=5$. Установить вид разрыва, если $y(x)=6^{\frac{1}{x-5}}$.

2. Найти точки разрыва, если они есть и сделать чертеж функции

$$y(x)=\begin{cases}3x+1, & \text{при } x<0,\\ x^2+1, & \text{при } 0\le x<1,\\ 0, & \text{при } x\ge 1.\end{cases}$$

**Вариант 20.**

**Задание 1. Область определения функции. Основные элементарные функции и их свойства. Построение графиков.**

1. Найти область определения функций:

   (a) $y(x)=\sqrt[3]{\frac{1}{x}}+\arcsin\frac{x+3}{2x-1}$;

   (b) $y(x)=\frac{4}{x^2-1}+\lg(x^2-3x+2)$.

2. Определить четность и нечетность функции $y(x)=x^3\operatorname{tg}x^2$.

3. С помощью элементарных преобразований построить график функции $y(x)=-3\left|\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\right|+1$.

**Задание 2. Вычисление пределов последовательностей, дробно-рациональных и иррациональных функций.**

1. $\lim\limits_{k\to\infty}\frac{(k+1)(k+2)(k+3)(k+4)}{k^4}$;
2. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3(n^2+1)}{n(n+1)(2n+1)}$;
3. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x^6+6x^5+7}+\sqrt[5]{x^5+3x^3+1}}{\sqrt[3]{x^9-2x^2}+\sqrt[3]{x^4+1}}$;
4. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{(2x+3)^3(3x+2)^2}{2x^5+5}$;
5. $\lim\limits_{x\to-2}\frac{x^2+3x+2}{2x^2+5x+2}$;
6. $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sqrt{1+x+x^2}-1}{x}$;
7. $\lim\limits_{x\to8}\frac{x-8}{2-\sqrt[3]{x}}$;
8. $\lim\limits_{x\to3}\left(\frac{1}{x-3}-\frac{6}{x^2-9}\right)$;
9. $\lim\limits_{x\to\infty}x\cdot(\sqrt{x^2-1}-x)$.

**Задание 3. Первый замечательный предел. Эквивалентные бесконечно малые. Применение их к вычислению пределов от тригонометрических функций.**

1. $\lim\limits_{x\to0}\frac{\operatorname{tg}3x}{\sin 4x}$;
2. $\lim\limits_{x\to0}\frac{2x\arcsin x}{\operatorname{arctg}4x^2}$;
3. $\lim\limits_{x\to0}\frac{1-\cos 2x+\operatorname{tg}^2 x}{x\sin x}$;
4. $\lim\limits_{x\to0}\frac{1-\sqrt{\cos x}}{1-\cos\sqrt{x}}$;
5. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{1-\sin x}{\left(\frac{\pi}{2}-x\right)^2}$.

**Задание 4. Второй замечательный предел. Сравнение бесконечно малых. Применение их к вычислению пределов степенно-показательных, показательных и логарифмических функций.**

1. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+1}{3x+4}\right)^{x^2}$;
2. $\lim\limits_{x\to0}(1+3x)^{\frac{1}{x}}$;
3. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{3x-1}{3x+1}\right)^{3x}$;
4. $\lim\limits_{x\to3}\frac{\ln x-\ln 3}{x-3}$;
5. $\lim\limits_{x\to0}\frac{e^{x^2}-1}{1-\cos x}$.

**Задание 5. Непрерывность функции.**

1. Проверить, непрерывна ли функция в точках $x_1=-2,\ x_2=0$. Установить вид разрыва, если $y(x)=9^{\frac{1}{x}}$.
2. Найти точки разрыва, если они есть и сделать чертеж функции

$$y(x)=\begin{cases}0, & \text{при } x\le 0,\\ \operatorname{tg}x, & \text{при } 0<x<\frac{\pi}{2},\\ x, & \text{при } x\ge\frac{\pi}{2}.\end{cases}$$

**Вариант 21.**

**Задание 1. Область определения функции. Основные элементарные функции и их свойства. Построение графиков.**

1. Найти область определения функций:

   (a) $y(x) = \sqrt{\frac{1}{x+4}} + \operatorname{arctg} 3x$;

   (b) $y(x) = \lg(-x^2 + x + 6)$.

2. Определить четность и нечетность функции $y(x) = \operatorname{arctg}^2 2x + \sin^4 x - x^6$.

3. С помощью элементарных преобразований построить график функции $y(x) = \left|-\cos\frac{x-1}{2} + \frac{1}{2}\right|$.

**Задание 2. Вычисление пределов последовательностей, дробно-рациональных и иррациональных функций.**

1. $\lim\limits_{k\to\infty} \frac{(3k+1)^4-(k-1)^4}{(3k+1)^4+(k+1)^4}$;
2. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{3n(n+10)!}{(n+8)!(n^3+1)}$;
3. $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{40x^2-5x+1}{23x+7}$;
4. $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x+2}{\sqrt[5]{x^5+2x+3}}$;
5. $\lim\limits_{x\to-1} \frac{3x^2+4x+1}{3x^3+x^2-2x}$;
6. $\lim\limits_{x\to0} \frac{\sqrt{3-x}-\sqrt{3+x}}{7x}$;
7. $\lim\limits_{x\to1} \frac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt{x}-1}$;
8. $\lim\limits_{x\to2} \left(\frac{1}{x-2} - \frac{12}{x^3-8}\right)$;
9. $\lim\limits_{x\to\infty} \left[\sqrt{x^2+x+3} - \sqrt{x^2-3x+3}\right]$.

**Задание 3. Первый замечательный предел. Эквивалентные бесконечно малые. Применение их к вычислению пределов от тригонометрических функций.**

1. $\lim\limits_{x\to0} \frac{\operatorname{tg} 6x}{\sin 9x}$;
2. $\lim\limits_{x\to0} \frac{\arcsin x}{2x}$;
3. $\lim\limits_{x\to0} \frac{1-\cos 3x}{x\sin 2x}$;
4. $\lim\limits_{x\to0} \frac{\cos 4x-\cos 2x}{\arcsin^2 3x}$;
5. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{3}} \frac{\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)}{1-2\cos x}$.

**Задание 4. Второй замечательный предел. Сравнение бесконечно малых. Применение их к вычислению пределов степенно-показательных, показательных и логарифмических функций.**

1. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+1}{x^2+1}\right)^{\frac{2x^2}{x^2-1}}$;
2. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(1+\cos x)^{\operatorname{tg} x}$;
3. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{1+x^2}{2+x^2}\right)^{x}$;
4. $\lim\limits_{x\to\infty} x\cdot[\ln(x+1)-\ln x]$;
5. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{\frac{1}{\sqrt{x}}}-1}{\sqrt{\sin\frac{4}{x}}}$.

**Задание 5. Непрерывность функции.**

1. Проверить, непрерывна ли функция в точках $x_1=1,\ x_2=4$. Установить вид разрыва, если $y(x)=8^{\frac{1}{4-x}}$.
2. Найти точки разрыва, если они есть и сделать чертеж функции

$$y(x)=\begin{cases}-x, & \text{при } x\le 0,\\ \operatorname{tg} x, & \text{при } 0<x<\frac{\pi}{4},\\ 2, & \text{при } x\ge\frac{\pi}{4}.\end{cases}$$

**Вариант 22.**

**Задание 1. Область определения функции. Основные элементарные функции и их свойства. Построение графиков.**

1. Найти область определения функций:
   (a) $y(x)=2\sin(x+2)+\sqrt{\frac{x}{x-1}}$;
   (b) $y(x)=\arcsin\frac{x-3}{2x-1}$.
2. Определить четность и нечетность функции $y(x)=2^{x^2}+\cos 7x$.
3. С помощью элементарных преобразований построить график функции $y(x)=|1-2\cos|x||$.

**Задание 2. Вычисление пределов последовательностей, дробно-рациональных и иррациональных функций.**

1. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n(n+5)}{(n+3)(n+4)}$;
2. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1+3^{2n+1}}{3^{2n}}$;
3. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x^4-5x^3+1}{2x^4-3x^3+5}$;
4. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x^4+1}}{2x^2-3x-4}$;
5. $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2-x-2}{x^2+x-6}$;
6. $\lim\limits_{t\to 0}\frac{\sqrt{t+4}-2}{3t}$;
7. $\lim\limits_{x\to -1}\frac{\sqrt[3]{1+2x}+1}{\sqrt{2+x}+x}$;
8. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^3}{2x^2-1}-\frac{x^2}{2x+1}\right)$;
9. $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{x+c}-\sqrt{x})$.

**Задание 3. Первый замечательный предел. Эквивалентные бесконечно малые. Применение их к вычислению пределов от тригонометрических функций.**

1. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 8x}{\sin 4x}$;
2. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{5x}{\operatorname{arctg} x}$;
3. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{(1-\cos x)^2}{\operatorname{tg} x-\sin x}$;
4. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\sqrt{\cos x}}{x^2}$;
5. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{3}}\frac{\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)}{1-2\cos x}$.

**Задание 4. Второй замечательный предел. Сравнение бесконечно малых. Применение их к вычислению пределов степенно-показательных, показательных и логарифмических функций.**

1. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2x^2+1}{x^2+2}\right)^{\frac{x-3}{x^2-9}}$;
2. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(2-\sin x)^{\frac{1}{\cos x}}$;
3. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+1}{x}\right)^{2x}$;
4. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+3x)}{\sin 5x}$;
5. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{2x}-1}{\cos x-1}$.

**Задание 5. Непрерывность функции.**

1. Проверить, непрерывна ли функция в точках $x_1=-2,\ x_2=0$. Установить вид разрыва, если $y(x)=3^{\frac{1}{x+2}}$.
2. Найти точки разрыва, если они есть и сделать чертеж функции

$$y(x)=\begin{cases} x^2+1, & \text{при } x\le 0,\\ 1-x, & \text{при } 0<x<2,\\ 2, & \text{при } x\ge 2.\end{cases}$$

**Вариант 23.**

**Задание 1. Область определения функции. Основные элементарные функции и их свойства. Построение графиков.**

1. Найти область определения функций:
   (a) $y(x)=\operatorname{arctg}\frac{x-3}{2x}$;
   (b) $y(x)=\frac{2-x}{x^2}-\sqrt[4]{x^2+3x}$.
2. Определить четность и нечетность функции $y(x)=\lg(x+1)-\sin 3x$.

3. С помощью элементарных преобразований построить график функции $y(x) = |2 \cdot |\ln|x|| - 3|$.

**Задание 2. Вычисление пределов последовательностей, дробно-рациональных и иррациональных функций.**

1. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{(n+2)(n+4)(n+5)}{n^2(n+3)}$;
2. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{(n+5)!2n}{(n+6)!}$;
3. $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{3x+43}{7x^2-5x+3}$;
4. $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\sqrt[3]{x^3-2x^2}}{\sqrt{x^2+3x}}$;
5. $\lim\limits_{x\to-3} \frac{x^2-x-12}{x^3+5x^2+6x}$;
6. $\lim\limits_{x\to3} \frac{\sqrt{x+1}-2}{\sqrt{x-2}-1}$;
7. $\lim\limits_{x\to8} \frac{\sqrt[3]{x}-2}{2x-16}$;
8. $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\frac{x^3}{2x^2+1} - \frac{2x^2}{x-8}\right)$;
9. $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\sqrt[3]{(1+x)^2} - \sqrt[3]{(x-2)^2}\right)$.

**Задание 3. Первый замечательный предел. Эквивалентные бесконечно малые. Применение их к вычислению пределов от тригонометрических функций.**

1. $\lim\limits_{x\to0} \frac{x^3-x}{\sin(x^4+x^2)}$;
2. $\lim\limits_{x\to0} \frac{\operatorname{tg} x-\sin x}{x^3}$;
3. $\lim\limits_{x\to0} \frac{x\sin 3x}{\cos x-\cos^3 x}$;
4. $\lim\limits_{x\to0} \frac{\sqrt{\cos x}-\sqrt{\cos 2x}}{\operatorname{tg}^2 x}$;
5. $\lim\limits_{x\to\pi} \frac{\sin x}{\frac{x^2}{\pi^2}-1}$.

**Задание 4. Второй замечательный предел. Сравнение бесконечно малых. Применение их к вычислению пределов степенно-показательных, показательных и логарифмических функций.**

1. $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\frac{3x^2+1}{x^2-1}\right)^{\frac{x-1}{2}}$;
2. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} (2-\sin x)^{\frac{1}{\cos^2 x}}$;
3. $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\frac{x+2}{x}\right)^{\frac{x}{3}}$;
4. $\lim\limits_{x\to0} \frac{\ln(1+\sin 3x)}{\operatorname{tg}^2 2x}$;
5. $\lim\limits_{x\to0} \frac{e^{\arcsin x}-1}{2x}$.

**Задание 5. Непрерывность функции.**

1. Проверить, непрерывна ли функция в точках $x_1 = 2,\ x_2 = 4$. Установить вид разрыва, если $y(x) = 8^{\frac{1}{x-2}}$.

2. Найти точки разрыва, если они есть и сделать чертеж функции

$$y(x) = \begin{cases} -2x, & \text{при } x \leq 0, \\ \sqrt{x}, & \text{при } 0 < x < 4, \\ 3, & \text{при } x \geq 4. \end{cases}$$

**Вариант 24.**

**Задание 1. Область определения функции. Основные элементарные функции и их свойства. Построение графиков.**

1. Найти область определения функций:

   (a) $y(x) = \frac{1-x^2}{3x} + \lg(x^2 + 2x + 2)$;

   (b) $y(x) = \arccos\frac{x-2}{3x+7}$.

2. Определить четность и нечетность функции $y(x) = \sqrt[3]{x}\sin^3 5x$.

3. С помощью элементарных преобразований построить график функции $y(x) = \left|2\cos(2-|x|) - 1\right|$.

**Задание 2. Вычисление пределов последовательностей, дробно-рациональных и иррациональных функций.**

1. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\cdots+\frac{1}{3^n}}{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2^n}}$;
2. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2000n^4+3n^2}{0{,}09n^6-100n^3+1}$;
3. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{4^n-1}{4^n+1}$;
4. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sqrt[5]{x^2+4}+\sqrt[4]{2x^3-x}}{\sqrt{x^8+3}-x}$;
5. $\lim\limits_{x\to3}\frac{x^3-x^2-6x}{2x^2+x-21}$;
6. $\lim\limits_{x\to5}\frac{\sqrt{x-1}-2}{x^2-25}$;
7. $\lim\limits_{x\to1}\frac{\sqrt[3]{x^2}-2\sqrt[3]{x}+1}{(x-1)^2}$;
8. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{(2x-1)(3x^2+x+2)}{4x^2} - \frac{3x^2}{2x+1}\right)$;
9. $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+2x+1} - \sqrt{x^2+x+1})$.

**Задание 3. Первый замечательный предел. Эквивалентные бесконечно малые. Применение их к вычислению пределов от тригонометрических функций.**

1. $\lim\limits_{x\to0}\frac{\operatorname{tg}x+\sin x}{x}$;
2. $\lim\limits_{x\to0}\frac{5x}{\arcsin 3x}$;
3. $\lim\limits_{x\to0}\frac{x^2}{1+x\sin x-\cos^2 x}$;
4. $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sqrt{\cos 3x}-\sqrt{\cos 2x}}{\sin^2 x}$;
5. $\lim\limits_{x\to\pi}\frac{\sin 2x}{\sin 3x}$.

**Задание 4. Второй замечательный предел. Сравнение бесконечно малых. Применение их к вычислению пределов степенно-показательных, показательных и логарифмических функций.**

1. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+1}{3x^2-1}\right)^{\frac{x-2}{3}}$;
2. $\lim\limits_{x\to 0}(1-\sin x)^{\operatorname{ctg} x}$;
3. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{3x^2+2}{3x^2-2}\right)^{3x^2-1}$;
4. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+\operatorname{arctg} x)}{\operatorname{tg} x}$;
5. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-e^{-3x}}{\operatorname{tg} 5x}$.

**Задание 5. Непрерывность функции.**

1. Проверить, непрерывна ли функция в точках $x_1=-5,\ x_2=0$. Установить вид разрыва, если $y(x)=6^{\frac{1}{x+5}}$.

2. Найти точки разрыва, если они есть и сделать чертеж функции

$$y(x)=\begin{cases} x+1, & \text{при } x<0,\\ x^2+1, & \text{при } 0\le x<1,\\ 1, & \text{при } x\ge 1.\end{cases}$$

**Вариант 25.**

**Задание 1. Область определения функции. Основные элементарные функции и их свойства. Построение графиков.**

1. Найти область определения функций:

   (a) $y(x)=\lg(9-x^2)+\sqrt[4]{x^2-4}$;

   (b) $y(x)=\arcsin\frac{4x-3}{5x-4}$.

2. Определить четность и нечетность функции $y(x)=\sqrt[3]{x}\sin^3 5x$.

3. С помощью элементарных преобразований построить график функции $y(x)=|2\cos(2-|x|)+1|$.

**Задание 2. Вычисление пределов последовательностей, дробно-рациональных и иррациональных функций.**

1. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n(n+12)}{(n+7)(n+5)}$;

2. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{n}{3} - \frac{n(n+1)(2n+1)}{n^2}\right)$;

3. $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{4x^4+6x^2+5x-6}{12x^3-5x^2-1}$;

4. $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\sqrt[4]{x^5+2x}-\sqrt[3]{x^2-1}}{\sqrt[5]{x^4+2}-\sqrt[3]{x^3+7x}}$;

5. $\lim\limits_{x\to1} \frac{2x^3+5x^2-7x}{3x^2-x-2}$;

6. $\lim\limits_{x\to1} \frac{\sqrt{5-x}-2}{\sqrt{2-x}-1}$;

7. $\lim\limits_{x\to0} \frac{7x}{\sqrt[3]{1+x}-\sqrt[3]{1-x}}$;

8. $\lim\limits_{x\to1} \left(\frac{x+2}{x^2-5x+4} - \frac{x-4}{3(x^2-3x+2)}\right)$;

9. $\lim\limits_{x\to\infty} x^{\frac{4}{3}} \cdot \left[\sqrt[3]{x^2+1} - \sqrt[3]{x^2-1}\right]$.

**Задание 3. Первый замечательный предел. Эквивалентные бесконечно малые. Применение их к вычислению пределов от тригонометрических функций.**

1. $\lim\limits_{x\to0} \frac{x\arcsin 3x}{\operatorname{tg}^2 9x}$;

2. $\lim\limits_{x\to0} \frac{\arcsin 2x}{5x}$;

3. $\lim\limits_{x\to0} \frac{1-\cos 4x}{\cos 2x-\cos^2 2x}$;

4. $\lim\limits_{x\to0} \frac{\sqrt{\cos 5x}-\sqrt{\cos 2x}}{x^2}$;

5. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{\sqrt{2}\cos x-1}{1-\operatorname{tg}^2 x}$.

**Задание 4. Второй замечательный предел. Сравнение бесконечно малых. Применение их к вычислению пределов степенно-показательных, показательных и логарифмических функций.**

1. $\lim\limits_{x\to\infty} \left(1+\frac{1}{x}\right)^{\frac{x+1}{x}}$;

2. $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\frac{3x-4}{3x+2}\right)^{\frac{x+1}{3}}$;

3. $\lim\limits_{x\to0} \left(1+3\operatorname{tg}^2 x\right)^{\operatorname{ctg}^2 x}$;

4. $\lim\limits_{x\to5} \frac{\ln x-\ln 5}{x-5}$;

5. $\lim\limits_{x\to0} \frac{e^{\sqrt{x}}-1}{x}$.

**Задание 5. Непрерывность функции.**

1. Проверить, непрерывна ли функция в точках $x_1 = -2,\ x_2 = 0$. Установить вид разрыва, если $y(x) = 2^{\frac{1}{x}}$.

2. Найти точки разрыва, если они есть и сделать чертеж функции

$$y(x) = \begin{cases} -\frac{x}{2}, & \text{при } x \le 0, \\ \cos x, & \text{при } 0 < x \le \frac{\pi}{2}, \\ x - \frac{\pi}{2}, & \text{при } x > \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

**Вариант 26.**

**Задание 1. Область определения функции. Основные элементарные функции и их свойства. Построение графиков.**

1. Найти область определения функций:

   (a) $y(x) = \lg(x^2 - 9) + \sqrt{x-4}$;

   (b) $y(x) = 5 \arcsin \frac{x-3}{2x+6}$.

2. Определить четность и нечетность функции $y(x) = x^2 \operatorname{arctg} 3x$.

3. С помощью элементарных преобразований построить график функции $y(x) = \left| \log_{\frac{1}{2}}(|x| - 1) - 3 \right|$.

**Задание 2. Вычисление пределов последовательностей, дробно-рациональных и иррациональных функций.**

1. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{(n+7)(n+12)(2n+3)}{n^2(n+5)}$;
2. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{(n+1)!-n!}{(n+1)!}$;
3. $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{3x^5-2x^3+1}{2x^2-3x^4+x^5}$;
4. $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\sqrt[3]{x^3+x}}{x+1}$;
5. $\lim\limits_{x\to1} \frac{x^3-1}{x^4+3x^2-4}$;
6. $\lim\limits_{x\to1} \frac{x^2-\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}$;
7. $\lim\limits_{x\to0} \frac{\sqrt[3]{1-x}-\sqrt[3]{1+x}}{x}$;
8. $\lim\limits_{x\to0} \left( \frac{3}{2x} - \frac{7}{x(x-2)} \right)$;
9. $\lim\limits_{x\to\infty} \left( \sqrt[3]{x^3+1} - x \right)$.

**Задание 3. Первый замечательный предел. Эквивалентные бесконечно малые. Применение их к вычислению пределов от тригонометрических функций.**

1. $\lim\limits_{x\to0} \frac{\operatorname{tg} 2x}{7x}$;
2. $\lim\limits_{x\to0} \frac{\operatorname{tg} x}{\arcsin 3x}$;
3. $\lim\limits_{x\to0} \frac{\sin 4x}{\sqrt{x+1}-1}$;
4. $\lim\limits_{x\to0} \left( \frac{1}{\sin x} - \frac{1}{\operatorname{tg} x} \right)$;
5. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{1-\sin x}{\left(\frac{\pi}{2}-x\right)^2}$.

**Задание 4. Второй замечательный предел. Сравнение бесконечно малых. Применение их к вычислению пределов степенно-показательных, показательных и логарифмических функций.**

1. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+3}{x^2-3}\right)^{\frac{x^2}{x+1}}$;
2. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{3x+1}{3x-2}\right)^{2x}$;
3. $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{x^2}}$;
4. $\lim\limits_{x\to\infty} x\left[\ln(1+x)-\ln x\right]$;
5. $\lim\limits_{x\to\infty} x\left(e^{\frac{1}{x}}-1\right)$.

**Задание 5. Непрерывность функции.**

1. Проверить, непрерывна ли функция в точках $x_1=0,\ x_2=7$. Установить вид разрыва, если $y(x)=8^{\frac{1}{x-7}}$.
2. Найти точки разрыва, если они есть и сделать чертеж функции

$$y(x)=\begin{cases}3x, & \text{при } x\le 0,\\ x^2+2, & \text{при } 0<x\le 1,\\ 3, & \text{при } x>1.\end{cases}$$

**Вариант 27.**

**Задание 1. Область определения функции. Основные элементарные функции и их свойства. Построение графиков.**

1. Найти область определения функций:
   (a) $y(x)=\arccos\frac{2x+1}{3x-1}+\sqrt{x}$;
   (b) $y(x)=\ln\frac{x}{x-1}+\sqrt[3]{x-1}$.
2. Определить четность и нечетность функции $y(x)=x^2+\cos x+\sin x^2$.
3. С помощью элементарных преобразований построить график функции $y(x)=|\log_2(|x|+1)-4|$.

**Задание 2. Вычисление пределов последовательностей, дробно-рациональных и иррациональных функций.**

1. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n!}{(n+1)!-n!}$;
2. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)}{(n-1)^5}$;
3. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^5-x^3-x}{x^2+x+1}$;
4. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sqrt[3]{x^3+2x-1}}{x+2}$;
5. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2-2x+1}{x^3-x}$;
6. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x}$;
7. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{1+x}-\sqrt[3]{1-x}}{x}$;
8. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^3}{x^2+1}-x\right)$;
9. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}\right)$.

**Задание 3. Первый замечательный предел. Эквивалентные бесконечно малые. Применение их к вычислению пределов от тригонометрических функций.**

1. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{\sin 7x}$;
2. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{2\arcsin x}{3x}$;
3. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} x-\sin x}{\sin^3 x}$;
4. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{\operatorname{tg} x}}{2\sin^2 x}$;
5. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}}\frac{\sin x-\cos x}{1-\operatorname{tg}^3 x}$.

**Задание 4. Второй замечательный предел. Сравнение бесконечно малых. Применение их к вычислению пределов степенно-показательных, показательных и логарифмических функций.**

1. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^2}{x^2-1}\right)^{x^3}$;
2. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2x+3}{2x+1}\right)^{x}$;
3. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1+\operatorname{tg} x}{1+\sin x}\right)^{\frac{1}{x}}$;
4. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{-x}-1}{x}$;
5. $\lim\limits_{x\to\infty} x\cdot\left(\ln(x+3)-\ln x\right)$.

**Задание 5. Непрерывность функции.**

1. Проверить, непрерывна ли функция в точках $x_1=-2,\ x_2=3$. Установить вид разрыва, если $y(x)=15^{\frac{1}{x+2}}$.
2. Найти точки разрыва, если они есть и сделать чертеж функции

$$y(x)=\begin{cases} x^2, & \text{при } x\le 0,\\ x, & \text{при } 0<x\le 4,\\ 3, & \text{при } x>4.\end{cases}$$

**Вариант 28.**

**Задание 1. Область определения функции. Основные элементарные функции и их свойства. Построение графиков.**

1. Найти область определения функций:
   (a) $y(x)=\arcsin\frac{2x-5}{x+3}-\sqrt{x+1}$;
   (b) $y(x)=\ln(x^2-4)+\sqrt{\frac{1}{x}}$.
2. Определить четность и нечетность функции $y(x)=x^3-\sqrt[3]{\frac{1}{x}}$.

3. С помощью элементарных преобразований построить график функции $y(x) = -\left|3^{|x+1|} - 5\right|$.

**Задание 2. Вычисление пределов последовательностей, дробно-рациональных и иррациональных функций.**

1. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)}{(2n-1)^4}$;
2. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{(n+2)!+(n+1)!}{(n+2)!-(n+1)!}$;
3. $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{0{,}002x^4+x^2+1}{x^3-x}$;
4. $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{(\sqrt{x^2+1}+x)^2}{\sqrt[3]{x^6+1}}$;
5. $\lim\limits_{x\to-2} \frac{x^3+3x^2+2x}{x^2-x-6}$;
6. $\lim\limits_{x\to 5} \frac{\sqrt{x-1}-2}{x-5}$;
7. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sqrt[3]{1+x^2}-1}{x^2}$;
8. $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\frac{x^3}{2x^2-1} - \frac{x^2}{2x+1}\right)$;
9. $\lim\limits_{x\to\pm\infty} x\cdot\left(\sqrt{x^2+1} - x\right)$.

**Задание 3. Первый замечательный предел. Эквивалентные бесконечно малые. Применение их к вычислению пределов от тригонометрических функций.**

1. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin 3x}{5x}$;
2. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\arcsin 2x}{\sin x}$;
3. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1-\cos^3 x}{x\sin 2x}$;
4. $\lim\limits_{\alpha\to 0} \frac{(1-\cos\alpha)^2}{\operatorname{tg}^3\alpha-\sin^3\alpha}$;
5. $\lim\limits_{\alpha\to \pi} \frac{\sin\alpha}{1-\frac{\alpha^2}{\pi^2}}$.

**Задание 4. Второй замечательный предел. Сравнение бесконечно малых. Применение их к вычислению пределов степенно-показательных, показательных и логарифмических функций.**

1. $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\frac{x+1}{x-3}\right)^{x^2}$;
2. $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\frac{x^2-1}{x^2}\right)^{x}$;
3. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} (1+\operatorname{ctg} x)^{2\operatorname{tg} x}$;
4. $\lim\limits_{x\to 2} \frac{2^x-4}{x-2}$;
5. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)-\ln x}{x}$.

**Задание 5. Непрерывность функции.**

1. Проверить, непрерывна ли функция в точках $x_1 = 3,\ x_2 = 8$. Установить вид разрыва, если $y(x) = 4^{\frac{5}{x-3}}$.

2. Найти точки разрыва, если они есть и сделать чертеж функции

$$y(x) = \begin{cases} \sin x, & \text{при } x \le -\frac{\pi}{2}, \\ x, & \text{при } -\frac{\pi}{2} < x < \pi, \\ \pi, & \text{при } x \ge \pi. \end{cases}$$

**Вариант 29.**

**Задание 1. Область определения функции. Основные элементарные функции и их свойства. Построение графиков.**

1. Найти область определения функций:

   (a) $y(x) = \log_3(x+3) + \frac{x}{x-4}$;

   (b) $y(x) = \arcsin \frac{2x-3}{4x+9} + \sqrt{\frac{x}{1+x^2}}$.

2. Определить четность и нечетность функции $y(x) = \frac{x^2+3}{x^2-3} + \operatorname{ctg} x^2$.

3. С помощью элементарных преобразований построить график функции $y(x) = \left|\left(\frac{1}{3}\right)^{|x+3|} - 1\right|$.

**Задание 2. Вычисление пределов последовательностей, дробно-рациональных и иррациональных функций.**

1. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{(n-3)(n-2)(n-1)n}{(3n-1)^4}$;
2. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{(n+3)!-(n+2)!}{(n+3)!+(n+2)!}$;
3. $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{1+5x^3-x^5-x^7}{1+3x^3-5x^4+x^5}$;
4. $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\sqrt[4]{x^2+5}-\sqrt[3]{x^2+1}}{\sqrt[5]{x^4+2}-\sqrt{x^3+1}}$;
5. $\lim\limits_{x\to\sqrt{3}} \frac{x^2-3}{x^4-2x^2-3}$;
6. $\lim\limits_{h\to 0} \frac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h}$;
7. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sqrt{x^2+1}-1}{\sqrt{x^2+16}-4}$;
8. $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\frac{3x^2}{2x+1} - \frac{2x^3-1}{4x^2}\right)$;
9. $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\sqrt{(x+a)(x+b)} - x\right)$.

**Задание 3. Первый замечательный предел. Эквивалентные бесконечно малые. Применение их к вычислению пределов от тригонометрических функций.**

1. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} kx}{x}$;
2. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\operatorname{arctg}(x^2+3x)}{\arcsin 2x}$;
3. $\lim\limits_{\alpha\to 0} \frac{\operatorname{tg}\alpha}{\sqrt[3]{(1-\cos\alpha)^2}}$;
4. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\cos 2x-1}{x\sin x}$;
5. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{6}} \frac{\sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right)}{\frac{\sqrt{3}}{2}-\cos x}$.

**Задание 4. Второй замечательный предел. Сравнение бесконечно малых. Применение их к вычислению пределов степенно-показательных, показательных и логарифмических функций.**

1. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^{x^2-1}$;
2. $\lim\limits_{x\to 0}(1-2x)^{\frac{1}{7x-x^2}}$;
3. $\lim\limits_{x\to 0}\left(1+3\operatorname{tg}^2 x\right)^{\operatorname{ctg}^2 x}$;
4. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\ln(7+x)-\ln x}{2^{\frac{1}{x}}-1}$;
5. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{3x}-1}{\operatorname{tg}\frac{x}{2}}$.

**Задание 5. Непрерывность функции.**

1. Проверить, непрерывна ли функция в точках $x_1=-3,\ x_2=4$. Установить вид разрыва, если $y(x)=3^{\frac{7}{x+3}}$.

2. Найти точки разрыва, если они есть и сделать чертеж функции

$$y(x)=\begin{cases}\cos x, & \text{при } x\le 0,\\ 1, & \text{при } 0<x\le\frac{\pi}{2},\\ x, & \text{при } x>\frac{\pi}{2}.\end{cases}$$

**Вариант 30.**

**Задание 1. Область определения функции. Основные элементарные функции и их свойства. Построение графиков.**

1. Найти область определения функций:

   (a) $y(x)=\arccos\frac{2x+9}{x+1}+\frac{1}{x-2}$;

   (b) $y(x)=\log_{\frac{1}{3}}(x-4)+\sqrt[4]{x^2-1}$.

2. Определить четность и нечетность функции $y(x)=\sin x^3-\operatorname{tg}^3 x$.

3. С помощью элементарных преобразований построить график функции $y(x)=\left|\operatorname{tg}(|x|+1)-1\right|$.

**Задание 2. Вычисление пределов последовательностей, дробно-рациональных и иррациональных функций.**

1. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n(n+1)(n+2)}{(2n-1)^3}$;
2. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n!(n+1)!}{(n-1)!(n+2)!}$;
3. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^3+x^2-1}{3x^4+5x-3}$;
4. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x^3-2x^2+1}+\sqrt[3]{x^4+1}}{\sqrt[4]{x^6+6x^5+2}-\sqrt[5]{x^7+3x^3+1}}$;
5. $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}}\frac{8x^3-1}{6x^2-5x+1}$;
6. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-1}{x^2}$;
7. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2-\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}$;
8. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^2}{x+1}-\frac{3x^2+x+2}{x}\right)$;
9. $\lim\limits_{x\to\infty}x^{\frac{3}{2}}\cdot\left(\sqrt{x^3+1}-\sqrt{x^3-1}\right)$.

**Задание 3. Первый замечательный предел. Эквивалентные бесконечно малые. Применение их к вычислению пределов от тригонометрических функций.**

1. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin\alpha x}{\sin\beta x}$;
2. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\arcsin(x^3-x)}{x^2+2x}$;
3. $\lim\limits_{\alpha\to 0}\frac{\operatorname{tg}\alpha-\sin\alpha}{\alpha^3}$;
4. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\sin x-\cos x}{1-\operatorname{tg}^3 x}$;
5. $\lim\limits_{y\to a}\sin\frac{y-a}{2}\operatorname{tg}\frac{\pi y}{2a}$.

**Задание 4. Второй замечательный предел. Сравнение бесконечно малых. Применение их к вычислению пределов степенно-показательных, показательных и логарифмических функций.**

1. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x-3}{x}\right)^{\frac{x}{2}}$;
2. $\lim\limits_{x\to 0}(1-4x)^{\frac{1-x}{x}}$;
3. $\lim\limits_{x\to 0}\left(1+\operatorname{tg}^2\sqrt{x}\right)^{\frac{1}{2x}}$;
4. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2^{\frac{1}{x}}-1}{\operatorname{arctg}\frac{2}{x^2}}$;
5. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1-\sin x)}{3^{\operatorname{tg}x}-1}$.

**Задание 5. Непрерывность функции.**

1. Проверить, непрерывна ли функция в точках $x_1=0,\ x_2=2$. Установить вид разрыва, если $y(x)=13^{\frac{7}{x-2}}$.
2. Найти точки разрыва, если они есть и сделать чертеж функции

$$y(x)=\begin{cases}|x|, & \text{при } x\le 1,\\ 1, & \text{при } 1<x\le 3,\\ (x-2)^2+1, & \text{при } x>3.\end{cases}$$

# БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Фихтенгольц, Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления: В 3 т. Т. 1 / Г.М. Фихтенгольц. — М.: Наука, 1970. — 608 с.

2. Задачник по курсу математического анализа: В 2 т. Т. 1 / Н.Я. Виленкин, К.А. Бохан, И.А. Марон, И.В. Матвеев, М.Л. Смолянский, А.Т. Цветков. — М.: Просвещение, 1971. — 350 с.

3. Берман, Г.Н. Сборник задач по курсу математического анализа. / Г.Н. Берман. — М.: Наука, 1985. — 384 с.

4. Данко, П.Е. Высшая математика в упражнениях и задачах: В 2 ч. Ч. 1 / П.Е. Данко, А.Г. Попов, Т.Я. Кожевникова. — М.: Мир и образование, 2002. — 304 с.

5. Виноградова, И.А. Задачи и упражнения по математическому анализу: В 2 ч. Ч. 1 / И.А. Виноградова, С.Н. Олехник, В.А. Садовничий. — М.: Дрофа, 2001. — 725 с.

6. Черкасов, О.Ю. Математика для поступающих в серьезные вузы. / О.Ю. Черкасов, А.Г. Якушев. — М.: Московский Лицей, 1998. — 400 с.

7. Функция одной переменной. Предел. Непрерывность: метод. указания. / Сост.: Л.М. Ахапкина, М.В. Кудряшова. — ХабИИЖТ, 1990.

# ОГЛАВЛЕНИЕ



Учебное издание

**Кузнецова** Елена Владимировна

**ПРЕДЕЛ И НЕПРЕРЫВНОСТЬ**

Сборник задач

Отпечатано методом прямого репродуцирования

---

План 2011 г. Поз. 9.6. Подписано в печать 27.06.2011.
Усл. изд. л. 4,8. Усл. печ. л. 5,3. Зак. 250. Тираж 50 экз. Цена 88 руб.

---

Издательство ДВГУПС
680021, г. Хабаровск, ул. Серышева, 47.