Министерство транспорта Российской Федерации
Федеральное агентство железнодорожного транспорта
Федеральное государственное бюджетное
образовательное учреждение высшего образования
«Дальневосточный государственный
университет путей сообщения»

Кафедра «Физика и теоретическая механика»

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА В ЗАДАЧАХ

В 3 частях

Часть 1

СТАТИКА

Рекомендовано Методическим советом по качеству
образовательной деятельности ДВГУПС
в качестве учебного пособия

Хабаровск
Издательство ДВГУПС
2016

УДК 531(075.8)
ББК В 232я73
Т 338

Рецензенты:

Кафедра «Физика» Педагогического института
Тихоокеанского государственного университета
(заведующий кафедрой доктор физико-математических наук,
профессор *В.И. Крылов*)

Доктор физико-математических наук,
профессор кафедры «Электротехника и электроника»
Тихоокеанского государственного университета
Е.А. Жуков

Авторы:
В.И. Доронин, Г.Д. Иванова, А.А. Кузин, Н.М. Рачек

Т 338 Теоретическая механика в задачах : учеб. пособие. В 3 ч. Ч. 1. Статика / В.И. Доронин [и др.]. – Хабаровск : Изд-во ДВГУПС, 2016. – 114 с. : ил.

Учебное пособие соответствуют рабочим программам дисциплин «Теоретическая механика», «Механика: теоретическая механика», «Механика: прикладная механика».

Приведены основные методики решения задач на определение условий равновесия механических систем, нахождение реакций связей из уравнений равновесия различных систем сил, по составлению систем уравнений и решению данных систем с использованием персонального компьютера. Даны варианты задач для самостоятельной работы.

В приложениях приводятся примеры расчета рассматриваемых задач в среде MathCad, такие как расчет ферм, составных конструкций, расчет пространственной системы сил.

Предназначено для студентов 1-го и 2-го курсов очной формы обучения технических специальностей.

УДК 531(075.8)
ББК В 232я73

© ДВГУПС, 2016

ВВЕДЕНИЕ

В начале изучения теоретической механики студенты знакомятся с основными понятиями дисциплины, приемами и методами решения задач. В разделе «Статика» базовыми операциями являются выбор объекта равновесия, изображение на расчетной схеме действующих на объект сил, определение проекций сил на оси координат, определение моментов сил относительно точки и относительно оси, составление уравнений равновесия для выбранного объекта, нахождение центра тяжести тел.

Для приобретения опыта выполнения указанных операций студенту предлагается решить определенное число простых задач, не требующих каких-либо искусственных приемов и сложных математических преобразований. Такие задачи и составляют содержание предлагаемого пособия.

Задание на самостоятельную работу выдает преподаватель. Варианты задач соответствуют номеру фамилии студента в журнале преподавателя. Решение задач оформляется в тетради.

Изучив пособие, выполнив самостоятельную работу, студент должен научиться составлять уравнения равновесия для выбранного объекта, находить центр тяжести тел.

В разработке данного пособия участвовали сотрудники кафедры «Физика и теоретическая механика» ДВГУПС: профессор В.И. Доронин (введение, разд. 3, 4), профессор Н.М. Рачек (разд. 1, 6), преподаватели А.А. Кузин (разд. 5, прил. 1, 4–7) и Г.Д. Иванова (разд. 2, прил. 2, 3).

1. СТАТИКА. ОСНОВЫ ТЕОРИИ

1.1. Основные понятия

Статика – раздел теоретической механики, в котором изучаются объекты, находящиеся в состоянии равновесия, и определяются условия равновесия. Основным понятием статики является понятие силы.

Сила *– это мера механического взаимодействия тел, определяющая интенсивность и направление этого взаимодействия.*

Сила определяется тремя элементами: числовым значением (модулем), направлением и точкой приложения. Сила изображается вектором (рис. 1.1). Прямая, по которой направлена сила, называется *линией действия силы*. За единицу силы в Международной системе единиц СИ (в механике – система МКС) принимается *ньютон* (Н).

Совокупность нескольких сил, действующих на данное тело, называется *системой сил.*

Проекцией силы на ось называется алгебраическая величина, равная произведению силы на косинус угла между направлением силы и положительным направлением оси.

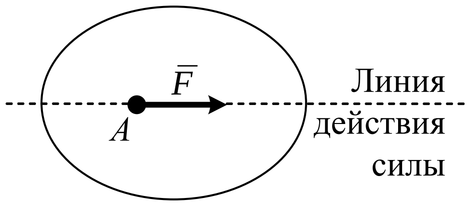


Рис. 1.1

Если проекцию силы $\vec{F}$ обозначить F_x, то согласно определению

$$F_x = |F| \cdot \cos\alpha .$$

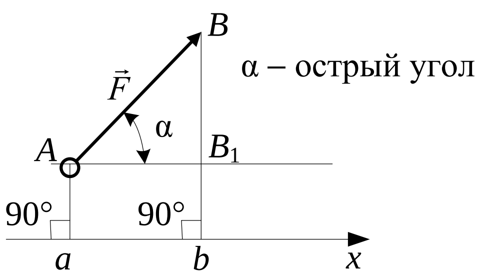


Рис. 1.2

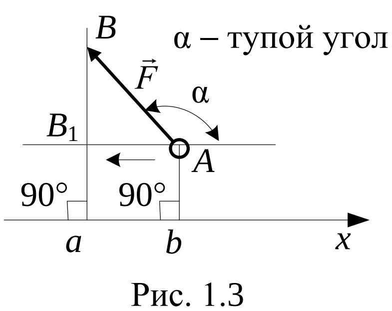


Рис. 1.3

В случае, когда сила и ось расположены в одной плоскости, для определения проекции силы $\vec{F}$ на ось x (рис. 1.2) следует из начала A и конца B силы $\vec{F}$ опустить перпендикуляры на ось x. Полученный отрезок ab – есть проекция F_x. Знак проекции принимается положительным, если направление отрезка ab совпадает с положительным направлением оси x (рис. 1.2), и отрицательным, если направления противоположны (рис. 1.3).

Модуль проекции F_x или длина отрезка ab вычисляется из прямоугольного треугольника ABB_1: для рис. 1.2 имеем $F_x = |\vec{F}| \cdot \cos\alpha$; для рис. 1.3 имеем $F_x = -|\vec{F}| \cdot \cos\beta$.

В случае, когда линия действия силы $\vec{F}$ и ось x – скрещивающиеся прямые, рекомендуется ось x дополнить двумя осями так, чтобы получилась декартова система координат. Далее надо построить на силе $\vec{F}$ как на диагонали параллелепипеда, ребра которого были бы параллельны осям x, y, z.

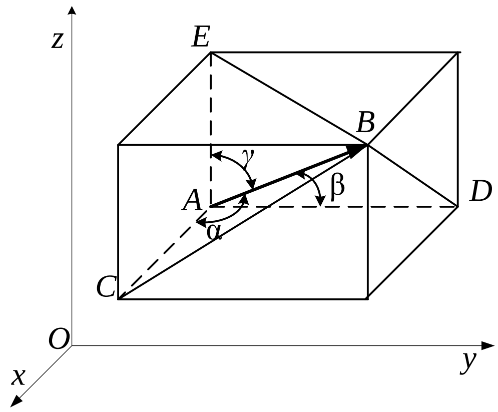


Рис. 1.4

Учитывая, что проекции силы на параллельные оси одного направления равны между собой, можно утверждать, что проекция силы $\vec{F}$ на ось x (рис. 1.4) изображается отрезком AC, а проекции силы на оси y и z изображаются отрезками AD и AE.

Знак проекции определяется по установленному ранее правилу в зависимости от направления оси к направлению отрезка, определяющего проекцию: знак (+), если направления совпадают, знак (–), если направления противоположны.

Модули проекции определяются по формулам:

$F_x = |\vec{F}| \cdot \cos\alpha$ – из треугольника ABC,

$F_y = |\vec{F}| \cdot \cos\beta$ – из треугольника ABD,

$F_z = |\vec{F}| \cdot \cos\gamma$ – из треугольника ABE.

В некоторых случаях для нахождения модуля проекции силы можно использовать формулу, которая получается из построений на рис. 1.5,

$$F_x = |\vec{F}| \cdot \cos\mu \cdot \cos\nu. \qquad (1.1)$$

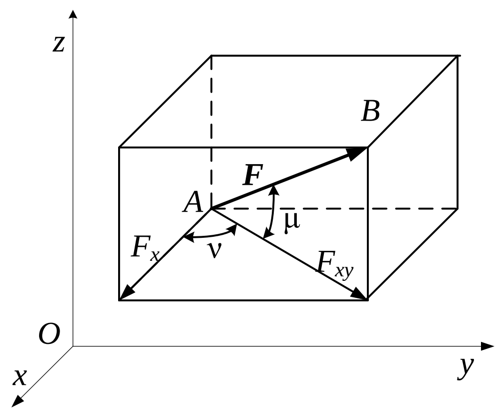


Рис. 1.5

Из рис. 1.5 и формулы (1.1) видно, что вначале определяется модуль проекции силы $\vec{F}$ на плоскость xy, а затем уже модуль проекции F_x.

1.2. Момент силы относительно центра

Моментом силы относительно центра O называется произведение силы на плечо, взятое со знаком плюс или минус, т. е.

$$M_o(\vec{F}) = \pm|\vec{F}| \cdot h. \qquad (1.2)$$

Знак (+) ставится, если сила $\vec{F}$ вращает объект вокруг центра O против хода часовой стрелки; знак (–) – если по ходу часовой стрелки.

Плечо h есть длина перпендикуляра, опущенного из центра O на линию действия силы $\vec{F}$ (рис. 1.6, *а*, *б*).

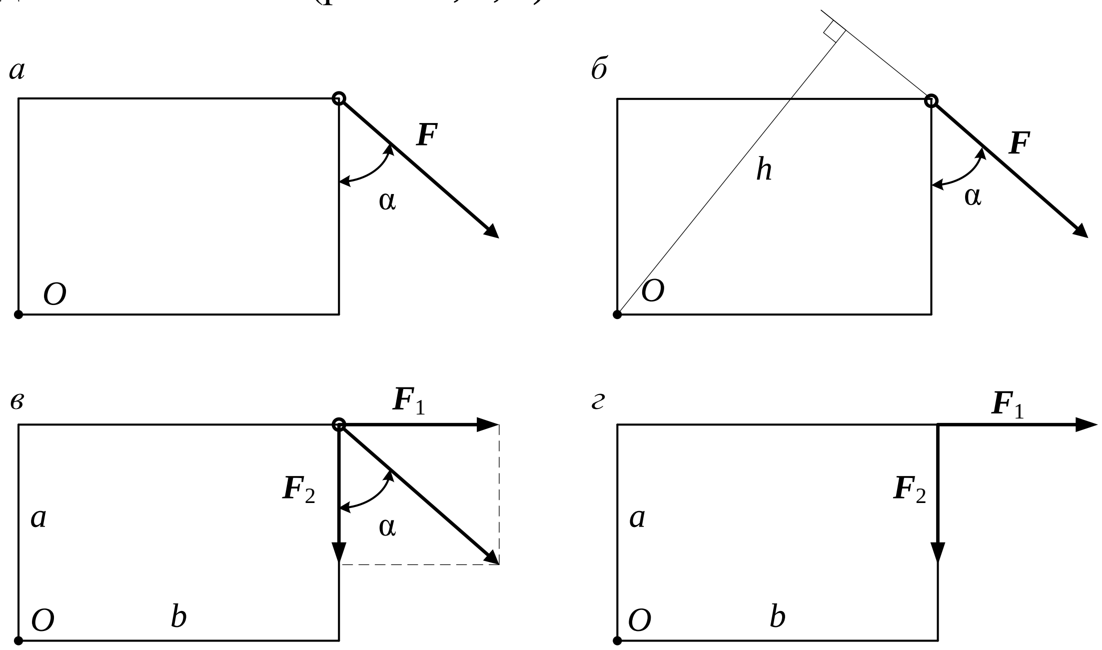


Рис. 1.6

В некоторых случаях для вычисления момента силы применяют теорему Вариньона: момент равнодействующей относительно центра равен сумме моментов составляющих сил относительно того же центра (1.3). Покажем это на примере (рис. 1.6, *в*, *г*).

Согласно теореме Вариньона имеем:

$$M_o(\vec{F}) = M_o(\vec{F}_1) + M_o(\vec{F}_2) = -F_1 \cdot a - F_2 \cdot b =$$

$$= -F \cdot \sin\alpha - F \cdot \cos\alpha = -F(a \cdot \sin\alpha + b \cdot \cos\alpha)\,. \qquad (1.3)$$

1.3. Момент силы относительно оси

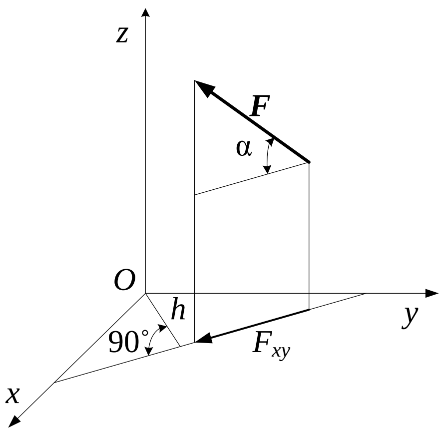


Рис. 1.7

Чтобы вычислить момент силы $\vec{F}$ относительно оси z (рис. 1.7), надо вначале найти проекцию силы $\vec{F}$ на плоскость xy, перпендикулярную оси z; далее определить плечо h найденной проекции F_{xy} относительно центра O; затем вычислить $M_x(\vec{F})$ по формуле

$$M_x(\vec{F}) = \pm\left|\vec{F}_{xy}\right| \cdot h\,.$$

Знак (+) ставится, если при наблюдении со стороны положительного направления оси сила вращает объект вокруг оси против часовой стрелки; знак (–) – если по ходу часовой стрелки.

Плечо h есть длина перпендикуляра, опущенного из центра O на линию действия силы $\vec{F}_{xy}$. Для рис. 1.7 имеем $M_z(\vec{F}) = -|\vec{F}| \cdot \cos\alpha \cdot h$. Из определения момента силы относительно оси следует, что этот момент равен нулю, если сила параллельна оси или пересекает ее.

Для вычисления момента силы относительно оси можно использовать теорему Вариньона: момент равнодействующей относительно оси равен сумме моментов составляющих сил относительно этой оси.

Для рис. 1.8 имеем:

$$M_z(\vec{F}) = M_z(\vec{F}_x) + M_z(\vec{F}_y) + M_z(\vec{F}_z),$$

где $$M_z(\vec{F}_x) = -|\vec{F}_x| \cdot b; \;\; M_z(\vec{F}_y) = -|\vec{F}_y| \cdot a; \;\; M_z(\vec{F}_x) = 0,$$

поэтому $$M_z(\vec{F}) = -|\vec{F}_x| \cdot b + |\vec{F}_y| \cdot a = -|\vec{F}|(a \cdot \cos\beta - b \cdot \cos\alpha).$$

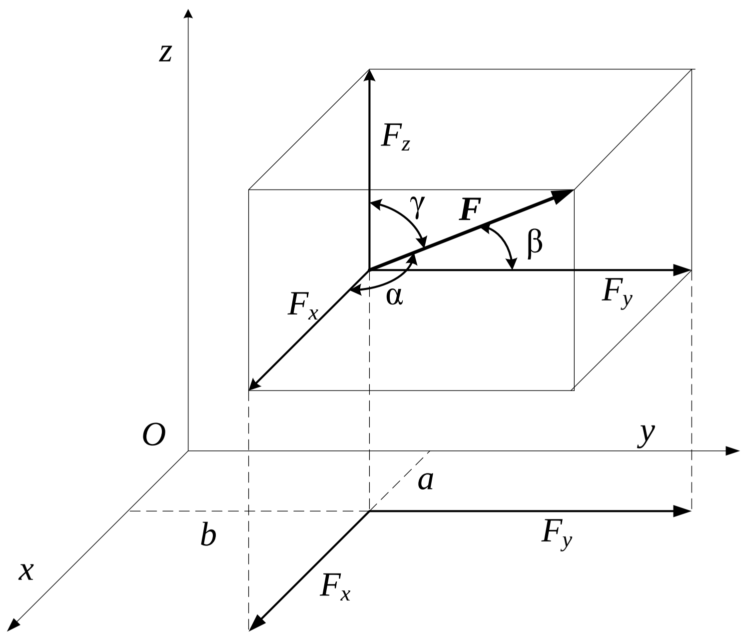


Рис. 1.8

1.4. Аналитический способ задания силы

В прямоугольной системе координат *XYZ* (рис. 1.9) сила $\vec{F}$ задается модулем F, углами α, β, γ, образованными силой $\vec{F}$ с осями координат и точкой приложения силы (точка *A*). Положение точки А определяется координатами x_A, y_A, z_A, . Углы α, β, γ называются направляющими углами.

Проекция силы $\vec{F}$ на каждую координатную ось равна произведению модуля силы на косинус направляющего угла:

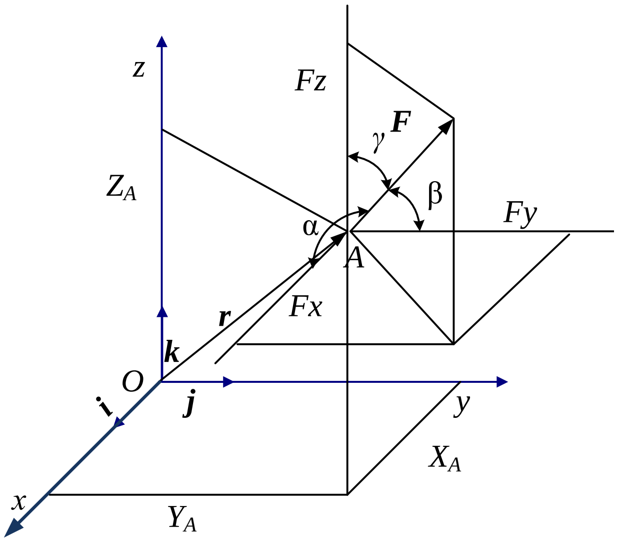


Рис. 1.9

$$F_x = F\cos\alpha,$$
$$F_y = F\cos\beta,$$
$$F_z = F\cos\lambda.$$

Если же заданы проекции силы F_x, F_y, F_z, то модуль силы и косинусы направляющих углов определятся по следующим формулам:

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2}\,;$$

$$\cos\alpha = \frac{F_x}{F};\quad \cos\beta = \frac{F_y}{F};\quad \cos\gamma = \frac{F_z}{F}.$$

1.5. Вектор-момент силы относительно точки и оси

Момент $\vec{m}_O(\vec{F})$ силы $\vec{F}$ относительно центра O (начала координат) выражается векторным произведением

$$\vec{m}_O(\vec{F}) = \vec{r}\times\vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x & y & z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix}, \tag{1.4}$$

где x, y, z – координаты точки приложения силы; F_x, F_y, F_z – проекции силы $\vec{F}$ на координатные оси.

Из соотношения (1.4) получаются выражения моментов силы $\vec{F}$ относительно координатных осей X, Y, Z

$$\vec{m}_x(\vec{F}) = F_z\cdot y - F_y\cdot z\,;\quad \vec{m}_y(\vec{F}) = F_x\cdot z - F_z\cdot x\,;\quad \vec{m}_z(\vec{F}) = F_y\cdot x - F_x\cdot y\,,$$

где $$F_x = F\cos\alpha;\; F_y = F\cos\beta;\; F_z = F\cos\lambda\,.$$

Если рассматривается система сил в плоскости XY, то момент $\vec{m}_O(\vec{F})$ силы $\vec{F}$ относительно центра O равен $\vec{m}_z(\vec{F})$, т. е.

$$\vec{m}_z(\vec{F}) = F_y\cdot x - F_x\cdot y\,.$$

1.6. Момент пары сил

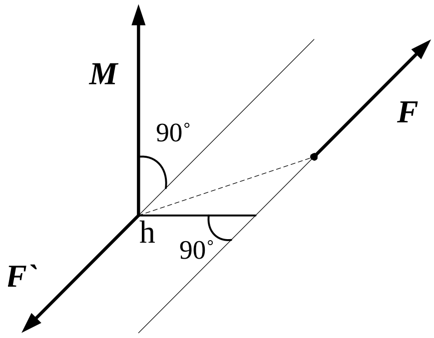


Рис. 1.10

Вектор момента пары сил $(\vec{F}, \vec{F}')$ направлен перпендикулярно плоскости действия пары сил в ту сторону, откуда вращение тела парой сил наблюдается происходящим против часовой стрелки (рис. 1.10).

Модуль момента пары сил равен произведению модуля одной из сил пары на ее плечо, т. е. $M = F \cdot h$.

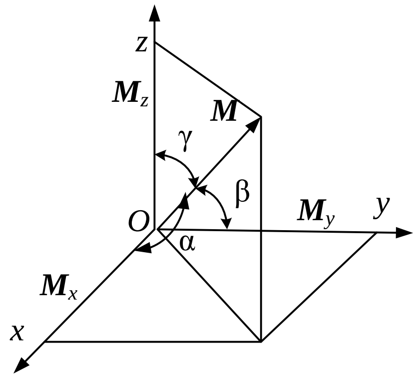


Рис. 1.11

Векторный момент $\vec{M}$ пары сил, произвольно расположенный в декартовой системе координат $OXYZ$, может быть представлен в разложении по этим осям координат (рис. 1.11), $\vec{M} = M_x \cdot \vec{i} + M_y \cdot \vec{j} + M_z \cdot \vec{k}$, где $M_x = M\cos\alpha,\ M_y = M\cos\beta,\ M_z = M\cos\gamma$ – проекции векторного момента $\vec{M}$ на соответствующие оси координат.

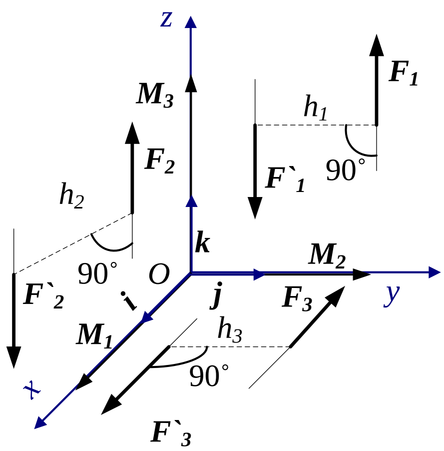


Рис. 1.12

Векторный момент пары сил, расположенный в одной из координатных плоскостей, или ей параллельной, следует приложить в центре O, направив вдоль соответствующей оси в сторону, откуда вращение тела парой сил представляется против часовой стрелки (рис. 1.12). Так, $\vec{M}_1 = M_1 \cdot \vec{i}$; $\vec{M}_2 = M_2 \cdot \vec{j}$; $\vec{M}_3 = M_3 \cdot \vec{k}$, где $M_1 = F_1 h_1$; $M_2 = F_2 h_2$; $M_3 = F_3 h_3$ – модули моментов соответствующих пар сил.

1.7. Методика решения задач

Решение задачи рекомендуется выполнять в следующем порядке.

1. Выбрать объект равновесия.
2. Выбрать прямоугольную систему координат.
3. Изобразить активные силы, действующие на объект равновесия.
4. Изобразить силы реакций.
5. Составить систему уравнений равновесия сил, действующих на объект.
6. Решить полученную систему уравнений.

1.8. Методика решения задач с помощью ПК

Решение задачи рекомендуется выполнять в определенной последовательности.

1. Выбрать объект равновесия.
2. Выбрать прямоугольную систему координат.
3. Изобразить активные силы, действующие на объект равновесия.
4. Определить координаты точек приложения активных сил и реакций связей (при формировании матриц A и B).
5. Указать направляющие углы активных сил и реакций связей.
6. Составить систему уравнений равновесия сил, действующих на объект.
7. Составить матрицы коэффициентов при неизвестных и свободных членах (матрицы A и B).
8. Решить на ПК систему уравнений равновесия.

В табл. 1.1 предлагаются обозначения величин, используемых при решении задач.

Таблица 1.1

Обозначения величин

Обозначение величины	Название величины
F_i	Модуль i-й активной силы, $i = 1, 2,\ldots n$
x_{1i}, y_{1i}, z_{1i}	Координаты точки приложения i-й активной силы
α_{1i}, β_{1i}, γ_{1i}	Направляющие углы i-й активной силы
R_j	Величина j-й реакции связи
x_{2j}, y_{2j}, z_{2j}	Координаты точки приложения j-й реакции связи
α_{2j}, β_{2j}, γ_{2j}	Направляющие углы j-й реакции связи
M_k	Модуль момента k-й пары сил
n	Число активных сил
m	Число пар сил

Для решения систем уравнений на ПК рекомендуется использовать пакет MathCad. Основные методы решения систем уравнений приведены в прил. 1.

2. РАВНОВЕСИЕ СИСТЕМЫ СХОДЯЩИХСЯ СИЛ

Примером систем сходящихся сил являются стержневые конструкции, состоящие из невесомых стержней, соединенных по концам шарнирами (рис. 2.1).

Соединяющий шарнир A называется узлом. К стержневым конструкциям близки конструкции из невесомых нитей (рис. 2.2), а также смешанные конструкции из невесомых стержней и нитей (рис. 2.3). Расчетные схемы у всех этих конструкций одинаковы, одинаковы и методики расчета по определению усилий в стержнях и нитях.

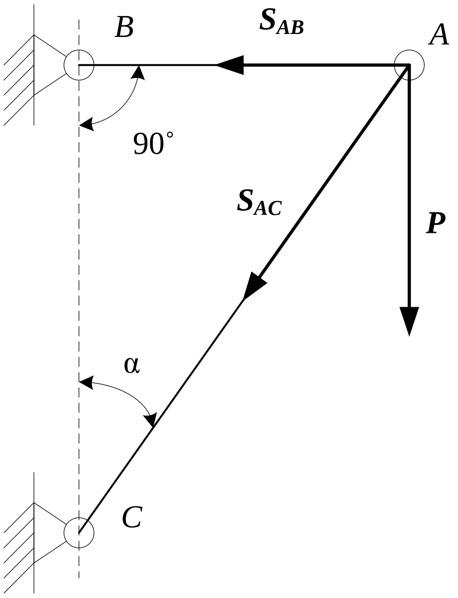


Рис. 2.1

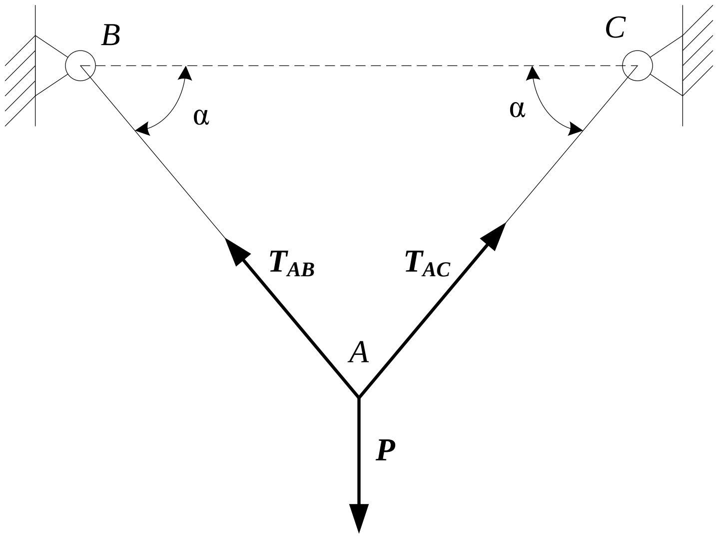


Рис. 2.2

В качестве объектов равновесия при расчете рассматриваемых конструкций рекомендуется брать узлы этих конструкций (узел A на рис. 2.1, 2.2).

При определении сил, действующих на узел стержневых конструкций, можно мысленно представить, что узел – это тело малых размеров (например шарнирный болт), к которому присоединены стержни, сходящиеся в узле. Стержни и нити, сходящиеся в узле, можно рассматривать как связи, ограничивающие перемещение узла. Реакция невесомой нити направлена вдоль нити от объекта, реакция же невесомого стержня может быть направлена вдоль стержня либо к объекту, либо от него. Истинное направление реакции стержня устанавливается при решении задачи.

Все действующие на узел силы, активные и неактивные, сходятся в этом узле. Так, на узел A стержневой конструкции (рис. 2.1) действуют активная сила $\vec{P}$ и реакции стержней $\vec{S}_{AB}, \vec{S}_{AC}$. На узел A нитяной конструкции (рис. 2.2) действуют активная сила $\vec{P}$ и реакции нитей $\vec{T}_{AB}, \vec{T}_{AC}$.

Аналитическое условие равновесия сходящихся сил выражается следующими уравнениями равновесия:

– для сходящихся сил в плоскости Oxy

$$\sum F_{kx} = 0,\ \sum F_{ky} = 0; \qquad (2.1)$$

– для сходящихся сил в пространстве $Oxyz$

$$\sum F_{kx} = 0,\ \sum F_{ky} = 0,\ \sum F_{kz} = 0\ , \tag{2.2}$$

т. е. для равновесия сходящихся сил необходимо и достаточно, чтобы суммы проекций всех сил на координатные оси равнялись нулю.

Пример 1

Груз P весом 3000 H равномерно поднимается лебедкой D с помощью веревки, перекинутой через блок C. Ось блока поддерживается стержнями AC и BC (рис. 2.3). Пренебрегая размерами блока, весом стержней и веревки, определить усилия в стержнях AC и BC. Трение в блоке не учитывать.

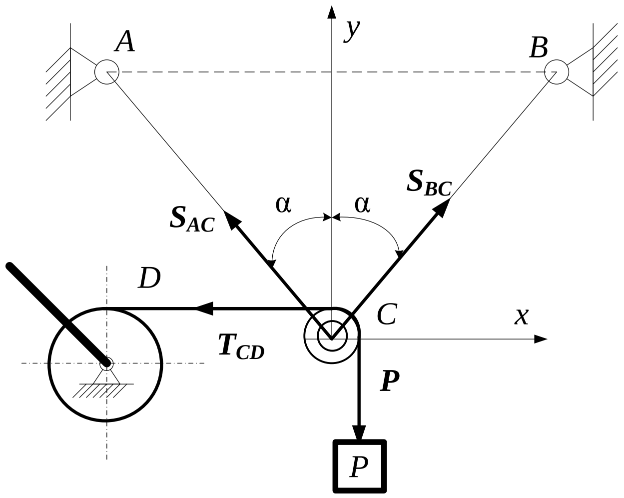


Рис. 2.3

Решение. Груз P движется равномерно и прямолинейно, поэтому можно считать, что груз и вся конструкция находятся в равновесии.

Это значит, что для решения задачи можно применять условия равновесия системы.

За объект равновесия принимаем узел C. Размерами блока по условию задачи можно пренебречь, поэтому будем считать, что сила $\vec{P}$ и реакция веревки $\vec{T}_{CD}$ проходят через узел C.

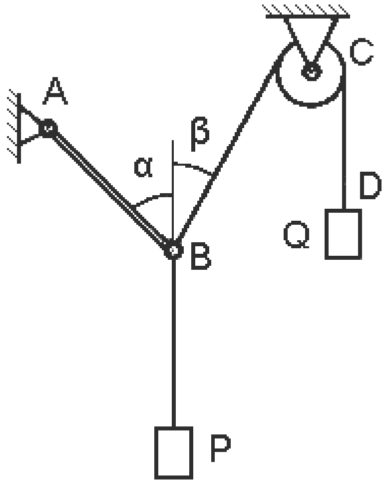
Кроме этих двух сил, на узел действуют также реакции стержней $\vec{S}_{AC}$ и $\vec{S}_{BC}$. На объект (узел C) действует система сходящихся сил: $\vec{P},\ \vec{T}_{CD}, \vec{S}_{AC}, \vec{S}_{BC}$. Необходимо вычислить реакции стержней $\vec{S}_{AC}$ и $\vec{S}_{BC}$ при условии, что $T_{CD} = P$. Решение поставленной задачи в среде MathCad приведено в прил. 2.

Задача № 1

Варианты 1–10. К веревке AB, один конец которой закреплен в точке A, привязаны в точке В груз P и веревка BCD, перекинутая через блок; к концу ее подвешена гиря весом Q = 10 Н.

Определить, пренебрегая трением в блоке, натяжение веревки AB и вес груза P, если углы, образуемые веревками с вертикалью, равны α и β.

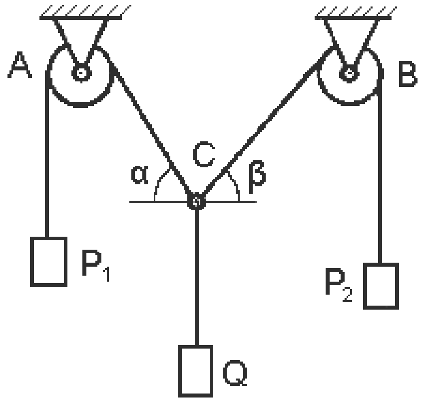
№ вар.	Дано		Ответ	
	α	β	S_{AC}, Н	P, Н
1	30°	30°	10,0	17,32
2	30°	45°	14,14	19,32
3	30°	60°	17,32	20,0
4	30°	90°	20,0	17,32
5	45°	45°	10,0	14,14
6	45°	60°	12,25	13,66
7	45°	90°	14,14	10,0
8	60°	45°	8,16	11,73
9	60°	60°	10,0	10,0
10	60°	90°	11,5	5,77



Варианты 11–16. Три нити связаны в узле *C*. Две из них перекинуты через блоки *A* и *B* и образуют углы α и β с горизонтом; к концам их подвешены грузы P_1 и P_2.

Определить P_1 и P_2, если вес груза *Q*, подвешенного к третьей нити, равен 10 Н. Трением в блоках пренебречь.

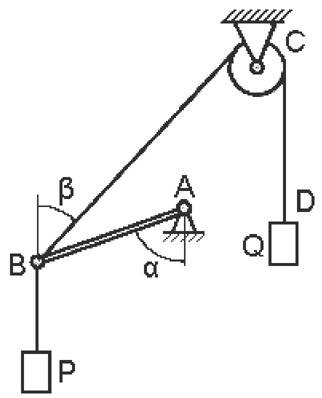
№ вар.	Дано		Ответ	
	α	β	P_1, Н	P_2, Н
11	30°	45°	7,32	8,96
12	30°	60°	5,0	8,66
13	45°	60°	5,18	7,32
14	30°	75°	2,68	8,96
15	60°	75°	3,66	7,07
16	60°	60°	5,77	5,77

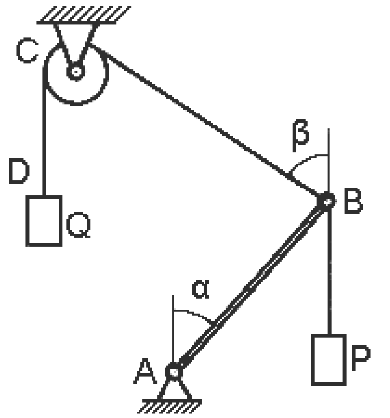


Варианты 17–30. К стержню *AB*, закрепленному в шарнире *A*, привязан в точке *B* груз весом *P* = 10 Н и веревка *BCD*, перекинутая через блок; к концу ее подвешена гиря весом *Q*.

Определить вес гири *Q* и усилие в стержне *AB*, если угол между стержнем и вертикалью равен α, а угол между веревкой и вертикалью равен β. Весом стержня и трением в блоке пренебречь.

№ вар.	Дано		Ответ	
	α	β	S_{AB}, Н	Q, Н
17	45°	30°	19,32	27,32
18	60°	30°	10,0	17,32
19	60°	45°	27,32	33,47
20	90°	30°	5,77	11,55
21	90°	45°	10,0	14,1
22	90°	60°	17,3	20,0





№ вар.	Дано		Ответ	
	α	β	S_{AB}, Н	Q, Н
23	45°	30°	5,18	7,32
24	45°	45°	7,07	7,07
25	45°	60°	8,96	7,32
26	60°	30°	5,0	8,66
27	60°	45°	7,32	8,96
28	60°	60°	10,0	10,0
29	60°	90°	20,0	17,32
30	45°	90°	14,14	10,0

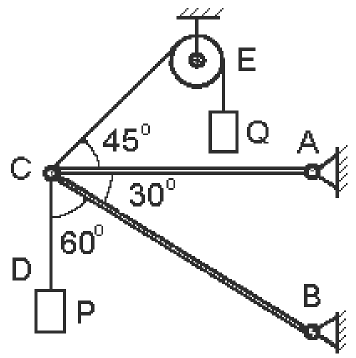
Задача № 2

Варианты 1–20

Два стержня *AC* и *BC* соединены между собой и с опорой шарнирами. К шарниру C привязаны веревки *CD* и *CE*, к свободным концам которых подвешены грузы P = 10 Н, Q = 20 Н; одна или обе веревки перекинуты через блоки (см. чертеж).

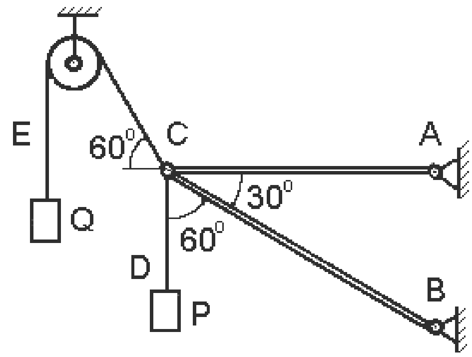
Пренебрегая весом стержней и трением в блоке, определить усилия в стержнях.

№ 2 – 1



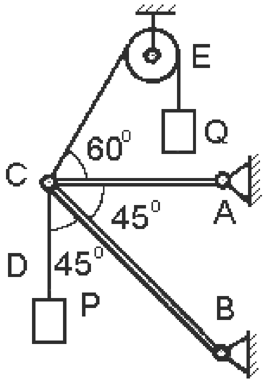
Ответ: S_A = 21,32 Н; S_B = 8,28 Н.

№ 2 – 2



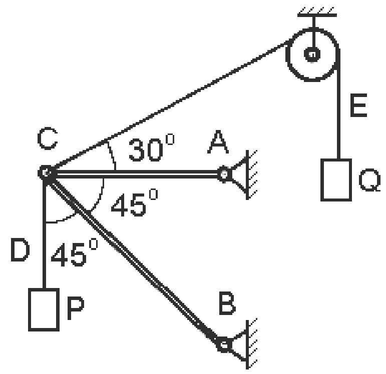
Ответ: S_A = 2,68 Н; S_B = 14,64 Н.

№ 2 – 3



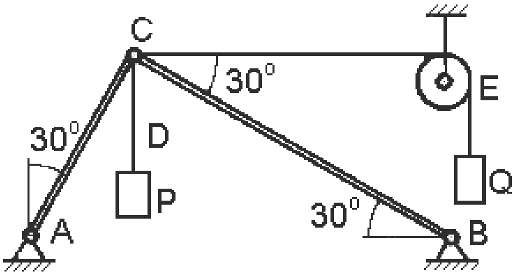
Ответ: S_A = 17,32 Н; S_B = 10,35 Н.

№ 2 – 4



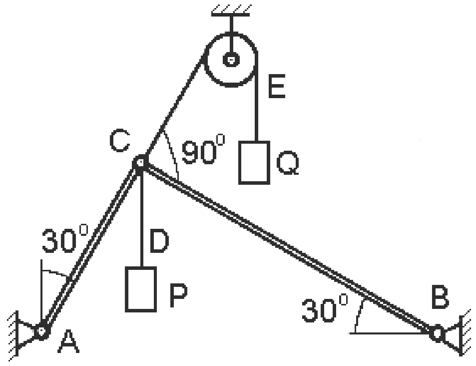
Ответ: S_A = 17,32 Н; S_B = 0 Н.

№ 2 – 5



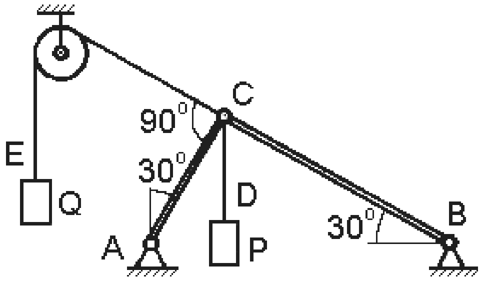
Ответ: $S_A = 1{,}34$ Н; $S_B = 22{,}3$ Н.

№ 2 – 6



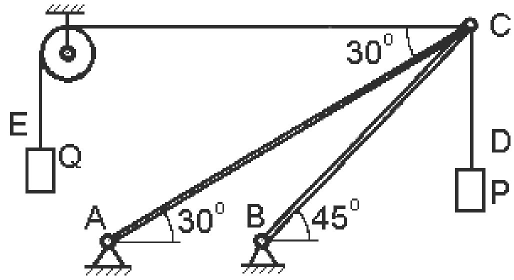
Ответ: $S_A = 11{,}34$ Н; $S_B = 5$ Н.

№ 2 – 7



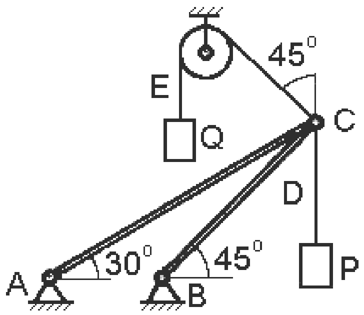
Ответ: $S_A = 8{,}66$ Н; $S_B = 15$ Н.

№ 2 – 8



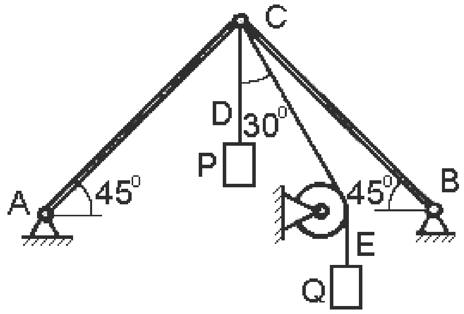
Ответ: $S_A = 27{,}3$ Н; $S_B = 5{,}18$ Н.

№ 2 – 9



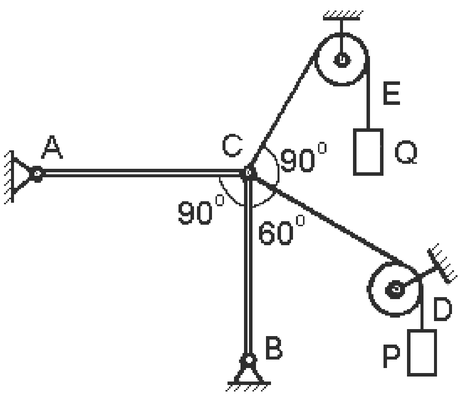
Ответ: $S_A = 49{,}98$ Н; $S_B = 41{,}27$ Н.

№ 2 – 10



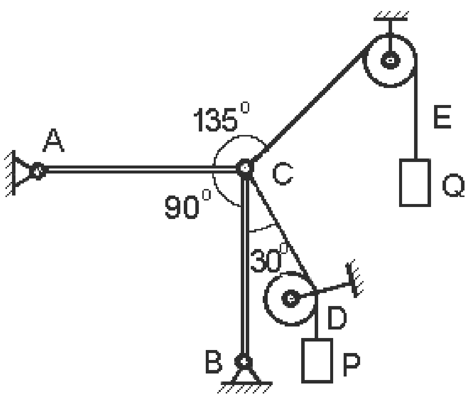
Ответ: $S_A = 12{,}25$ Н; $S_B = 26{,}39$ Н.

№ 2 – 11



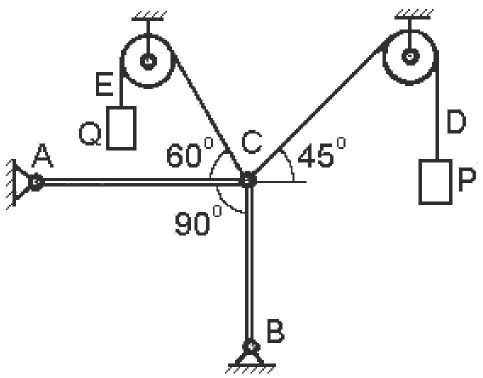
Ответ: $S_A = 18{,}66$ Н; $S_B = 12{,}32$ Н.

№ 2 – 12



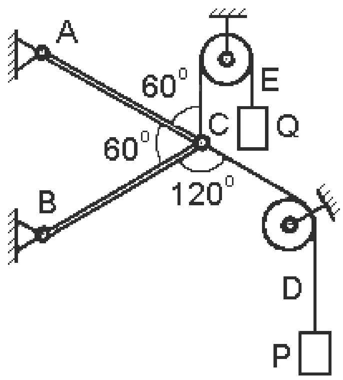
Ответ: $S_A = 19{,}14$ Н; $S_B = 5{,}48$ Н.

№ 2 – 13



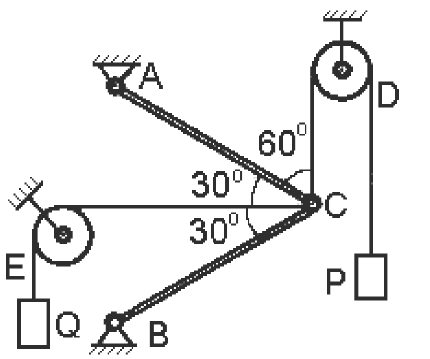
Ответ: S_A = 2,93 Н; S_B = 24,39 Н.

№ 2 – 14



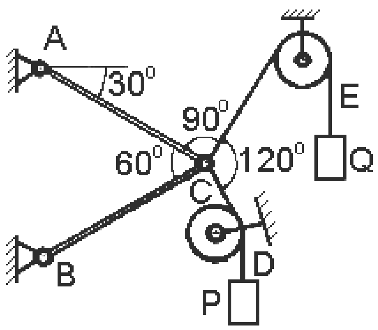
Ответ: S_A = 10 Н; S_B = 20 Н.

№ 2 – 15



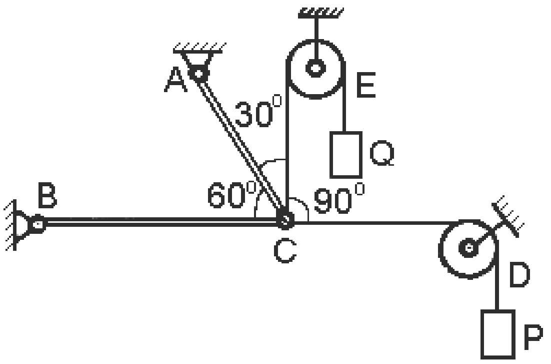
Ответ: S_A = 21,55 Н; S_B = 1,55 Н.

№ 2 – 16



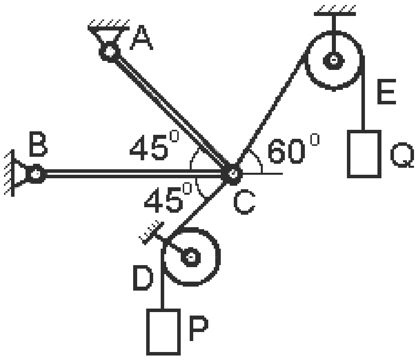
Ответ: S_A = 0 Н; S_B = 17,32 Н.

№ 2 – 17



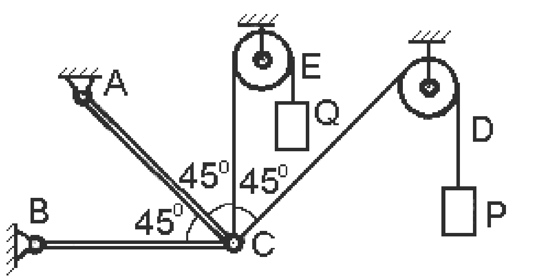
Ответ: S_A = 23,1 Н; S_B = 21,55 Н.

№ 2 – 18



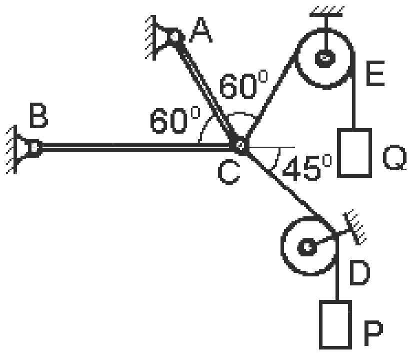
Ответ: S_A = 14,49 Н; S_B = 13,18 Н.

№ 2 – 19



Ответ: S_A = 38,28 Н; S_B = 34,14 Н.

№ 2 – 20

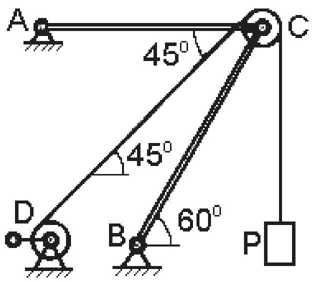


Ответ: S_A = 11,84 Н; S_B = 22,99 Н.

Варианты 21–30. Груз P = 3000 Н равномерно поднимается лебедкой D с помощью веревки, перекинутой через блок C, поддерживаемый стержнями AC и BC, как показано на рисунке.

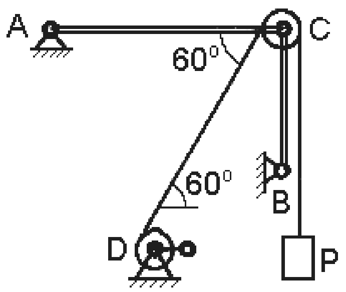
Определить усилия в стержнях AC и BC. Трением в блоке и весом стержня пренебречь.

№ 2 – 21



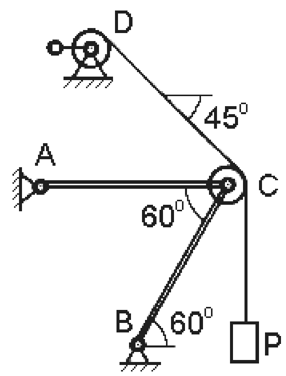
Ответ: S_A = 836 Н; S_B = 5914 Н.

№ 2 – 22



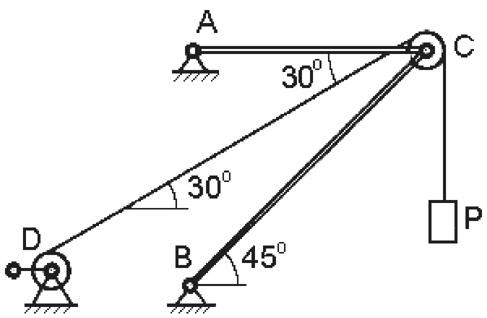
Ответ: S_A = 1500 Н; S_B = 5598 Н.

№ 2 – 23



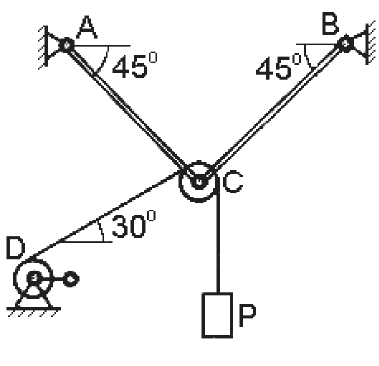
Ответ: S_A = 1624 Н; S_B = 1015 Н.

№ 2 – 24



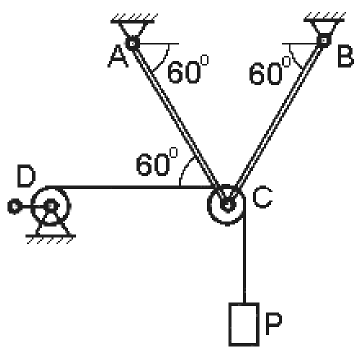
Ответ: S_A = 1902 Н; S_B = 6364 Н.

№ 2 – 25



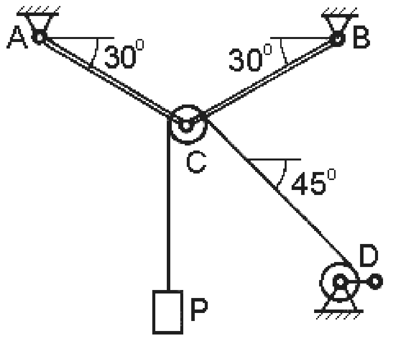
Ответ: S_A = 1345 Н; S_B = 5022 Н.

№ 2 – 26



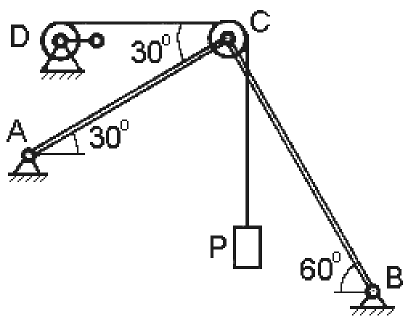
Ответ: S_A = 1268 Н; S_B = 4732 Н.

№ 2 – 27



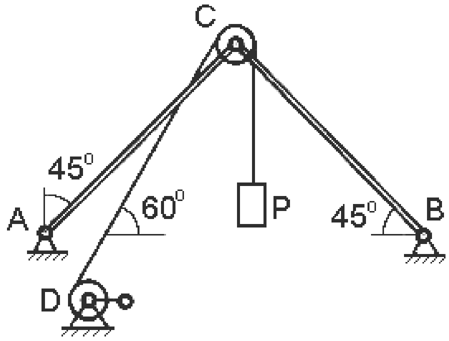
Ответ: S_A = 3909 Н; S_B = 6346 Н.

№ 2 – 28



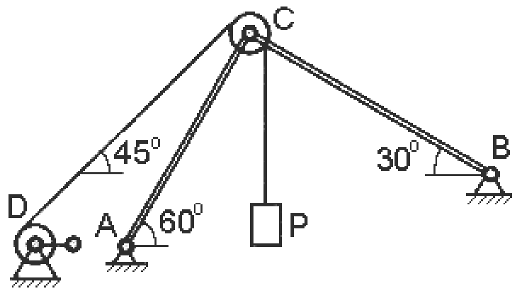
Ответ: S_A = 4098 Н; S_B = 1098 Н.

№ 2 – 29



Ответ: S_A = 5024 Н; S_B = 2898 Н.

№ 2 – 30



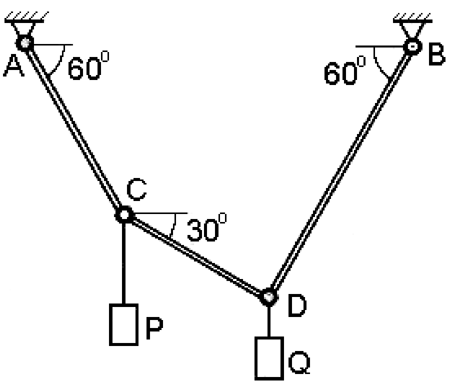
Ответ: S_A = 5499 Н; S_B = 724 Н.

Задача № 3

Варианты 1–30. Стержни *AC* и *BD*, прикрепленные концевыми шарнирами *A* и *B* к опоре, соединены между собой стержнем *CD*. К шарнирам *C* и *D* прикреплены нити, к свободным концам которых подвешены грузы *P* и *Q*.

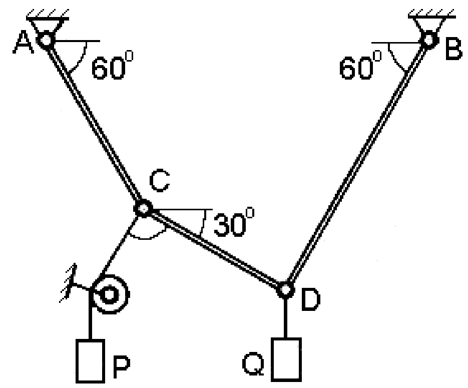
Определить вес груза *Q* так, чтобы система стержней находилась в равновесии, если *P* = 10 Н. Весом стержней и трением в блоках пренебречь.

№ 3 – 1



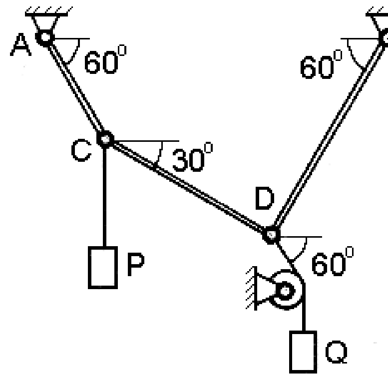
Ответ: *Q* = 20 Н.

№ 3 – 2



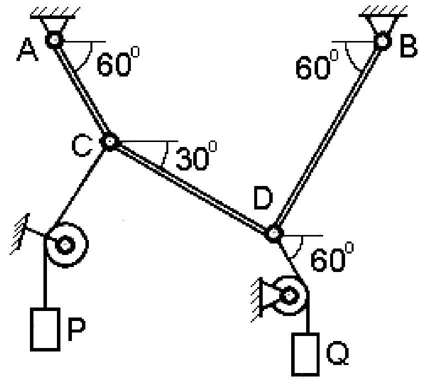
Ответ: *Q* = 34,64 Н.

№ 3 – 3



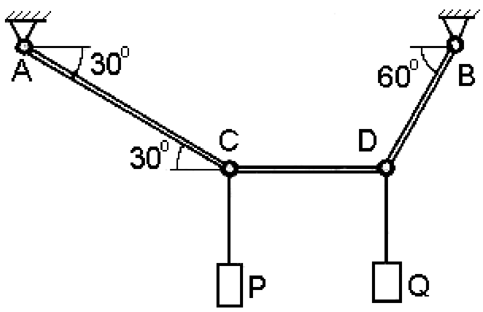
Ответ: Q = 11,55 Н.

№ 3 – 4



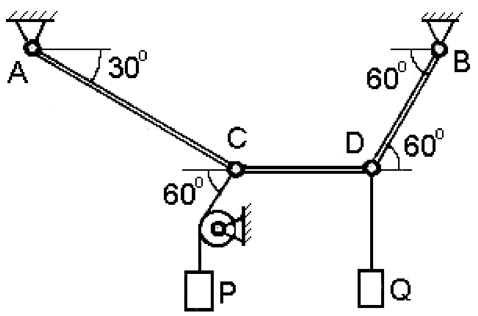
Ответ: Q = 20 Н.

№ 3 – 5



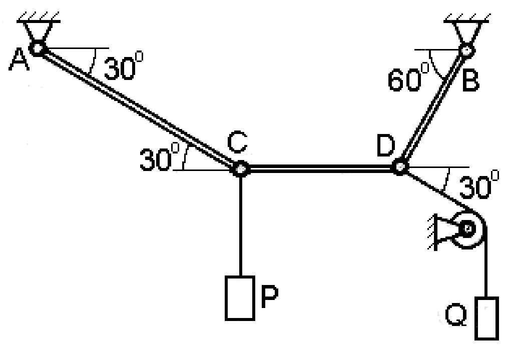
Ответ: Q = 30 Н.

№ 3 – 6



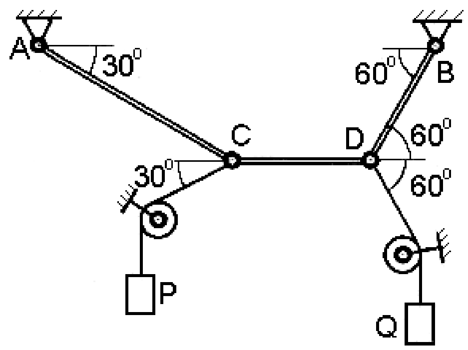
Ответ: Q = 34,64 Н.

№ 3 – 7



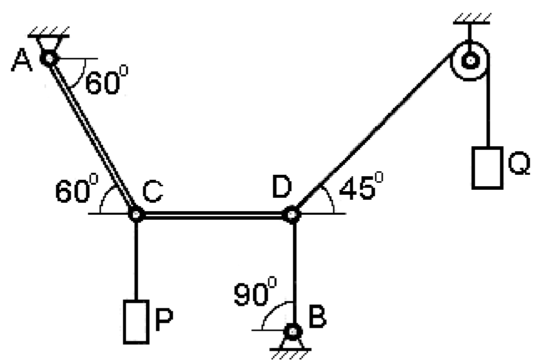
Ответ: Q = 15 Н.

№ 3 – 8



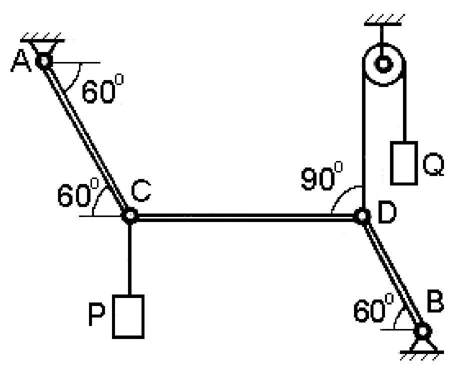
Ответ: Q = 17,32 Н.

№ 3 – 9



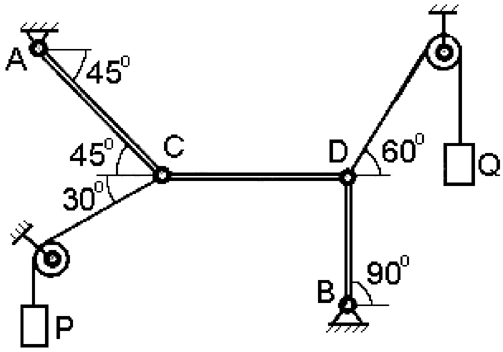
Ответ: Q = 8,17 Н.

№ 3 – 10



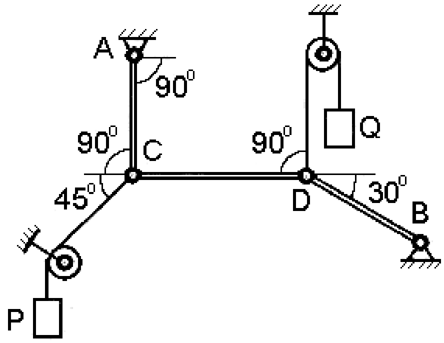
Ответ: Q = 10 Н.

№ 3 – 11



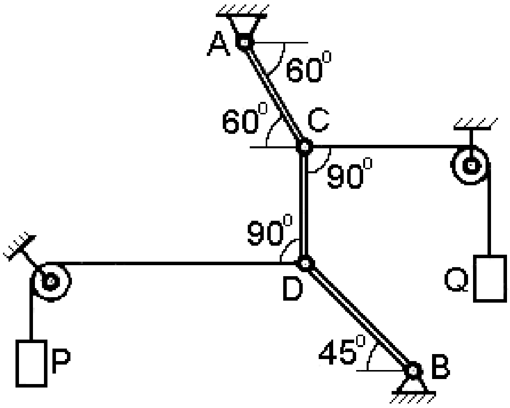
Ответ: $Q = 27{,}3$ Н.

№ 3 – 12



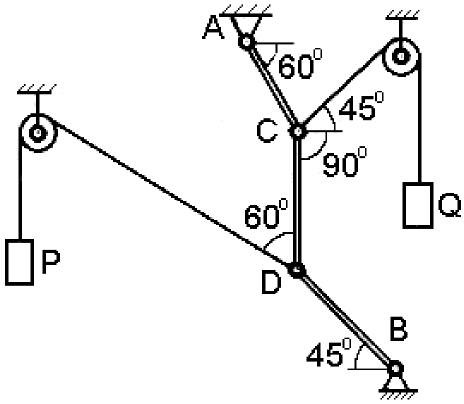
Ответ: $Q = 4{,}08$ Н.

№ 3 – 13



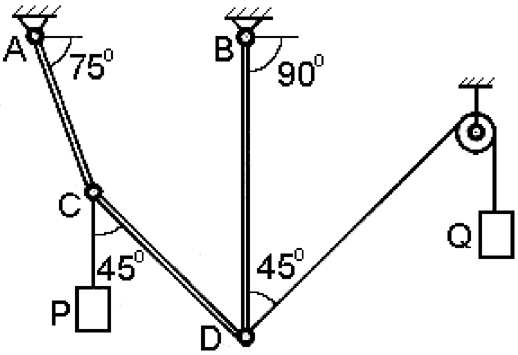
Ответ: $Q = 5{,}77$ Н.

№ 3 – 14



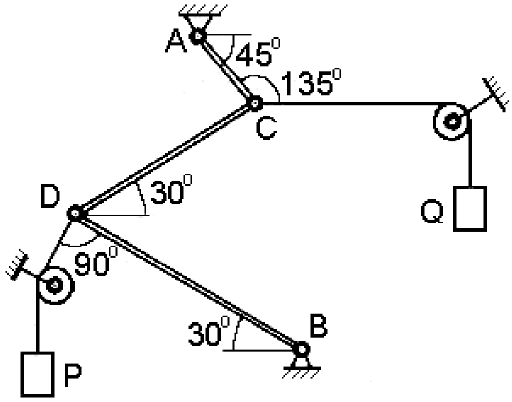
Ответ: $Q = 1{,}89$ Н.

№ 3 – 15



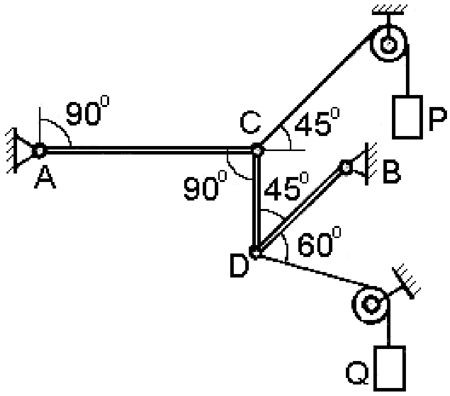
Ответ: $Q = 5{,}18$ Н.

№ 3 – 16



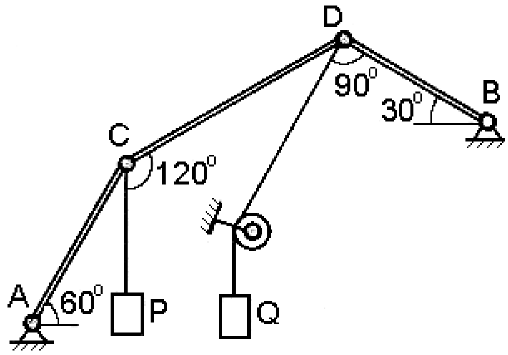
Ответ: $Q = 15{,}8$ Н.

№ 3 – 17



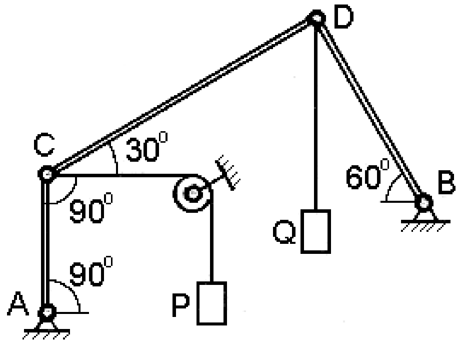
Ответ: Q = 5,77 Н.

№ 3 – 18



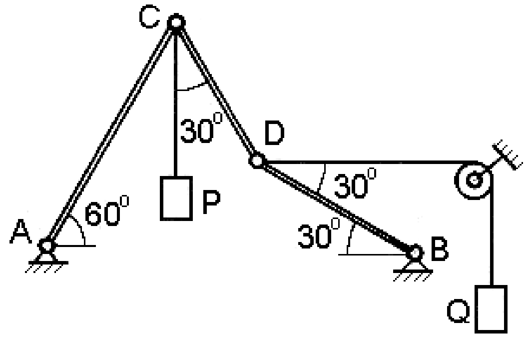
Ответ: Q = 8,66 Н.

№ 3 – 19



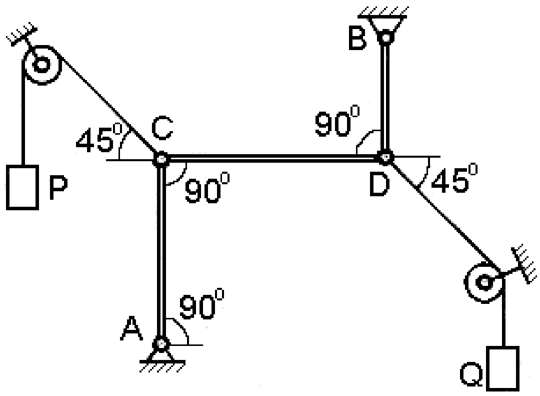
Ответ: Q = 23,1 Н.

№ 3 – 20



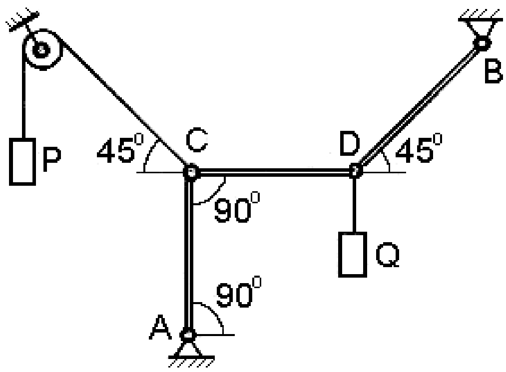
Ответ: Q = 5,77 Н.

№ 3 – 21



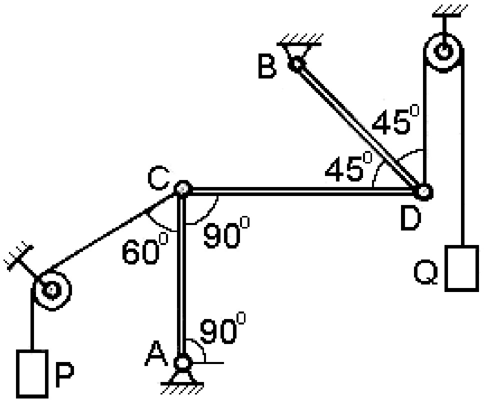
Ответ: Q = 10 Н.

№ 3 – 22



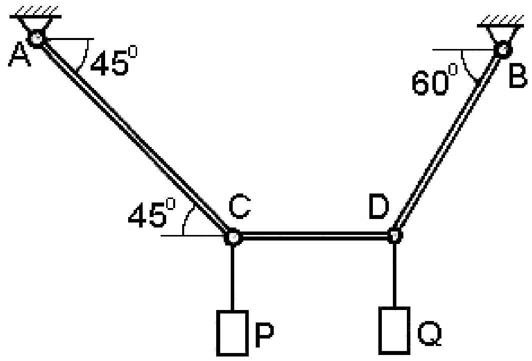
Ответ: Q = 7,07 Н.

№ 3 – 23



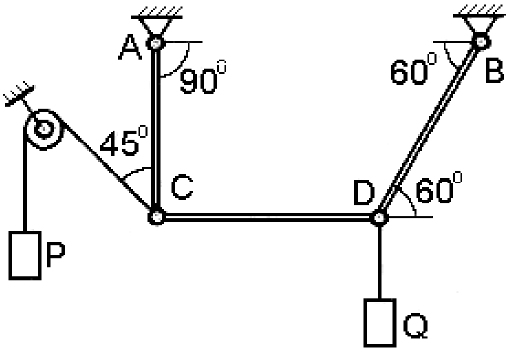
Ответ: Q = 8,66 Н.

№ 3 – 24



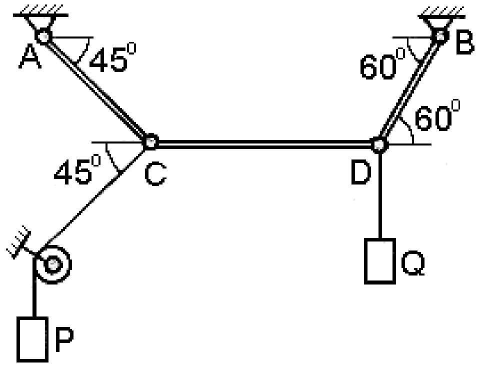
Ответ: Q = 17,32 Н.

№ 3 – 25



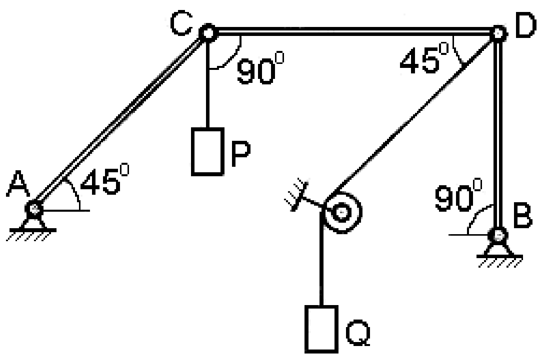
Ответ: Q = 12,25 Н.

№ 3 – 26



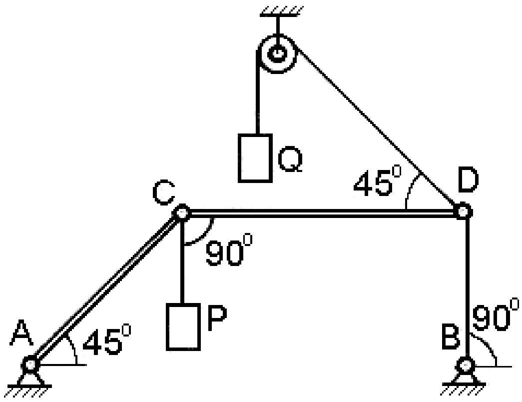
Ответ: Q = 24,49 Н.

№ 3 – 27



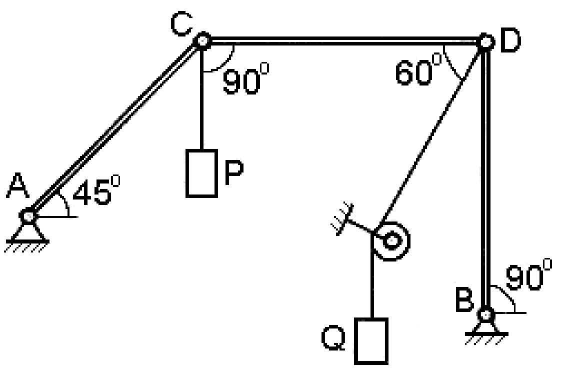
Ответ: Q = 14,14 Н.

№ 3 – 28



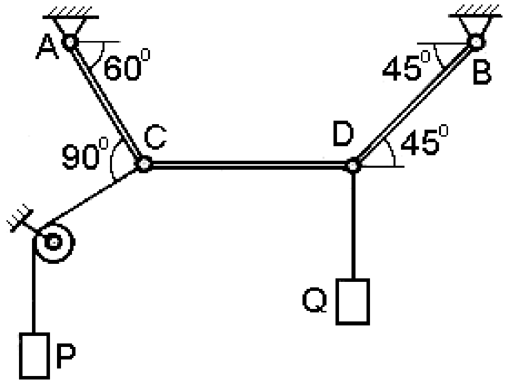
Ответ: Q = 14,14 Н.

№ 3 – 29



Ответ: $Q = 20$ Н.

№ 3 – 30



Ответ: $Q = 11{,}55$ Н.

3. РАВНОВЕСИЕ ПЛОСКОЙ СИСТЕМЫ СИЛ

3.1. Общие положения

Если тело представляет собой плоскую фигуру, закрепленную связями, лежащими в плоскости этой фигуры, то подлежат определению величины трех реакций $\vec{R}_1$, $\vec{R}_2$, $\vec{R}_3$. Заданные силы расположены в плоскости фигуры.

Условия равновесия сил в векторной форме в этом случае имеют вид:

$$\begin{gathered}\sum_{j=1}^{3} \vec{R}_j + \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i = 0; \\ \sum_{j=1}^{3} \vec{M}_o(\vec{R}_j) + \sum_{i=1}^{n} \vec{M}_o(\vec{F}_i) + \sum_{k=1}^{p} \vec{M}_k = 0.\end{gathered} \tag{3.1}$$

Условиям (3.1) соответствуют три уравнения равновесия:

$$\begin{gathered}R_{1x} + R_{2x} + R_{3x} + \sum F_{ix} = 0; \\ R_{1y} + R_{2y} + R_{3y} + \sum F_{iy} = 0; \\ M_o(\vec{R}_1) + M_o(\vec{R}_2) + M_o(\vec{R}_3) + \sum M_o(\vec{F}_i) + \sum M_k = 0,\end{gathered} \tag{3.2}$$

где $R_{jx} = R_j \cos\alpha_{2j}$, $R_{jy} = R_j \cos\beta_{2j}$, $(j = 1,2,3)$ – проекции реакций связей $\vec{R}_j$ на координатные оси; $M_o(\vec{R}_j)$ – моменты реакции связи $\vec{R}_j$ относительно центра O; $M_o(\vec{F}_i)$ – момент заданной силы $\vec{F}_i$ относительно того же центра; M_k – момент k-й пары сил.

Для решения полученной системы уравнений в пакете MathCad при помощи формул (3.1), (3.2) величины моментов $M_o(\vec{R}_j)$, $M_o(\vec{F}_i)$ можно представить в следующем виде:

$$M_o(\vec{R}_j) = R_{jy} \cdot x_{2j} - R_{jx} \cdot y_{2j} = R_j \cdot (\cos\beta_{2j} \cdot x_{2j} - \cos\alpha_{2j} \cdot y_{2j});$$

$$M_o(\vec{F}_i) = F_{iy} \cdot x_{1i} - F_{ix} \cdot y_{1i} = F_i \cdot (\cos\beta_{1i} \cdot x_{1i} - \cos\alpha_{1i} \cdot y_{1i}).$$

Матрицы A и B системы уравнений в этом случае будут такими:

$$A = \begin{bmatrix} \cos\alpha_{21} & \cos\alpha_{22} & \cos\alpha_{23} \\ \cos\beta_{21} & \cos\beta_{22} & \cos\beta_{23} \\ \cos\beta_{21} \cdot x_{21} - \cos\alpha_{21} \cdot y_{21} & \cos\beta_{22} \cdot x_{22} - \cos\alpha_{22} \cdot y_{22} & \cos\beta_{23} \cdot x_{23} - \cos\alpha_{23} \cdot y_{23} \end{bmatrix};$$

$$B = \begin{bmatrix} -\sum F_i \cdot \cos\alpha_{1i} \\ -\sum F_i \cdot \cos\beta_{1i} \\ -F_i \cdot (\cos\beta_{1i} \cdot x_{1i} - \cos\alpha_{1i} \cdot y_{1i}) + \sum M_k \end{bmatrix},$$

где $\cos\beta_{2j} = \sin\alpha_{2j}$, $\cos\beta_{1i} = \sin\alpha_{1i}$ $(j = 1,2,3)$.

После формирования матриц A и B обращаются к программе решения системы линейных уравнений $X = A^{-1} \cdot B$.

3.2. Расчет одиночной конструкции

Пример 2

Прямоугольная плита, весом которой пренебречь, размером $d \times 2d$ $(d = 1\text{ м})$ закреплена с помощью трех стержней в вертикальной плоскости (рис. 3.1). На плиту действуют силы $F_1 = 100$ Н, $F_2 = 150$ Н, $F_3 = 50$ Н и пары сил с моментами $M_1 = 50$ Нм, $M_2 = 100$ Нм. Найти усилия в стержнях.

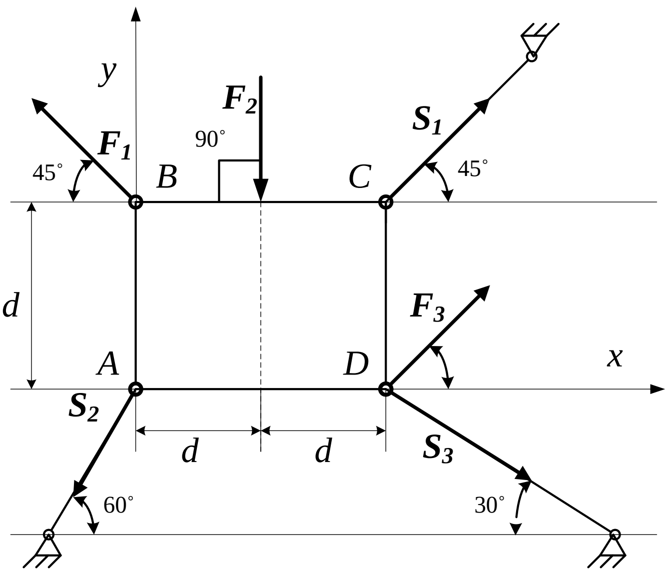


Рис. 3.1

Решение. Обозначим реакции стержней S_1, S_2, S_3. Объектом равновесия является плита, связями – стержни, ее удерживающие. На плиту действуют заданные силы F_1, F_2, F_3, а также реакции связей S_1, S_2, S_3, направленные вдоль стержней от объекта равновесия. Оси координат x, y указанны на рис. 3.1, а также показаны направляющие углы всех сил, действующих на плиту.

Решение поставленной задачи в среде MathCad приведено в прил. 3.

3.3. Расчет составной конструкции

Пример 3

Для составной конструкции (рис. 3.2) определить реакции опор и реакции промежуточных шарниров, а при решении в пакете MathCad также найти графическую зависимость реакции Y_C от силы P_1. Построить график полученной зависимости.

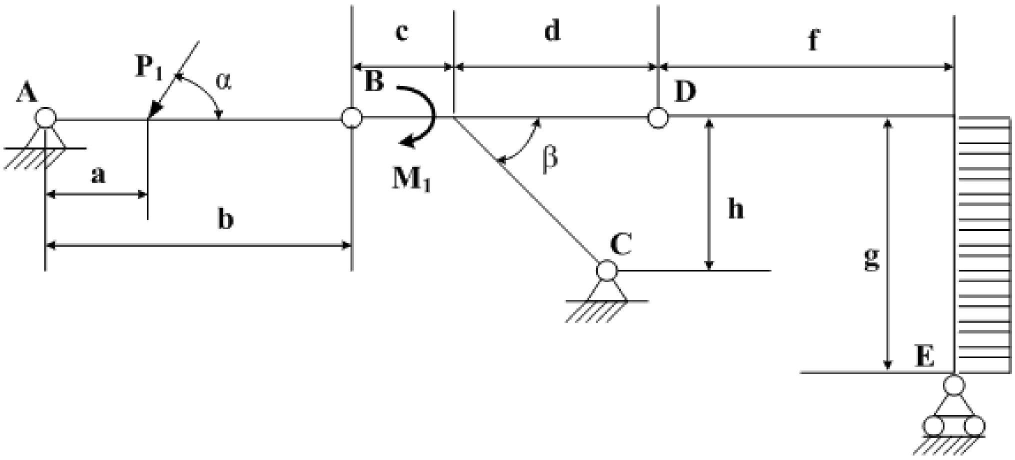


Рис. 3.2

Расчет выполнить при следующих исходных данных:

$P_1 = 4000$ Н, $M_1 = 2000$ Нм, $q = 400$ Н/м, $a = 4$ м, $b = 6$ м, $c = 4$ м, $d = 8$ м, $f = 5$ м, $g = 8$ м, $h = 6$ м, $0 \le P_1 \le 4000$ Н, $\alpha = 60°$, $\beta = 45°$.

Уравнения равновесия сил, приложенных к телу AB (рис. 3.3):

$$\sum X_i = 0,\ X_A + X_B - P_1 \cos\alpha = 0;$$

$$\sum Y_i = 0,\ Y_A + Y_B - P_1 \sin\alpha = 0; \qquad (3.5)$$

$$\sum M_{iA} = 0,\ Y_B \cdot b - P_1 \sin\alpha \cdot a = 0.$$

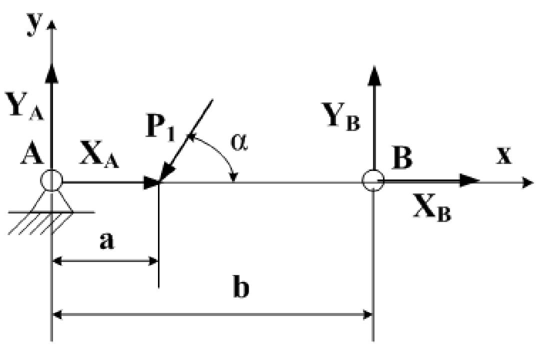


Рис. 3.3

Уравнения равновесия сил, приложенных к телу DE (рис. 3.4):

$$\sum X_i = 0, -X_B + X_D + X_C = 0;$$
$$\sum Y_i = 0, -Y_B + Y_D + Y_C = 0; \tag{3.6}$$
$$\sum M_{iB} = 0, Y_D \cdot (c+d) + Y_C \cdot (c + h \cdot tg(\pi/2 - \beta)) + X_C \cdot h - M_1 = 0.$$

Уравнения равновесия сил, приложенных к телу BD (рис. 3.5):

$$\sum X_i = 0, -X_D - Q = 0;$$
$$\sum Y_i = 0, -Y_D + Y_E = 0; \tag{3.7}$$
$$\sum M_{iD} = 0, Y_E \cdot f - Q \cdot g/2 = 0,$$

где $Q = q \cdot g$.

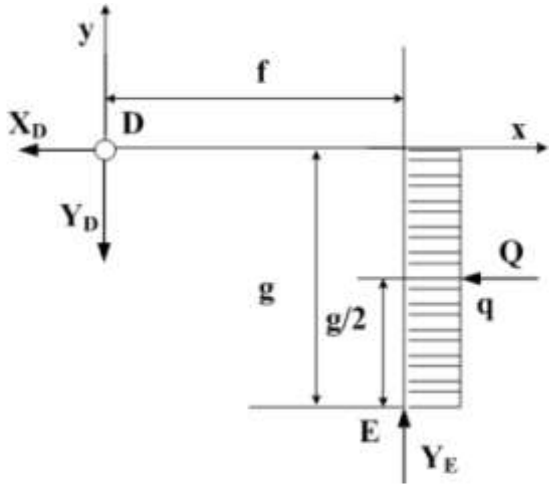


Рис. 3.4

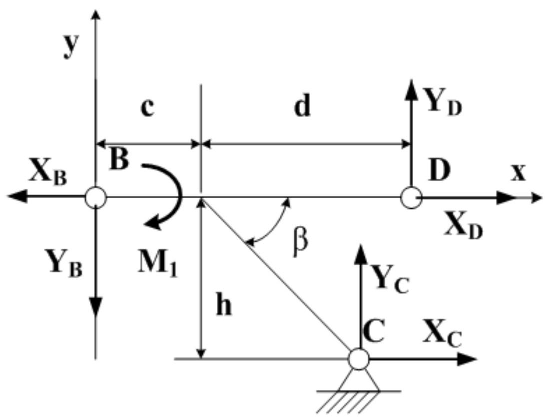


Рис. 3.5

При решении в пакете MathCad уравнения (3.5), (3.6), (3.7) образуют единую систему девяти линейных уравнений, которую можно представить в матричной форме (табл. 3.1), где $S_1 = X_A$; $S_2 = Y_A$; $S_3 = X_B$; $S_4 = Y_B$; $S_5 = X_C$; $S_6 = Y_C$; $S_7 = X_D$; $S_8 = Y_D$; $S_9 = Y_E$.

Таблица 3.1

Матричная форма представления системы линейных уравнений

	Коэффициенты при неизвестных a_{ij}									Свободные члены b_j
	S_1	S_2	S_3	S_4	S_5	S_6	S_7	S_8	S_9	
1	$a(1,1)$	0	$a(1,3)$	0	0	0	0	0	0	$b(1)$
2	0	$a(2,2)$	0	$a(2,4)$	0	0	0	0	0	$b(2)$
3	0	0	$a(3,3)$	0	$a(3,5)$	0	$a(3,7)$	0	0	$b(3)$
4	0	0	0	$a(4,4)$	0	0	0	0	0	$b(4)$
5	0	0	0	0	$a(5,5)$	$a(5,6)$	0	$a(5,6)$	0	$b(5)$
6	0	0	0	$a(6,4)$	0	$a(6,6)$	0	$a(6,8)$	0	$b(6)$
7	0	0	0	0	0	0	$a(7,7)$	0	0	$b(7)$
8	0	0	0	0	0	0	0	$a(8,8)$	$a(8,9)$	$b(8)$
9	0	0	0	0	0	0	0	0	$a(9,9)$	$b(9)$

Эти уравнения размещаются в такой последовательности, чтобы элементы матрицы, расположенные на главной диагонали, не равнялись нулю.

Решение поставленной задачи в среде MathCad дано в прил. 4.

3.4. Расчет плоских ферм

Расчет фермы сводится к определению опорных реакций и усилий в ее стержнях. Рассмотрим методику расчета фермы.

Пример 4

Выполнить расчет фермы, изображенной на рис. 3.6. На ферму действуют силы $F_1 = 2$ кН, $F_2 = 4$ кН, $F_3 = 6$ кН. Определить реакции опор и усилия в стержнях фермы. Осуществить проверку выполненного расчета.

Определение опорных реакций фермы. Объект равновесия – ферма. На нее действуют силы $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3$ – активные силы; $\vec{R}_B, \vec{X}_A, \vec{Y}_A$ – реакции опор A и B. Уравнения равновесия фермы:

$$\sum F_{kx} = 0,\ X_A - F_1 - F_2 = 0;$$

$$\sum F_{ky} = 0,\ Y_A + R_B - F_3 = 0;$$

$$\sum M_A = 0,\ R_b \cdot a + F_1 \cdot 3a + F_2 \cdot 2a = 0.$$

Решение полученной системы уравнений в системе MAthCad дано в прил. 5.

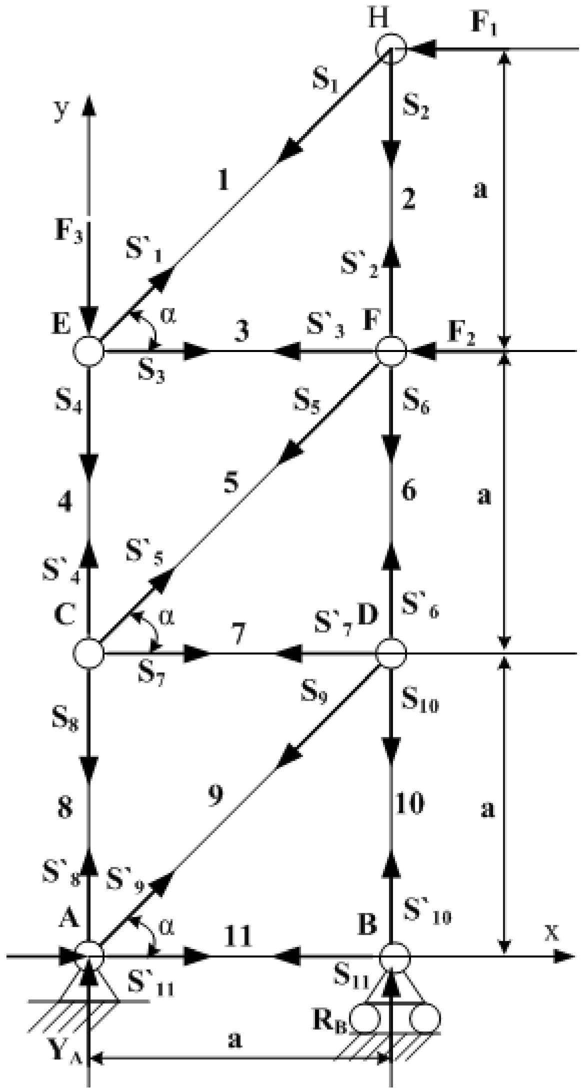


Рис. 3.6

3.5. Определение усилий в стержнях фермы методом вырезания узлов

Обозначим все узлы фермы прописными буквами латинского алфавита H, E, F, C, D, B, A и пронумеруем стержни. Искомые усилия обозначим S_j, где j – номер стержня.

Методика расчета состоит в следующем:

– первым вырезается узел, в котором сходятся два стержня; изображаются активные силы, действующие на этот узел и реакции перерезанных стержней, реакция каждого стержня направляется вдоль стержня от узла (рис. 3.7); составляются уравнения равновесия сил, приложенных к вырезанному узлу; вычисляются реакции стержней;

– вырезается следующий узел, в котором сходятся не более двух стержней, усилия в которых неизвестны; составляются уравнения равновесия сил, приложенных к этому узлу, и вычисляются неизвестные реакции связей;

– далее, переходя от узла к узлу, определяют усилия во всех стержнях фермы.

После выполнения расчетов составляется таблица усилий в стержнях фермы.

Составим уравнения равновесия узлов фермы в такой последовательности: H, E, F, C, D, B, A.

На узел H действуют силы: $\vec{F}_1$ – активная сила, $\vec{S}_1, \vec{S}_2$ – реакции стержней 1 и 2 (рис. 3.7). Уравнения равновесия узла H:

$$\sum F_{kx} = 0, -S_1 \cdot \cos\alpha - F_1 = 0; \ \sum F_{ky} = 0, -S_1 \cdot \sin\alpha - S_2 = 0.$$

На узел E действуют силы: $\vec{F}_3$ – активная сила; $\vec{S}'_1$ – реакция стержня 1; $\vec{S}_3, \vec{S}_4$ – реакции стержней 3 и 4 (рис. 3.8). Учтем, что $\vec{S}_1 = \vec{S}'_1$. Уравнения равновесия узла E:

$$\sum F_{kx} = 0, S_3 + S_1 \cdot \cos\alpha = 0; \ \sum F_{ky} = 0, -S_4 + S_1 \cdot \sin\alpha - F_3 = 0.$$

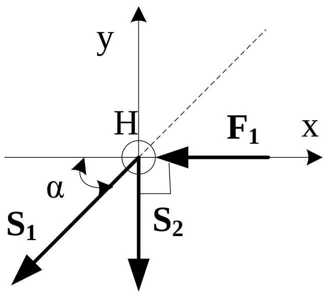


Рис. 3.7

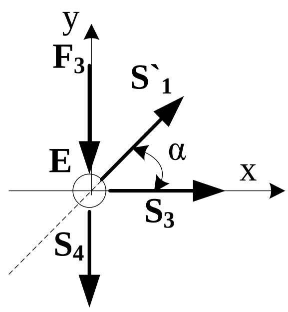


Рис. 3.8

На узел F действуют силы: $\vec{F}_2$ – активная сила; $\vec{S}_5, \vec{S}_6$ – неизвестные реакции стержней 5 и 6; $\vec{S}'_2, \vec{S}'_3$ – известные реакции стержней 2, 3 (рис. 3.9). Учтем, что $\vec{S}_2 = \vec{S}'_2$, $\vec{S}_3 = \vec{S}'_3$. Уравнения равновесия узла F:

$$\sum F_{kx} = 0, -S_5 \cdot \cos\alpha - S'_3 - F_2 = 0; \ \sum F_{ky} = 0, -S_5 \cdot \sin\alpha - S_6 + S'_2 = 0.$$

На узел C действуют силы: $\vec{S}_7$, $\vec{S}_8$ – неизвестные реакции стержней 7 и 8; $\vec{S}'_4$, $\vec{S}'_5$ – известные реакции стержней 4, 5 (рис. 3.10). Учтем, что $\vec{S}_4 = \vec{S}'_4$, $\vec{S}_5 = \vec{S}'_5$. Уравнения равновесия узла C:

$$\sum F_{kx} = 0,\ S_7 + S'_5 \cdot \cos\alpha = 0;\ \ \sum F_{ky} = 0,\ -S_8 + S'_4 + S'_5 \cdot \sin\alpha = 0.$$

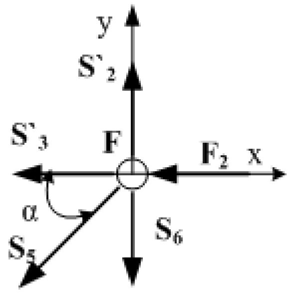


Рис. 3.9

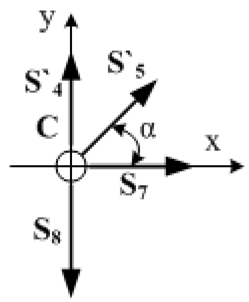


Рис. 3.10

На узел D действуют силы: $\vec{S}_9$, $\vec{S}_{10}$ – неизвестные реакции стержней 9 и 10; $\vec{S}'_6$, $\vec{S}'_7$ – известные реакции стержней 6, 7 (рис. 3.11). Учтем, что $\vec{S}_6 = \vec{S}'_6$, $\vec{S}_7 = \vec{S}'_7$. Уравнения равновесия узла D:

$$\sum F_{kx} = 0,\ -S_9 \cdot \cos\alpha - S'_7 = 0;\ \ \sum F_{ky} = 0,\ -S_9 \cdot \sin\alpha - S_{10} + S'_6 = 0.$$

На узел B действуют силы: $\vec{S}_{11}$, $\vec{R}_B$ – неизвестные реакции стержня 11 и опоры B; $\vec{S}'_{10}$ – известная реакция стержня 11 (рис. 3.12). Уравнения равновесия узла B:

$$\sum F_{kx} = 0,\ -S_{11} = 0,\ S_{11} = 0;\ \ \sum F_{ky} = 0,\ R_B + S'_{10} = 0,\ R_B = -S_{10}.$$

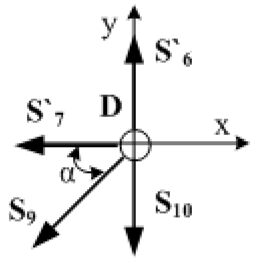


Рис. 3.11

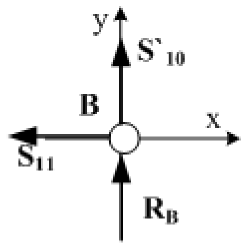


Рис. 3.12

На узел A действуют силы: $\vec{X}_A$, $\vec{Y}_A$ – неизвестные реакции шарнира A; $\vec{S}'_8$, $\vec{S}'_{11}$ – известные реакции стержней 8 и 11 (рис. 3.13). Учтем, что $\vec{S}_8 = \vec{S}'_8$, $\vec{S}_{11} = \vec{S}'_{11}$. Уравнения равновесия узла A:

$$\sum F_{kx} = 0,\ X_A + S'_{11} + S'_9 \cos\alpha = 0;\ \ \sum F_{ky} = 0,\ Y_A + S'_8 + S'_9 \sin\alpha = 0.$$

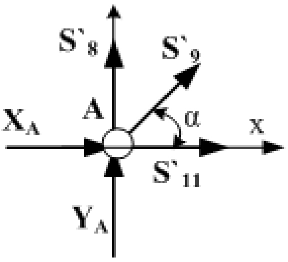


Рис. 3.13

Три последних уравнения равновесия можно рассматривать как проверочные. Они позволили вычислить величины реакций связей R_B, X_A, Y_A, которые были найдены при рассмотрении равновесия всей фермы в целом.

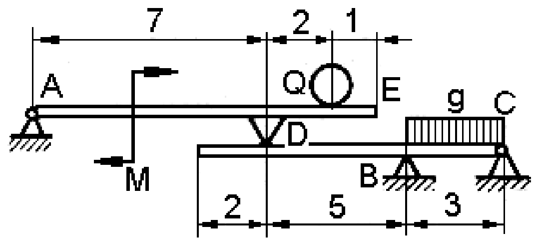
Решение полученных систем уравнений в среде MathCad дано в прил. 6.

Задача № 4

Варианты 1–10. Горизонтальная балка *AE*, прикрепленная к опоре шарниром A, свободно опирается в точке *D* на балку *BC*, которая удерживается в горизонтальном положении с помощью шарнира *C* и призмы *B*. Балки несут нагрузку: Q = 400 Н, М = 100 Нм, g = 10 Н/м. Вес каждой балки 200 Н.

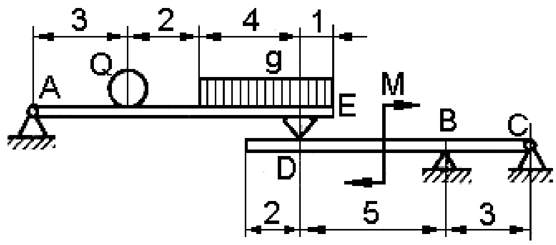
Определить реакции опор *A*, *B* и *C*. Размеры указаны на чертеже.

№ 4 – 1



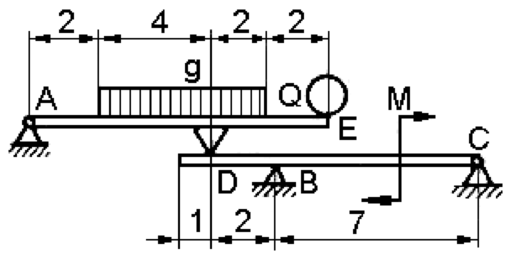
Ответ: R_A = 72 Н;
R_B = 2140 Н; R_C = 1238 Н.

№ 4 – 2



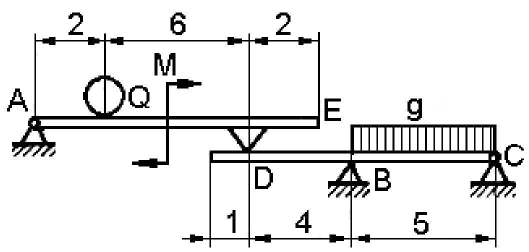
Ответ: R_A = 36369 Н;
R_B = 1063 Н; R_C = 577 Н.

№ 4 – 3



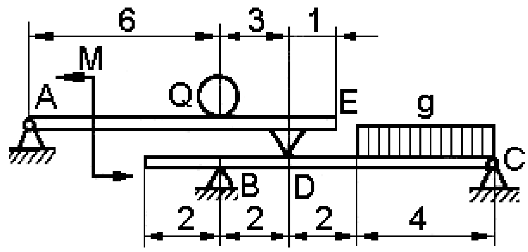
Ответ: R_A = 223,3 Н;
R_B = 1264 Н; R_C = 181 Н.

№ 4 – 4



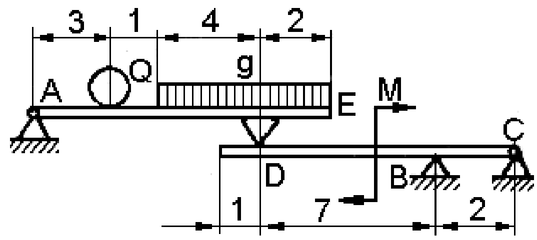
Ответ: R_A = 362,5 Н;
R_B = 652,5 Н; R_C = 165 Н.

№ 4 – 5



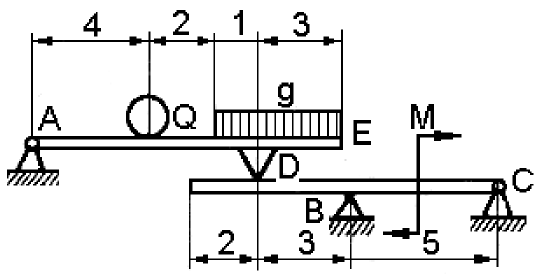
Ответ: R_A = 233,3 Н;
R_B = 410 Н; R_C = 196,7 Н.

№ 4 – 6



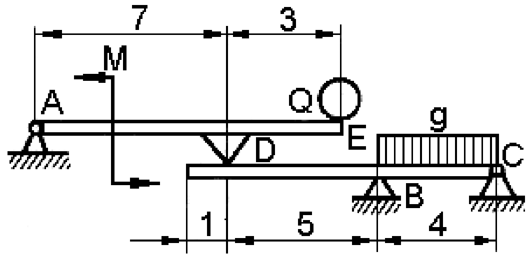
Ответ: R_A = 332,5 Н;
R_B = 1924 Н; R_C = 1396 Н.

№ 4 – 7



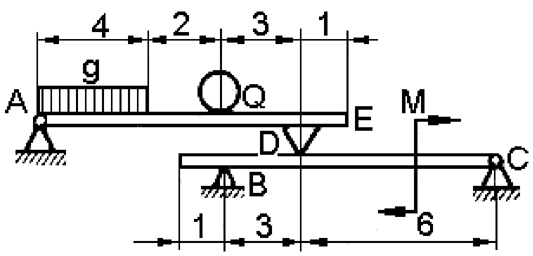
Ответ: R_A = 233 Н;
R_B = 847,3 Н; R_C = 230,2 Н.

№ 4 – 8



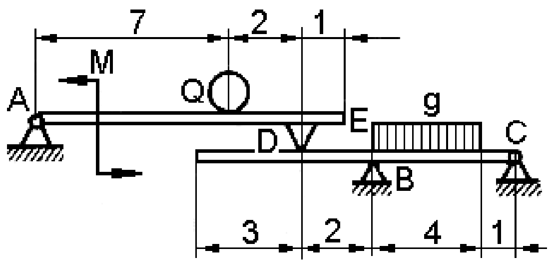
Ответ: R_A = 100 Н;
R_B = 1845 Н; R_C = 905 Н.

№ 4 – 9



Ответ: R_A = 253,3 Н;
R_B = 357,8 Н; R_C = 229 Н.

№ 4 – 10

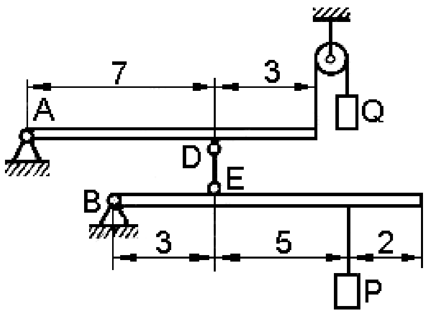


Ответ: R_A = 189 Н;
R_B = 799,5 Н; R_C = 148,4 Н.

Варианты 11–20. Две однородные балки весом 200 Н каждая удерживаются в горизонтальном положении посредством груза Q, к нижней балке подвешен на нити груз P = 400 Н.

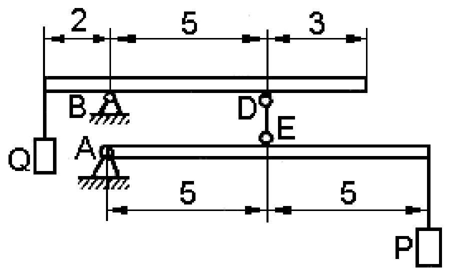
Определить вес груза Q, а также реакции опор B и A, если крепления балок к опорам и стержня DE к балкам – шарнирные. Стержень DE вертикален.

№ 4 – 11



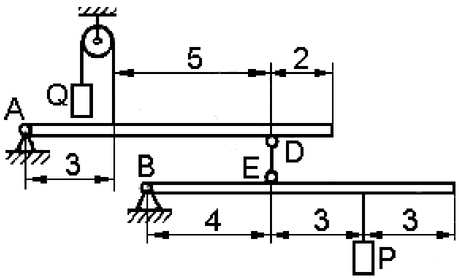
Ответ: R_A = 520 Н; R_B = 800 Н;
S = 1400 Н; Q = 1080 Н.

№ 4 – 12



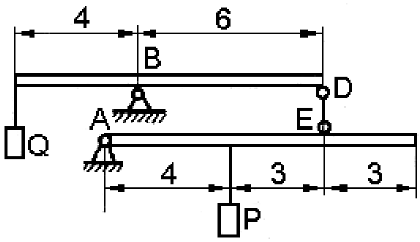
Ответ: R_A = 400 Н; R_B = 4000 Н;
S = 1000 Н; Q = 2800 Н.

№ 4 – 13



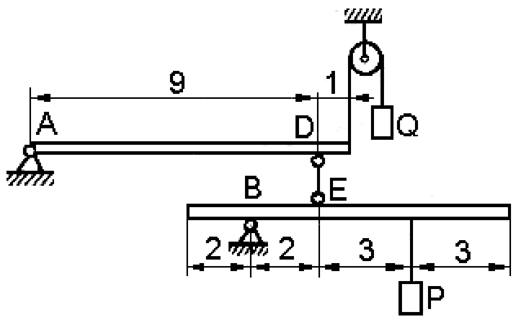
Ответ: R_A = 1717 Н; R_B = 350 Н;
S = 950 Н; Q = 2867 Н.

№ 4 – 14



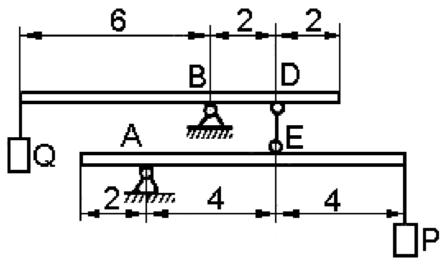
Ответ: R_A = 228,6 Н; R_B = 1178,5 Н;
S = 371,4 Н; Q = 607,1 Н.

№ 4 – 15



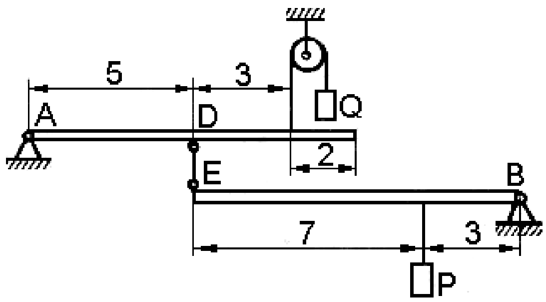
Ответ: R_A = 230 Н; R_B = 700 Н;
S = 1300 Н; Q = 1270 Н.

№ 4 – 16



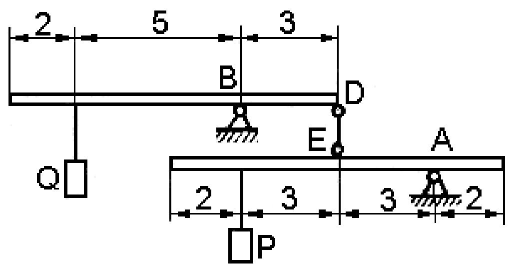
Ответ: R_A = 350 Н; R_B = 1433 Н;
S = 950 Н; Q = 283,3 Н.

№ 4 – 17



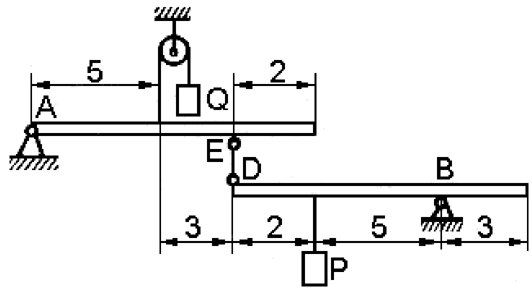
Ответ: R_A = 157,5 Н; R_B = 380 Н;
S = 220 Н; Q = 262,5 Н.

№ 4 – 18



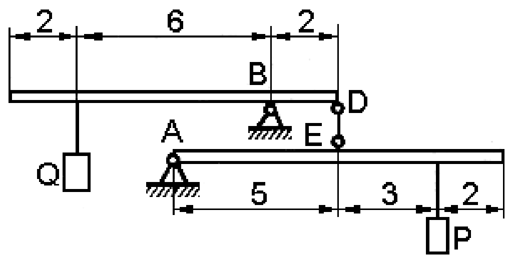
Ответ: R_A = 400 Н; R_B = 1720 Н;
S = 1000 Н; Q = 520 Н.

№ 4 – 19



Ответ: R_A = 206 Н; R_B = 257 Н;
S = 343 Н; Q = 749 Н.

№ 4 – 20

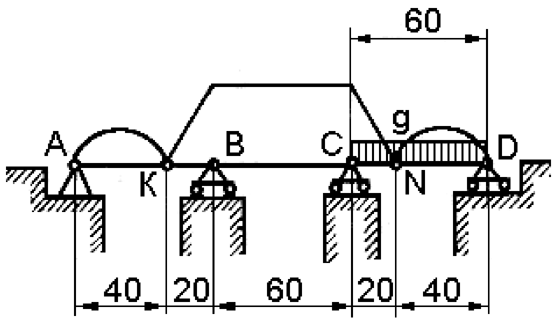


Ответ: R_A = 240 Н; R_B = 1220 Н;
S = 840 Н; Q = 180 Н.

Варианты 21–30. Мост состоит из трех ферм: *AK* весом 2000 кН, *KN* весом 8000 кН и *ND* весом 2000 кН. Центр тяжести каждой фермы расположен посередине. На мосту стоит поезд, создающий распределенную нагрузку интенсивностью g = 40 кН/м.

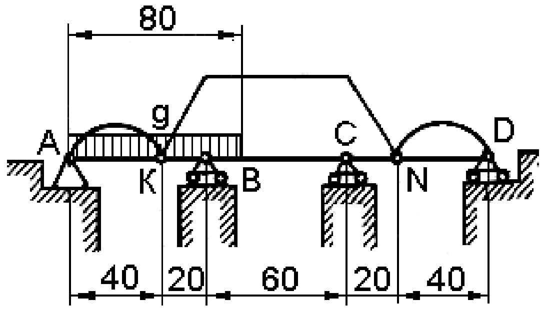
Определить реакции опор *A, B, C* и *D*. Размеры указаны на чертеже.

№ 4 – 21



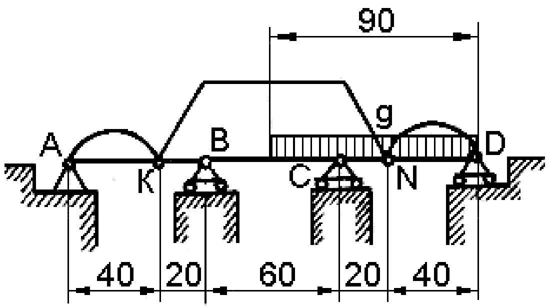
Ответ: R_A = 1000 кН; R_B = 4600 кН;
R_C = 7000 кН; R_D = 1800 Н.

№ 4 – 22



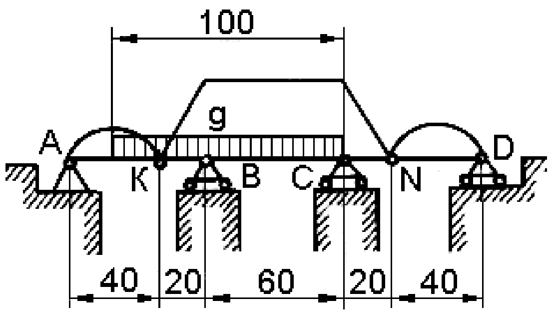
Ответ: R_A = 1800 кН; R_B = 7667 кН;
R_C = 4733 кН; R_D = 1000 Н.

№ 4 – 23



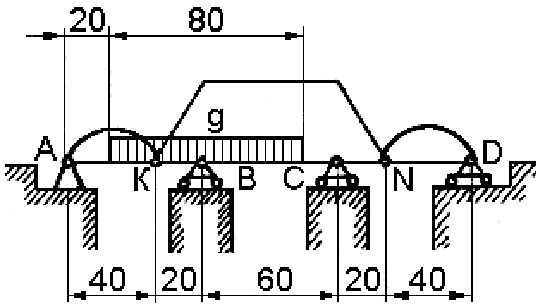
Ответ: R_A = 1000 кН; R_B = 4900 кН;
R_C = 7900 кН; R_D = 1800 Н.

№ 4 – 24



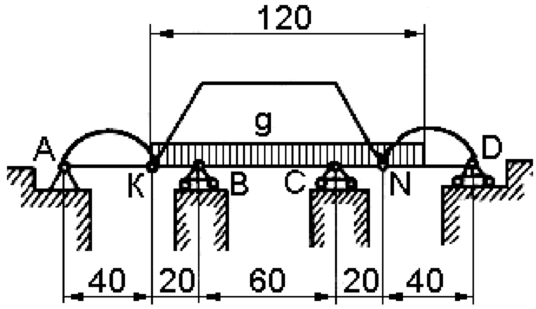
Ответ: R_A = 1200 кН; R_B = 7933 кН;
R_C = 5867 кН; R_D = 1000 Н.

№ 4 – 25



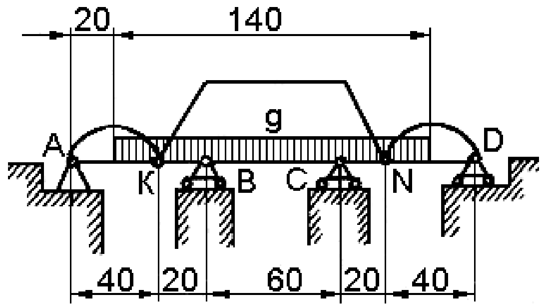
Ответ: R_A = 1200 кН; R_B = 7800 кН; R_C = 5200 кН; R_D = 1000 Н.

№ 4 – 26



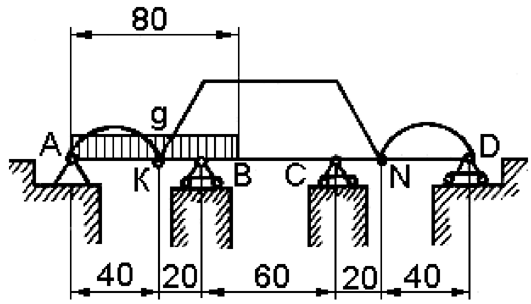
Ответ: R_A = 1000 кН; R_B = 6800 кН; R_C = 7800 кН; R_D = 1200 Н.

№ 4 – 27



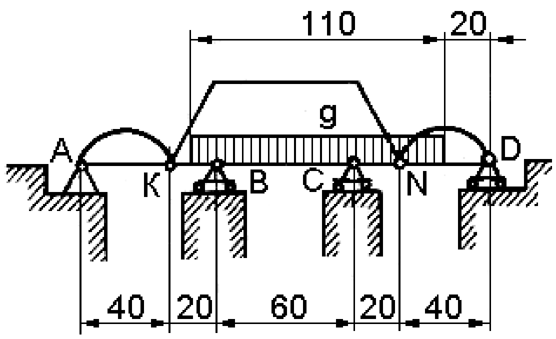
Ответ: R_A = 1200 кН; R_B = 7600 кН; R_C = 7600 кН; R_D = 1200 Н.

№ 4 – 28



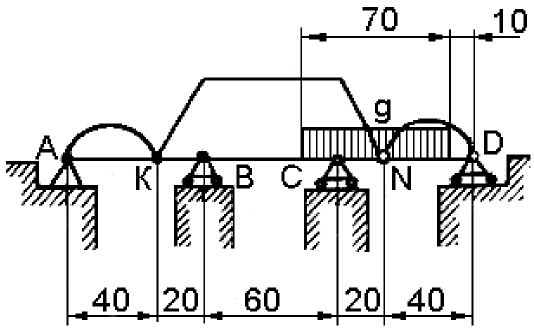
Ответ: R_A = 1800 кН; R_B = 7667 кН; R_C = 4733 кН; R_D = 1000 Н.

№ 4 – 29



Ответ: R_A = 1000 кН; R_B = 6300 кН; R_C = 7900 кН; R_D = 1200 Н.

№ 4 – 30



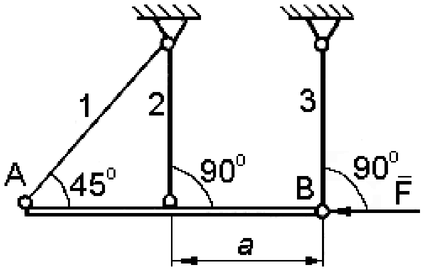
Ответ: R_A = 1000 кН; R_B = 4750 кН; R_C = 7600 кН; R_D = 1450 Н.

Задача № 5

Варианты 1–14. Балка *AB* длиной 2*a* укреплена тремя стержнями, как показано на чертеже. На балку действует сила *F* = 400 Н.

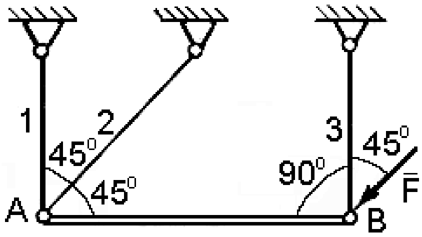
Определить усилия в стержнях, считая соединения стержней с балкой и опорой шарнирными. Весом балки пренебречь.

№ 5 – 1



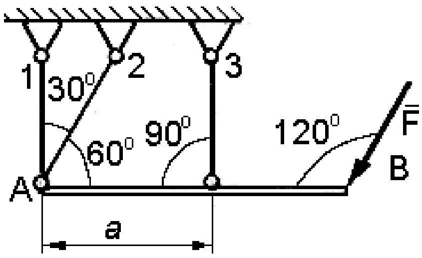
Ответ: S_1 = 566 Н;
S_2 = 400 Н; S_3 = 800 Н.

№ 5 – 2



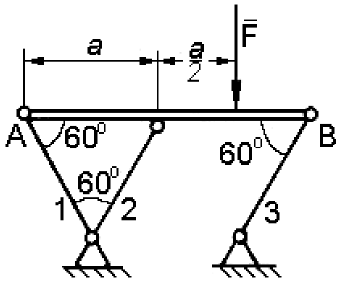
Ответ: S_1 = 283 Н;
S_2 = 283 Н; S_3 = 400 Н.

№ 5 – 3



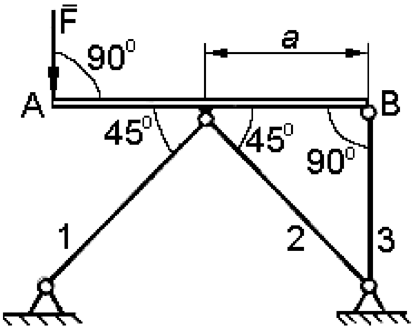
Ответ: S_1 = 693 Н;
S_2 = 693 Н; S_3 = 400 Н.

№ 5 – 4



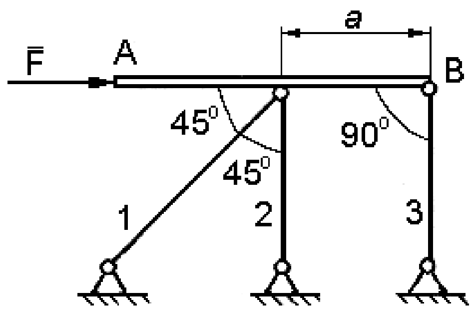
Ответ: S_1 = 231 Н;
S_2 = 231 Н; S_3 = 462 Н.

№ 5 – 5



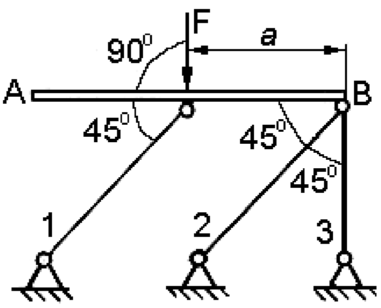
Ответ: S_1 = 566 Н;
S_2 = 566 Н; S_3 = 400 Н.

№ 5 – 6



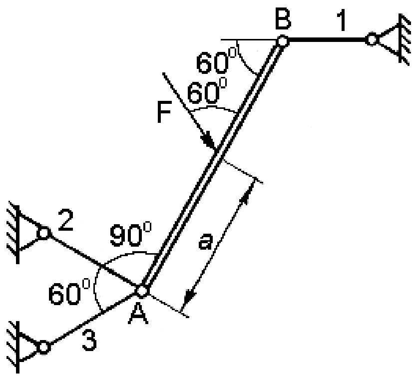
Ответ: S_1 = 566 Н;
S_2 = 400 Н; S_3 = 0 Н.

№ 5 – 7



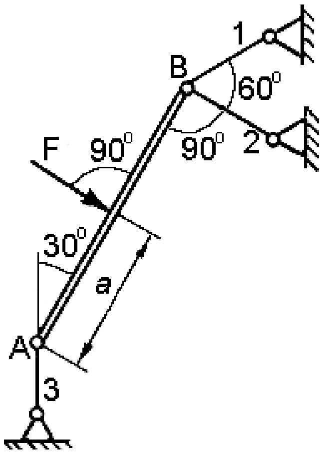
Ответ: S_1 = 566 Н;
S_2 = 566 Н; S_3 = 400 Н.

№ 5 – 8



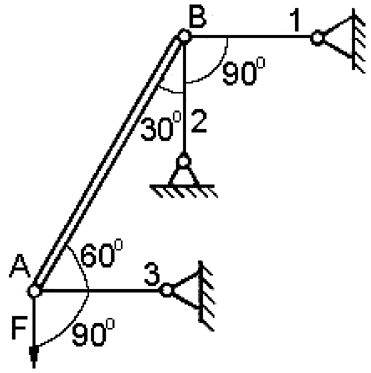
Ответ: S_1 = 200 Н;
S_2 = 346 Н; S_3 = 346 Н.

№ 5 – 9



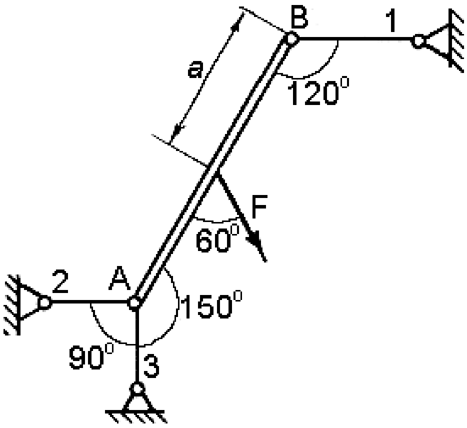
Ответ: S_1 = 400 Н;
S_2 = 0 Н; S_3 = 400 Н.

№ 5 – 10



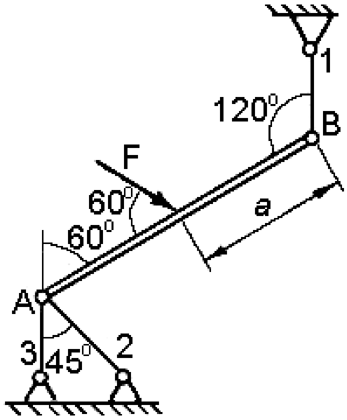
Ответ: S_1 = 231 Н;
S_2 = 231 Н; S_3 = 400 Н.

№ 5 – 11



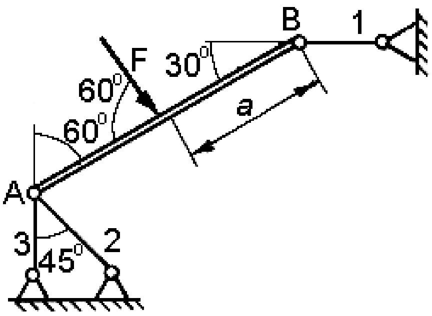
Ответ: S_1 = 200 Н;
S_2 = 0 Н; S_3 = 346 Н.

№ 5 – 12



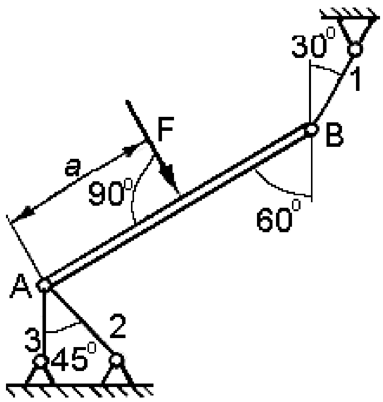
Ответ: S_1 = 200 Н;
S_2 = 490 Н; S_3 = 346 Н.

№ 5 – 13



Ответ: S_1 = 346 Н;
S_2 = 0 Н; S_3 = 200 Н.

№ 5 – 14

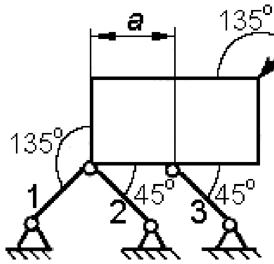


Ответ: S_1 = 400 Н;
S_2 = 566 Н; S_3 = 400 Н.

Варианты 15–30. Прямоугольная плита, весом которой пренебречь, размером $a\times 2a$ закреплена с помощью трех стержней в вертикальной плоскости. На плиту действует сила F = 100 Н.

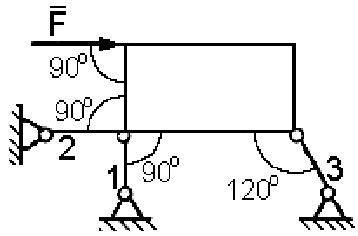
Найти усилия в стержнях.

№ 5 – 15



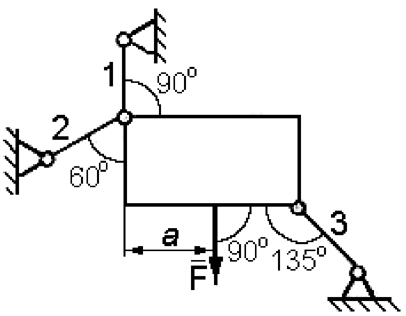
Ответ: S_1 = 100 Н;
S_2 = 100 Н; S_3 = 100 Н.

№ 5 – 16



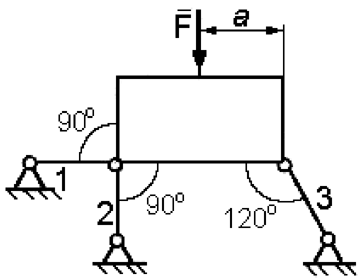
Ответ: S_1 = 50 Н;
S_2 = 72 Н; S_3 = 58 Н.

№ 5 – 17



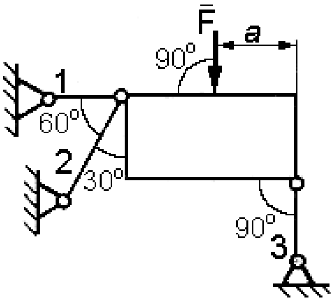
Ответ: S_1 = 58 Н;
S_2 = 116 Н; S_3 = 141 Н.

№ 5 – 18



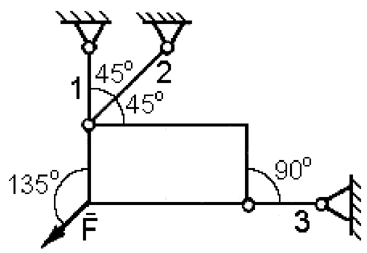
Ответ: S_1 = 29 Н;
S_2 = 50 Н; S_3 = 58 Н.

№ 5 – 19



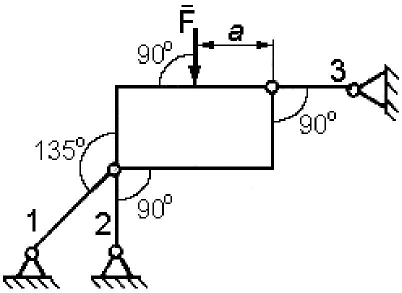
Ответ: S_1 = 29 Н;
S_2 = 58 Н; S_3 = 50 Н.

№ 5 – 20



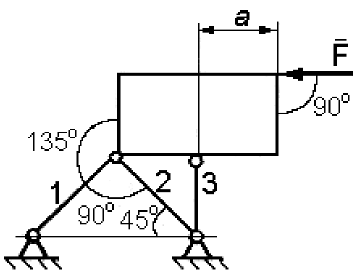
Ответ: $S_1 = S_2$ = 70,7 Н;
S_3 = 0 Н.

№ 5 – 21



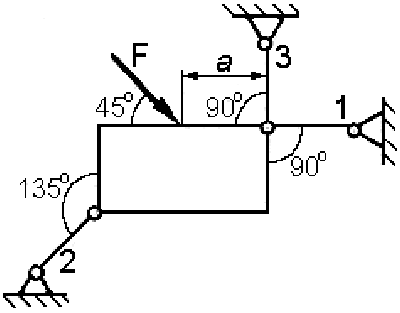
Ответ: S_1 = 141 Н;
S_2 = 0 Н; S_3 = 100 Н.

№ 5 – 22



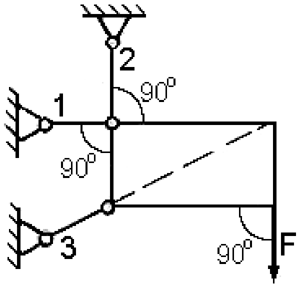
Ответ: S_1 = 141 Н;
S_2 = 0 Н; S_3 = 100 Н.

№ 5 – 23



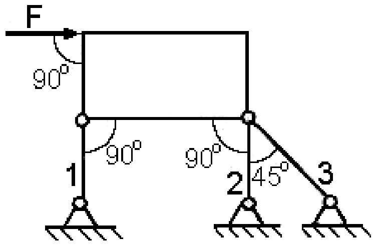
Ответ: S_1 = 141 Н;
S_2 = 100 Н; S_3 = 0 Н.

№ 5 – 24



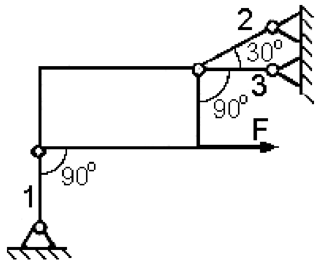
Ответ: S_1 = 200 Н;
S_2 = 0 Н; S_3 = 224 Н.

№ 5 – 25



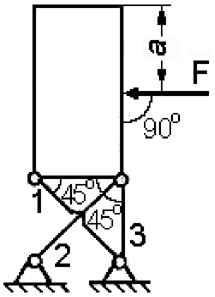
Ответ: S_1 = 50 Н;
S_2 = 50 Н; S_3 = 141 Н.

№ 5 – 26



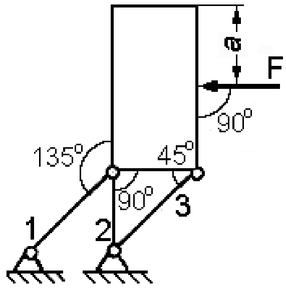
Ответ: S_1 = 50 Н;
S_2 = 100 Н; S_3 = 13,3 Н.

№ 5 – 27



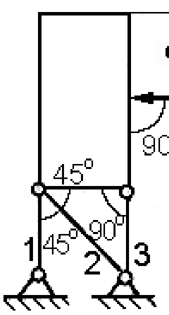
Ответ: S_1 = 141 Н;
S_2 = 283 Н; S_3 = 300 Н.

№ 5 – 28



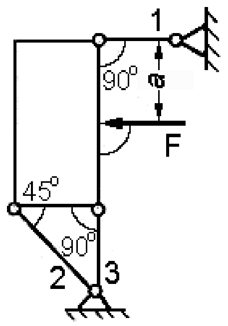
Ответ: S_1 = 283 Н;
S_2 = 100 Н; S_3 = 141 Н.

№ 5 – 29



Ответ: S_1 = 200 Н;
S_2 = 141 Н; S_3 = 100 Н.

№ 5 – 30



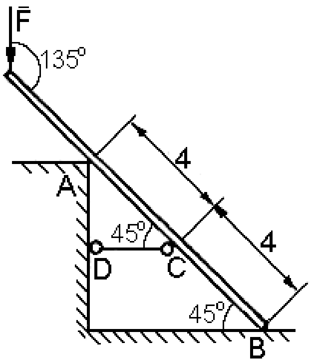
Ответ: S_1 = 66,7 Н;
S_2 = 47,2 Н; S_3 = 33,3 Н.

Задача № 6

Варианты 1–30. Балка весом 12 кН и длиной 12 м нагружена силой F = 6 кН и удерживается в равновесии стержнем CD в положении, указанном на чертеже.

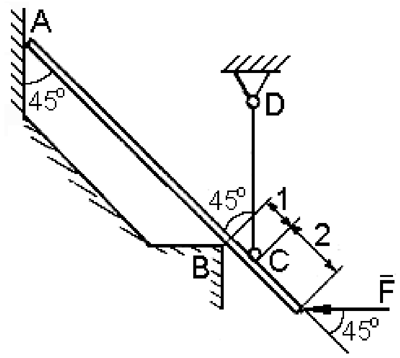
Определить усилие в стержне CD и реакции опор в точках A и B, не учитывая трения.

№ 6 – 1



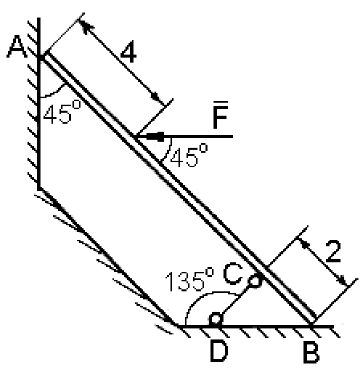
Ответ: $R_A = 12\sqrt{2}$ кН;
R_B = 6 кН; T = 12 кН.

№ 6 – 2



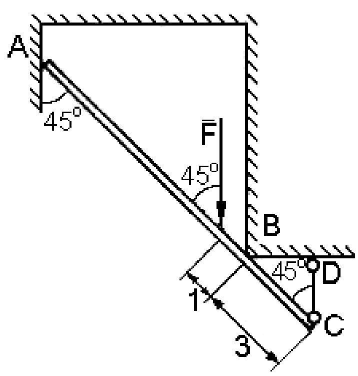
Ответ: R_A = 3 кН;
$R_B = 3\sqrt{2}$ кН; T = 9 кН.

№ 6 – 3



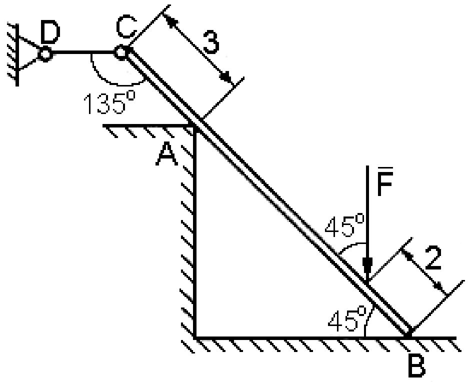
Ответ: R_A = 12 кН;
R_B = 18 кН; $T = 6\sqrt{2}$ кН.

№ 6 – 4



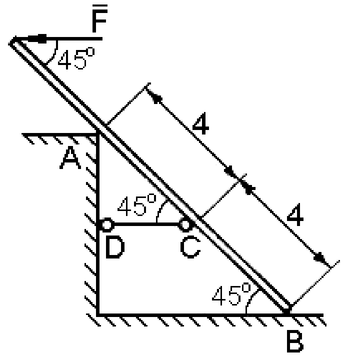
Ответ: R_A = 16 кН;
$R_B = 16\sqrt{2}$ кН; T = 34 кН.

№ 6 – 5



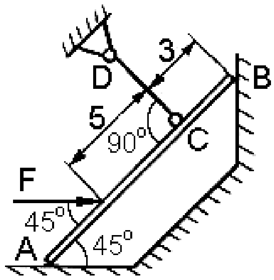
Ответ: $R_A = 14\sqrt{2}$ кН;
$R_B = 4$ кН; $T = 14$ кН.

№ 6 – 6



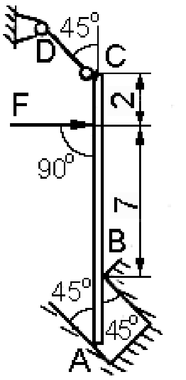
Ответ: $R_A = 10\sqrt{2}$ кН;
$R_B = 2$ кН; $T = 4$ кН.

№ 6 – 7



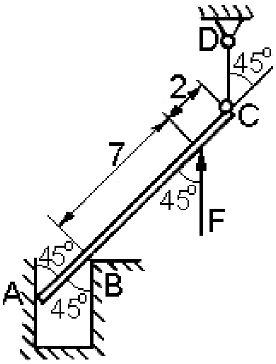
Ответ: $R_A = 8$ кН;
$R_B = 2$ кН; $T = 4$ кН.

№ 6 – 8



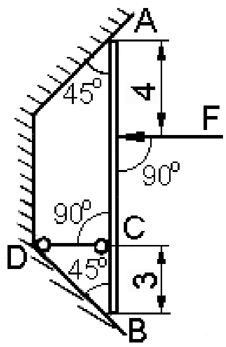
Ответ: $R_A = 11\sqrt{2}$ кН;
$R_B = 16$ кН; $T = 2$ кН.

№ 6 – 9



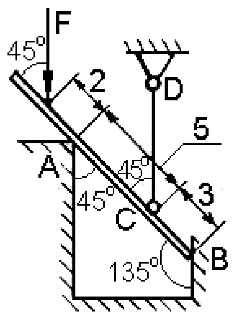
Ответ: $R_A = 14$ кН;
$R_B = 14\sqrt{2}$ кН; $T = 4$ кН.

№ 6 – 10



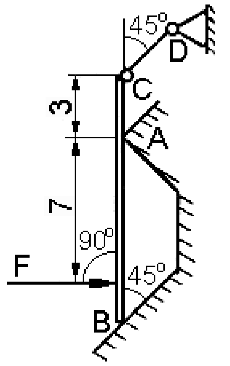
Ответ: $R_A = 11\sqrt{2}$ кН;
$R_B = 23\sqrt{2}$ кН; $T = 28$ кН.

№ 6 – 11



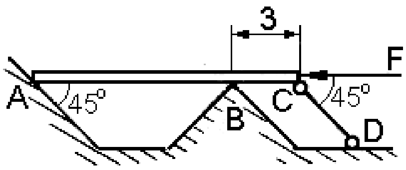
Ответ: $R_A = 6\sqrt{2}$ кН;
$R_B = 6$ кН; $T = 12$ кН.

№ 6 – 12



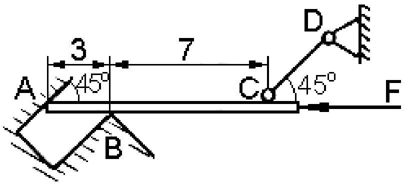
Ответ: $R_A = 16$ кН;
$R_B = \sqrt{2}$ кН; $T = 11\sqrt{2}$ кН.

№ 6 – 13



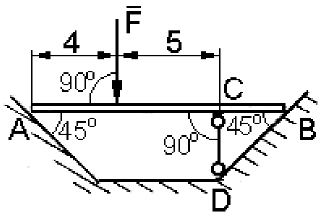
Ответ: $R_A = 3\sqrt{2}$ кН;
$R_B = 12$ кН; $T = 3\sqrt{2}$ кН.

№ 6 – 14



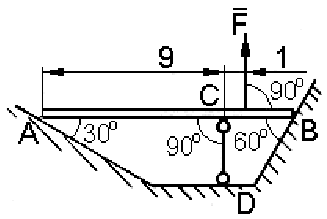
Ответ: $R_A = 1{,}5\sqrt{2}$ кН;
$R_B = 9$ кН; $T = 4{,}5\sqrt{2}$ кН.

№ 6 – 15



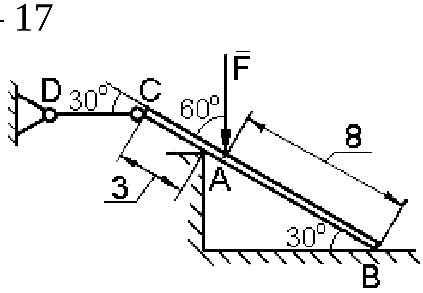
Ответ: $R_A = 11\sqrt{2}$ кН;
$R_B = 11\sqrt{2}$ кН; $T = 4$ кН.

№ 6 – 16



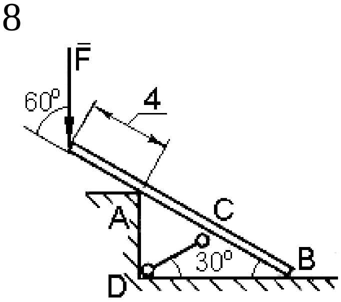
Ответ: $R_A = 3{,}5\sqrt{3}$ кН;
$R_B = 3{,}5$ кН; $T = 1$ кН.

№ 6 – 17



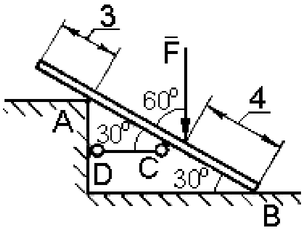
Ответ: $R_A = 10\sqrt{3}$ кН;
$R_B = 3$ кН; $T = 5\sqrt{3}$ кН.

№ 6 – 18



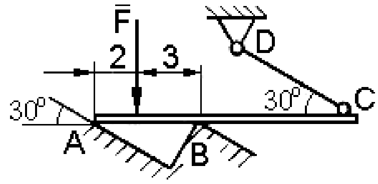
Ответ: $R_A = 12\sqrt{3}$ кН;
$R_B = 6$ кН; $T = 12$ кН.

№ 6 – 19



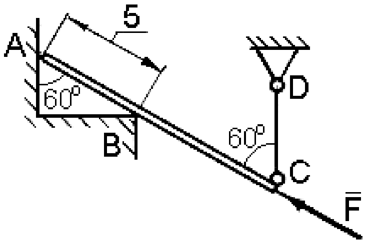
Ответ: $R_A = 6\sqrt{3}$ кН;
$R_B = 9$ кН; $T = 3\sqrt{3}$ кН.

№ 6 – 20



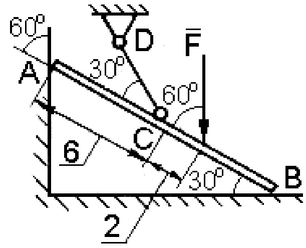
Ответ: $R_A = 1{,}5\sqrt{3}$ кН;
$R_B = 15$ кН; $T = 1{,}5$ кН.

№ 6 – 21



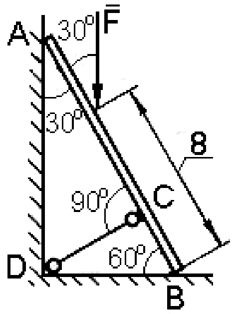
Ответ: $R_A = 0{,}75\sqrt{3}$ кН;
$R_B = 4{,}5\sqrt{3}$ кН; $T = 2{,}25$ кН.

№ 6 – 22



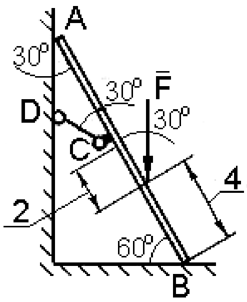
Ответ: $R_A = 4\sqrt{3}$ кН;
$R_B = 6$ кН; $T = 8\sqrt{3}$ кН.

№ 6 – 23



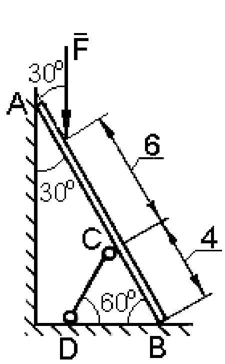
Ответ: $R_A = 5{,}3$ кН;
$R_B = 23$ кН; $T = 10$ кН.

№ 6 – 24



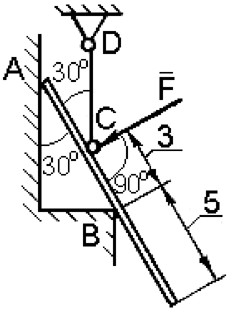
Ответ: $R_A = 4\sqrt{3}$ кН;
$R_B = 14$ кН; $T = 8$ кН.

№ 6 – 25



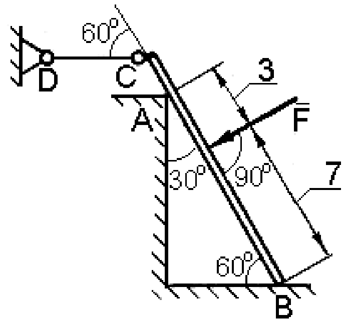
Ответ: $R_A = 11\sqrt{3}$ кН;
$R_B = 51$ кН; $T = 22\sqrt{3}$ кН.

№ 6 – 26



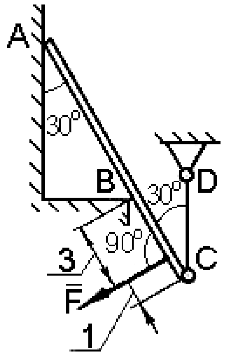
Ответ: $R_A = 0{,}5\sqrt{3}$ кН;
$R_B = 5$ кН; $T = 12{,}5$ кН.

№ 6 – 27



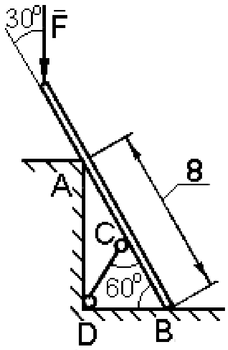
Ответ: R_A = 24 кН;
R_B = 3 кН; $T = 9\sqrt{3}$ кН.

№ 6 – 28



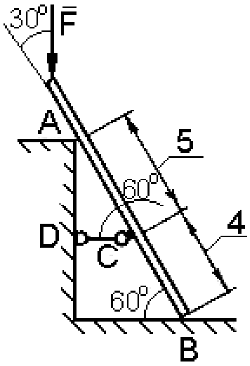
Ответ: $R_A = 1{,}8\sqrt{3}$ кН;
R_B = 2,4 кН; T = 13,8 кН.

№ 6 – 29



Ответ: R_A = 36 кН;
R_B = 54 кН; $T = 36\sqrt{3}$ кН.

№ 6 – 30



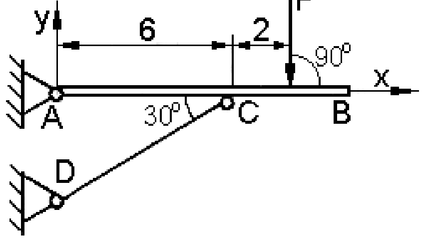
Ответ: R_A = 12 кН;
R_B = 12 кН; $T = 6\sqrt{3}$ кН.

Задача № 7

Варианты 1–17. Однородная балка AB длиной ℓ = 10 м и весом P = = 1000 Н нагружена силой F = 1000 Н, как показано на чертеже. Балка находится в равновесии.

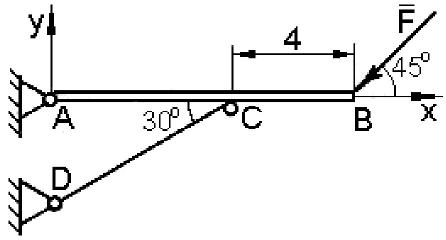
Определить реакции опор.

№ 7 – 1



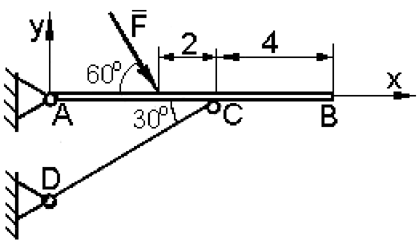
Ответ: X_A = -3752 Н;
Y_A = -167 Н; R_C = 4333 Н.

№ 7 – 2



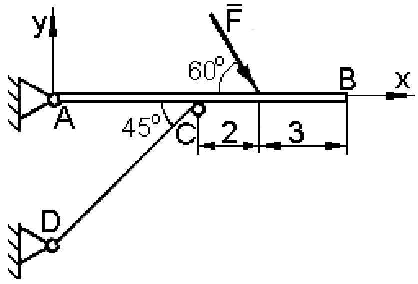
Ответ: X_A = -2777 Н;
Y_A = -304,7 Н; R_C = 4023 Н.

№ 7 – 3



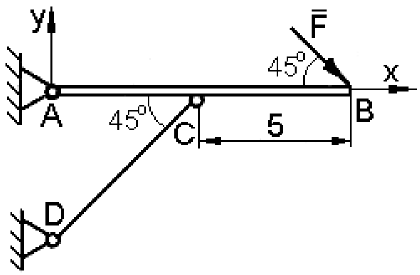
Ответ: X_A = -2944 Н;
Y_A = 455 Н; R_C = 2822 Н.

№ 7 – 4



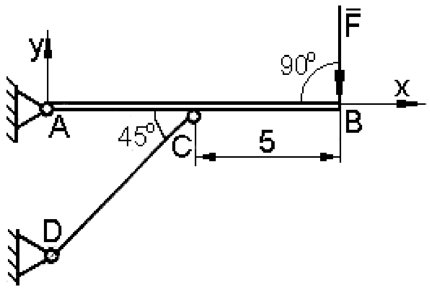
Ответ: X_A = -2712 Н;
Y_A = -346,4 Н; R_C = 3129 Н.

№ 7 – 5



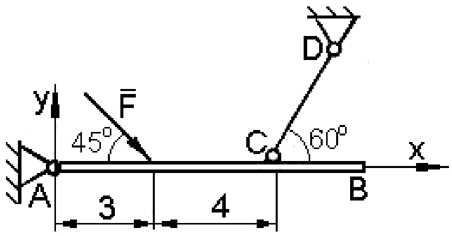
Ответ: X_A = -3121 Н;
Y_A = -707 Н; R_C = 3414 Н.

№ 7 – 6



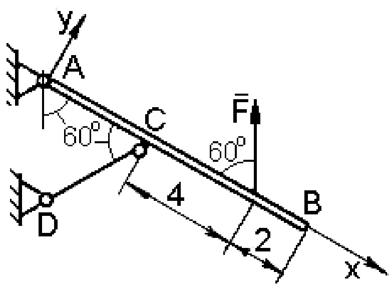
Ответ: X_A = -3000 Н;
Y_A = -1000 Н; R_C = 4243 Н.

№ 7 – 7



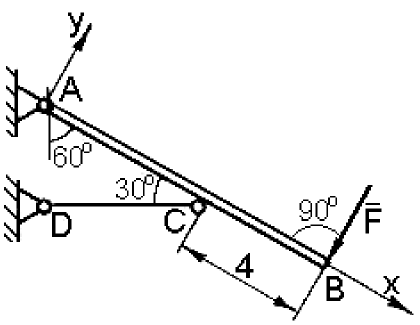
Ответ: X_A = -1294 Н;
Y_A = 689,7 Н; R_C = 1175 Н.

№ 7 – 8



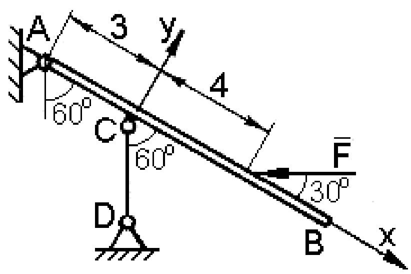
Ответ: X_A = -2625 Н;
Y_A = -1082 Н; R_C = 3250 Н.

№ 7 – 9



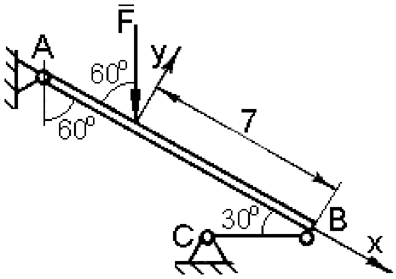
Ответ: X_A = -4637 Н;
Y_A = -522,4 Н; R_C = 4777 Н.

№ 7 – 10



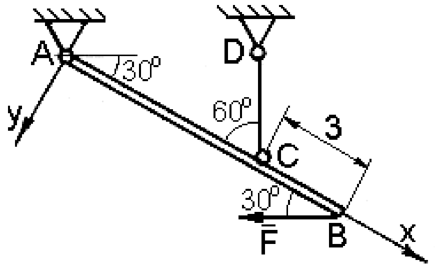
Ответ: X_A = 1867 Н;
Y_A = -1244 Н; R_C = 3014 Н.

№ 7 – 11



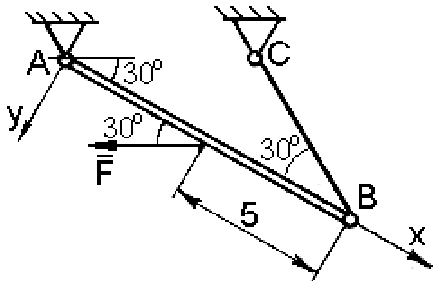
Ответ: X_A = -2200 Н;
Y_A = 1039 Н; R_C = 1386 Н.

№ 7 – 12



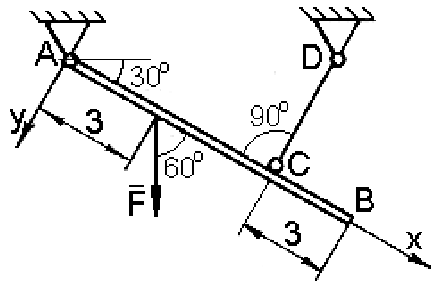
Ответ: X_A = 1136 Н;
Y_A = -33,1 Н; R_C = 1539 Н.

№ 7 – 13



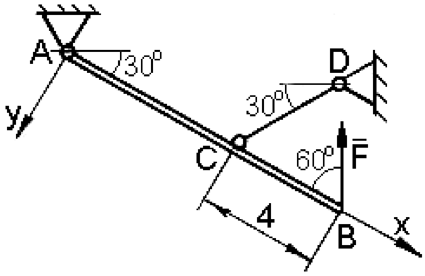
Ответ: X_A = 1549 Н;
Y_A = -683 Н; R_C = 1366 Н.

№ 7 – 14



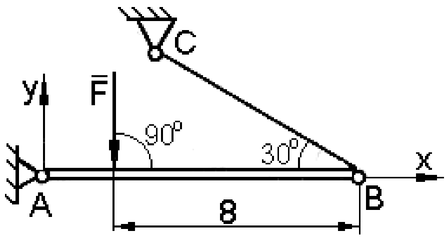
Ответ: X_A = -1000 Н;
Y_A = -742,3 Н; R_C = 989,7 Н.

№ 7 – 15



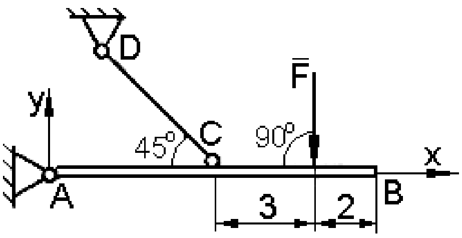
Ответ: X_A = 416,7 Н;
Y_A = -721,6 Н; R_C = 833,3 Н.

№ 7 – 16



Ответ: X_A = 1212 Н;
Y_A = 1300 Н; R_C = 1400 Н.

№ 7 – 17

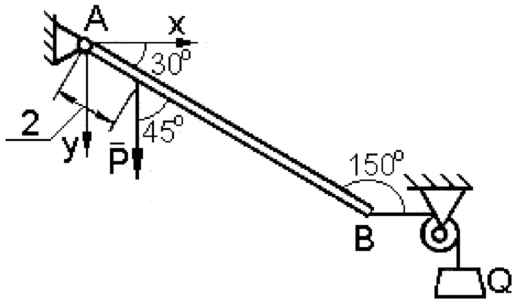


Ответ:
X_A = 2600 Н;
Y_A = -600 Н;
R_C = 3678 Н.

Варианты 18–30. На однородную балку AB длиной 10 м и весом 2000 Н действует сила P = 1000 Н, как показано на чертеже.

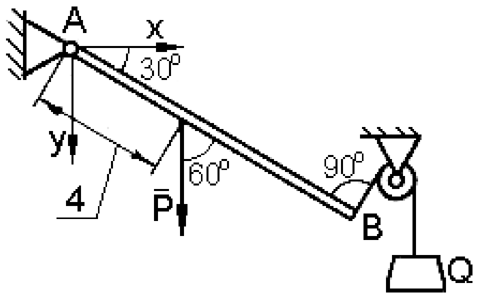
Определить реакции шарнира A и вес груза Q при условии, что балка находится в равновесии.

№ 7 – 18



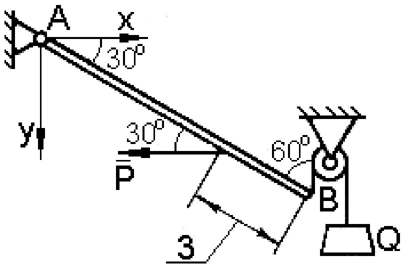
Ответ: X_A = -2078 Н;
Y_A = -3000 Н; Q = 2078 Н.

№ 7 – 19



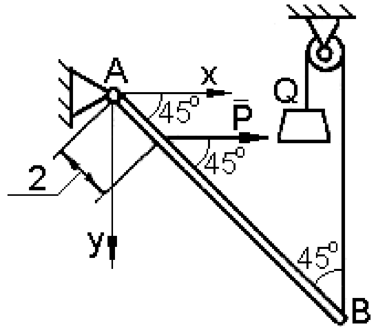
Ответ: X_A = -606,2 Н;
Y_A = -1950 Н; Q = 1212 Н.

№ 7 – 20



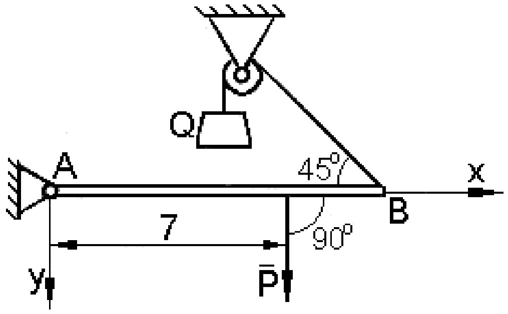
Ответ: X_A = 1000 Н;
Y_A = -595,8 Н; Q = 1404 Н.

№ 7 – 21



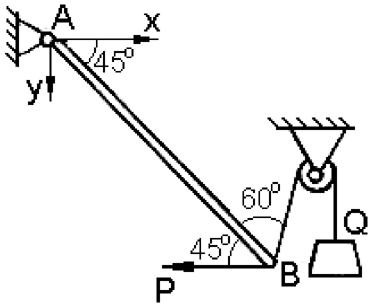
Ответ: X_A = -1000 Н;
Y_A = -1200 Н; Q = 800 Н.

№ 7 – 22



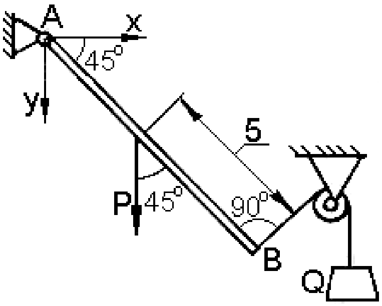
Ответ: X_A = 1700 Н;
Y_A = -1300 Н; Q = 2405 Н.

№ 7 – 23



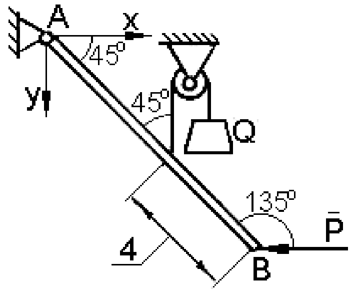
Ответ: X_A = 577,4 Н;
Y_A = -422,9 Н; Q = 1633 Н.

№ 7 – 24



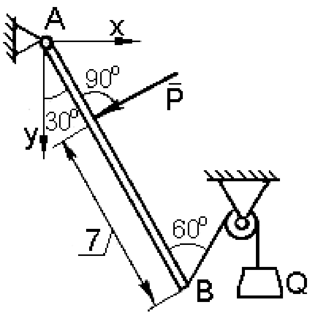
Ответ: X_A = -749,8 Н;
Y_A = -2250 Н; Q = 1061 Н.

№ 7 – 25



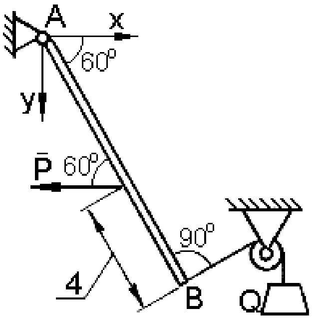
Ответ: X_A = 1000 Н;
Y_A = 1333 Н; Q = 3333 Н.

№ 7 – 26



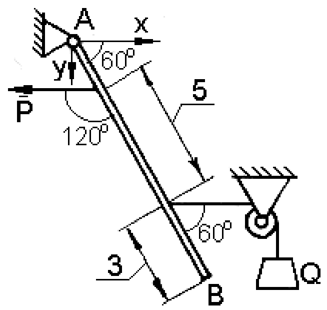
Ответ: X_A = 404,1 Н;
Y_A = 1700 Н; Q = 923,8 Н.

№ 7 – 27



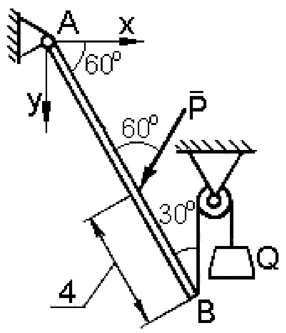
Ответ: X_A = 117 Н;
Y_A = -1490 Н; Q = 1020 Н.

№ 7 – 28



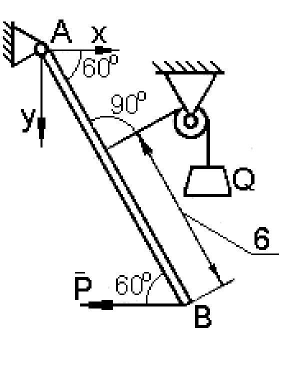
Ответ: X_A = -110,5 Н;
Y_A = -2000 Н; Q = 1111 Н.

№ 7 – 29



Ответ: X_A = 500 Н;
Y_A = -828 Н; Q = 2037 Н.

№ 7 – 30

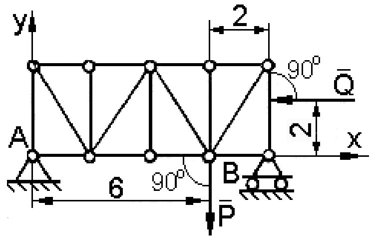


Ответ:
X_A = -195,5 Н;
Y_A = -293,7 Н;
Q = 3413 Н.

Задача № 8

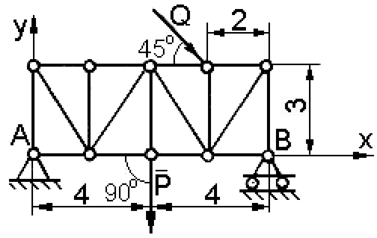
Варианты 1–15. Ферма весом 200 кН нагружена силами P = 40 кН и Q = 80 кН. Определить реакции опор A и B, если центр тяжести фермы находится в середине фермы.

№ 8 – 1



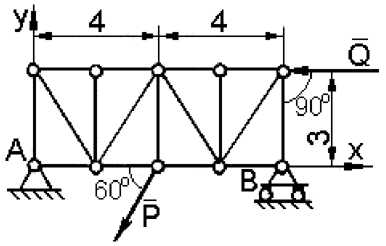
Ответ: X_A = 80 кН;
Y_A = 130 кН; R_B = 110 кН.

№ 8 – 2



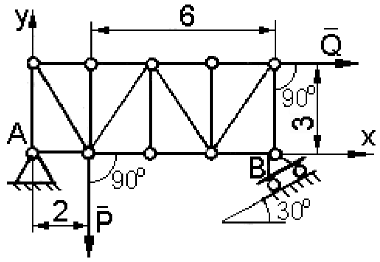
Ответ: X_A = 56,56 кН;
Y_A = 112,9 кН; R_B = 183,6 кН.

№ 8 – 3



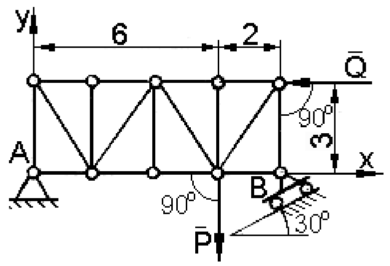
Ответ: X_A = 100 кН;
Y_A = 147,3 кН; R_B = 87,32 кН.

№ 8 – 4



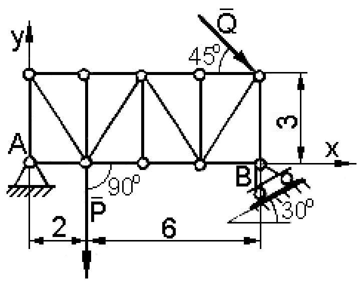
Ответ: X_A = 0,8 кН;
Y_A = 100 кН; R_B = 161,7 кН.

№ 8 – 5



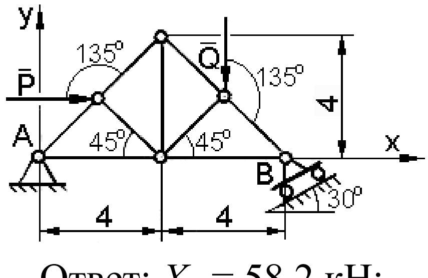
Ответ: X_A = 137,7 кН;
Y_A = 140 кН; R_B = 115,5 кН.

№ 8 – 6



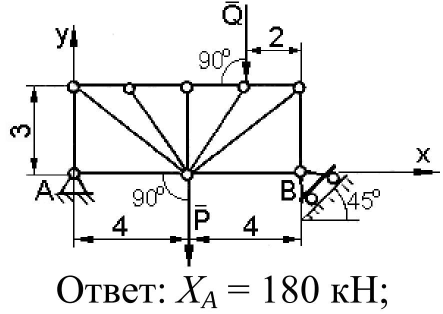
Ответ: X_A = 52 кН;
Y_A = 108,8 кН; R_B = 216,8 кН.

№ 8 – 7



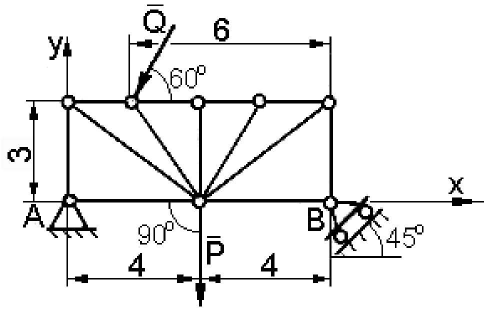
Ответ: X_A = 58,2 кН;
Y_A = 110 кН; R_B = 196,5 кН.

№ 8 – 8



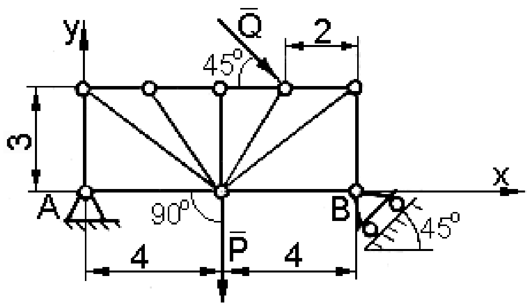
Ответ: X_A = 180 кН;
Y_A = 140 кН; R_B = 254,6 кН.

№ 8 – 9



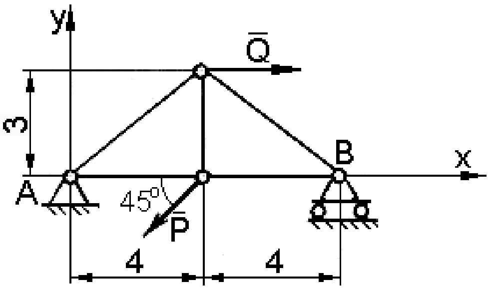
Ответ: X_A = 162,3 кН;
Y_A = 187 кН; R_B = 173 кН.

№ 8 – 10



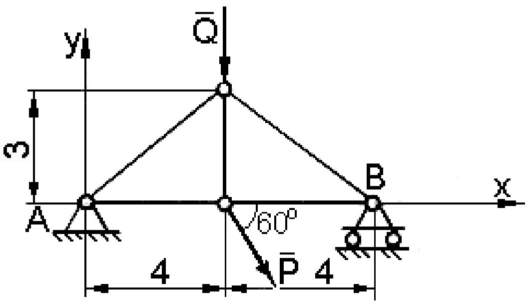
Ответ: X_A = 127 кН;
Y_A = 113 кН; R_B = 259,7 кН.

№ 8 – 11



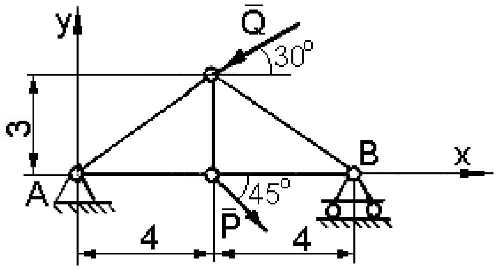
Ответ: X_A = 51,7 кН;
Y_A = 84,2 кН; R_B = 144,1 кН.

№ 8 – 12



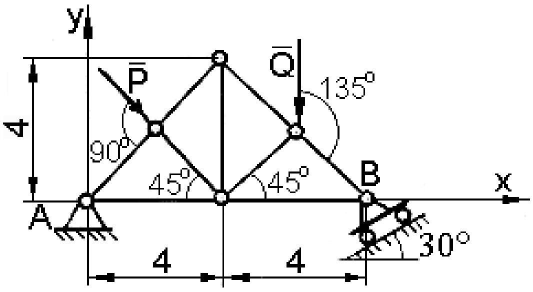
Ответ: X_A = 20 кН;
Y_A = 157,3 кН; R_B = 157,3 кН.

№ 8 – 13



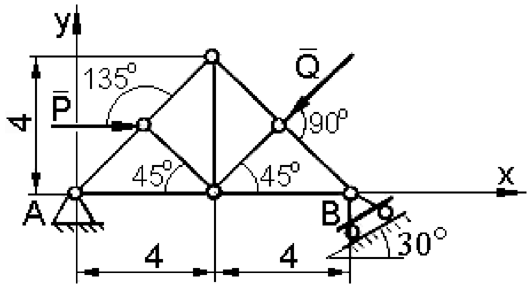
Ответ: X_A = 41 кН;
Y_A = 160,1 кН; R_B = 108,1 кН.

№ 8 – 14



Ответ: X_A = 72,2 кН;
Y_A = 134,1 кН; R_B = 201 кН.

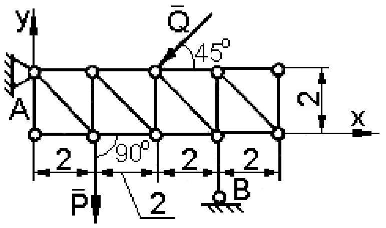
№ 8 – 15



Ответ:
X_A = 96,36 кН;
Y_A = 118,3 кН;
R_B = 159,7 кН.

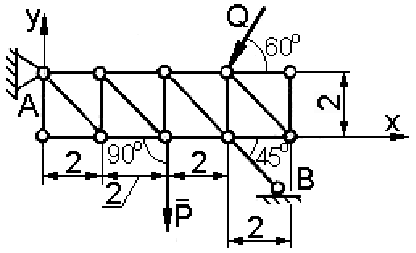
Варианты 16–30. Ферма весом 400 кН нагружена силами P = 100 кН и Q = 40 кН. Определить реакции опор A и B, если центр тяжести фермы находится в середине фермы.

№ 8 – 16



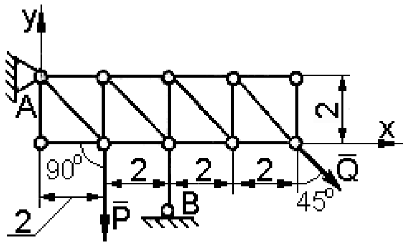
Ответ: X_A = 28,28 кН;
Y_A = 209,5 кН; R_B = 318,8 кН.

№ 8 – 17



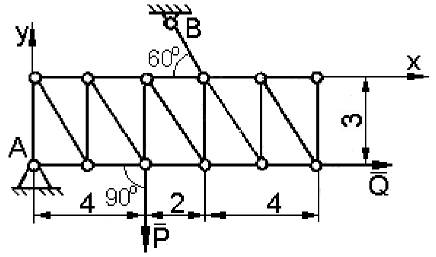
Ответ: X_A = 512 кН;
Y_A = 17,32 кН; R_B = 780,7 кН.

№ 8 – 18



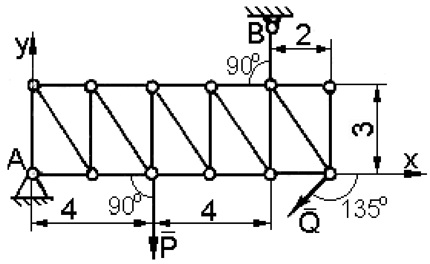
Ответ: X_A = 28,28 кН;
Y_A = 35,9 кН; R_B = 492,4 кН.

№ 8 – 19



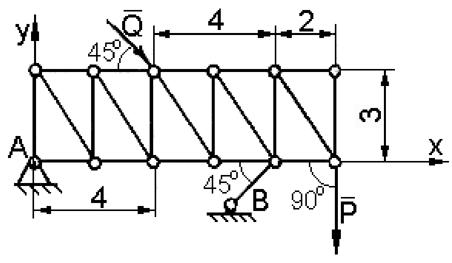
Ответ: X_A = 139,2 кН;
Y_A = 189,6 кН; R_B = 358,4 кН.

№ 8 – 20



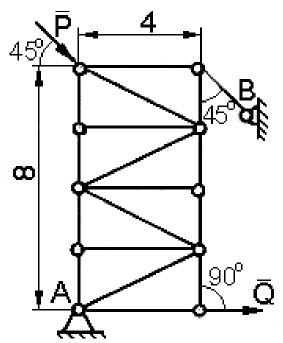
Ответ: X_A = 28,28 кН;
Y_A = 193 кН; R_B = 335,4 кН.

№ 8 – 21



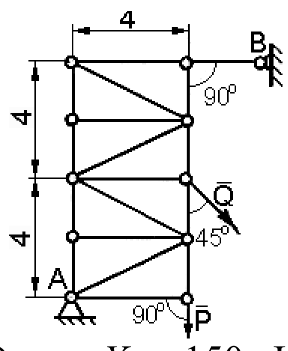
Ответ: X_A = 428 кН;
Y_A = 128,6 кН; R_B = 565,4 кН.

№ 8 – 22



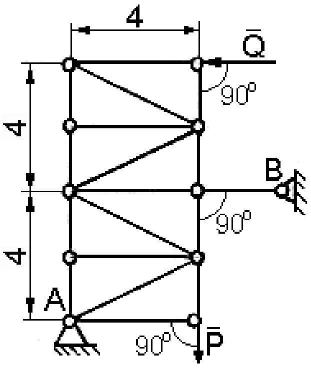
Ответ: X_A = 3,1 кН;
Y_A = 356,9 кН; R_B = 161 кН.

№ 8 – 23



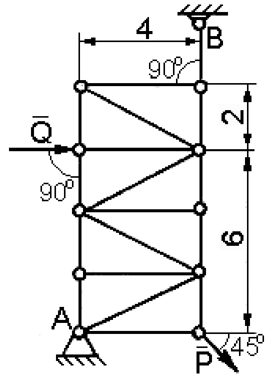
Ответ: X_A = 150 кН;
Y_A = 528,3 кН; R_B = 178,3 кН.

№ 8 – 24



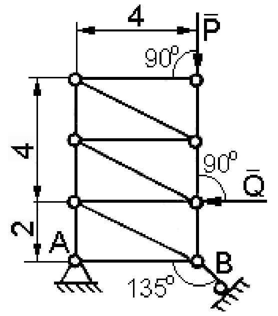
Ответ: X_A = 260 кН;
Y_A = 500 кН; R_B = 220 кН.

№ 8 – 25



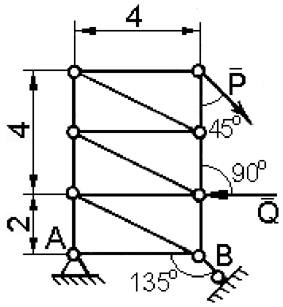
Ответ: X_A = 110,7 кН;
Y_A = 140 кН; R_B = 330,7 кН.

№ 8 – 26



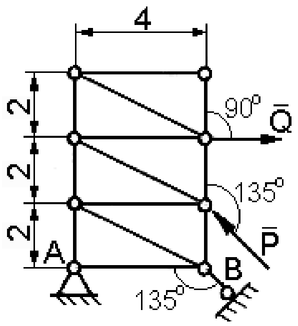
Ответ: X_A = 320 кН;
Y_A = 220 кН; R_B = 395,9 кН.

№ 8 – 27



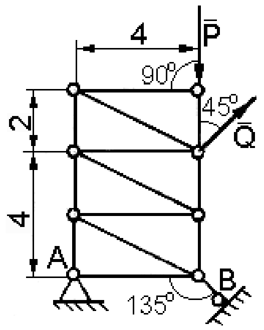
Ответ: X_A = 326 кН;
Y_A = 114 кН; R_B = 504,6 кН.

№ 8 – 28



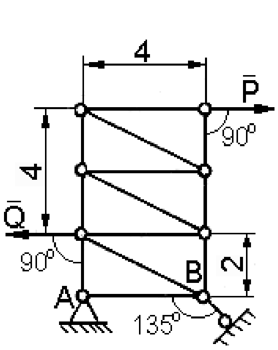
Ответ: X_A = 164,7 кН;
Y_A = 195,4 кН; R_B = 189,4 кН.

№ 8 – 29



Ответ: X_A = 271,7 кН;
Y_A = 171,7 кН; R_B = 424,2 кН.

№ 8 – 30



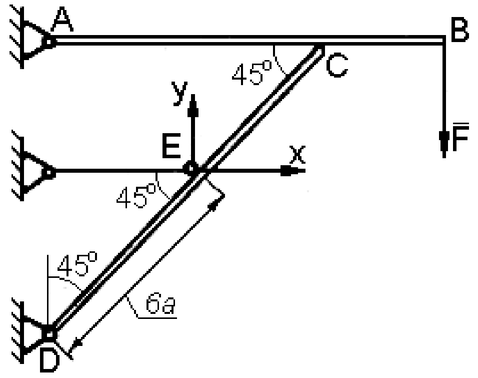
Ответ:
X_A = 279 кН;
Y_A = 70 кН;
R_B = 466,6 кН.

Задача № 9

Варианты 1–30. Две однородные балки *AB* и *CD* длиной 10а и весом P = 30 кН каждая удерживаются в равновесии с помощью связей, изображенных на чертеже.

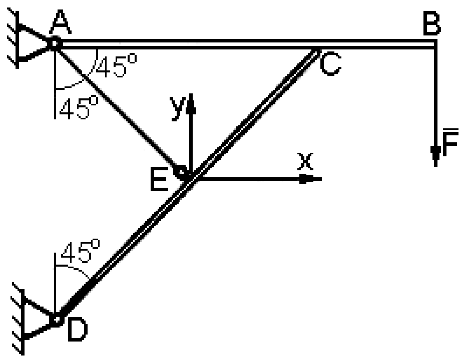
Определить реакции связей, если на одну из балок действует вертикальная сила F = 60 кН.

№ 9 – 1



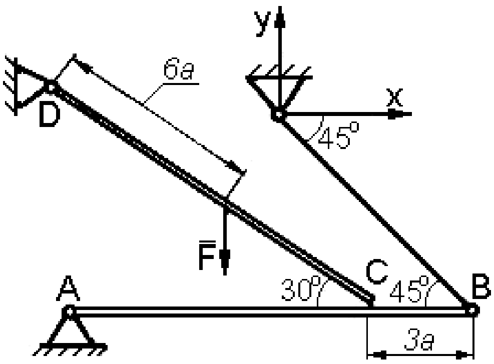
Ответ:
X_A = 0 кН; Y_A = -16 кН;
R_C = 106 кН; T_E = 201,7 кН;
X_D = 201,7 кН; Y_D = 136 кН.

№ 9 – 2



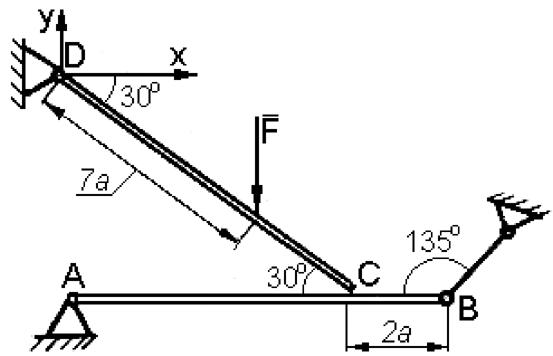
Ответ:
X_A = 0 кН; Y_A = -16 кН;
R_C = 106 кН; T_E = 171,1 кН;
X_D = 121 кН; Y_D = 15 кН.

№ 9 – 3



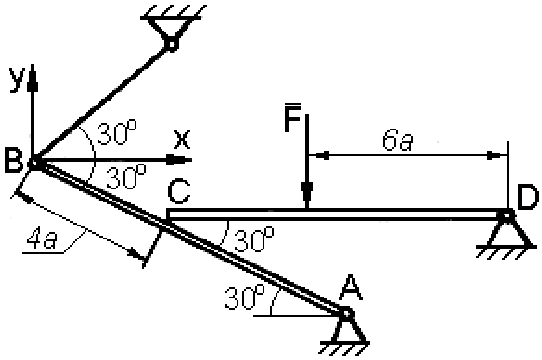
Ответ:
X_A = 50,7 кН; Y_A = 30,3 кН;
R_C = 51 кН; T_E = 71,7 кН;
X_D = 0 кН; Y_D = 39 кН.

№ 9 – 4



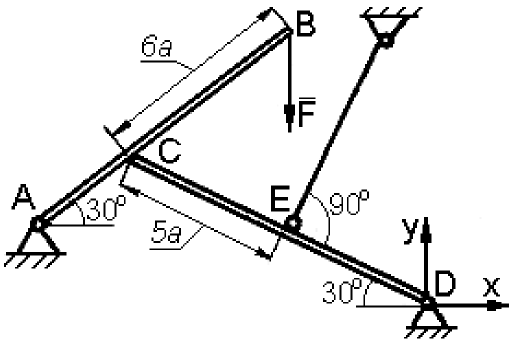
Ответ:
X_A = -60,6 кН; Y_A = 26,4 кН;
R_C = 57 кН; T_E = 85,7 кН;
X_D = 0 кН; Y_D = 33 кН.

№ 9 – 5



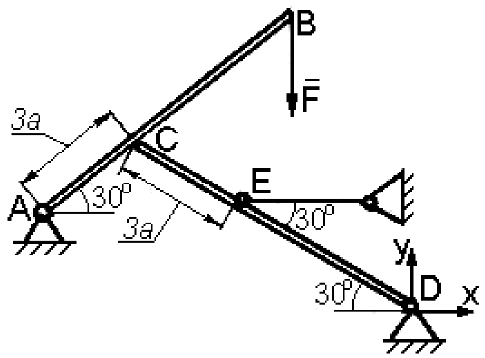
Ответ:
X_A = -18,87 кН; Y_A = 53,1 кН;
R_C = 58,9 кН; T_E = 55,8 кН;
X_D = -29,45 кН; Y_D = 39 кН.

№ 9 – 6



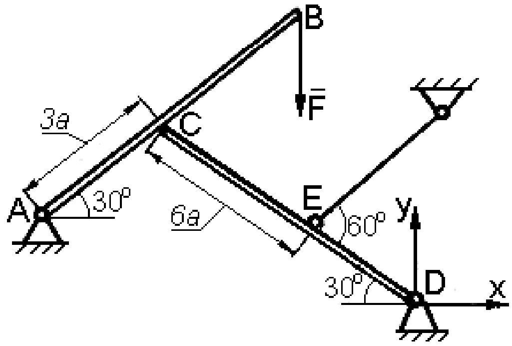
Ответ:
X_A = 81,2 кН; Y_A = -50,6 кН;
R_C = 162,4 кН; T_E = 188,5 кН;
X_D = -175,5 кН; Y_D = 7,36 кН.

№ 9 – 7



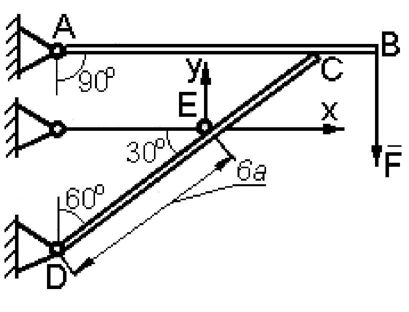
Ответ:
X_A = 108,2 кН; Y_A = -97,5 кН;
R_C = 216,5 кН; T_E = 346,4 кН;
X_D = -454,7 кН; Y_D = 217,5 кН.

№ 9 – 8



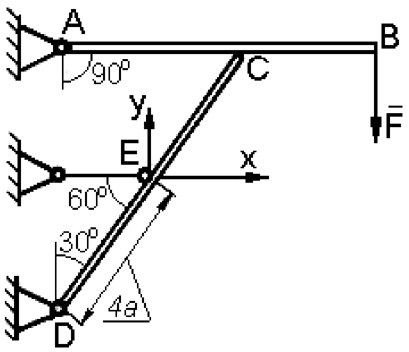
Ответ:
X_A = 108,2 кН; Y_A = -97,5 кН;
R_C = 216,5 кН; T_E = 350 кН;
X_D = -411,3 кН; Y_D = 42,5 кН.

№ 9 – 9



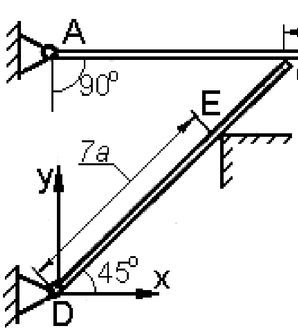
Ответ:
X_A = 0 кН; Y_A = 3,4 кН;
R_C = 86,6 кН; T_E = 293,3 кН;
X_D = 293,3 кН; Y_D = 116,6 кН.

№ 9 – 10



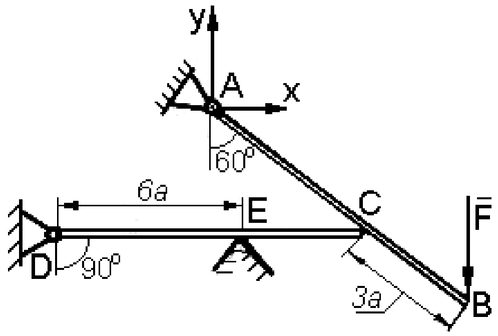
Ответ:
X_A = 0 кН; Y_A = -60 кН;
R_C = 150 кН; T_E = 238,2 кН;
X_D = 238,2 кН; Y_D = 180 кН.

№ 9 – 11



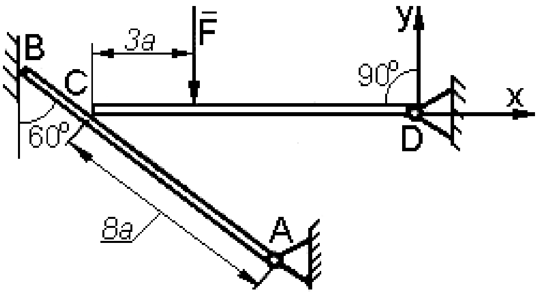
Ответ:
$X_A = 0$ кН; $Y_A = -17{,}0$ кН;
$R_C = 107{,}1$ кН; $N_E = 123{,}4$ кН;
$X_D = 87{,}2$ кН; $Y_D = 50$ кН.

№ 9 – 12



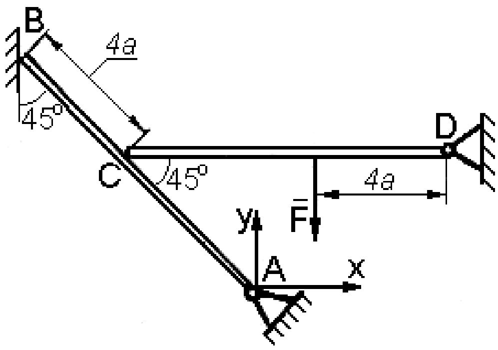
Ответ:
$X_A = -46{,}4$ кН; $Y_A = 9{,}7$ кН;
$R_C = 92{,}78$ кН; $N_E = 159{,}0$ кН;
$X_D = 46{,}3$ кН; $Y_D = 48{,}7$ кН.

№ 9 – 13



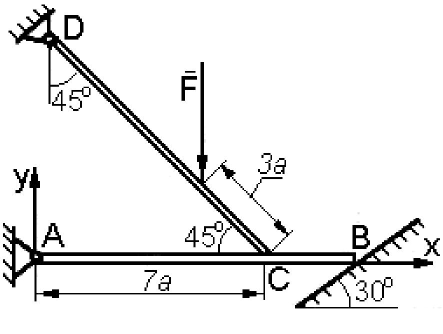
Ответ:
$X_A = -98{,}4$ кН; $Y_A = 87{,}0$ кН;
$R_C = 65{,}8$ кН; $N_E = 131{,}3$ кН;
$X_D = -32{,}9$ кН; $Y_D = 33$ кН.

№ 9 – 14



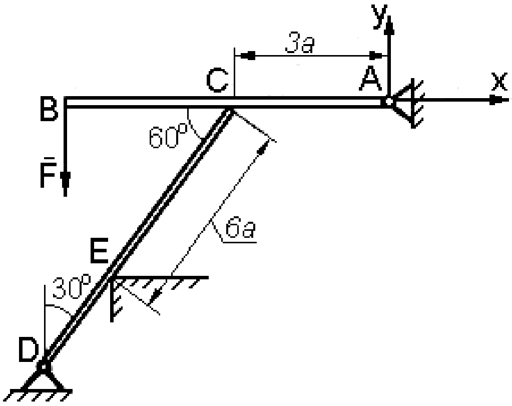
Ответ:
$X_A = -22{,}8$ кН; $Y_A = 69{,}0$ кН;
$R_C = 55{,}2$ кН; $N_E = 61{,}8$ кН;
$X_D = -39$ кН; $Y_D = 51$ кН.

№ 9 – 15



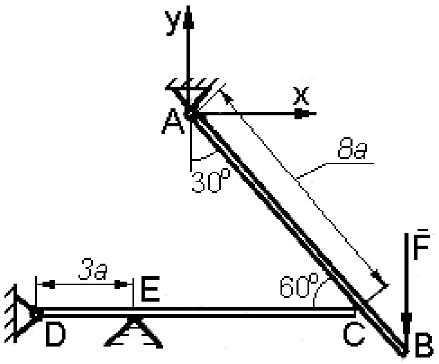
Ответ:
$X_A = 31{,}7$ кН; $Y_A = 32{,}1$ кН;
$R_C = 57$ кН; $N_E = 63{,}4$ кН;
$X_D = 0$ кН; $Y_D = 33$ кН.

№ 9 – 16



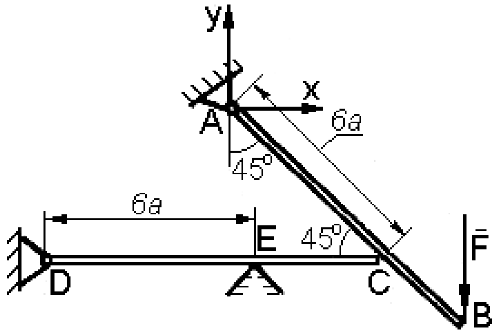
Ответ:
$X_A = 0$ кН; $Y_A = -60$ кН;
$R_C = 150$ кН; $N_E = 206{,}25$ кН;
$X_D = 178{,}5$ кН; $Y_D = 76{,}9$ кН.

№ 9 – 17



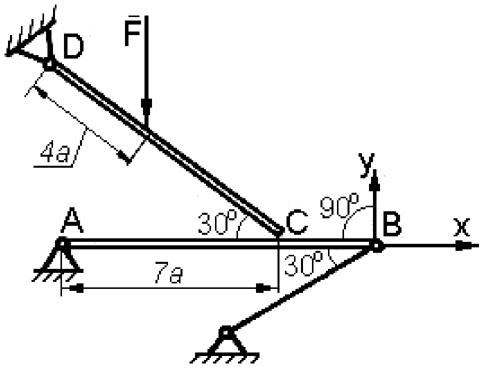
Ответ:
X_A = -40,6 кН; Y_A = 666,5 кН;
R_C = 46,88 кН; N_E = 128,1 кН;
X_D = 40,6 кН; Y_D = -74,7 кН.

№ 9 – 18



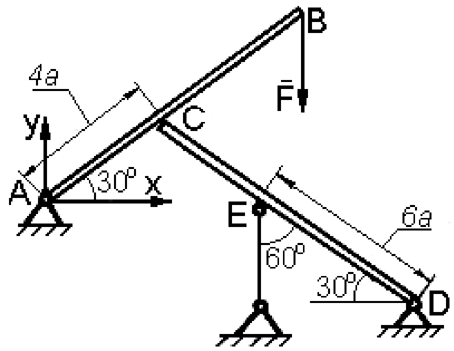
Ответ:
X_A = -62,5 кН; Y_A = 27,5 кН;
R_C = 88,4 кН; N_E = 129,2 кН;
X_D = 62,5 кН; Y_D = -36,7 кН.

№ 9 – 19



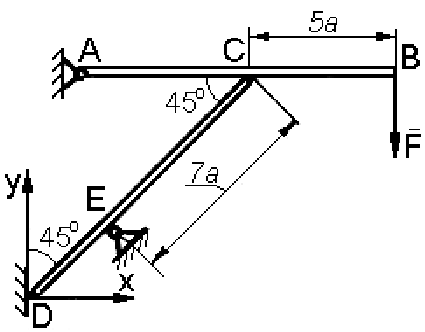
Ответ:
X_A = -73,2 кН; Y_A = 26,7 кН;
R_C = 39 кН; S_E = 84,6 кН;
X_D = 0 кН; Y_D = 51 кН.

№ 9 – 20



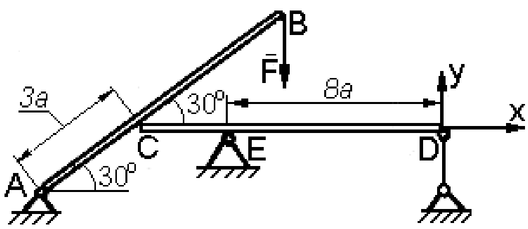
Ответ:
X_A = 81,2 кН; Y_A = -50,62 кН;
R_C = 162,4 кН; S_E = -181,25 кН;
X_D = -81,2 кН; Y_D = -10,62 кН.

№ 9 – 21



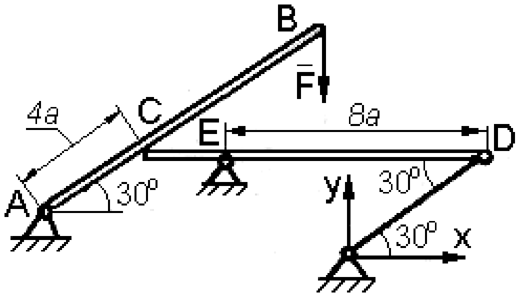
Ответ:
X_A = 0 кН; Y_A = -60 кН;
R_C = 150 кН; N_D = 370 кН;
X_E = -370 кН; Y_E = 180 кН.

№ 9 – 22



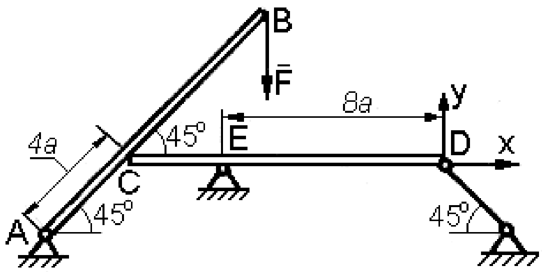
Ответ:
X_A = 108,25 кН; Y_A = -97,5 кН;
R_C = 216,5 кН; T_D = 35,62 кН;
X_E = -108,3 кН; Y_E = 253,1 кН.

№ 9 – 23



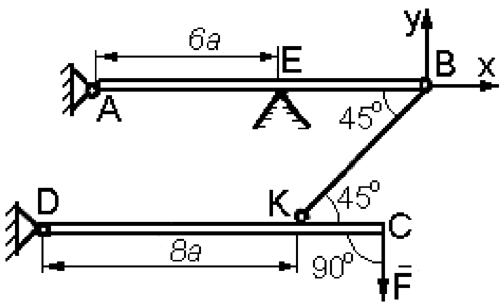
Ответ:
X_A = 81,2 кН; Y_A = -50,62 кН;
R_C = 162,4 кН; T_D = 47,81 кН;
X_E = -39,8 кН; Y_E = 194,5 кН.

№ 9 – 24



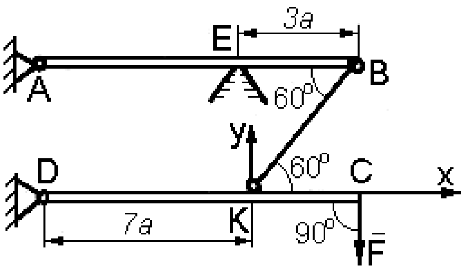
Ответ:
X_A = 75 кН; Y_A = 3,75 кН;
R_C = 132,6 кН; T_D = 17,24 кН;
X_E = -105,9 кН; Y_E = 135,9 кН.

№ 9 – 25



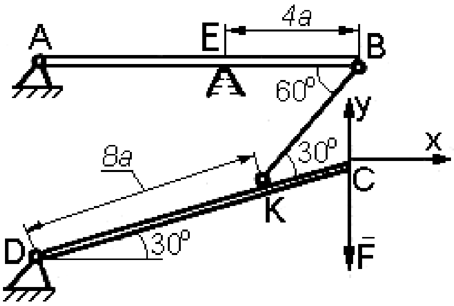
Ответ:
X_A = 93,75 кН; Y_A = -57,5 кН;
T_B = 132,6 кН; N_E = 181,25 кН;
X_D = -93,75 кН; Y_D = -3,75 кН.

№ 9 – 26



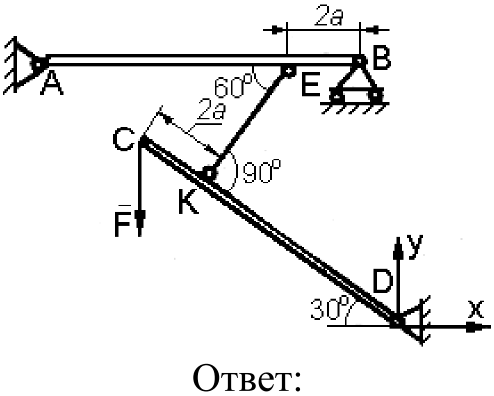
Ответ:
X_A = 61,86 кН; Y_A = -37,4 кН;
T_B = 123,6 кН; N_E = 174,5 кН;
X_D = -61,86 кН; Y_D = -17,14 кН.

№ 9 – 27



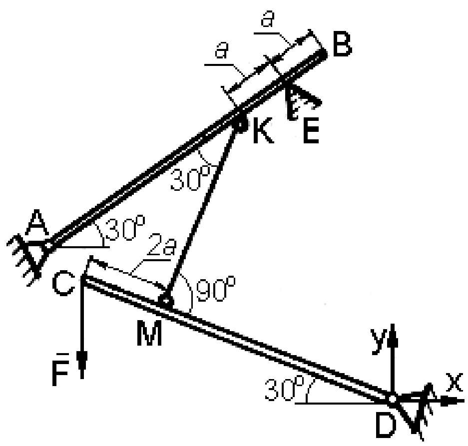
Ответ:
X_A = 81,2 кН; Y_A = -88,75 кН;
T_B = 162,4 кН; N_E = 259,4 кН;
X_D = -81,2 кН; Y_D = -50,62 кН.

№ 9 – 28



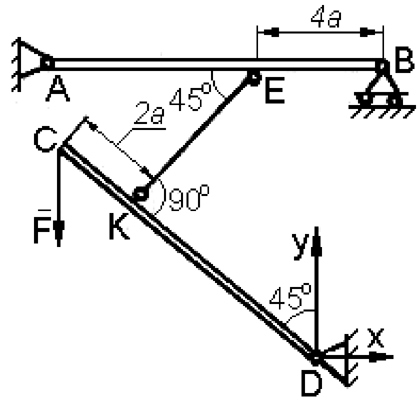
Ответ:
X_A = 40,6 кН; Y_A = 29 кН;
R_B = 71,25 кН; T_B = 81,2 кН;
X_D = -40,6 кН; Y_D = 19,7 кН.

№ 9 – 29



Ответ:
X_A = 65,9 кН; Y_A = 56,6 кН;
T_K = 81,2 кН; N_E = 50,5 кН;
X_D = -40,6 кН; Y_D = 19,7 кН.

№ 9 – 30



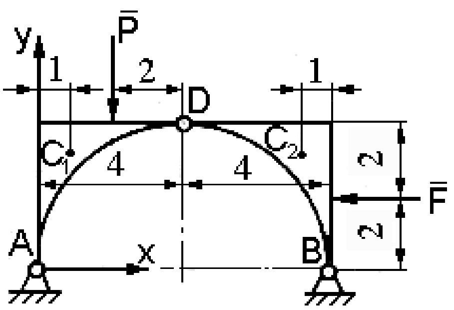
Ответ:
X_A = 46,87 кН; Y_A = 33,77 кН;
R_B = 43,1 кН; T_E = 66,3 кН;
X_D = -46,87 кН; Y_D = 43,1 кН.

Задача № 10

Варианты 1–15. Мост состоит из двух частей. Вес каждой части 10 кН и приложен в точках C_1 и C_2. Обе части соединены между собой посредством шарнира D и опираются на неподвижные шарнирные опоры A и B. Мост нагружен силами P = 4 кН и F = 8 кН.

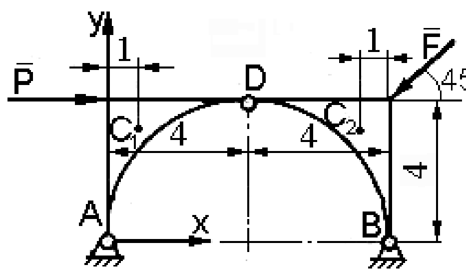
Определить реакции опор A, B и шарнира D.

№ 10 – 1



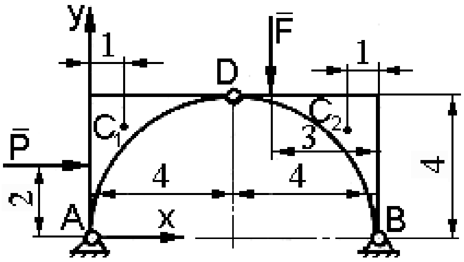
Ответ:
X_A = 5,5 кН; X_B = 2,5 кН;
X_D = 5,5 кН; Y_A = 15 кН;
Y_B = 9 кН; Y_D = 1 кН.

№ 10 – 2



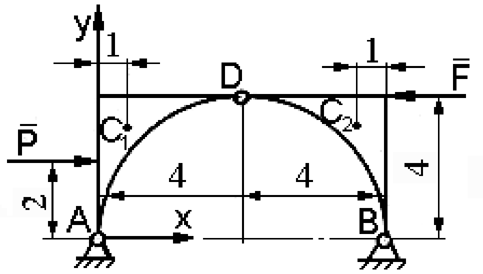
Ответ:
X_A = 3,33 кН; X_B = -1,67 кН;
X_D = 7,33 кН; Y_A = 10,8 кН;
Y_B = 14,9 кН; Y_D = 0,83 кН.

№ 10 – 3



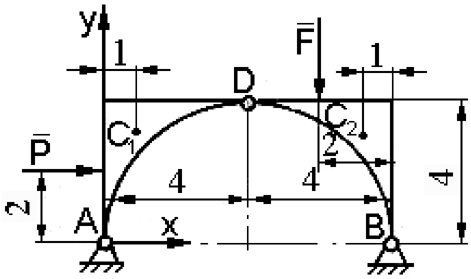
Ответ:
X_A = -2 кН; X_B = -6 кН;
X_D = 6 кН; Y_A = 9,5 кН;
Y_B = 14,5 кН; Y_D = 0,5 кН.

№ 10 – 4



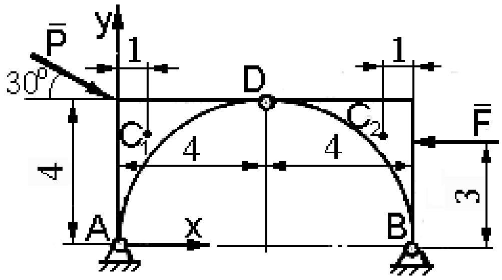
Ответ:
X_A = 3,5 кН; X_B = 0,5 кН;
X_D = 7,5 кН; Y_A = 13 кН;
Y_B = 7 кН; Y_D = 3 кН.

№ 10 – 5



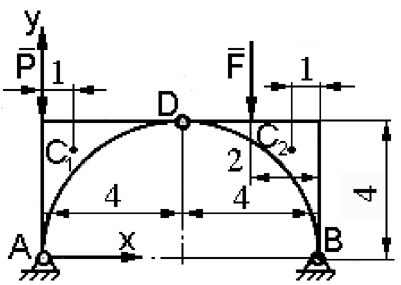
Ответ:
X_A = 1,5 кН; X_B = -5,5 кН;
X_D = 5,5 кН; Y_A = 11 кН;
Y_B = 17 кН; Y_D = 1 кН.

№ 10 – 6



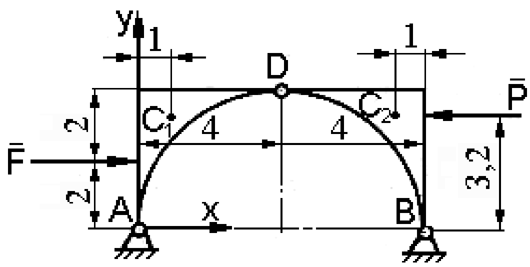
Ответ:
X_A = 0,54 кН; X_B = -3,46 кН;
X_D = 7,46 кН; Y_A = 12,1 кН;
Y_B = 11,96 кН; Y_D = 1,96 кН.

№ 10 – 7



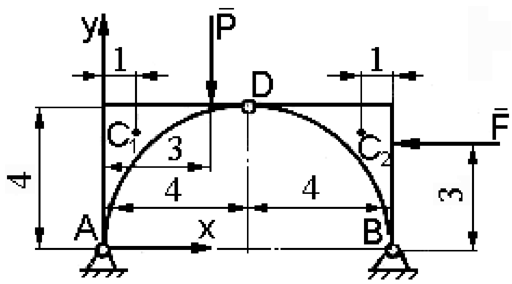
Ответ:
X_A = 4,5 кН; X_B = -4,5 кН;
X_D = 4,5 кН; Y_A = 16 кН;
Y_B = 16 кН; Y_D = 2 кН.

№ 10 – 8



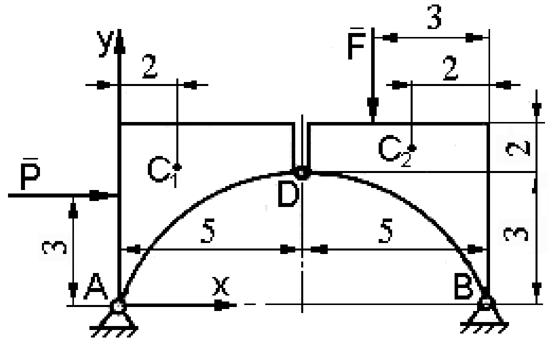
Ответ:
X_A = -2,1 кН; X_B = -1,9 кН;
X_D = 6,1 кН; Y_A = 10,4 кН;
Y_B = 9,6 кН; Y_D = 0,4 кН.

№ 10 – 9



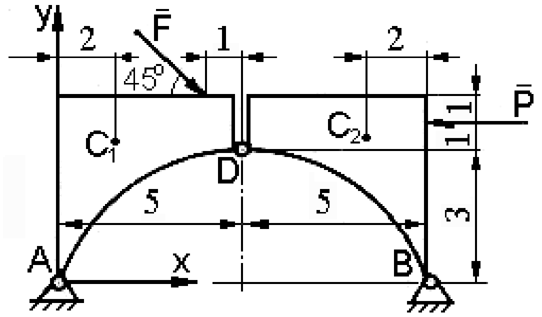
Ответ:
X_A = 1 кН; X_B = 7 кН;
X_D = 7 кН; Y_A = 8,5 кН;
Y_B = 15,5 кН; Y_D = 1,5 кН.

№ 10 – 10



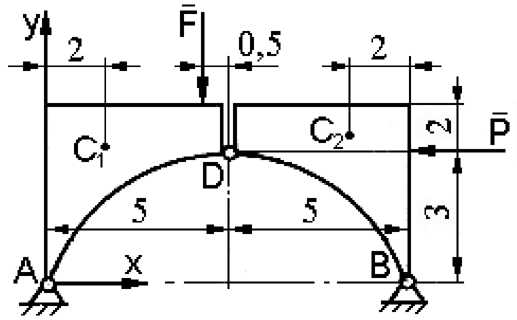
Ответ:
X_A = 8,67 кН; X_B = -12,67 кН;
X_D = 12,67 кН; Y_A = 11,2 кН;
Y_B = 16,8 кН; Y_D = 1,2 кН.

№ 10 – 11



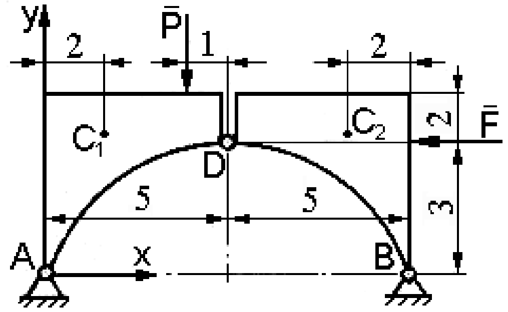
Ответ:
X_A = 12,2 кН; X_B = -13,9 кН;
X_D = 17,8 кН; Y_A = 12,2 кН;
Y_B = 13,5 кН; Y_D = 3,49 кН.

№ 10 – 12



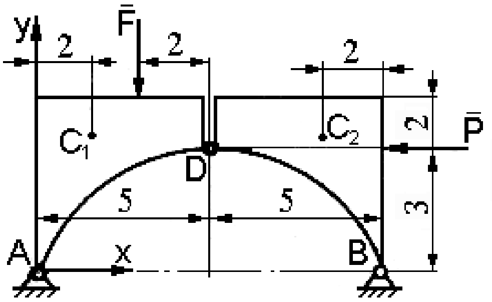
Ответ:
X_A = 14,7 кН; X_B = -10,7 кН;
X_D = 14,7 кН; Y_A = 15,6 кН;
Y_B = 12,7 кН; Y_D = 2,4 кН.

№ 10 – 13



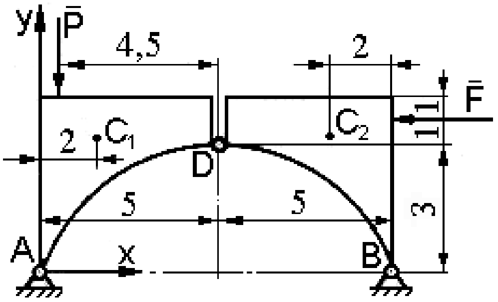
Ответ:
X_A = 13,3 кН; X_B = 5,3 кН;
X_D = 13,3 кН; Y_A = 14,8 кН;
Y_B = 9,2 кН; Y_D = 0,8 кН.

№ 10 – 14



Ответ:
X_A = 12,7 кН; X_B = -8,7 кН;
X_D = 12,7 кН; Y_A = 16,8 кН;
Y_B = 11,2 кН; Y_D = 1,2 кН.

№ 10 – 15

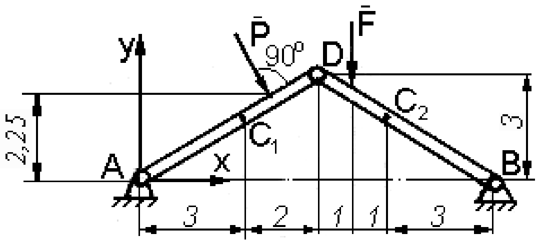


Ответ:
X_A = 12,3 кН;
X_B = 4,3 кН; X_D = 12,3 кН;
Y_A = 17 кН; Y_B = 7 кН; Y_D = 3 кН.

Варианты 16–30. Стропила состоят из двух частей. Вес каждой части равен 40 кН и приложен в точках C_1 и C_2, обе части соединены между собой посредством шарнира *D* и опираются на неподвижные шарнирные опоры *A* и *B*. Стропила нагружены силой *P* = 10 кН и силой *F* = 20 кН. Линейные размеры – в метрах.

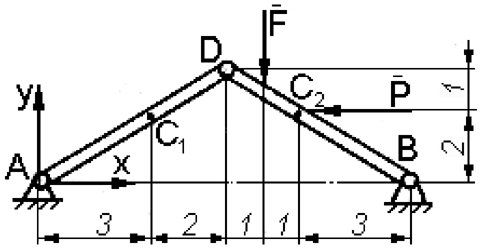
Определить реакции опор *A, B* и шарнира *D*.

№ 10 – 16



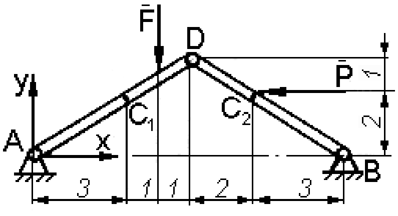
Ответ:
X_A = 54,8 кН; X_B = -60,9 кН;
X_D = 60,9 кН; Y_A = 52,2 кН;
Y_B = 56,4 кН; Y_D = 3,63 кН.

№ 10 – 17



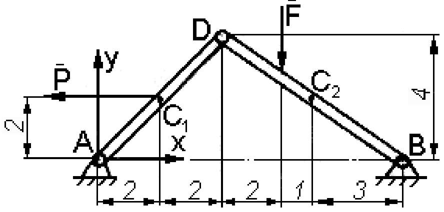
Ответ:
X_A = 50 кН; X_B = -60 кН;
X_D = 50 кН; Y_A = 46 кН;
Y_B = 54 кН; Y_D = 6 кН.

№ 10 – 18



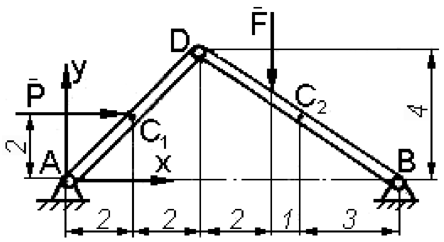
Ответ:
X_A = 56,7 кН; X_B = 46,7 кН;
X_D = 56,7 кН; Y_A = 54 кН;
Y_B = 46 кН; Y_D = 6 кН.

№ 10 – 19



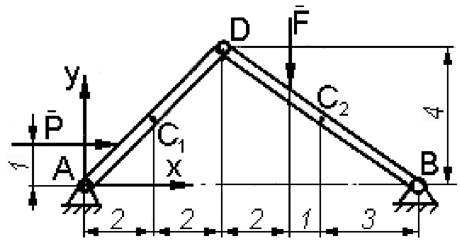
Ответ:
X_A = 39 кН; X_B = -29 кН;
X_D = 29 кН; Y_A = 54 кН;
Y_B = 46 кН; Y_D = 14 кН.

№ 10 – 20



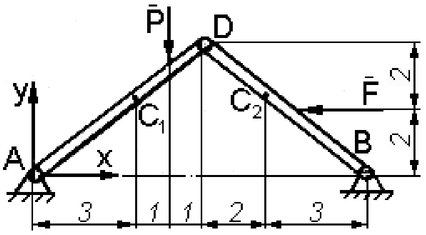
Ответ:
X_A = 25 кН; X_B = -35 кН;
X_D = 35 кН; Y_A = 50 кН;
Y_B = 50 кН; Y_D = 10 кН.

№ 10 – 21



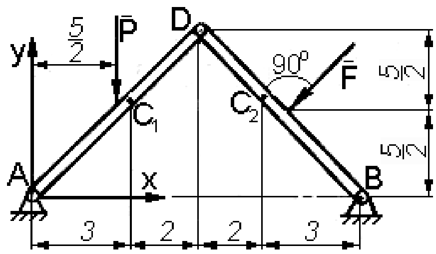
Ответ:
X_A = 23,5 кН; X_B = 49 кН;
X_D = 33,5 кН; Y_A = 51 кН;
Y_B = 33,5 кН; Y_D = 11 кН.

№ 10 – 22



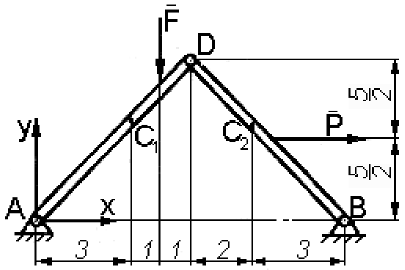
Ответ:
X_A = 40 кН; X_B = 50 кН;
X_D = 40 кН; Y_A = -20 кН;
Y_B = 40 кН; Y_D = 0 кН.

№ 10 – 23



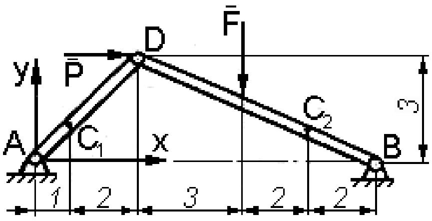
Ответ:
X_A = 33,6 кН; X_B = 54,6 кН;
X_D = 33,6 кН; Y_A = -20 кН;
Y_B = 49,5 кН; Y_D = 4,57 кН.

№ 10 – 24



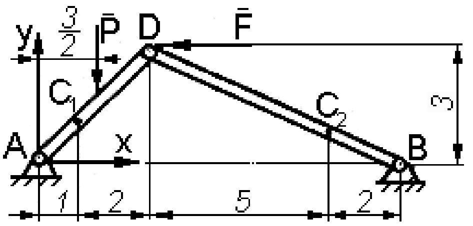
Ответ:
X_A = 29,5 кН; X_B = -39,5 кН;
X_D = 29,5 кН; Y_A = 49,5 кН;
Y_B = 50,5 кН; Y_D = 10,5 кН.

№ 10 – 25



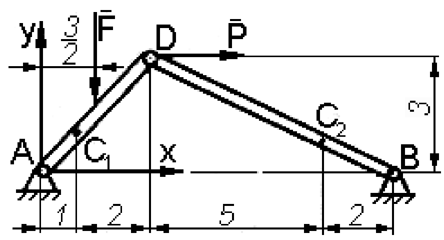
Ответ:
X_A = 22,3 кН; X_B = 32,3 кН;
X_D = -32,3 кН; Y_A = 49 кН;
Y_B = 51 кН; Y_D = 9 кН.

№ 10 – 26



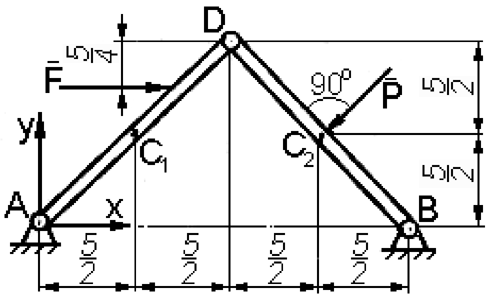
Ответ:
X_A = 26,8 кН; X_B = 6,83 кН;
X_D = 26,8 кН; Y_A = 58,5 кН;
Y_B = 31,5 кН; Y_D = 8,5 кН.

№ 10 – 27



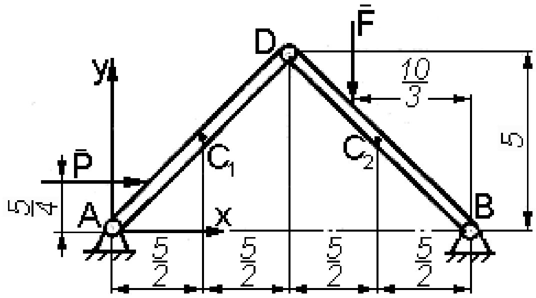
Ответ:
X_A = 21,3 кН; X_B = -31,3 кН;
X_D = 21,3 кН; Y_A = 58 кН;
Y_B = 42 кН; Y_D = 2 кН.

№ 10 – 28



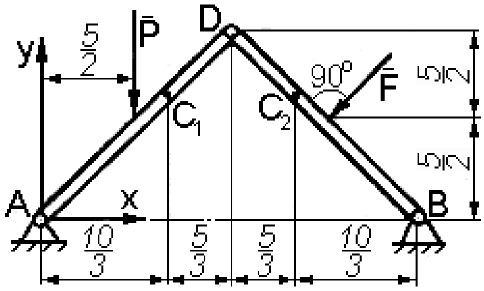
Ответ:
X_A = 11 кН; X_B = 51 кН;
X_D = -24 кН; Y_A = 36 кН;
Y_B = 31 кН; Y_D = 3,97 кН.

№ 10 – 29



Ответ:
X_A = 17,9 кН; X_B = -27,9 кН;
X_D = 27,9 кН; Y_A = 45,4 кН;
Y_B = 54,6 кН; Y_D = 5,42 кН.

№ 10 – 30



Ответ:
X_A = 36,2 кН; X_B = -22,1 кН;
X_D = 36,2 кН; Y_A = 54,5 кН;
Y_B = 49,6 кН; Y_D = 4,57 кН.

4. РАВНОВЕСИЕ ПРОСТРАНСТВЕННОЙ СИСТЕМЫ СИЛ

Для равновесия твердого тела под действием произвольной пространственной системы сил необходимо и достаточно, чтобы суммы проекций всех сил на каждую из трех координатных осей и суммы моментов всех сил относительно этих осей были равны нулю:

$$\left.\begin{array}{lll} \sum F_{kx}=0, & \sum F_{ky}=0, & \sum F_{kz}=0, \\ \sum m_x(\overline{F}_k)=0, & \sum m_y(\overline{F}_k)=0, & \sum m_z(\overline{F}_k)=0. \end{array}\right\} \qquad (4.1)$$

Момент силы относительно оси характеризует вращательный эффект, создаваемый силой, стремящейся повернуть тело вокруг данной оси.

Момент силы $\overline{F}$ относительно оси z равен алгебраическому моменту проекции этой силы на плоскость, перпендикулярную оси z, взятому относительно точки пересечения оси с этой плоскостью.

Для вычисления момента силы F относительно оси z необходимо выполнить следующие операции (рис. 4.1).

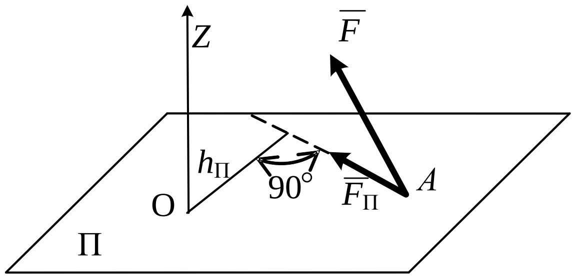


Рис. 4.1

1. Провести через произвольную точку O оси z плоскость П, перпендикулярную оси z.

2. Найти проекцию $\overline{F}_П$ силы $\overline{F}$ на плоскость П.

3. Определить плечо $h_П$ силы $\overline{F}_П$ относительно точки O.

4. Вычислить произведение $F_П \times h_П$.

5. Определить знак момента: принимаем его со знаком плюс, когда с положительного конца оси поворот, который стремится совершить сила $\overline{F}_П$, виден против хода часовой стрелки, и со знаком минус – когда по ходу часовой стрелки.

Так, момент силы $\overline{F}$ относительно оси z (рис. 4.1) определяется формулой

$$m_z(\overline{F}) = m_O(\overline{F}_П) = +F_П \times h_П, \qquad (4.2)$$

где $F_П$ – модуль проекции $\overline{F}_П$; $h_П$ – плечо этой проекции.

Момент силы относительно оси равен нулю:

1) если сила параллельна оси (при этом $F_П = 0$);

2) если линия действия силы пересекает ось (при этом $h_П = 0$).

Объединяя оба случая вместе, можно заключить, что момент силы относительно оси равен нулю, если сила и ось лежат в одной плоскости.

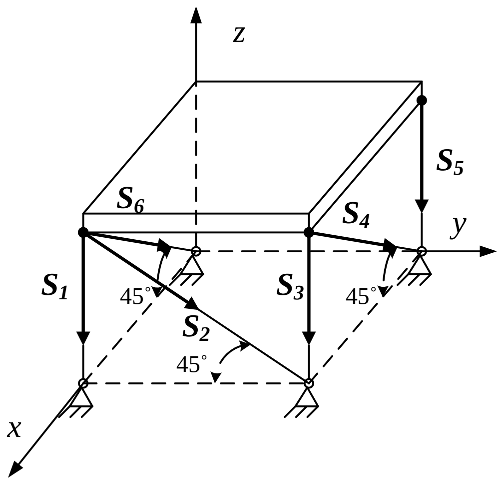


Рис. 4.2

Пример 5

Плита размером $d \times d$ ($d = 2$ м) удерживается шестью стержнями (рис 4.2). Длина вертикальных стержней равна d.

На плиту действуют силы $F_1 = 100$ кН, $F_2 = 50$ кН. Определить реакции стержней $S_{1,...}S_6$.

Решение. Объектом равновесия является плита, связями – стержни, ее удерживающие. На плиту действуют активные силы F_1, F_2, а также реакции связей $S_1, S_2, S_3, S_4, S_5, S_6$, направленные вдоль стержней от объекта равновесия.

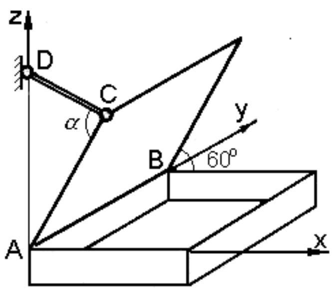
Оси координат x, y, z указаны на рис. 4.2. Направляющие углы также отмечены на чертеже.

Решение поставленной задачи в среде MathCad дано в прил. 7.

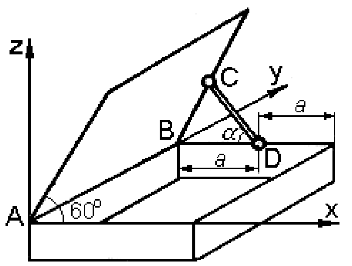
Задача № 11

Варианты 1–15. Однородная прямоугольная крышка ящика может вращаться вокруг горизонтальной оси *AB* на петлях в точках *A* и *B*. Стержень CD удерживает крышку в равновесии в положении, указанном на чертеже.

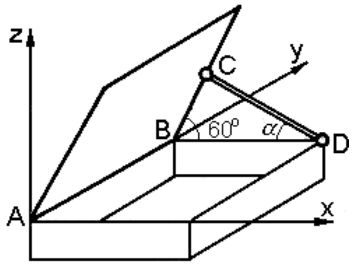
Определить реакции в петлях *A* и *B*, а также усилие в стержне *CD*, если вес крышки 5Н.



№ вар.	Дано α	Ответ				
		X_A, Н	Z_A, Н	X_B, Н	Z_B, Н	S, Н
1	30°	2,165	3,75	0	2,5	2,5
2	60°	1,44	2,5	0	2,5	1,44
3	120°	0,72	1,25	0	2,5	1,44

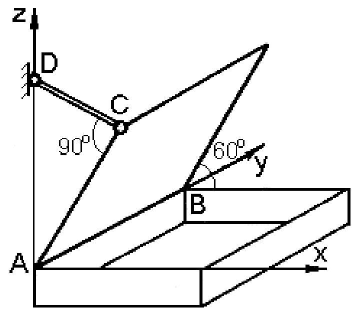


№ вар.	Дано α	Ответ				
		X_A, Н	Z_A, Н	X_B, Н	Z_B, Н	S, Н
4	30°	0	2,5	4,33	0	2,5
5	60°	0	2,5	1,44	0	1,44



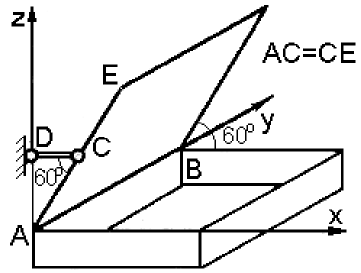
№ вар.	Дано α	Ответ				
		X_A, Н	Z_A, Н	X_B, Н	Z_B, Н	S, Н
6	30°	0	2,5	2,165	1,25	2,5
7	60°	0	2,5	0,72	1,25	1,44

№ 11 – 8



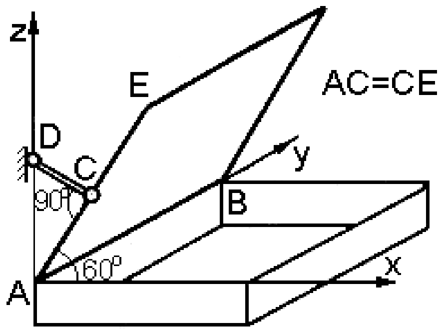
Ответ:
X_A = 1,08 Н; Z_A = 1,875 Н;
X_B = 0 Н; Z_B = 2,5 Н; S = 1,25 Н.

№ 11 – 9



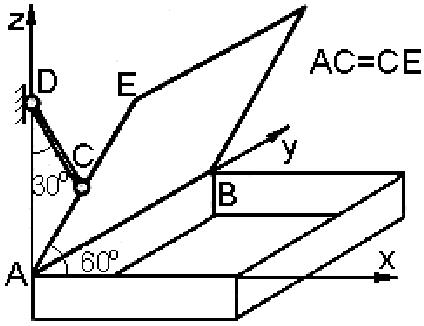
Ответ:
X_A = 2,89 Н; Z_A = 2,5 Н;
X_B = 0 Н; Z_B = 2,5 Н; S = 2,89 Н.

№ 11 – 10



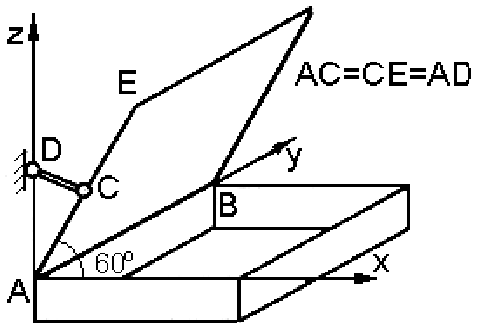
Ответ:
X_A = 2,165 Н; Z_A = 1,25 Н;
X_B = 0 Н; Z_B = 2,5 Н; S = 2,5 Н.

№ 11 – 11



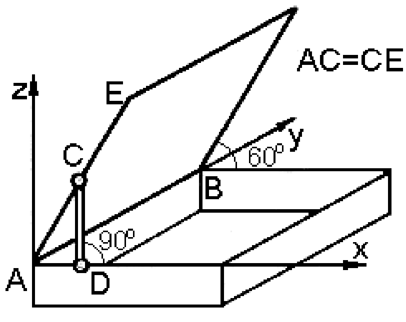
Ответ:
X_A = 1,44 Н; Z_A = 0 Н;
X_B = 0 Н; Z_B = 2,5 Н; S = 2,89 Н.

№ 11 – 12



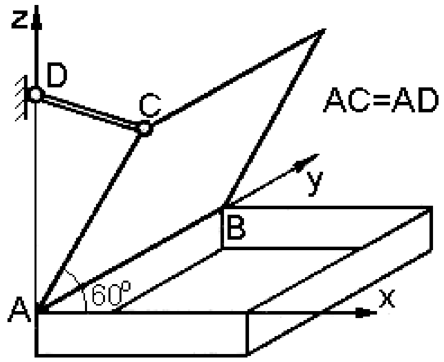
Ответ:
X_A = 2,5 Н; Z_A = 1,83 Н;
X_B = 0 Н; Z_B = 2,5 Н; S = 2,59 Н.

№ 11 – 13



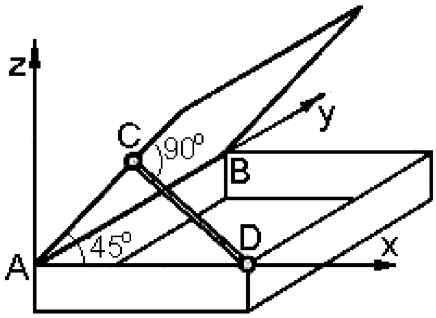
Ответ:
X_A = 0 Н; Z_A = -2,5 Н;
X_B = 0 Н; Z_B = 2,5 Н; S = 5 Н.

№ 11 – 14



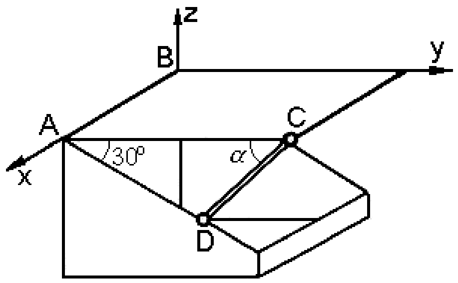
Ответ:
X_A = 1,25 Н; Z_A = 2,165 Н;
X_B = 0 Н; Z_B = 2,5 Н; S = 1,3 Н.

№ 11 – 15

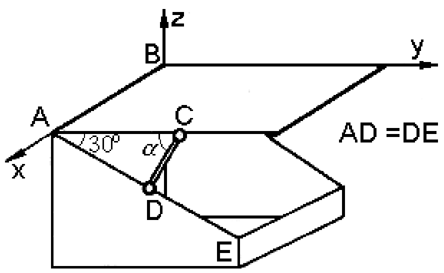


Ответ:
X_A = 0 Н; Z_A = 2,5 Н;
X_B = 1,77 Н; Z_B = 0,73 Н; S = 2,5 Н.

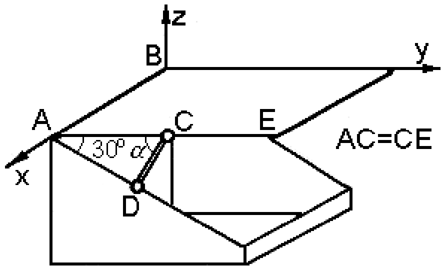
Варианты 16–24. Однородная крышка светового люка удерживается в горизонтальном положении стержнем *CD*. Определить реакции шарниров *A* и *B*, а также усилие в стержне *CD*, если вес крышки 100 Н.



№ вар.	Дано α	Ответ				
		Y_A, Н	Z_A, Н	Y_B, Н	Z_B, Н	S, Н
16	30°	-86,5	0	0	50	100
17	60°	28,9	0	0	50	57,8
18	75°	13,4	0	0	50	51,8

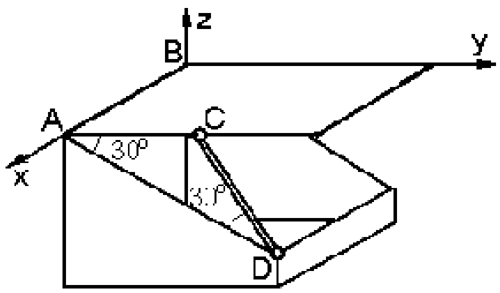


№ вар.	Дано α	Ответ				
		Y_A, Н	Z_A, Н	Y_B, Н	Z_B, Н	S, Н
19	60°	-50	-36,5	0	50	100
20	90°	0	65,6	0	50	115,6



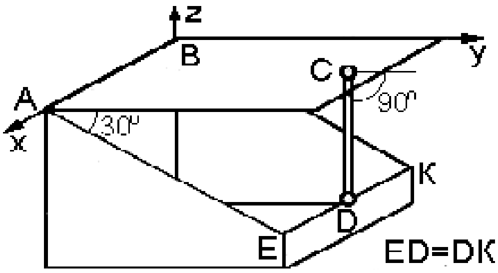
№ вар.	Дано α	Ответ				
		Y_A, Н	Z_A, Н	Y_B, Н	Z_B, Н	S, Н
21	90°	0	-50	0	50	100
22	60°	57,8	-50	0	50	115,6

№ 11 – 23



Ответ:
Y_A = 50 Н; Z_A = -36,5 Н;
Y_B = 0 Н; Z_B = 50 Н;
S = 100 Н.

№ 11 – 24

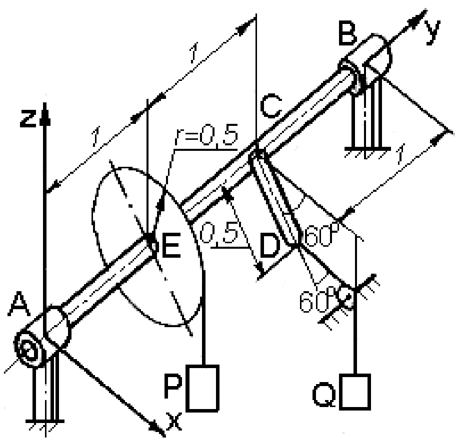


Ответ:
Y_A = 0 Н; Z_A = 21,1 Н;
Y_B = 0 Н; Z_B = 21,1 Н;
S = 57,8 Н.

Варианты 25–30. На горизонтальный вал, лежащий в подшипниках A и B, в точке E насажен шкив, с которого сходит веревка, нагруженная гирей P = 100 Н. В точке C прикреплен под прямым углом к оси вала стержень CD, к которому подвязан груз Q, удерживающий систему в равновесии.

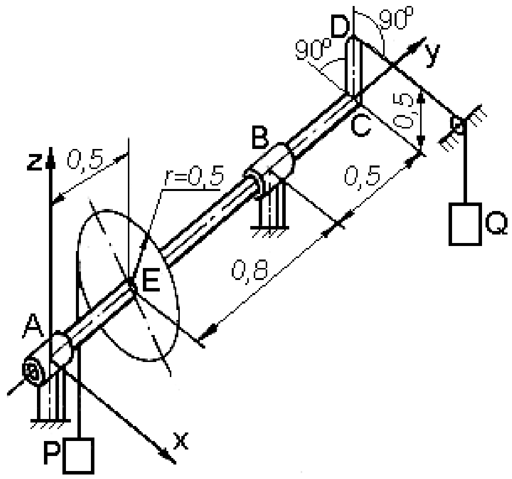
Определить величину груза Q и реакции опор A и B.

№ 11 – 25



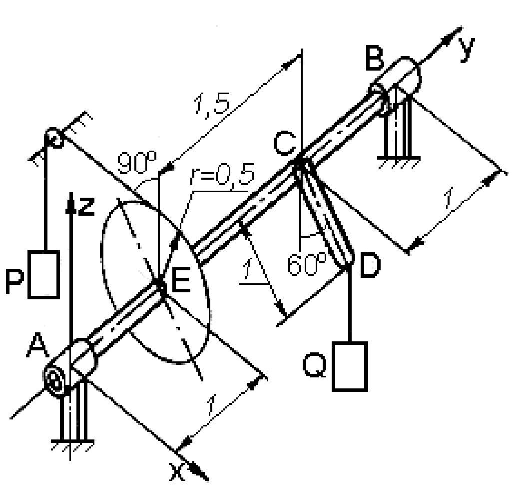
Ответ:
X_A = -38,5 Н; Z_A = 66,7 Н;
X_B = -77 Н; Z_B = 33,3 Н;
Q = 115,5 Н.

№ 11 – 26



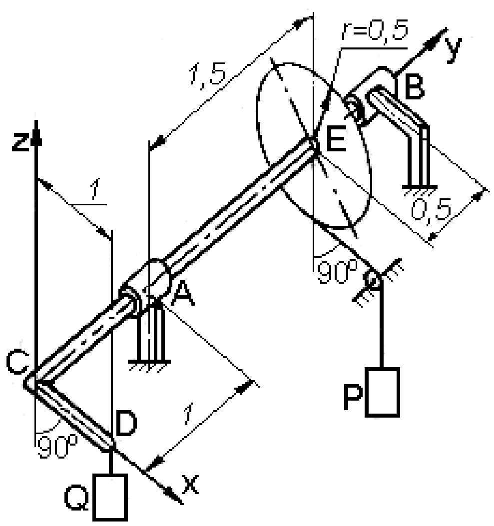
Ответ:
X_A = 38,5 Н; Z_A = 61,6 Н;
X_B = -138,5 Н; Z_B = 38,4 Н;
Q = 100 Н.

№ 11 – 27



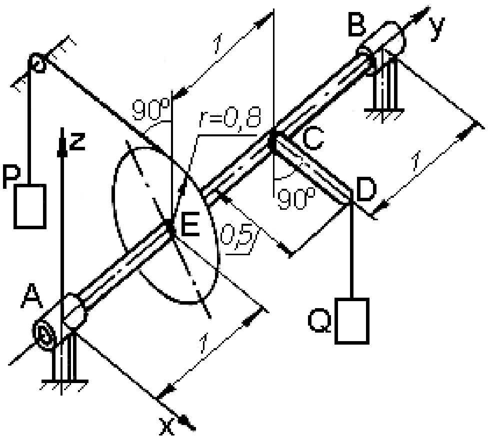
Ответ:
X_A = 71,4 Н; Z_A = 16,5 Н;
X_B = 28,6 Н; Z_B = 41,2 Н; Q = 57,8 Н.

№ 11 – 28



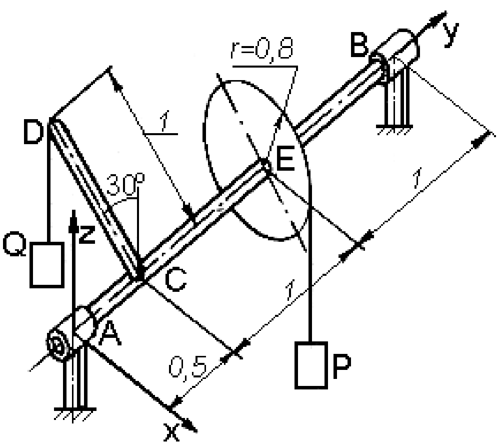
Ответ:
X_A = -25 Н; Z_A = 75 Н;
X_B = -75 Н; Z_B = -25 Н; Q = 50 Н.

№ 11 – 29



Ответ:
X_A = 66,7 Н; Z_A = 53,3 Н;
X_B = 33,3 Н; Z_B = 106,7 Н; Q = 260 Н.

№ 11 – 30



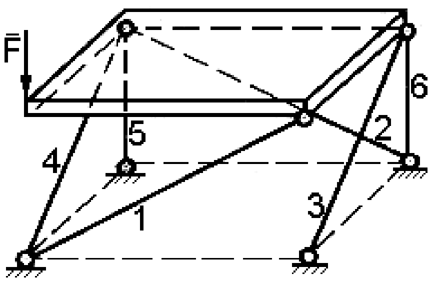
Ответ:
X_A = 0 Н; Z_A = 168 Н;
X_B = 0 Н; Z_B = 92 Н; Q = 160 Н.

Задача № 12

Варианты 1–30. Однородная квадратная плита со стороной 2*a* и весом 100 Н удерживается в горизонтальном положении шестью стержнями. На плиту действует сила F = 50 Н.

Определить усилия в стержнях, если длина вертикальных стержней равна *a*. Толщиной плиты пренебречь.

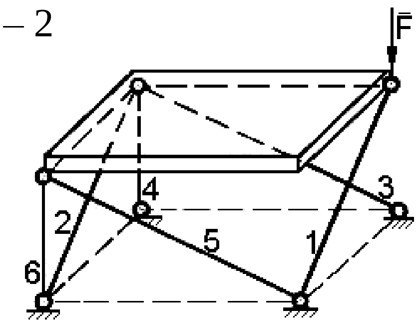
№ 12 – 1



Ответ:

$S_1 = -100\sqrt{5}$ Н; $S_2 = -100\sqrt{5}$ Н;
$S_3 = 100\sqrt{5}$ Н; $S_4 = -100\sqrt{5}$ Н;
$S_5 = 100$ Н; $S_6 = -50$ Н.

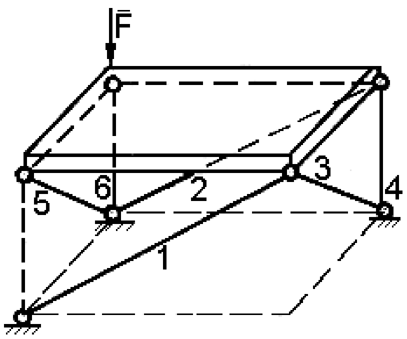
№ 12 – 2



Ответ:

$S_1 = -100\sqrt{5}$ Н; $S_2 = 100\sqrt{5}$ Н;
$S_3 = 100\sqrt{5}$ Н; $S_4 = -200$ Н;
$S_5 = -100\sqrt{5}$ Н; $S_6 = 50$ Н.

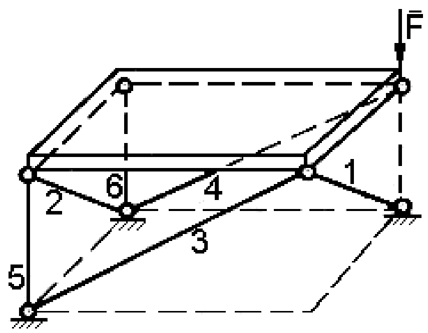
№ 12 – 3



Ответ:

$S_1 = -50\sqrt{5}$ Н; $S_2 = 50\sqrt{5}$ Н;
$S_3 = -50\sqrt{5}$ Н; $S_4 = 0$ Н;
$S_5 = 50\sqrt{5}$ Н; $S_6 = -150$ Н.

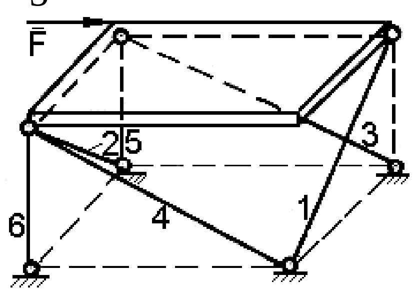
№ 12 – 4



Ответ:

$S_1 = -100\sqrt{5}$ Н; $S_2 = 100\sqrt{5}$ Н;
$S_3 = -100\sqrt{5}$ Н; $S_4 = 50$ Н;
$S_5 = 50$ Н; $S_6 = -200$ Н.

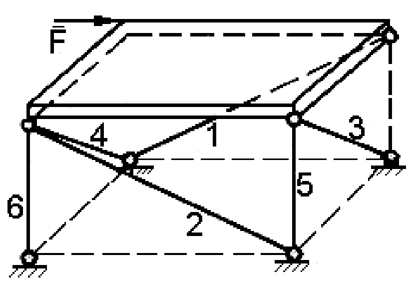
№ 12 – 5



Ответ:

$S_1 = -50\sqrt{5}$ Н; $S_2 = -50\sqrt{5}$ Н;
$S_3 = 25\sqrt{5}$ Н; $S_4 = -50\sqrt{5}$ Н;
$S_5 = -25$ Н; $S_6 = 50$ Н.

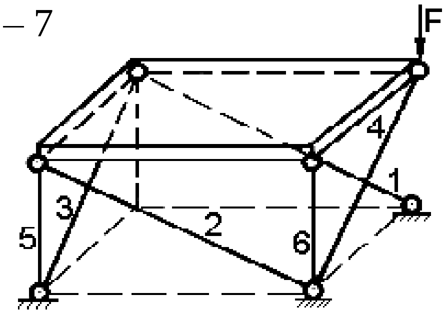
№ 12 – 6



Ответ:

$S_1 = -50\sqrt{5}$ Н; $S_2 = -75\sqrt{5}$ Н;
$S_3 = 75\sqrt{5}$ Н; $S_4 = -75$ Н;
$S_5 = 75\sqrt{5}$ Н; $S_6 = 100$ Н.

№ 12 – 7



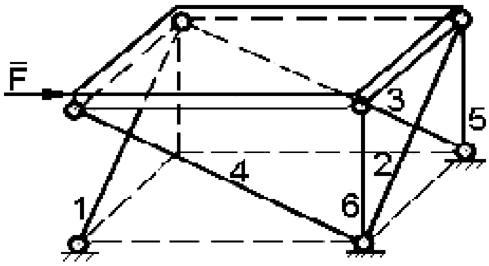
Ответ:

$S_1 = -100\sqrt{5}$ Н; $S_2 = 100\sqrt{5}$ Н;

$S_3 = -100\sqrt{5}$ Н; $S_4 = 100\sqrt{5}$ Н;

$S_5 = 50$ Н; $S_6 = -200$ Н.

№ 12 – 8



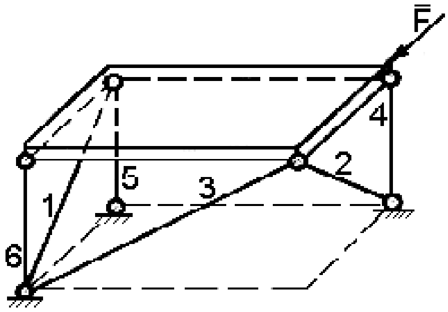
Ответ:

$S_1 = -25\sqrt{5}$ Н; $S_2 = 25\sqrt{5}$ Н;

$S_3 = -25\sqrt{5}$ Н; $S_4 = 0$ Н;

$S_5 = -25$ Н; $S_6 = -50$ Н.

№ 12 – 9



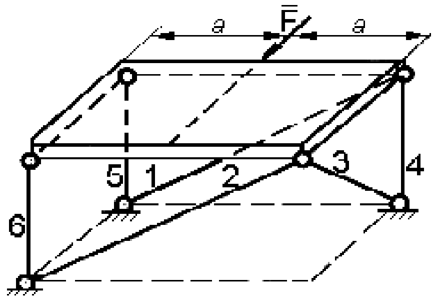
Ответ:

$S_1 = 0$ Н; $S_2 = 25\sqrt{5}$ Н;

$S_3 = 0$ Н; $S_4 = -75$ Н;

$S_5 = 25$ Н; $S_6 = -75$ Н.

№ 12 – 10



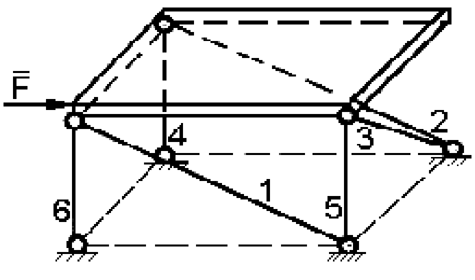
Ответ:

$S_1 = -12{,}5\sqrt{5}$ Н; $S_2 = 12{,}5\sqrt{5}$ Н;

$S_3 = 25\sqrt{5}$ Н; $S_4 = 37{,}5$ Н;

$S_5 = 25\sqrt{5}$ Н; $S_6 = -87{,}5$ Н.

№ 12 – 11



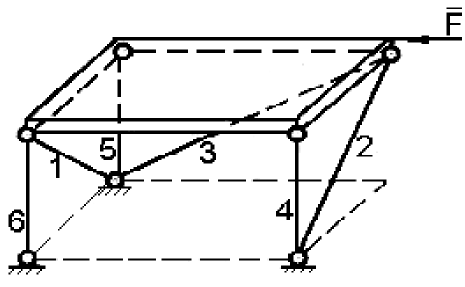
Ответ:

$S_1 = -25\sqrt{5}$ Н; $S_2 = 0$ Н;

$S_3 = 0$ Н; $S_4 = -50$ Н;

$S_5 = -50$ Н; $S_6 = 25$ Н.

№ 12 – 12



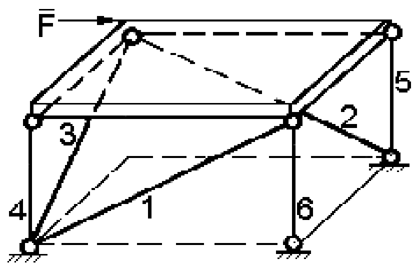
Ответ:

$S_1 = 0$ Н; $S_2 = 0$ Н;

$S_3 = 25\sqrt{5}$ Н; $S_4 = -25$ Н;

$S_5 = -25$ Н; $S_6 = -25$ Н.

№ 12 – 13



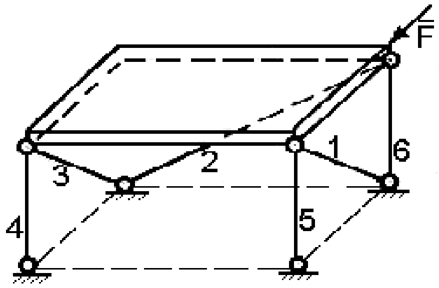
Ответ:

S_1 = 0 Н; S_2 = -25$\sqrt{5}$ Н;

S_3 = 0 Н; S_4 = -25 Н;

S_5 = -25 Н; S_6 = -25 Н.

№ 12 – 14



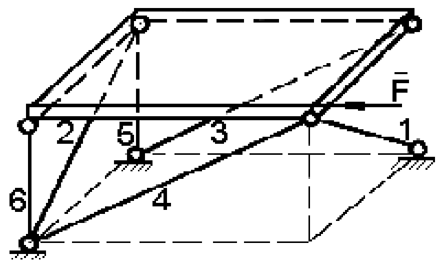
Ответ:

S_1 = -25$\sqrt{5}$ Н; S_2 = 0 Н;

S_3 = 0 Н; S_4 = -50 Н;

S_5 = -25 Н; S_6 = -50 Н.

№ 12 – 15



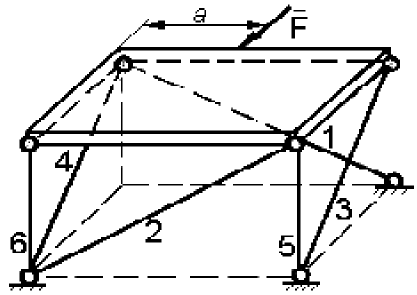
Ответ:

S_1 = 75$\sqrt{5}$ Н; S_2 = 75$\sqrt{5}$ Н;

S_3 = 75$\sqrt{5}$ Н; S_4 = -50$\sqrt{5}$ Н;

S_5 = -50 Н; S_6 = 75 Н.

№ 12 – 16



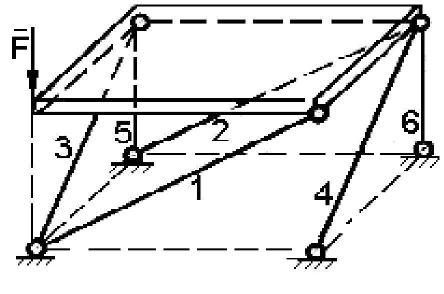
Ответ:

S_1 = -25$\sqrt{5}$ Н; S_2 = -25$\sqrt{5}$ Н;

S_3 = 12,5$\sqrt{5}$ Н; S_4 = -37,5$\sqrt{5}$ Н;

S_5 = -37,5 Н; S_6 = 12,5 Н.

№ 12 – 17



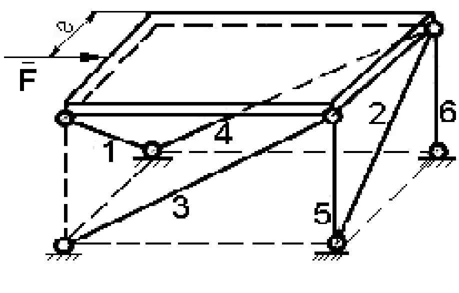
Ответ:

S_1 = -100$\sqrt{5}$ Н; S_2 = 100$\sqrt{5}$ Н;

S_3 = -100$\sqrt{5}$ Н; S_4 = 100$\sqrt{5}$ Н;

S_5 = 0 Н; S_6 = -150 Н.

№ 12 – 18



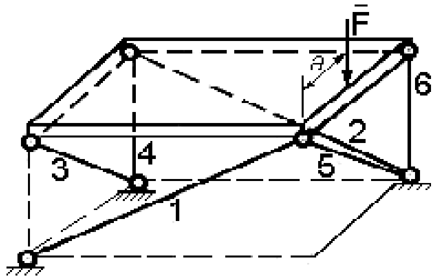
Ответ:

S_1 = -50$\sqrt{5}$ Н; S_2 = -50$\sqrt{5}$ Н;

S_3 = 62,5$\sqrt{5}$ Н; S_4 = -37,5$\sqrt{5}$ Н;

S_5 = -62,5 Н; S_6 = 37,5 Н.

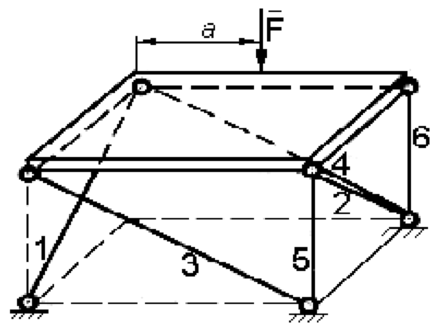
№ 12 – 19



Ответ:

$S_1 = -75\sqrt{5}$ Н; $S_2 = -75\sqrt{5}$ Н;
$S_3 = 75\sqrt{5}$ Н; $S_4 = -50$ Н;
$S_5 = -75\sqrt{5}$ Н; $S_6 = 50$ Н.

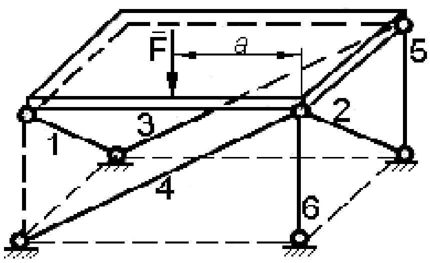
№ 12 – 20



Ответ:

$S_1 = -75\sqrt{5}$ Н; $S_2 = -75\sqrt{5}$ Н;
$S_3 = 75\sqrt{5}$ Н; $S_4 = -75\sqrt{5}$ Н;
$S_5 = -50$ Н; $S_6 = 50$ Н.

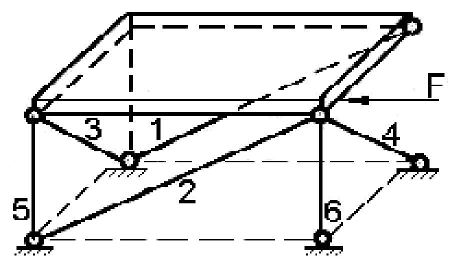
№ 12 – 21



Ответ:

$S_1 = -75\sqrt{5}$ Н; $S_2 = 75\sqrt{5}$ Н;
$S_3 = -75\sqrt{5}$ Н; $S_4 = 75\sqrt{5}$ Н;
$S_5 = 25$ Н; $S_6 = -175$ Н.

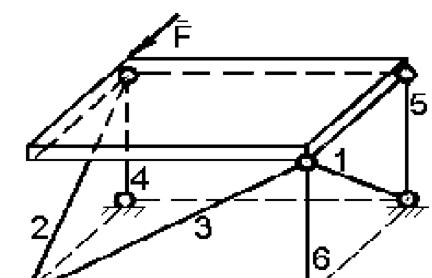
№ 12 – 22



Ответ:

$S_1 = -50\sqrt{5}$ Н; $S_2 = 75\sqrt{5}$ Н;
$S_3 = -50\sqrt{5}$ Н; $S_4 = 50\sqrt{5}$ Н;
$S_5 = 0$ Н; $S_6 = -125$ Н.

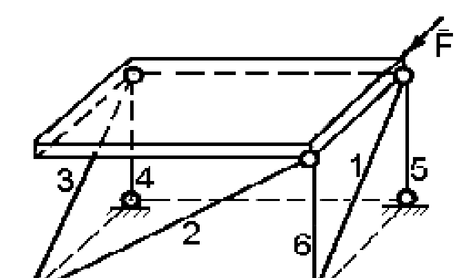
№ 12 – 23



Ответ:

$S_1 = 0$ Н; $S_2 = -25\sqrt{5}$ Н;
$S_3 = 0$ Н; $S_4 = -25$ Н;
$S_5 = 0$ Н; $S_6 = -50$ Н.

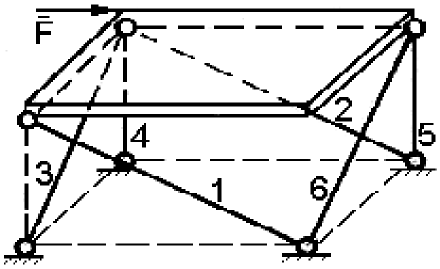
№ 12 – 24



Ответ:

$S_1 = -25\sqrt{5}$ Н; $S_2 = 0$ Н;
$S_3 = 0$ Н; $S_4 = -50$ Н;
$S_5 = 25$ Н; $S_6 = -50$ Н.

№ 12 – 25



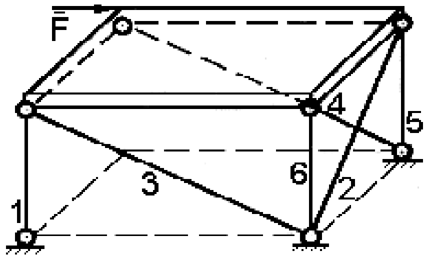
Ответ:

$S_1 = -50\sqrt{5}$ Н; $S_2 = 25\sqrt{5}$ Н;

$S_3 = 50\sqrt{5}$ Н; $S_4 = -50\sqrt{5}$ Н;

$S_5 = 0$ Н; $S_6 = -75$ Н.

№ 12 – 26



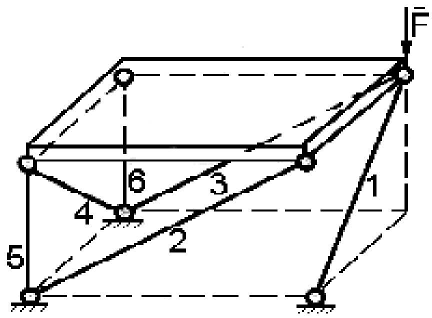
Ответ:

$S_1 = -25$ Н; $S_2 = 0$ Н;

$S_3 = 0$ Н; $S_4 = -25\sqrt{5}$ Н;

$S_5 = -25$ Н; $S_6 = -25$ Н.

№ 12 – 27



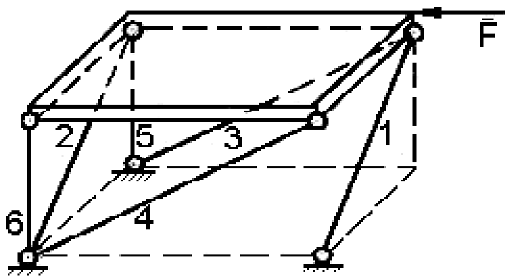
Ответ:

$S_1 = -100\sqrt{5}$ Н; $S_2 = 10\sqrt{5}$ Н;

$S_3 = -100\sqrt{5}$ Н; $S_4 = -100\sqrt{5}$ Н;

$S_5 = -50$ Н; $S_6 = 100$ Н.

№ 12 – 28



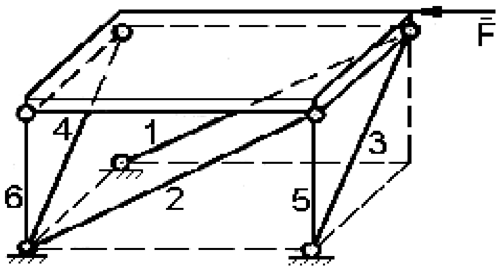
Ответ:

$S_1 = -75\sqrt{5}$ Н; $S_2 = 75\sqrt{5}$ Н;

$S_3 = -50\sqrt{5}$ Н; $S_4 = 75\sqrt{5}$ Н;

$S_5 = 0$ Н; $S_6 = -125$ Н.

№ 12 – 29



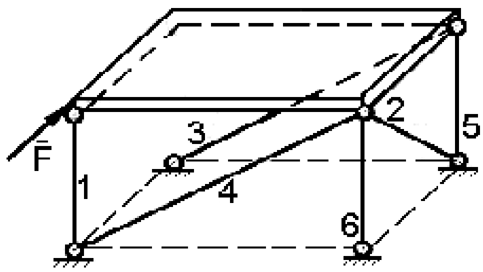
Ответ:

$S_1 = -50\sqrt{5}$ Н; $S_2 = 25\sqrt{5}$ Н;

$S_3 = -25\sqrt{5}$ Н; $S_4 = 25\sqrt{5}$ Н;

$S_5 = 0$ Н; $S_6 = -75$ Н.

№ 12 – 30



Ответ:

$S_1 = -50\sqrt{5}$ Н; $S_2 = -25\sqrt{5}$ Н;

$S_3 = 25\sqrt{5}$ Н; $S_4 = 25\sqrt{5}$ Н;

$S_5 = -25$ Н; $S_6 = 0$ Н.

5. РАВНОВЕСИЕ СИСТЕМЫ СИЛ С УЧЕТОМ СИЛ ТРЕНИЯ

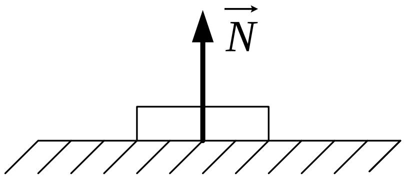


Рис. 5.1

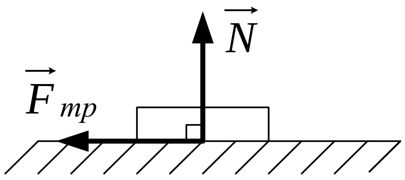


Рис. 5.2

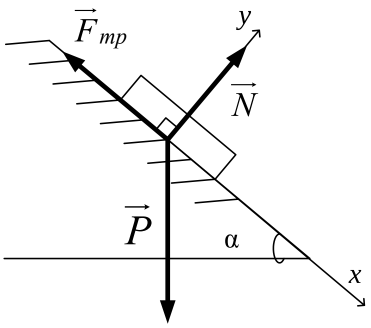


Рис. 5.3

В рассмотренных ранее задачах предполагалось, что поверхности взаимодействующих тел являются абсолютно гладкими и в этом случае реакция связи типа «поверхность» состояла из одной силы $\vec{N}$, направленной перпендикулярно касательной к поверхности (рис. 5.1).

В том случае, когда поверхность шероховатая, реакция связи будет состоять из двух сил $\vec{N}$ и $\vec{F}_{тр}$, где $\vec{F}_{тр}$ – сила трения (рис. 5.2). Максимальная сила трения приближенно пропорциональна нормальному давлению, т. е. $F_{тр\,\max} = fN$.

Коэффициент f называется коэффициентом трения скольжения. Его значение не зависит от площади соприкасающихся поверхностей, но зависит от материала и степени шероховатости соприкасающихся поверхностей.

Рассмотрим общий случай, если шероховатая поверхность направлена под углом α к горизонту. Расставим силы, действующие на груз весом *P* (рис. 5.3).

Находя проекции сил на ось *y*, определим, что в этом случае $N = P\cos(\alpha)$ и соответственно сила трения $F_{тр} = fP\cos(\alpha)$. Составляя уравнение равновесия в проекциях сил на ось *x*, получим: $P\sin(\alpha) = fP\cos(\alpha)$, тогда $f = tg(\alpha)$. Таким образом, используя данную схему установки и меняя угол α, можно экспериментально определить значение коэффициента трения скольжения для различных поверхностей. В табл. 5.1 приведены типичные значения коэффициентов трения скольжения для некоторых поверхностей.

Таблица 5.1

Диапазоны коэффициентов трения скольжения для различных пар материалов

Материал	Коэффициент трения
Металл по металлу (кроме пары сталь/сталь)	0,15–0,20
Дерево по металлу	0,20–0,50
Металл по металлу при смазке	0,07–0,1
Дерево по льду	0,035
Железо по льду	0,020

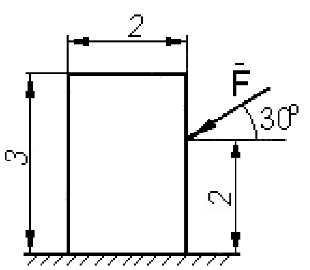
Окончание табл. 5.1

Материал	Коэффициент трения
Сталь заточенная по льду (коньки)	0,015
Лед по льду	0,028
Сталь по стали	0,03–0,09
Шина по сухому асфальту	0,50–0,75
Шина по влажному асфальту (до аквапланирования)	0,35–0,45
Шина по сухой грунтовой или гравийной дороге	0,40–0,50
Шина по влажной грунтовой или гравийной дороге (до аквапланирования)	0,30–0,40
Шина по гладкому льду	0,15–0,25
Точильный камень по стали	0,94
Подшипник скольжения смазанный	0,02–0,08

Задача № 13

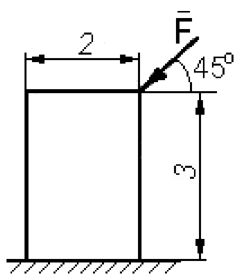
Варианты 1–6. На шкаф действует сила F. Предполагая, что центр тяжести шкафа находится на пересечении его диагоналей, определить коэффициент трения, при котором шкаф будет скользить, не опрокидываясь.

№ 13 – 1



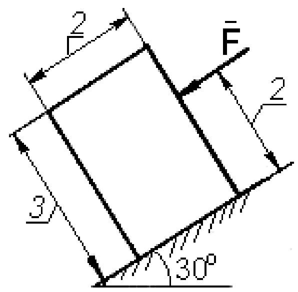
Ответ:
$f \leq = 0{,}705$.

№ 13 – 2



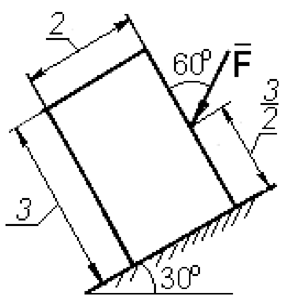
Ответ:
$f \leq = 0{,}5$.

№ 13 – 3



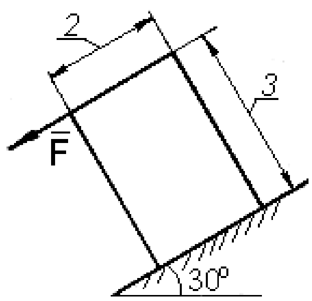
Ответ:
$f \leq = 0{,}615$.

№ 13 – 4



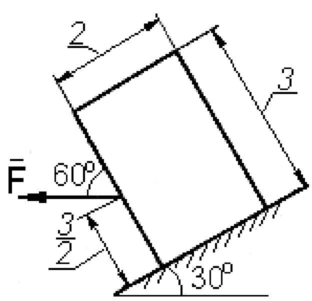
Ответ:
$f \leq = 0{,}79$.

№ 13 – 5



Ответ:
$f \leq = 0{,}622$.

№ 13 – 6

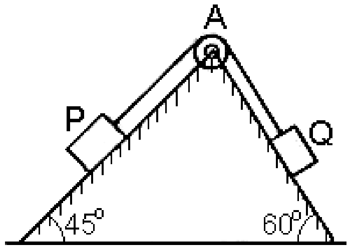


Ответ:
$f \leq = 0{,}7$.

Варианты 7–9. При каком отношении весов P и Q груз Q начнет скользить вниз по наклонной плоскости, если коэффициент трения грузов о плоскости равен f?

Трение на блоке A не учитывать.

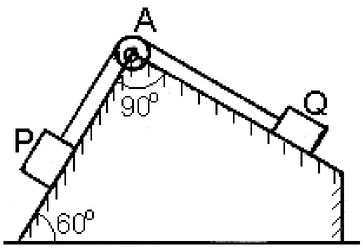
№ 13 – 7



Ответ:

$$\frac{P}{Q} = \frac{\sqrt{3} - f}{\sqrt{2}(1 + f)}.$$

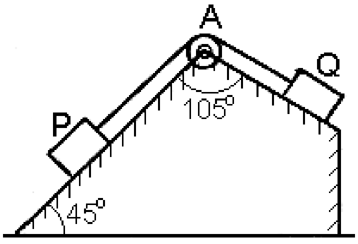
№ 13 – 8



Ответ:

$$\frac{P}{Q} = \frac{1 - \sqrt{3}\, f}{\sqrt{3} + f}.$$

№ 13 – 9



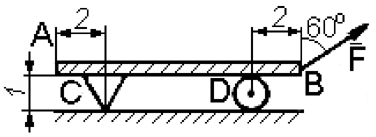
Ответ:

$$\frac{P}{Q} = \frac{1 - f\sqrt{3}}{\sqrt{2}(f + 1)}.$$

Варианты 10–15. Тележка AB весом 200 Н и длиной 10 м опирается на плоскость при помощи призматической опоры C и катка D. Коэффициент трения на опоре C $f = 0{,}5$.

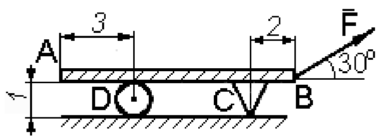
Определить значение силы F, способной сдвинуть тележку с места. Трение на опоре D не учитывать. Линейные размеры в метрах.

№ 13 – 10



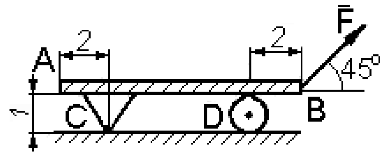
Ответ:
F = 58,5 Н.

№ 13 – 11



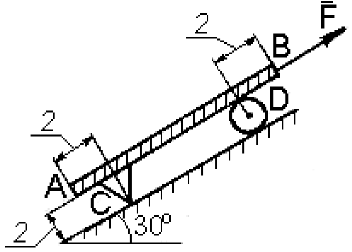
Ответ:
F = 35,5 Н.

№ 13 – 12



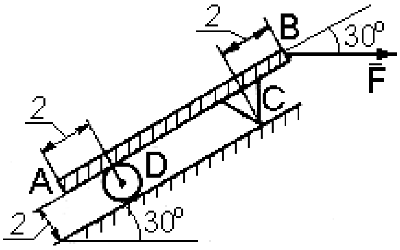
Ответ:
F = 77 Н.

№ 13 – 13



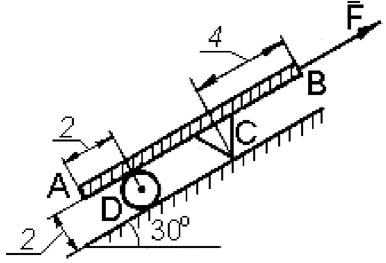
Ответ:
F = 137,1 Н.

№ 13 – 14



Ответ:
F = 326,1 Н.

№ 13 – 15

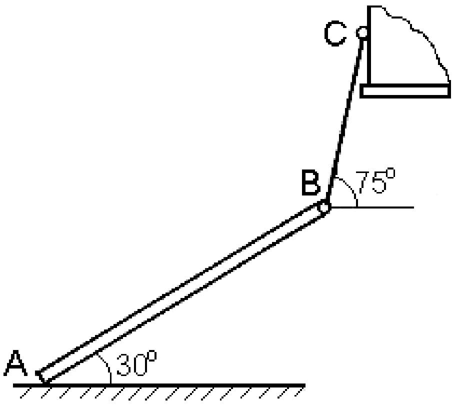


Ответ:
F = 186,6 Н.

Варианты 16–17. Балка *AB* опирается концом *A* на горизонтальную дорогу; другой ее конец *B* привязан веревкой *BC* к грузовику, движущемуся с постоянной скоростью.

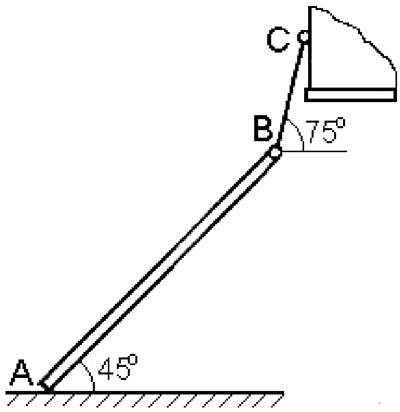
Пренебрегая поперечными размерами бревна, найти коэффициент трения бревна о дорогу, если бревно и веревка при движении занимают положение, указанное на чертеже.

№ 13 – 16



Ответ:
$f = 0{,}388$.

№ 13 – 17

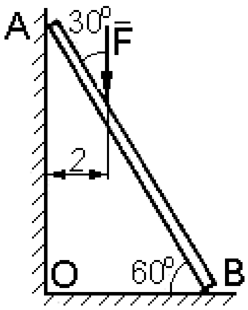


Ответ:
$f = 577$.

Варианты 18–23. Однородный стержень *AB* длиной 10 м и весом $P = 200$ Н концом А опирается на гладкую стенку *AO*, а концом *B* – на шероховатую поверхность *BO*.

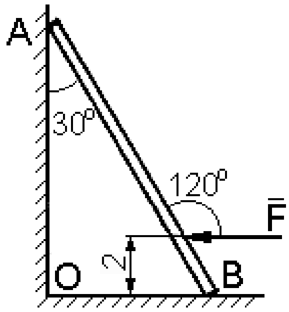
При каком коэффициенте трения между стержнем и поверхностью *OB* стержень будет находиться в равновесии в положении, указанном на чертеже, если на него действует сила $F = 100$ Н? Линейные размеры в метрах.

№ 13 – 18



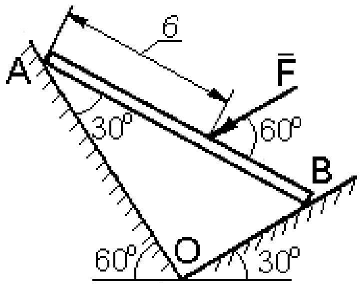
Ответ:
$f \geq 0{,}308$.

№ 13 – 19



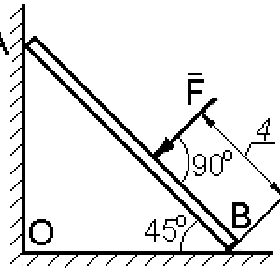
Ответ:
$f \geq 0{,}095$.

№ 13 – 20



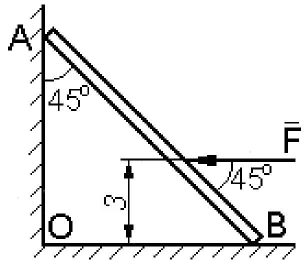
Ответ:
$f \geq 0{,}346$.

№ 13 – 21



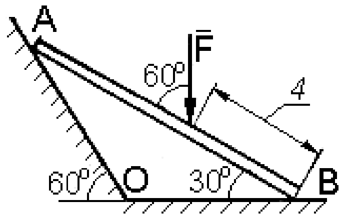
Ответ:
$f \geq 0{,}315$.

№ 13 – 22



Ответ:
$f \geq 0{,}212$.

№ 13 – 23

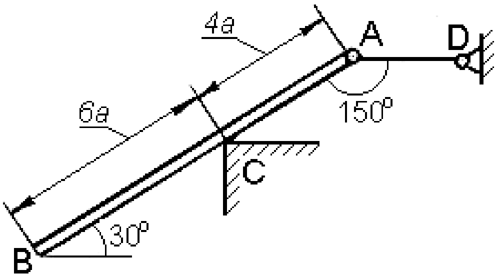


Ответ:
$f \geq 0{,}527$.

Варианты 24–25. Негладкий однородный стержень AB длиной $10a$ и весом P удерживается в равновесии с помощью стержня AD и уступа стены C.

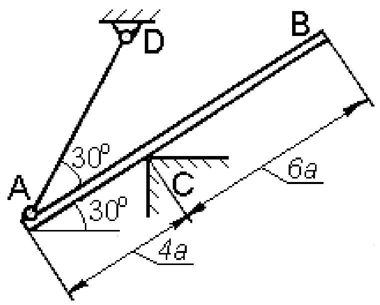
Определить, при каком наименьшем коэффициенте трения возможно указанное на чертеже положение равновесия. Трением в шарнирах A и D пренебречь.

№ 13 – 24



Ответ: $f \geq 0{,}115$.

№ 13 – 25

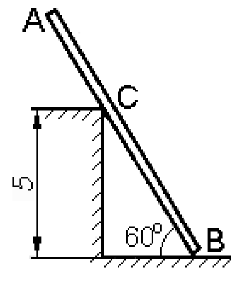


Ответ: $f \geq 0{,}808$.

Варианты 26–30. Однородный стержень AB длиной 10 м и весом P в точке O опирается на гладкую опору, а в точке B – на негладкий пол.

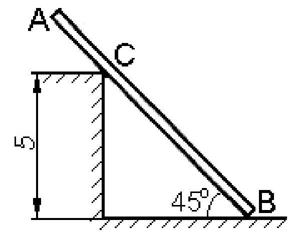
Каков должен быть коэффициент трения между стержнем и полом, чтобы стержень находился в равновесии в положении, указанном на чертеже.

№ 13 – 26



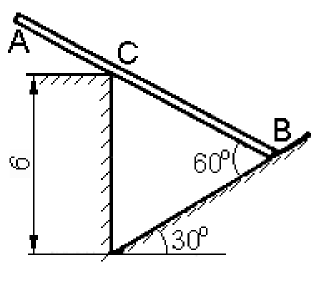
Ответ: $f \geq 0{,}479$.

№ 13 – 27



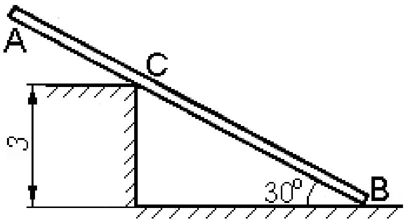
Ответ: $f \geq 0{,}547$.

№ 13 – 28



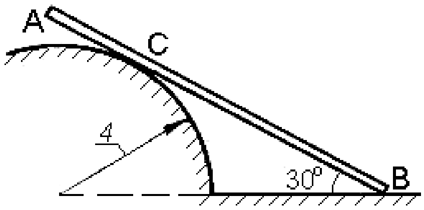
Ответ: $f \geq 0{,}247$.

№ 13 – 29



Ответ: $f \geq 0{,}962$.

№ 13 – 30



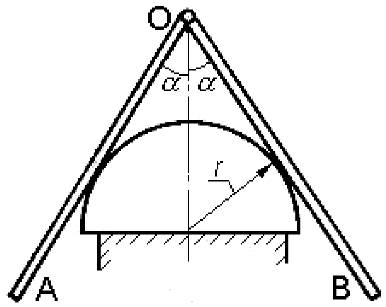
Ответ: $f \geq 0{,}681$.

Задача № 14

Варианты 1–3. Два однородных стержня длиной 2ℓ, соединенные между собой шарниром *O*, находятся в равновесии, опираясь на неподвижный полуцилиндр радиусом *r*.

Определить коэффициент трения стержней по поверхности полуцилиндра, если угол между стержнями равен 2α. Трение в шарнире *O* не учитывать.

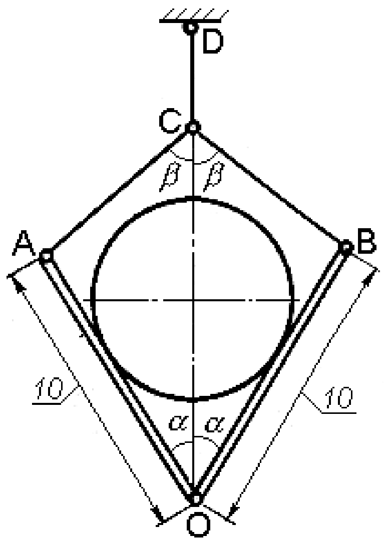
№ вар.	Дано		Ответ $f \geq$
	r/ℓ	α	
1	1/6	30°	0,09
2	0,6	45°	0,2
3	1,5	60°	0,27



Варианты 4–9. Между двумя пластинами *AO* и *BO*, соединенными шарниром *O*, помещен однородный цилиндр радиусом 2,5 м, ось которого горизонтальна. Пластины вместе с цилиндром подвешены к потолку с помощью веревок *ACB* и *CD*.

Определить коэффициент трений между цилиндром и пластинами, если при равновесии угол $AOB = 2\alpha$, а угол $ACB = 2\beta$. Вес пластины не учитывать.

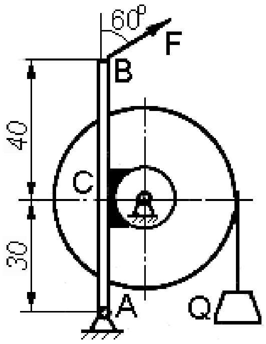
№ вар.	Дано		Ответ $f \geq$
	α	β	
4	30°	45°	0,212
5	45°	45°	0,75
6	30°	60°	0,327
7	45°	60°	0,818
8	30°	30°	0,077
9	45°	30°	0,684



Варианты 10–12. На вал радиусом 5 см насажен барабан радиусом 20 см. С барабана сбегает трос, к свободному концу которого подвешен груз Q = 200 Н. К валу с помощью рычага AB прижимается тормозная колодка C.

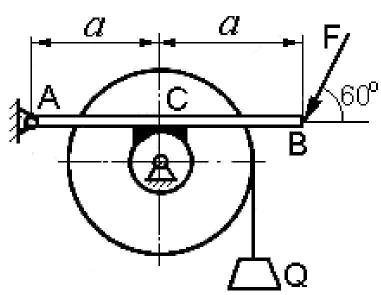
Определить силу F, которую необходимо приложить к рычагу AB, чтобы барабан вращался равномерно, если коэффициент трения на тормозной колодке равен 0,4. Определить также реакцию шарнира A, весом рычага AB и размерами тормозной колодки пренебречь.

№ 14 – 10



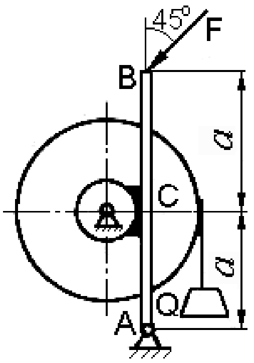
Ответ: F = 991 Н; R_A = 1730 Н.

№ 14 – 11



Ответ: F = 1050 Н; R_A = 1120 Н.

№ 14 – 12

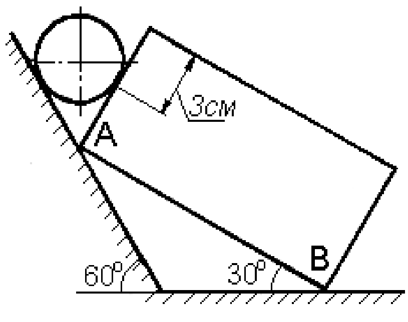


Ответ: F = 1415 Н; R_A = 2059 Н.

Варианты 13–14. Однородный брус прямоугольного сечения со сторонами 6 и 12 см находится в равновесии, опираясь в точке A на гладкую опору, а в точке B – на шероховатый пол. Между брусом и стенкой, как показано на чертеже, положен цилиндр радиусом 3 см.

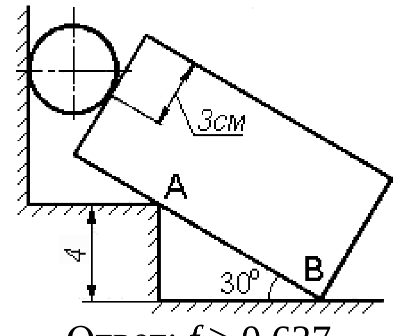
Определить, пренебрегая трением цилиндра о стенку и брус, коэффициент трения бруса о пол, если вес бруса Q = 120 Н, вес цилиндра P = 60 Н.

№ 14 – 13



Ответ: $f \geq 0{,}54$.

№ 14 – 14

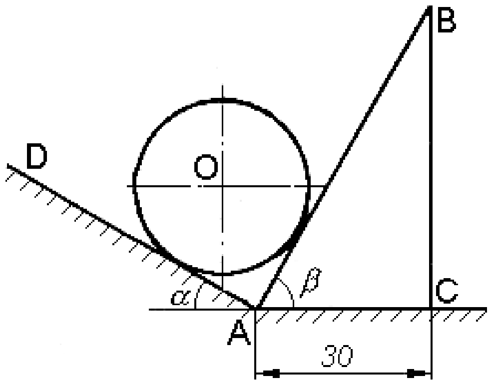


Ответ: $f \geq 0{,}637$.

Варианты 15–22. Однородный круглый цилиндр опирается на наклонную плоскость AD и треугольную призму ABC, стоящую на горизонтальном шероховатом полу. Вес призмы равен весу цилиндра и приложен в точке пересечения медиан треугольника ABC.

Определить наибольший радиус цилиндра и коэффициент трения между призмой и полом, чтобы призма не скользила по полу и не опрокидывалась. Трением цилиндра по плоскости *AD* и *ABC* пренебречь. Угол, образуемый плоскостью *AD* с горизонтом, равен α, угол *BAC* = β.

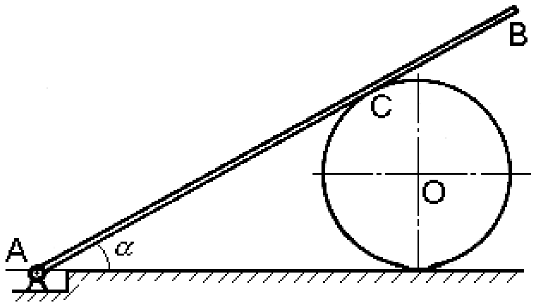
№ вар.	Дано		Ответ	
	α	β	*r*, см	*f* ≥
15	30°	60°	35,0	0,346
16	45°	60°	21,9	0,464
17	60°	60°	14,41	0,577
18	90°	60°	5,37	0,866
19	30°	30°	75,0	0,192
20	45°	30°	51,6	0,224
21	60°	30°	27,1	0,247
22	90°	30°	20,0	0,289



Варианты 23–25. Однородная балка *AB* длиной 1 м и весом 100 Н, вращающаяся на шарнире *A*, опирается в точке *C* на цилиндр радиусом 25 см и весом 50 Н, образуя с горизонтом угол α.

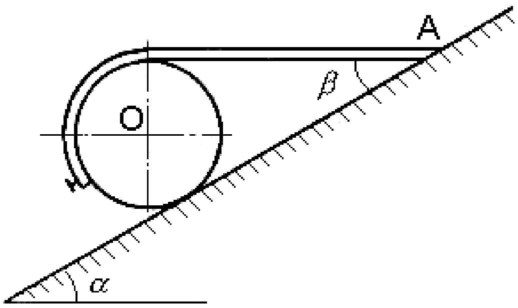
Определить коэффициенты трения между цилиндром и балкой f_1 и между цилиндром и полом f_2 при равновесии системы.

№ вар.	Дано α	Ответ	
		f_1 ≥	f_2 ≥
23	30°	0,268	0,129
24	60°	0,577	0,309
25	45°	0,414	0,223



Варианты 26–30. Однородный цилиндр удерживается в равновесии на шероховатой наклонной плоскости при помощи веревки, которая одним концом прикреплена к поверхности цилиндра, а в точке A закреплена на плоскости, образуя с ней угол β.

Определить коэффициент трения между цилиндром и плоскостью при равновесии, если наклонная плоскость образует с горизонтом угол α.



№ вар.	Дано		Ответ $f \geq$
	α	β	
26	30°	30	0,268
27	45°	30	0,423
28	30°	45	0,273
29	45°	45	0,414
30	30°	60	0,289

6. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ЦЕНТРА ТЯЖЕСТИ ПЛОСКИХ ФИГУР

Центром тяжести твердого тела называется геометрическая точка, являющаяся центром параллельных сил тяжести, действующих на все частицы тела. Для абсолютно твердого тела положение центра тяжести относительно тела является неизменным.

Равнодействующую сил тяжести $\bar{p}_1, \bar{p}_2, ..., \bar{p}_n$, действующих на все частицы данного тела, обозначим $\bar{P}$. Модуль этой силы называется весом тела и определяется равенством

$$P = \sum p_k. \tag{6.1}$$

Координаты центра тяжести как центра параллельных сил определяются по формулам:

$$x_C = \frac{\sum p_k x_k}{P};\ y_C = \frac{\sum p_k x_k}{P};\ z_C = \frac{\sum p_k x_k}{P}, \tag{6.2}$$

где x_k, y_k, z_k – координаты точек приложения сил тяжести p_k, действующих на частицы тела.

Если тело является однородным, то вес p_k любой его части пропорционален объему v_k этой части тела: $p_k = \gamma v_k$, где γ – вес единицы объема. Подставив эти значения в формулы (6.2), после сокращения на γ получим координаты точки *C,* называемой *центром тяжести объема V:*

$$x_C = \frac{\sum v_k x_k}{V};\ y_C = \frac{\sum v_k y_k}{V};\ z_C = \frac{\sum v_k z_k}{v}. \tag{6.3}$$

Аналогичные рассуждения можно провести для тела, представляющего собой однородную плоскую пластину, и определить координаты центра тяжести площади *S:*

$$x_C = \frac{\sum s_k x_k}{S};\ y_C = \frac{\sum s_k y_k}{S}, \qquad (6.4)$$

где S – площадь всей пластины; s_k – площади частей, из которых состоит пластина; $x_к$, $y_к$ – координаты центров тяжести площади k-й части пластины.

Точно так же получаются координаты центра тяжести линии:

$$x_C = \frac{\sum l_k x_k}{L};\ y_C = \frac{\sum l_k y_k}{L};\ z_C = \frac{\sum l_k z_k}{L}, \qquad (6.5)$$

где L – длина всей линии; l_k – длина ее частей.

Анализируя формулы (6.3) – (6.5), приходим к выводу, что центр тяжести однородного тела зависит только от его геометрической формы. Исходя из структуры расчетных формул, можно обосновать: *если однородное тело имеет плоскость, ось или центр симметрии, то его центр тяжести расположен соответственно или в плоскости симметрии, или на оси симметрии, или в центре симметрии.*

Действительно, если однородное тело имеет плоскость симметрии, то этой плоскостью оно разбивается на две такие части, веса которых p_1 и p_2 равны друг другу, а центры тяжести находятся на одинаковых расстояниях от плоскости симметрии. Тогда, направив, например, ось x перпендикулярно плоскости симметрии и выбрав начало отсчета координаты x в точке пересечения оси x и плоскости симметрии, будем иметь для двух симметричных частей тела соотношение $p_1 = p_2$, $x_1 = -x_2$. Подставив эти значения в первую из формул (6.3), получим $x_c = 0$, т. е. центр тяжести всего тела расположен в плоскости симметрии тела.

На основе изложенного можно легко установить:

1) центр тяжести отрезка прямой лежит в его середине;

2) центры тяжести окружности, площади круга, однородного круглого кольца, поверхности и объема шара находятся в их геометрических центрах;

3) центры тяжести периметра и площади параллелограмма, ромба, прямоугольника и квадрата лежат в точках пересечения диагоналей соответствующих фигур.

Методика определения центра тяжести тел состоит в следующем. Тело разбивается на конечное число таких частей, для каждой из которых положение центра тяжести известно или может быть предварительно определено. Далее центр тяжести всего тела вычисляют по общим формулам (6.3)–(6.5), подставляя в них соответствующие параметры тех частей, на которые было разбито тело.

Таким образом, исследуемое тело рассматривается в качестве суммы простейших тел. Иногда данное тело можно представить как разность тел (большего с вычетом меньшего). Тогда при расчетах вес (объем, площадь) большего тела считают положительным, а вес (объем, площадь) меньшего тела, как вычитаемого, считают отрицательным; так поступают для тел, имеющих вырезы, отверстия.

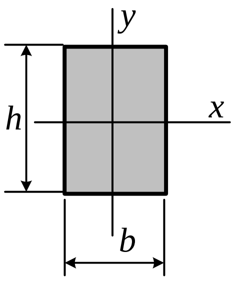
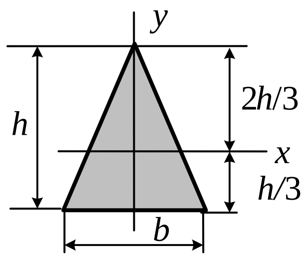
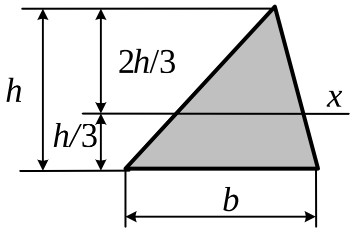
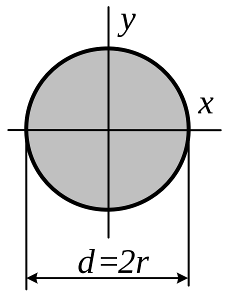
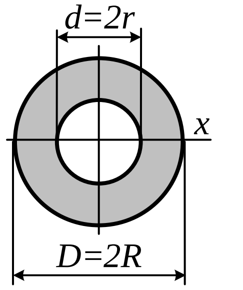
Если тело нельзя разбить на несколько конечных частей, положения центров тяжести которых известны, то тело разбивают на бесконечное число элементарных частей, и тогда стоящие в формулах (6.3)–(6.5) суммы обращаются в интегралы.

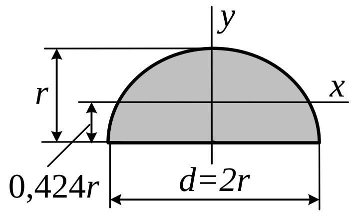
Плоскими телами являются расположенные в одной плоскости пластины и конструкции из весомых линий.

Простыми будем называть тела (плоские фигуры), для которых площадь (длина) и координаты центра тяжести заданы, либо легко определяются (табл. 6.1).

Таблица 6.1

Площадь и координаты центра тяжести некоторых плоских фигур

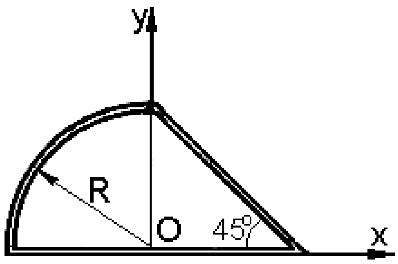
Прямоугольник  $S = bh$	Равнобедренный треугольник  $S = \frac{bh}{2}$
Треугольник  $S = \frac{bh}{2}$	Круг  $S = \frac{\pi d^2}{4} = \pi r^2$
Кольцо  $S = \frac{\pi D^2}{4}\left(1 - \alpha^2\right) = \pi R^2\left(1 - \alpha^2\right)$	Полукруг

	 $S = \frac{\pi d^2}{8} = \frac{\pi r^2}{2}$

Задача № 15

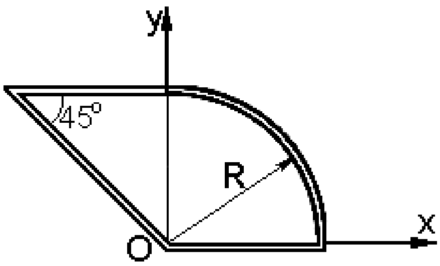
Варианты 1–30. Определить координаты центра тяжести проволочного контура, состоящего из дуги окружности и двух (трех) прямолинейных отрезков. Линейные плотности всех элементов одинаковы, R = 10 см.

№ 15 – 1



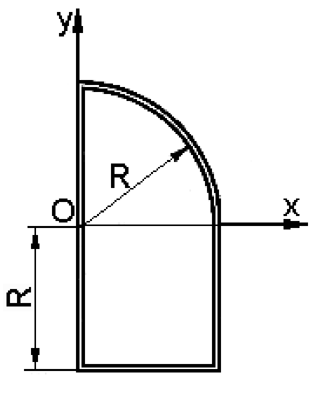
Ответ: X_C = -0,59 см; Y_C = 3,42 см.

№ 15 – 2



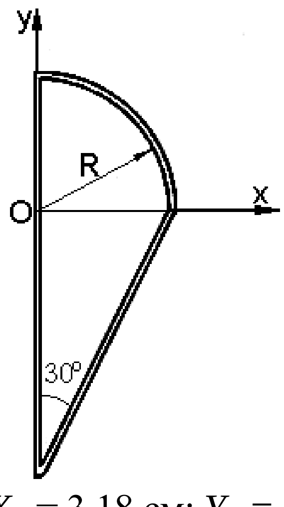
Ответ: X_C = 0,59 см; Y_C = 5,43 см.

№ 15 – 3



Ответ: X_C = 4,49 см; Y_C = -0,88 см.

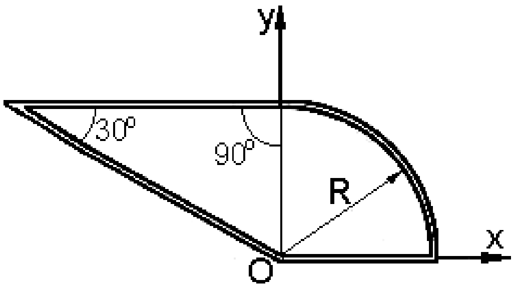
№ 15 – 4



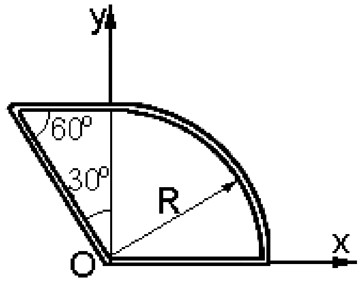
Ответ: X_C = 3,18 см; Y_C = -2,75 см.

№ 15 – 5

№ 15 – 6

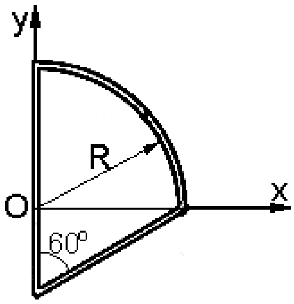


Ответ: X_C = -2,75 см; Y_C = 5,92 см.



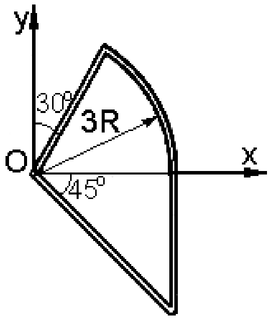
Ответ: X_C = 2,14 см; Y_C = 4,94 см.

№ 15 – 7



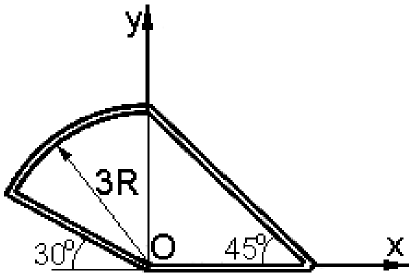
Ответ: X_C = 3,67 см; Y_C = 2,32 см.

№ 15 – 8



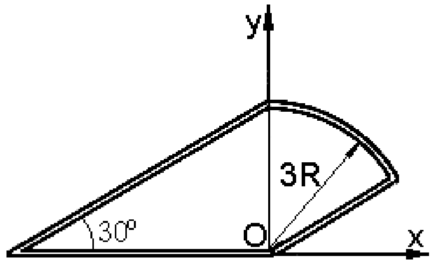
Ответ: X_C = 18,98 см; Y_C = -1,83 см.

№ 15 – 9



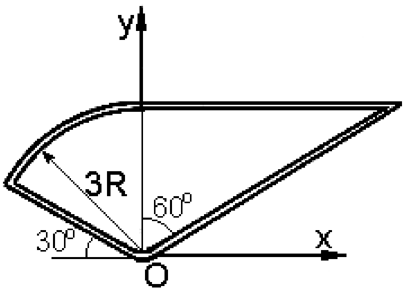
Ответ: X_C = 1,87 см; Y_C = 12,25 см.

№ 15 – 10



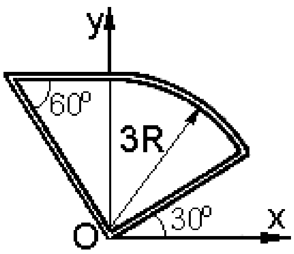
Ответ: X_C = -11,91 см; Y_C = 10,98 см.

№ 15 – 11



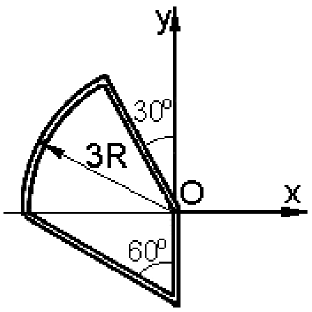
Ответ: X_C = 11,91 см; Y_C = 19,97 см.

№ 15 – 12



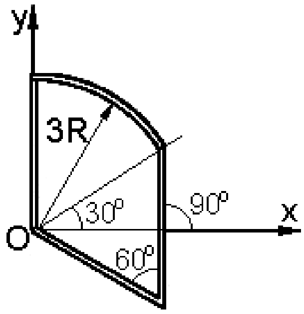
Ответ: X_C = 23,42 см; Y_C = 18,02 см.

№ 15 – 13



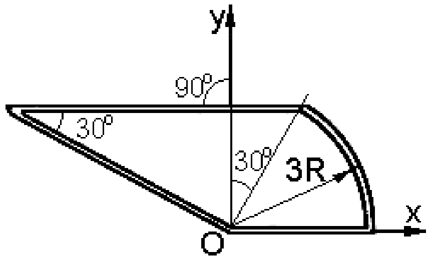
Ответ: X_C = -13,43 см; Y_C = 3,42 см.

№ 15 – 14



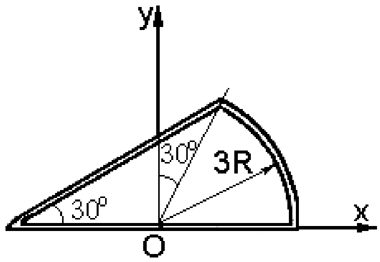
Ответ: X_C = 13,3 см; Y_C = 8,26 см.

№ 15 – 15



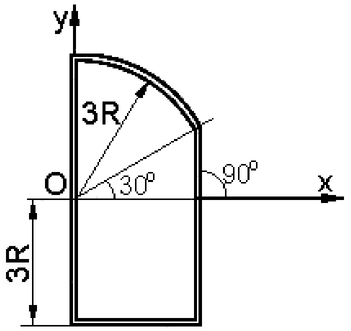
Ответ: X_C = -4,84 см; Y_C = 15,47 см.

№ 15 – 16



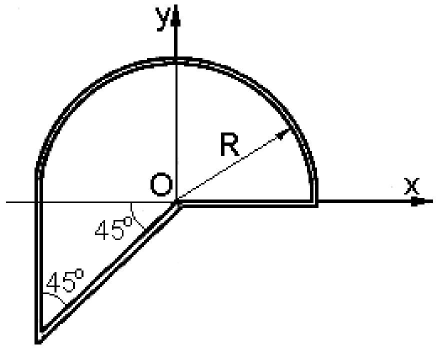
Ответ: X_C = 2,72 см; Y_C = 7,84 см.

№ 15 – 17



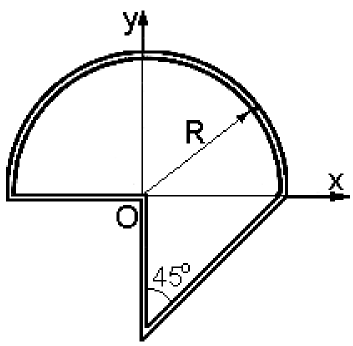
Ответ: X_C = 12,05 см; Y_C = -2,08 см.

№ 15 – 18



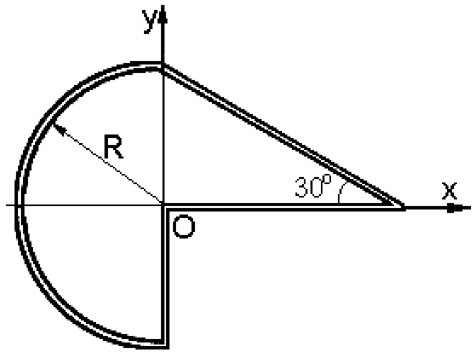
Ответ: X_C = -1,85 см; Y_C = 1,21 см.

№ 15 – 19



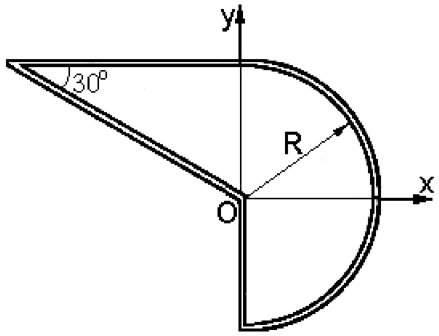
Ответ: X_C = 0,32 см; Y_C = 1,21 см.

№ 15 – 20



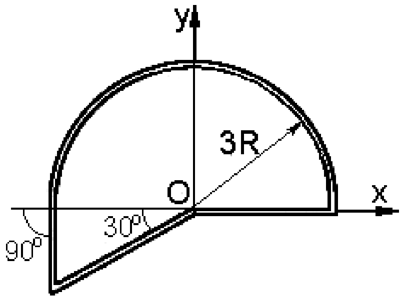
Ответ: X_C = 1,565 см; Y_C = 0,64 см.

№ 15 – 21



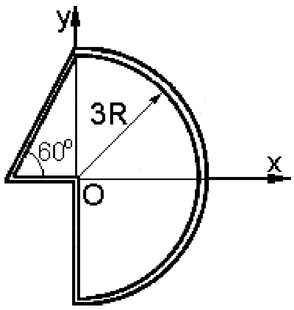
Ответ: X_C = -1,56 см; Y_C = 2,83 см.

№ 15 – 22



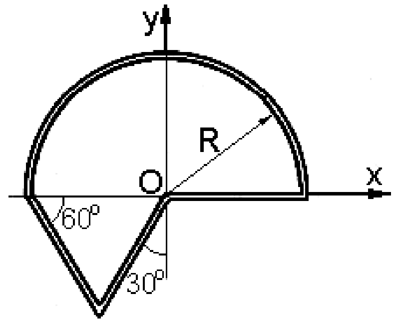
Ответ: X_C = -3,35 см; Y_C = 7,66 см.

№ 15 – 23



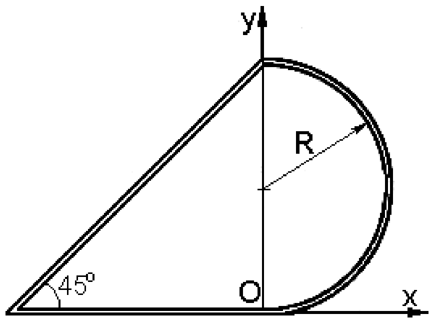
Ответ: X_C = 7,66 см; Y_C = 0,398 см.

№ 15 – 24



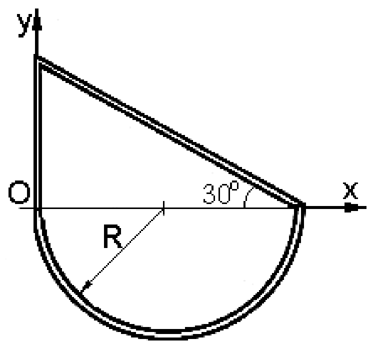
Ответ: X_C = -0,82 см; Y_C = 1,85 см.

№ 15 – 25



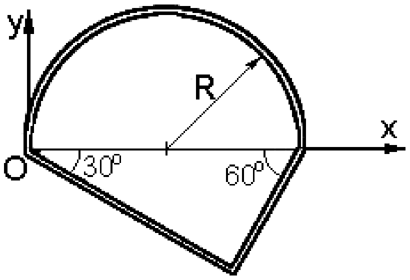
Ответ: X_C = -3,54 см; Y_C = 7,5 см.

№ 15 – 26

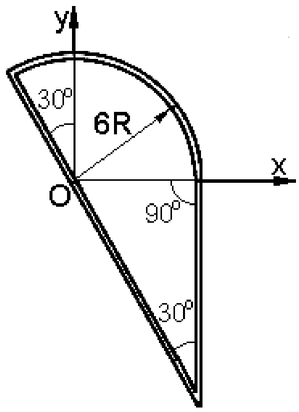


Ответ: X_C = 8,26 см; Y_C = 0 см.

№ 15 – 27



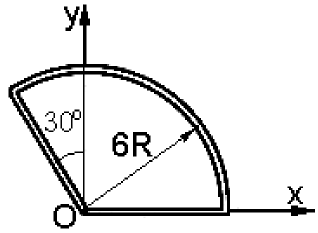
№ 15 – 28



Ответ: X_C = 10,53 см; Y_C = 1,39 см.

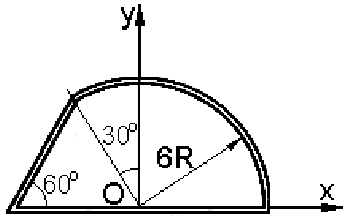
Ответ: X_C = 29,5 см; Y_C = -11,35 см.

№ 15 – 29



Ответ: X_C = 16,34 см; Y_C = 28,27 см.

№ 15 – 30

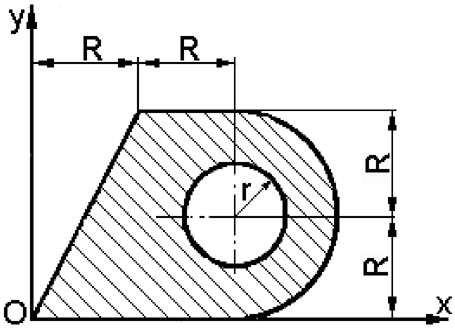


Ответ: X_C = 4,3 см; Y_C = 22,72 см.

Задача № 16

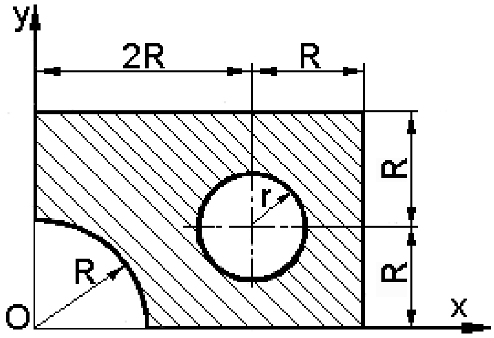
Варианты 1–30. Определить координаты центра тяжести однородной плоской фигуры, форма и размеры которой указаны на чертеже, если R = 24 см, r = 12 см.

№ 16 – 1



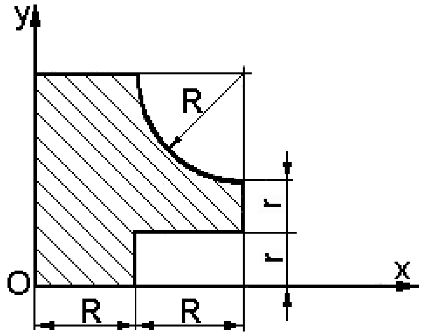
Ответ: X_C = 37,68 см; Y_C = 21,9 см.

№ 16 – 2



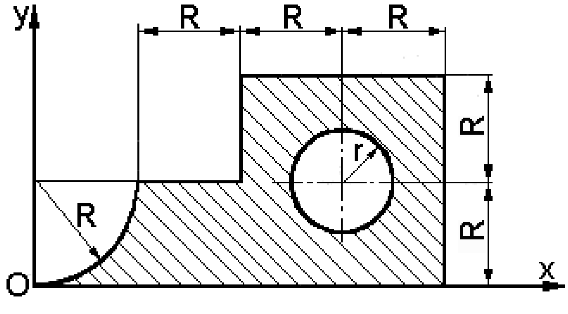
Ответ: X_C = 38,4 см; Y_C = 26,4 см.

№ 16 – 3



Ответ: X_C = 17,78 см; Y_C = 23,33 см.

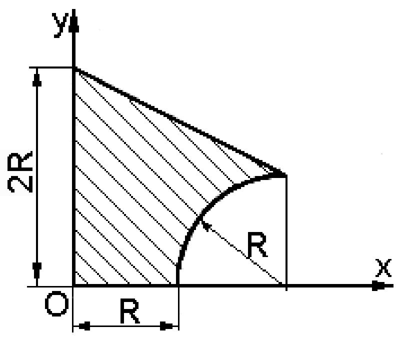
№ 16 – 4

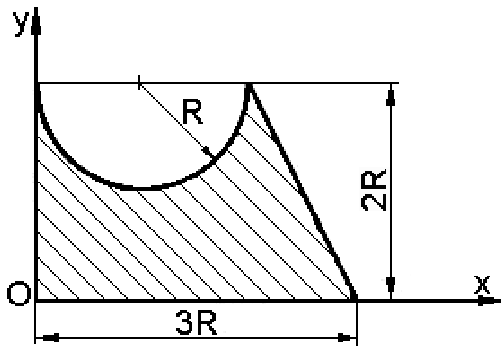


Ответ: X_C = 61,3 см; Y_C = 20,4 см.

№ 16 – 5

№ 16 – 6

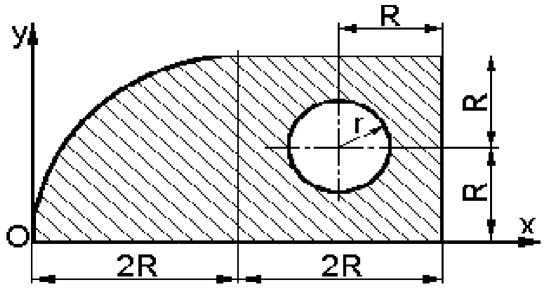




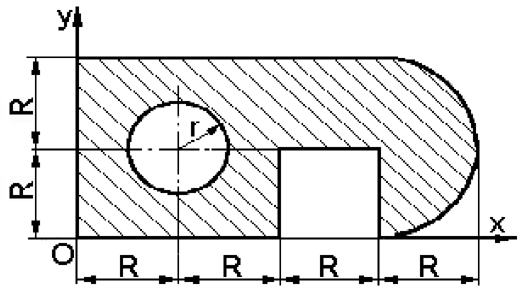
Ответ: X_C = 15,5 см; Y_C = 21,7 см.

Ответ: X_C = 33,34 см; Y_C = 15,3 см.

№ 16 – 7



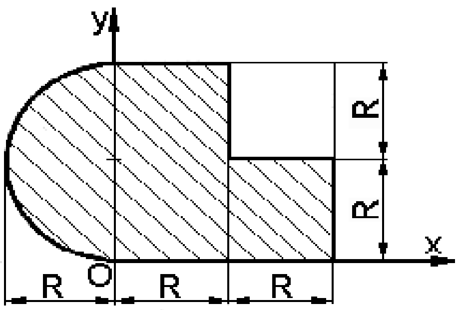
№ 16 – 8



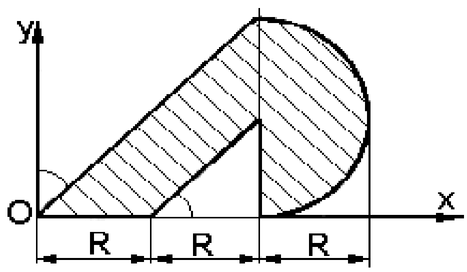
Ответ: X_C = 50,06 см; Y_C = 22,2 см.

Ответ: X_C = 46,0 см; Y_C = 26,1 см.

№ 16 – 9



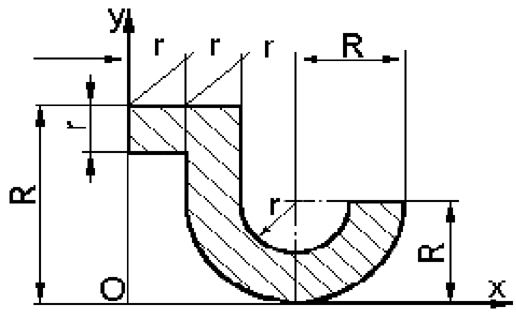
№ 16 – 10



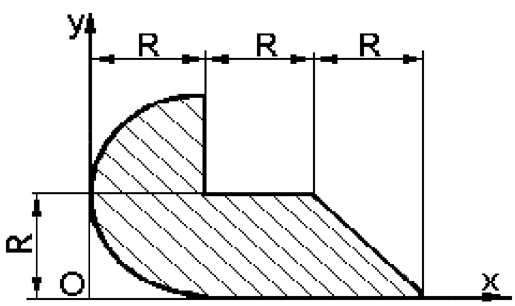
Ответ: X_C = 9,6 см; Y_C = 21,37 см.

Ответ: X_C = 44,16 см; Y_C = 21,4 см.

№ 16 – 11



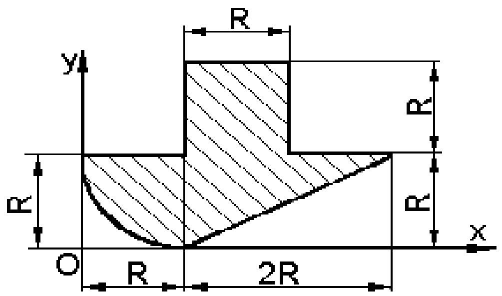
№ 16 – 12



Ответ: X_C = 27,4 см; Y_C = 22,18 см.

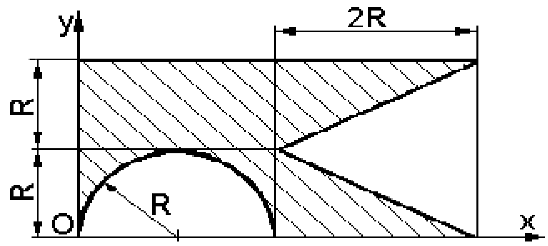
Ответ: X_C = 27,91 см; Y_C = 17,49 см.

№ 16 – 13



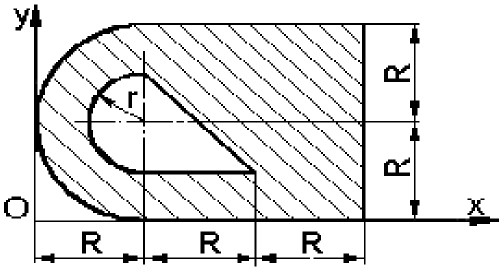
Ответ: X_C = 22,5 см; Y_C = 31,2 см.

№ 16 – 14



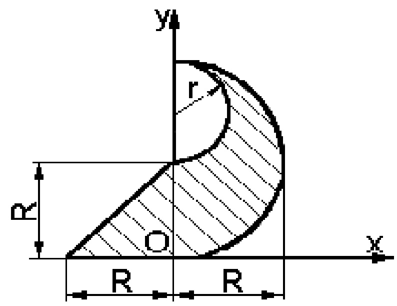
Ответ: X_C = 42,0 см; Y_C = 28,9 см.

№ 16 – 15



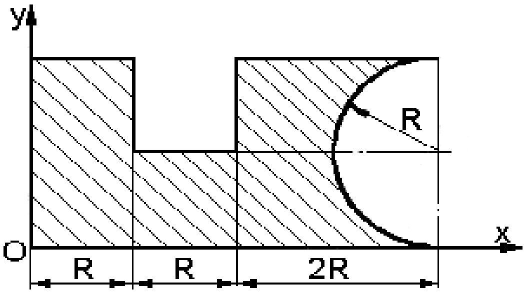
Ответ: X_C = 40,7 см; Y_C = 24,4 см.

№ 16 – 16



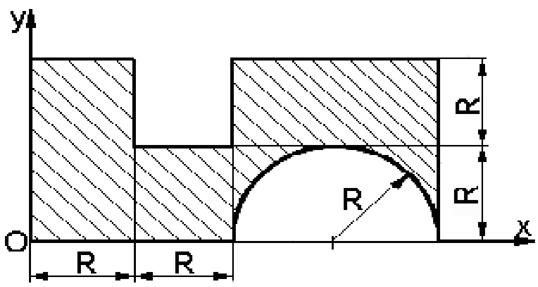
Ответ: X_C = 5,9 см; Y_C = 16,5 см.

№ 16 – 17



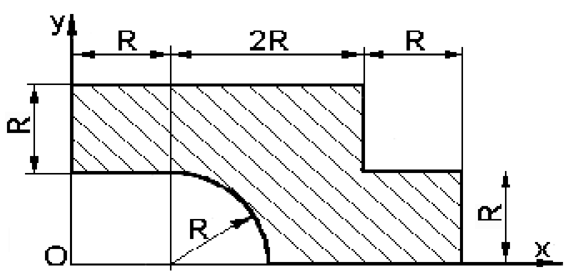
Ответ: X_C = 39,26 см; Y_C = 21,8 см.

№ 16 – 18



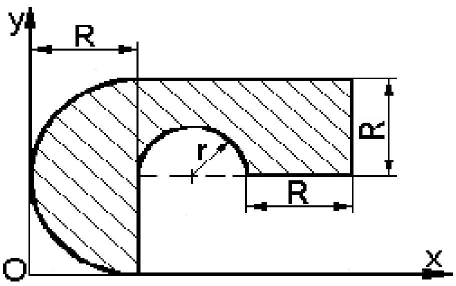
Ответ: X_C = 43,27 см; Y_C = 25,78 см.

№ 16 – 19



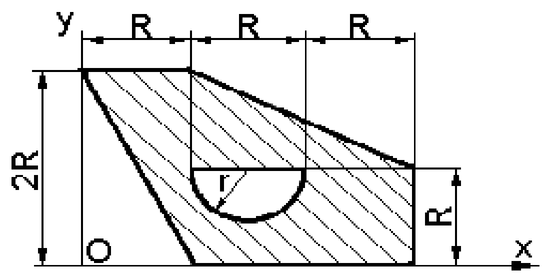
Ответ: X_C = 50,08 см; Y_C = 25,9 см.

№ 16 – 20



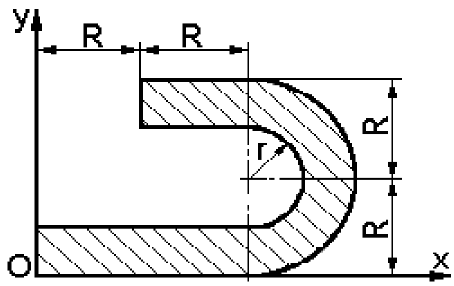
Ответ: X_C = 32,6 см; Y_C = 31,0 см.

№ 16 – 21



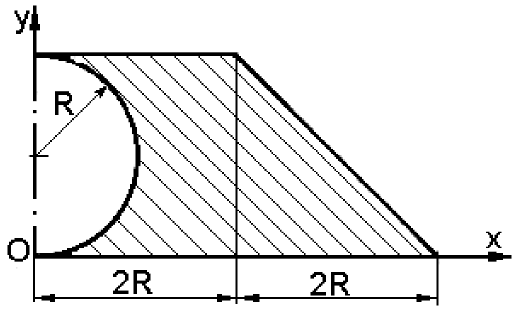
Ответ: X_C = 38,2 см; Y_C = 22,3 см.

№ 16 – 22



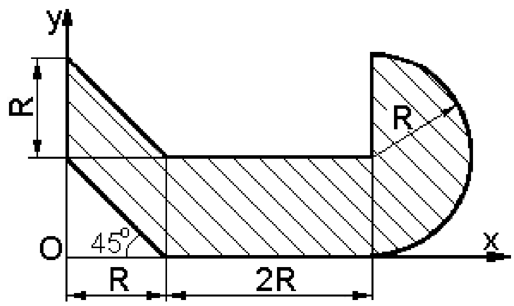
Ответ: X_C = 42,0 см; Y_C = 20,6 см.

№ 16 – 23



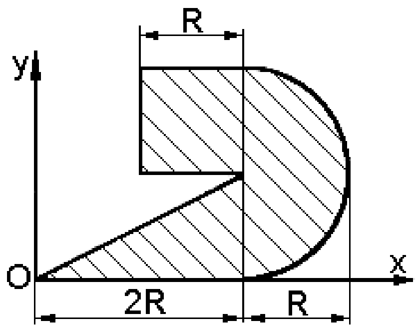
Ответ: X_C = 47,0 см; Y_C = 20,4 см.

№ 16 – 24



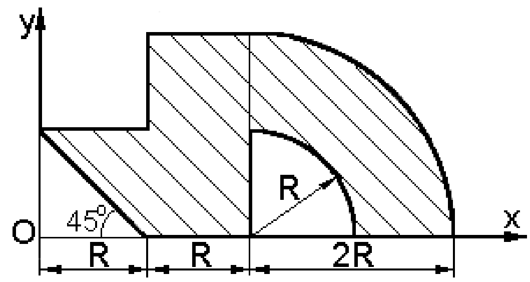
Ответ: X_C = 51,83 см; Y_C = 18,7 см.

№ 16 – 25



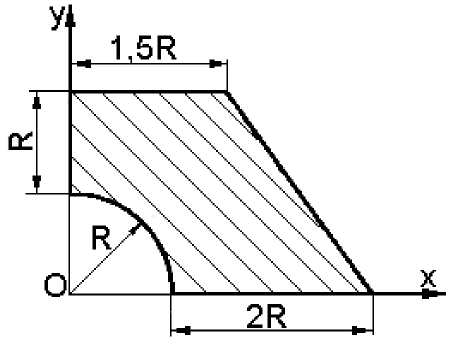
Ответ: X_C = 44,64 см; Y_C = 22,86 см.

№ 16 – 26



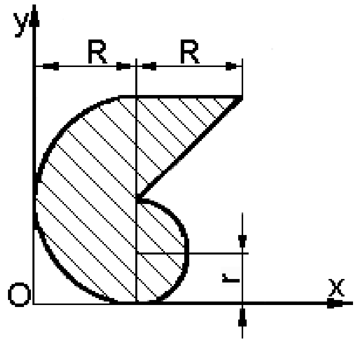
Ответ: X_C = 51,2 см; Y_C = 23,07 см.

№ 16 – 27



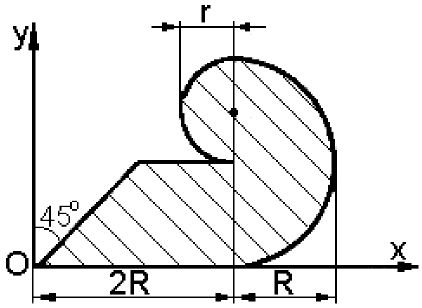
Ответ: X_C = 31,78 см; Y_C = 23,7 см.

№ 16 – 28



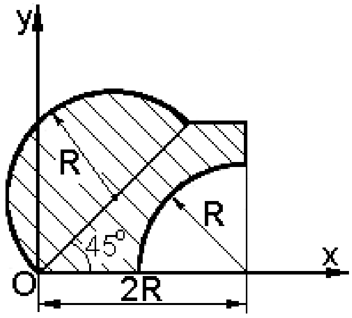
Ответ: X_C = 19,94 см; Y_C = 25,32 см.

№ 16 – 29



Ответ: X_C = 44,0 см; Y_C = 19,6 см.

№ 16 – 30



Ответ: X_C = 16,14 см; Y_C = 21,17 см.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В учебном пособии приведены базовые сведения к разделу «Статика» курса теоретической механики и иллюстрирующие их задачи. После освоения раздела «Статика» студент может изучать следующие разделы курса – «Кинематика» и «Динамика». С некоторыми более специальными вопросами (например, задачи по гидростатике), которые опущены в данном пособии, можно познакомиться в учебниках и руководствах, приведенных в списке литературы [1–3].

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Мещеряков, В.Б. Курс теоретической механики : учебник / В.Б Мещеряков. М. : ФГБОУ «Учебно-методический центр по образованию на железнодорожном транспорте», 2012.
2. Хаванский, В.И. Статика : метод. указания / В.И. Хованский. – Хабаровск : Изд-во ДВГУПС, 2008.
3. Охорзин, В.А. Прикладная математика в системе MathCad / В.А. Охорзин. – 3-е изд., стер. – СПб. : Лань, 2009. – 352 с.
4. Теоретическая механика : сб. задач. В 3 ч. Ч. 1. Статика. – 5-е изд. / под ред. В.И. Доронина. – Хабаровск : Изд-во ДВГУПС, 2002. – 110 с.

ПРИЛОЖЕНИЕ 1

ОСНОВНЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ СИСТЕМ УРАВНЕНИЙ

Для решения системы линейных уравнений рассмотрим три метода:

- матричный метод;
- решение с помощью функции $lsolve()$;
- решение с помощью блока встроенных функций $Given - Find$.

Матричный метод. Система линейных уравнений в матричной форме имеет вид $A \cdot x = B$, где A – матрица коэффициентов системы линейных уравнений, B – вектор свободных членов, x – вектор решения. Вектор решения получают из выражения $x = A^{-1} \cdot B$.

Пример решения системы линейных уравнений матричным методом в системе MathCad:

Пример

1. Исходная система уравнений

$$1.2 \cdot x_1 + 2.8 \cdot x_2 + 0.5 \cdot x_3 = 3$$

$$3.2 \cdot x_1 - 1.6 \cdot x_2 - 0.3 \cdot x_3 = 2.2$$

$$-0.1 \cdot x_1 + 9.0 \cdot x_2 + 0.5 \cdot x_3 = 10.8$$

При написании системы уравнений используется жирное равно Ctrl+=

2. Матрицы коэффициентов и свободных членов

$$A := \begin{pmatrix} 1.2 & 2.8 & 0.5 \\ 3.2 & -1.6 & -0.3 \\ -0.1 & 9.0 & 0.5 \end{pmatrix} \qquad B := \begin{pmatrix} 3 \\ 2.2 \\ 10.8 \end{pmatrix}$$

3. Решение системы уравнений.

$$A \cdot x = B$$

Матричное уравнение должно быть введено не выше исходных данных.

$$x := A^{-1} \cdot B \qquad x = \begin{pmatrix} 0.99 \\ 1.466 \\ -4.585 \end{pmatrix} \qquad \begin{aligned} x_1 &:= 0.99 \\ x_2 &:= 1.466 \\ x_3 &:= -4.585 \end{aligned}$$

Решение предыдущей системы уравнений с применением функции *lsolve*():

$$x1 := \mathrm{lsolve}(A1, B1) \qquad x1 = \begin{pmatrix} 0.99 \\ 1.466 \\ -4.585 \end{pmatrix}$$

Решение системы линейных уравнений с помощью блока встроенных функций *Given – Find*:

Продолжение прил. 1

1. Исходная система уравнений

$$1.2 \cdot x1 + 2.8 \cdot x2 + 0.5 \cdot x3 = 3$$

$$3.2 \cdot x - 1.6 \cdot x2 - 0.3 \cdot x3 = 2.2$$

$$-0.1 \cdot x1 + 9.0 \cdot x2 + 0.5 \cdot x3 = 10.8$$

2. Ввести начальные приближенные решения.

$x1 := 0 \quad x2 := 0 \quad x3 := 0$

Начальные приближения пишутся до ключевых слов Given- Find.

3. Ввести систему уравнений функцией Given.

Given

$$1.2 \cdot x1 + 2.8 \cdot x2 + 0.5 \cdot x3 = 3$$

$$3.2 \cdot x1 - 1.6 \cdot x2 - 0.3 \cdot x3 = 2.2$$

$$-0.1 \cdot x1 + 9.0 \cdot x2 + 0.5 \cdot x3 = 10.8$$

4. Получить решение системы уравнений.

$x := \mathrm{Find}(x1, x2, x3)$ $\qquad x = \begin{pmatrix} 0.99 \\ 1.466 \\ -4.585 \end{pmatrix}$

Функция Find(x1,x2,x3) должна находиться не выше системы уравнений. Вывод результата вычислений должен распологаться не выше функции Find(x1,x2,x3)

Решение нелинейного уравнения

Решение нелинейного уравнения
Поиск корня нелинейного уравнения
Применение функций root и polyroots

$a0 := -64 \quad a1 := 25 \quad a2 := -8 \quad a3 := 2$ _ Коэффициенты полинома

$F(x) := a3 \cdot x^3 + a2 \cdot x^2 + a1 \cdot x + a0$ _ Задание полинома

Вычисление действительного корня

$x := 0$ приближенное значение корня

$x1 := \mathrm{root}(F(x), x) \quad x1 = 3.211$

Вычисление двух других (возможно, комплексных) корней

$i := \sqrt{-1} \quad x := 1 + 1 \cdot i$

$$x2 := \mathrm{root}\left(\frac{F(x)}{x - x1}, x\right) \quad x2 = 0.395 + 3.132i$$

$$x3 := \mathrm{root}\left[\frac{F(x)}{(x - x1) \cdot (x - x2)}, x\right] \quad x3 = 0.395 - 3.132i$$

Пример применения функции polyroots:

$v_0 := a0 \quad v_1 := a1 \quad v_2 := a2 \quad v_3 := a3$

$$\mathrm{polyroots}(v) = \begin{pmatrix} 2 + 2.915i \\ 2 - 2.915i \end{pmatrix}$$

$v_0 := -100 \quad v_1 := 45 \quad v_2 := -15 \quad v_3 := 8$

$$\mathrm{polyroots}(v) = \begin{pmatrix} 0.938 + 2.179i \\ 0.938 - 2.179i \end{pmatrix}$$

Продолжение прил. 1

Решение системы нелинейных уравнений

Statika(1)

ORIGIN := 1

Решение системы нелинейных уравнений с помощью блока функций Given-Find.

1. Ввести начальные приближенные решения.

$x1 := 0 \quad x2 := 0 \quad x3 := 0$

2. Ввести систему уравнений функцией Given.

Given

$3 \cdot x1 + 2 \cdot x2 = 6 - 1.5 \cdot x3^2$

$x2^3 + 5 \cdot x3 = 5$

$x1 \cdot x2 + x3 = e^{x3}$

3. Получить решение системы уравнений.

$$r := \mathrm{Find}(x1, x2, x3) \quad r = \begin{pmatrix} 0.981 \\ 1.252 \\ 0.607 \end{pmatrix}$$

$x1 := 0.981 \quad x2 := 1.252 \quad x3 := 0.607$

Mathcad позволяет найти решение алгебраической системы уравнений, неизвестные которой должны удовлетворять дополнительным условиям.Рассмотрим такую систему уравнений.

1. Решить систему уравнений

$3 \cdot x1 + 4 \cdot x2 - 2 \cdot x3 - 324.64 = 0$

$2 \cdot x1 + 3 \cdot x2 - 3 \cdot x3 - 210.98 = 0$

$5 \cdot x1 - 2 \cdot x2 - 2 \cdot x3 - 472.68 = 0$

$x2^2 + x3^2 - x1 = 0$ -дополнительное условие

2. Определение начальных приближений неизвестных системы уравнений

Матричное уравнение системы уравнений

$A \cdot x = B$, где

$$A := \begin{pmatrix} 3 & 4 & -2 \\ 2 & 3 & -3 \\ 5 & -2 & -2 \end{pmatrix} \quad B := \begin{pmatrix} 324.64 \\ 210.98 \\ 472.68 \end{pmatrix}$$

А и В -матрицы коэффициентов и свободных членов системы линейных уравнений

Решение системы линейных уравнений

$$x := A^{-1} \cdot B \qquad x = \begin{pmatrix} 100 \\ 8.66 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Начальные приближения корней исходной системы уравнений.

Продолжение прил. 1

3. Решение исходной системы уравнений

$x1 := 100 \qquad x2 := 9 \qquad x3 := 5$

Начальные прближения корней

Given

$$3 \cdot x1 + 4 \cdot x2 - 2 \cdot x3 - 324.64 = 0$$

$$2 \cdot x1 + 3 \cdot x2 - 3 \cdot x3 - 210.98 = 0$$

$$5 \cdot x1 - 2 \cdot x2 - 2 \cdot x3 - 472.68 = 0$$

$$x2^2 + x3^2 - x1 = 0$$

$$\mathrm{Find}(x1, x2, x3) = \begin{pmatrix} 100 \\ 8.66 \\ 5 \end{pmatrix} \qquad x1 := 100 \qquad x2 := 8.66 \qquad x3 := 5$$

4. Невязки уравнений

$\Delta1 := 3 \cdot x1 + 4 \cdot x2 - 2 \cdot x3 - 324.64 \quad \Delta1 = 0$

$\Delta2 := 2 \cdot x1 + 3 \cdot x2 - 3 \cdot x3 - 210.98 \quad \Delta2 = 0$

$\Delta3 := 5 \cdot x1 - 2 \cdot x2 - 2 \cdot x3 - 472.68 \quad \Delta3 = 0$

$\Delta4 := x2^2 + x3^2 - x1 \quad \Delta4 = -4.4 \times 10^{-3}$

Пример 2

Решить систему уравнений

1. Исходная система уравнений

$6.497 \cdot x1 + 3.797 \cdot x2 - 6.903 \cdot x3 - 8.126 \cdot x4 + 1.3 \cdot x5 + 8.013 \cdot x6 - 2.641 = 0$

$3.797 \cdot x1 + 6.503 \cdot x2 - 4.267 \cdot x3 - 8.131 \cdot x4 + 0.76 \cdot x5 + 8.08 \cdot x6 - 5.966 = 0$

$-6.903 \cdot x1 - 4.267 \cdot x2 + 7.359 \cdot x3 + 8.773 \cdot x4 - 1.381 \cdot x5 - 8.655 \cdot x6 + 3.049 = 0$

$-8.126 \cdot x1 - 8.131 \cdot x2 + 8.773 \cdot x3 + 13 \cdot x4 - 1.626 \cdot x5 - 12.869 \cdot x6 + 6.78 = 0$

$1.3 \cdot x1 + 0.76 \cdot x2 - 1.381 \cdot x3 - 1.626 \cdot x4 + 0.26 \cdot x5 + 1.603 \cdot x6 - 0.529 = 0$

$8.013 \cdot x1 + 8.08 \cdot x2 - 8.655 \cdot x3 - 12.869 \cdot x4 + 1.603 \cdot x5 + 12.74 \cdot x6 - 6.75 = 0$

$x1 \cdot x6 - x2 \cdot x3 \cdot x6 + x2 \cdot x5 + x1 \cdot x3 \cdot x5 = 0$ - дополнительное условие (уравнение связи между неизвестными x1,x2,x3,x5,x6)

$$A := \begin{pmatrix} 6.497 & 3.797 & -6.903 & -8.126 & 1.3 & 8.013 \\ 3.797 & 6.503 & -4.26663 & -8.131 & 0.760 & 8.08 \\ -6.903 & -4.267 & 7.359 & 8.773 & -1.381 & -8.655 \\ -8.126 & -8.131 & 8.773 & 13 & -1.626 & -12.869 \\ 1.3 & 0.760 & -1.381 & -1.626 & 0.26 & 1.603 \\ 8.013 & 8.08 & -8.655 & -12.869 & 1.603 & 12.740 \end{pmatrix} \qquad B := \begin{pmatrix} 2.641 \\ 5.966 \\ -3.049 \\ -6.780 \\ 0.529 \\ 6.75 \end{pmatrix}$$

A-- матрица коэффициентов системы уравнений, B-матрица свободных членов системы

Окончание прил. 1

2. Определение начальных приближений неизвестных.

Матричное уравнение системы линейных уравнений $A \cdot p = B$

Решение системы

$$x := A^{-1} \cdot B \quad x = \begin{pmatrix} -0.964 \\ 0.967 \\ -0.562 \\ -1.384 \\ 0.614 \\ -1.334 \end{pmatrix}$$

$x1 := -0.964$ $x2 := 0.967$ $x3 := -0.562$ $x4 := -1.384$ $x5 := 0.614$ $x6 := -1.334$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -1.739 \times 10^3 & -261.667 & -1.032 \times 10^3 & -1.204 \times 10^3 & 2.24 \times 10^3 & -939.844 \\ -260.011 & -33.913 & -150.858 & -256.194 & 366.634 & -222.36 \\ -1.032 \times 10^3 & -151.757 & -603.457 & -1.017 \times 10^3 & 1.354 \times 10^3 & -862.657 \\ -1.204 \times 10^3 & -257.817 & -1.018 \times 10^3 & -915.782 & -311.663 & -656.284 \\ 2.25 \times 10^3 & 370.23 & 1.36 \times 10^3 & -302.039 & -2.836 \times 10^3 & -674.196 \\ -941.724 & -224.021 & -864.154 & -658.191 & -679.82 & -431.918 \end{pmatrix}$$

3. Решение исходной системы уравнений

Начальные приближения неизвестных

$x1 := -0.964$ $x2 := 0.967$ $x3 := -0.562$ $x4 := -1.384$ $x5 := 0.614$ $x6 := -1.334$

Given

$6.497 \cdot x1 + 3.797 \cdot x2 - 6.903 \cdot x3 - 8.126 \cdot x4 + 1.3 \cdot x5 + 8.013 \cdot x6 - 2.641 = 0$

$3.797 \cdot x1 + 6.503 \cdot x2 - 4.267 \cdot x3 - 8.131 \cdot x4 + 0.76 \cdot x5 + 8.08 \cdot x6 - 5.966 = 0$

$-6.903 \cdot x1 - 4.267 \cdot x2 + 7.359 \cdot x3 + 8.773 \cdot x4 - 1.381 \cdot x5 - 8.655 \cdot x6 + 3.049 = 0$

$-8.126 \cdot x1 - 8.131 \cdot x2 + 8.773 \cdot x3 + 13 \cdot x4 - 1.626 \cdot x5 - 12.869 \cdot x6 + 6.78 = 0$

$1.3 \cdot x1 + 0.76 \cdot x2 - 1.381 \cdot x3 - 1.626 \cdot x4 + 0.26 \cdot x5 + 1.603 \cdot x6 - 0.529 = 0$

$8.013 \cdot x1 + 8.08 \cdot x2 - 8.655 \cdot x3 - 12.869 \cdot x4 + 1.603 \cdot x5 + 12.74 \cdot x6 - 6.75 = 0$

$x1 \cdot x6 - x2 \cdot x3 \cdot x6 + x2 \cdot x5 + x1 \cdot x3 \cdot x5 = 0$

$$\mathrm{Find}(x1, x2, x3, x4, x5, x6) = \begin{pmatrix} -0.411 \\ 1.05 \\ -0.243 \\ -1.218 \\ -0.17 \\ -1.251 \end{pmatrix}$$

Решение системы уравнений

$x1 := -0.411$ $x2 := 1.05$ $x3 := -0.243$

$x4 := -1.218$ $x5 := -0.17$ $x6 := -1.251$

$\Delta 7 := x1 \cdot x6 - x2 \cdot x3 \cdot x6 + x2 \cdot x5 + x1 \cdot x3 \cdot x5$ $\Delta 7 = -5.101 \times 10^{-4}$

$\Delta 1 := 6.497 \cdot x1 + 3.797 \cdot x2 - 6.903 \cdot x3 - 8.12684 + 1.3 \cdot x5 + 8.013 \cdot x6 - 2.641$ $\Delta 1 = -18.019$

$\Delta 2 := 3.797 \cdot x1 + 6.503 \cdot x2 - 4.267 \cdot x3 - 8.131 \cdot x4 + 0.76 \cdot x5 + 8.08 \cdot x6 - 5.966$ $\Delta 2 = 4.742 \times 10^{-3}$

ПРИЛОЖЕНИЕ 2

Пример 3

$ORIGIN := 1$

1. Исходные данные

$P := 3000 \qquad \alpha := 30 \qquad Tcd := P \qquad Tcd := 3000$

$\alpha := \alpha \cdot \frac{\pi}{180}$

2. Система уравнений равновесия

$-Sac \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) + Sbc \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) - Tcd = 0$

$Sac \cdot \cos(\alpha) + Sbc \cdot \cos(\alpha) - P = 0$

Введем обозначения Sac=S1 , Sbc=S2, P=F1, Tcd=F2

Система уравнений равновесия принимает вид

$-S1 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) + S2 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) - F2 = 0$

$S1 \cdot \cos(\alpha) + S2 \cdot \cos(\alpha) - F1 = 0$

$F1 := 3000 \qquad F2 := 3000$

Элементы матрицы А

$i := 1..2 \qquad j := 1..2$

$a_{1,1} := -\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) \qquad a_{1,2} := \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) \qquad a_{2,1} := \cos(\alpha) \qquad a_{2,2} := \cos(\alpha)$

Элементы матрицы В

$b_1 := F2 \qquad b_2 := F1$

Матрицы А и В

$A := \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{pmatrix} \qquad B := \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$

3. Решение системы уравнений

$S := A^{-1} \cdot B$

$S = \begin{pmatrix} -1.268 \times 10^3 \\ 4.732 \times 10^3 \end{pmatrix}$

Результат решения

$S_1 := -1268 \ \text{н} \qquad S_2 := 4732 \ \text{н}$

ПРИЛОЖЕНИЕ 3

РАСЧЕТ ОДИНОЧНОЙ КОНСТРУКЦИИ

$ORIGIN := 1$

1. Исходные данные

$d := 1$

Заданные силы: их модули, направляющие угды, координаты точек приложения

$F_1 := 100 \quad \alpha 1_1 := 135 \quad \beta 1_1 := 45 \quad x1_1 := 0 \quad y1_1 := d$

$F_2 := 150 \quad \alpha 1_2 := 90 \quad \beta 1_2 := 180 \quad x1_2 := d \quad y1_2 := d$

$F_3 := 50 \quad \alpha 1_3 := 45 \quad \beta 1_3 := 45 \quad x1_3 := 2 \cdot d \quad y1_3 := 0$

$M_1 := 50 \quad M_2 := 100$

Направляющие углы, координаты точек приложений реакций связей

$S_1 \quad \alpha 2_1 := 45 \quad \beta 2_1 := 45 \quad x2_1 := 2 \cdot d \quad y2_1 := d$

$S_2 \quad \alpha 2_2 := 240 \quad \beta 2_2 := 150 \quad x2_2 := 0 \quad y2_2 := 0$

$S_3 \quad \alpha 2_3 := 330 \quad \beta 2_3 := 240 \quad x2_3 := 2 \cdot d \quad y2_3 := 0$

$i := 1..3 \quad j := 1..3$

$\alpha 1_i := \alpha 1_i \cdot \frac{\pi}{180} \quad \beta 1_i := \beta 1_i \cdot \frac{\pi}{180} \quad \alpha 2_j := \alpha 2_j \cdot \frac{\pi}{180} \quad \beta 2_j := \beta 2_j \cdot \frac{\pi}{180}$

Элементы матрицы A

$j := 1..3 \quad i := 1..3$

$a1_i := \cos(\alpha 2_j) \quad a2_i := \cos(\beta 2_j) \quad a3_1 := \cos(\beta 2_1) \cdot x2_1 - \cos(\alpha 2_1) \cdot y2_1$

$a3_2 := \cos(\beta 2_2) \cdot x2_2 - \cos(\alpha 2_2) \cdot y2_2 \quad a3_3 := \cos(\beta 2_3) \cdot x2_3 - \cos(\alpha 2_3) \cdot y2_3$

Элементы матрицы B

$$b_1 := -\sum_{i=3}^{3} \left(F_i \cdot \cos(\alpha 1_i)\right) \quad b_2 := -\sum_{i=1}^{3} \left(F_i \cdot \cos(\beta 1_i)\right)$$

$$b_3 := -\sum_{i=1}^{3} \left[F_i \cdot \left(\cos(\beta 1_i) \cdot x1_i - \cos(\alpha 1_i) \cdot y1_i\right)\right] - M_1 + M_2$$

$i := 1..3 \quad j := 1..3$

$a_{1,j} := a1_j \quad a_{2,j} := a2_j \quad a_{3,1} := a3_1 \quad a_{3,2} := a3_2 \quad a_{3,3} := a3_3$

$$A := \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{pmatrix} \qquad B := \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

Решение системы уравнений

$$S := A^{-1} \cdot B \qquad S = \begin{pmatrix} 6.204 \\ -14.377 \\ -54.191 \end{pmatrix}$$

Результат решения

S1=6.204 n S2=-14.377 n , s3=-54.191 n

ПРИЛОЖЕНИЕ 4

РАСЧЕТ СОСТАВНОЙ КОНСТРУКЦИИ

RSK

Расчет составной конструкции

1. Исходные данные

$l := 4 \quad b := 6 \quad c := 4 \quad d := 8 \quad f := 6 \quad g := 8 \quad h := 6$ --размеры звеньев в метрах

$P1 := 4000 \quad M1 := 2000 \quad q := 400$

размерность силы -Н, момента- Нм, интенсивности -Н/м

$\alpha := 60 \quad \beta := 45$

$\alpha := \alpha \cdot \frac{\pi}{180} \quad \beta := \frac{\pi}{180} \cdot \beta$ перевод углов в рад. меру.

$Q := q \cdot g$

$ORIGIN := 1$

2.

Формирование матриц уравнения $A \cdot S = B$

М -матрица коэффициентов при неизвестных, S - вектор- столбец неизвестных , В-вектор-столбец свободных членов

$i := 1..9 \quad j := 1..9$

$S_1 = Xa \quad S_2 = Ya \quad S_3 = Xb \quad S_4 = Yb \quad S_5 = Xc \quad S_6 = Yb \quad S_7 = Xd \quad S_8 = Yd \quad S_9 = Ye$

Элементы матрицы **А**

$a_{i,j} := 0$

$a_{1,1} := 1 \quad a_{1,3} := 1$

$a_{2,2} := 1 \quad a_{2,4} := 1$

$a_{3,3} := -1 \quad a_{3,5} := 1 \quad a_{3,7} := 1$

$a_{4,4} := b$

$a_{5,5} := h \quad a_{5,6} := c + h \cdot \tan\left(\frac{\pi}{2} - \beta\right) \quad a_{5,8} := c + d$

$a_{6,4} := -1 \quad a_{6,6} := 1 \quad a_{6,8} := 1$

$a_{7,7} := -1$

$a_{8,8} := -1 \quad a_{8,9} := 1$

$a_{9,9} := 1$

Продолжение прил. 4

$$A := \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & a_{1,4} & a_{1,5} & a_{1,6} & a_{1,7} & a_{1,8} & a_{1,9} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & a_{2,4} & a_{2,5} & a_{2,6} & a_{2,7} & a_{2,8} & a_{2,9} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} & a_{3,4} & a_{3,5} & a_{3,6} & a_{3,7} & a_{3,8} & a_{3,9} \\ a_{4,1} & a_{4,2} & a_{4,3} & a_{4,4} & a_{4,5} & a_{4,6} & a_{4,7} & a_{4,8} & a_{4,9} \\ a_{5,1} & a_{5,2} & a_{5,3} & a_{5,4} & a_{5,5} & a_{5,6} & a_{5,7} & a_{5,8} & a_{5,9} \\ a_{6,1} & a_{6,2} & a_{6,3} & a_{6,4} & a_{6,5} & a_{6,6} & a_{6,7} & a_{6,8} & a_{6,9} \\ a_{7,1} & a_{7,2} & a_{7,3} & a_{7,4} & a_{7,5} & a_{7,6} & a_{7,7} & a_{7,8} & a_{7,9} \\ a_{8,1} & a_{8,2} & a_{8,3} & a_{8,4} & a_{8,5} & a_{8,6} & a_{8,7} & a_{8,8} & a_{8,9} \\ a_{9,1} & a_{9,2} & a_{9,3} & a_{9,4} & a_{9,5} & a_{9,6} & a_{9,7} & a_{9,8} & a_{9,9} \end{pmatrix} \quad a = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 6 & 10 & 0 & 12 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

Элементы матрицы B

$b_1 := P1 \cdot \cos(\alpha) \quad b_2 := P1 \cdot \sin(\alpha) \quad b_3 := 0$

$b_4 := P1 \cdot l \cdot \sin(\alpha) \quad b_5 := M1 \quad b_6 := 0 \quad b_7 := Q \quad b_8 := 0 \quad b_9 := Q \cdot \frac{g}{2}$

Матрица B

$$B := \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \\ b_5 \\ b_6 \\ b_7 \\ b_8 \\ b_9 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2 \times 10^3 \\ 3.464 \times 10^3 \\ 0 \\ 1.386 \times 10^4 \\ 2 \times 10^3 \\ 0 \\ 3.2 \times 10^3 \\ 0 \\ 1.28 \times 10^4 \end{pmatrix}$$

Продолжение прил. 4

Решение уравнения

$$S := A^{-1} \cdot B \qquad S = \begin{pmatrix} 9.427 \times 10^{3} \\ 1.155 \times 10^{3} \\ -7.427 \times 10^{3} \\ 2.309 \times 10^{3} \\ -4.227 \times 10^{3} \\ 176.068 \\ -3.2 \times 10^{3} \\ 2.133 \times 10^{3} \\ 2.133 \times 10^{3} \end{pmatrix}$$

Результаты решения

$P1 := 4000$

$S_{1,n}$	$S_{2,n}$	$S_{3,n}$	$S_{4,n}$	$S_{5,n}$	$S_{6,n}$	$S_{7,n}$	$S_{8,n}$	$S_{9,n}$
9427	1155	−7427	2309	−4227	176	−3200	2133	2133

Реакции связей

Xa	Ya	Xb	Yb	Xc	Yc	Xd	Yd	Ye
9427	1155	−7427	2309	−4227	176	−3200	2133	2133

Исследование влияния величины силы P1 величину реакций связей.

Для нахождения графической зависимости реакций от P1 выполним расчет для ряда значений P1:0 .1000, 2000, 3000, 4000. Результаты прведены ниже.

$P1 := 0$ $\qquad$ $P1 := 1000$ $\qquad$ $P1 := 2000$ $\qquad$ $P1 := 3000$ $\qquad$ $P1 := 4000$

$$R1 := \begin{pmatrix} 3.578 \cdot 10^{3} \\ 0 \\ -3.578 \cdot 10^{3} \\ 0 \\ -377.778 \\ -2.133 \cdot 10^{3} \\ -3.2 \cdot 10^{3} \\ 2.133 \cdot 10^{3} \\ 2.133 \cdot 10^{3} \end{pmatrix} \quad R2 := \begin{pmatrix} 5.04 \cdot 10^{3} \\ 288.675 \\ -4.54 \cdot 10^{3} \\ 577.35 \\ -1.34 \cdot 10^{3} \\ -1.556 \cdot 10^{3} \\ -3.2 \cdot 10^{3} \\ 2.133 \cdot 10^{3} \\ 2.133 \cdot 10^{3} \end{pmatrix} \quad R3 := \begin{pmatrix} 6.502 \cdot 10^{3} \\ 577.35 \\ -5.502 \cdot 10^{3} \\ 1.155 \cdot 10^{3} \\ -2.302 \cdot 10^{3} \\ -978.633 \\ -3.2 \cdot 10^{3} \\ 2.133 \cdot 10^{3} \\ 2.133 \cdot 10^{3} \end{pmatrix} \quad R4 := \begin{pmatrix} 7.9656 \cdot 10^{3} \\ 866.025 \\ -6.465 \cdot 10^{3} \\ 1.732 \cdot 10^{3} \\ -3.265 \cdot 10^{3} \\ -401.283 \\ -3.2 \cdot 10^{3} \\ 2.133 \cdot 10^{3} \\ 2.133 \cdot 10^{3} \end{pmatrix}$$

$$R5 = \begin{pmatrix} 9.427\times10^{3} \\ 1.155\times10^{3} \\ -7.427\times10^{3} \\ 2.309\times10^{3} \\ -4.227\times10^{3} \\ 176.068 \\ -3.2\times10^{3} \\ 2.133\times10^{3} \\ 2.133\times10^{3} \end{pmatrix}$$

$$P1 := \begin{pmatrix} 0 \\ 1000 \\ 2000 \\ 3000 \\ 4000 \end{pmatrix}$$

График зависимости Xa от P1 $j := 1..5$

$$Xa := \begin{pmatrix} 3.578\cdot10^{3} \\ 5.04\cdot10^{3} \\ 6.502\cdot10^{3} \\ 7.965\cdot10^{3} \\ 9.427\cdot10^{3} \end{pmatrix}$$

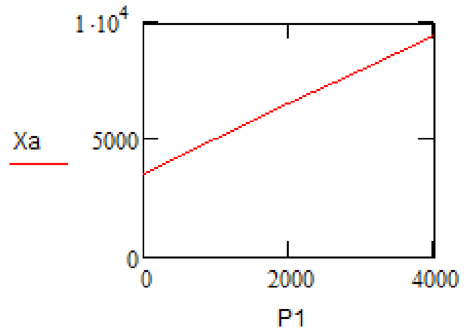
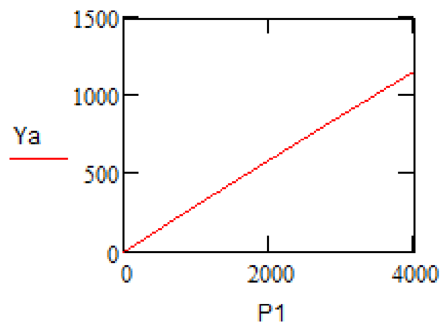


График зависимости Ya от P1 $j := 1..5$

$$Ya := \begin{pmatrix} 0 \\ 288.675 \\ 577.35 \\ 866.025 \\ 1.155\cdot10^{3} \end{pmatrix}$$



Продолжение прил. 4

График зависимости Xb от P1 $j := 1..5$

$$Xb := \begin{pmatrix} -3.578 \cdot 10^3 \\ -4.54 \cdot 10^3 \\ -5.502 \cdot 10^3 \\ -6.465 \cdot 10^3 \\ -7.427 \cdot 10^3 \end{pmatrix}$$

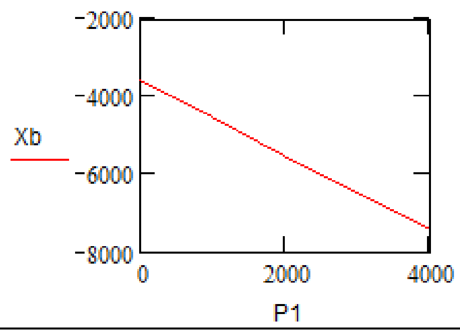


График зависимости Yb от P1 $j := 1..5$

$$Yb := \begin{pmatrix} 0 \\ 577.35 \\ 1.155 \cdot 10^3 \\ 1.732 \cdot 10^3 \\ 2.309 \cdot 10^3 \end{pmatrix}$$

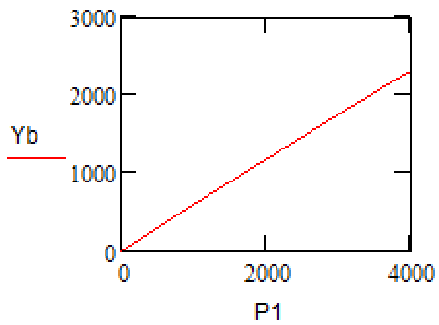


График зависимости Xc от P1

$$Xc := \begin{pmatrix} -377.778 \\ -1.34 \cdot 10^3 \\ -2.302 \cdot 10^3 \\ -3.265 \cdot 10^3 \\ -4.227 \cdot 10^3 \end{pmatrix}$$

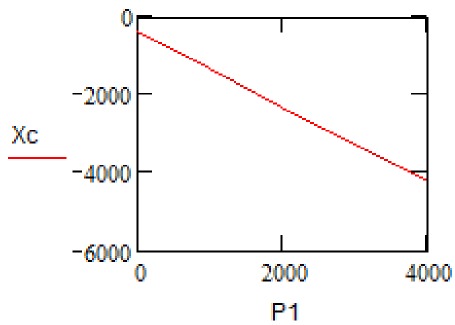
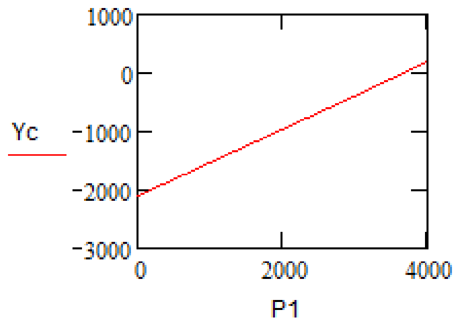


График зависимости Yc от P1

$$Yc := \begin{pmatrix} -2.133 \cdot 10^3 \\ -1.556 \cdot 10^3 \\ -978.633 \\ -401.283 \\ 176.068 \end{pmatrix}$$



Окончание прил. 4

График зависимости Xd от P1

$$Xd := \begin{pmatrix} -3.2 \cdot 10^3 \\ -3.2 \cdot 10^3 \\ -3.2 \cdot 10^3 \\ -3.2 \cdot 10^3 \\ -3.2 \cdot 10^3 \end{pmatrix}$$

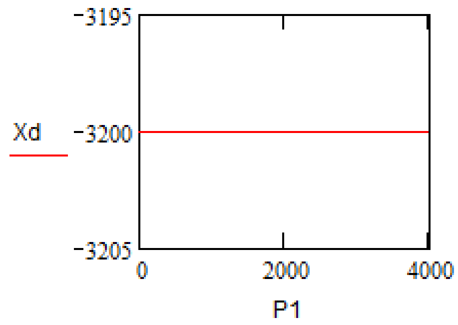
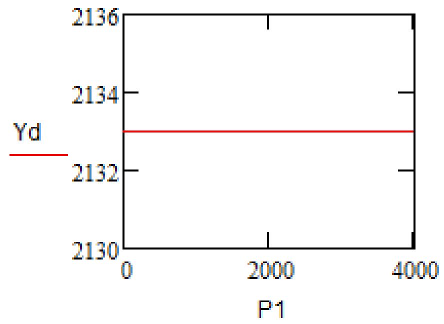


График зависимости Yd, Ye от P1

$$Yd := \begin{pmatrix} 2.133 \cdot 10^3 \\ 2.133 \cdot 10^3 \\ 2.133 \cdot 10^3 \\ 2.133 \cdot 10^3 \\ 2.133 \cdot 10^3 \end{pmatrix}$$



ПРИЛОЖЕНИЕ 5

РАСЧЕТ ПЛОСКИХ ФЕРМ: ОПРЕДЕЛЕНИЕ ОПОРНЫХ РЕАКЦИЙ

Расчет опорных реакций

$ORIGIN := 1$

1. Исходные данные

$F_1 := 2 \quad F_2 := 4 \quad F_3 := 6$ - активные сиы, измеряются в килоньютонах

С-количество стержней фермы, С=11 $\quad a := 1 \quad \alpha := 45$

j-номер стержня

$j := 1..11$

$\alpha := \alpha \cdot \frac{\pi}{180}$ - перевод α в радианы

2. Определение реакций связей фермы

--уравнения равновесия фермы

$Xa - F_1 - F_2 = 0$

$Ya + Rb - F_3 = 0$

$Rb \cdot a + F_1 \cdot 3 \cdot a + F_2 \cdot 2 \cdot a = 0$

Матрицы уравнения

$A \cdot x = B$

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad B := \begin{pmatrix} F_1 + F_2 \\ F_3 \\ -F_1 \cdot 3 - F_2 \cdot 2 \end{pmatrix}$$

Решение уравнений равновесия

$x := A^{-1} \cdot B$

$$x = \begin{pmatrix} 6 \\ 20 \\ -14 \end{pmatrix}$$

Реакции связей --

$Xa := 6\ kn \quad Ya := 20\ kn \quad Rb := -14\ kn$

ПРИЛОЖЕНИЕ 6

РАСЧЕТ ПЛОСКИХ ФЕРМ: ОПРЕДЕЛЕНИЕ УСИЛИЙ В СТЕРЖНЯХ

$ORIGIN := 1$

1. Исходные данные

$F_1 := 2 \quad F_2 := 4 \quad F_3 := 6$ - активные сиы, измеряются в килоньютонах

С-количество стержней фермы, С=11 $\quad a := 1 \quad \alpha := 45$

j-номер стержня

$j := 1..11$

$\alpha := \alpha \cdot \dfrac{\pi}{180}$ - перевод α в радианы

3. Определение усилий в стержнях фермы методом вырезания узлов

Узел Н.

$S_1 = x_1 \quad S_2 = x_2$

Уравнения равновесия узла Н

$-S_1 \cdot \cos(\alpha) - F_1 = 0$

$-S_1 \cdot \sin(\alpha) - S_2 = 0$

Матрицы уравнения $\quad Ah \cdot x = Bh$

$$Ah := \begin{pmatrix} -\cos(\alpha) & 0 \\ -\sin(\alpha) & -1 \end{pmatrix} \quad Bh := \begin{pmatrix} F_1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$Ah = \begin{pmatrix} -0.707 & 0 \\ -0.707 & -1 \end{pmatrix} \quad Bh = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Решение уравнения

$x := Ah^{-1} \cdot Bh$

$$x = \begin{pmatrix} -2.828 \\ 2 \end{pmatrix} \quad S_1 := -2.828 \quad S_2 := 2$$

Узел Е

$S_3 = x_1 \quad S_4 = x_2$

Уравнения равновесия
узла Е

$S_3 + S_1 \cdot \cos(\alpha) = 0$

$-S_4 + S_1 \cdot \sin(\alpha) - F_3 = 0$

Матрицы уравнения $\quad Ae \cdot x = Be$

$$Ae := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad Be := \begin{pmatrix} -S_1 \cdot \cos(\alpha) \\ F_3 - S_1 \cdot \sin(\alpha) \end{pmatrix}$$

$$Be = \begin{pmatrix} 2 \\ 8 \end{pmatrix}$$

Продолжение прил. 6

Решение уравнения

$x := Ae^{-1} \cdot Be \quad x = \begin{pmatrix} 2 \\ -8 \end{pmatrix}$

$S_3 := 2 \quad S_4 := -8 \quad S_1 = -2.828 \quad S_2 = 2 \quad S_3 = 2 \quad S_4 = -8$

Узел F

$S_5 = x_1 \quad S_6 = x_2$

Уравнения равновесия узла F

$-S_5 \cdot \cos(\alpha) - F_2 - S_3 = 0$

$-S_5 \cdot \sin(\alpha) - S_6 + S_2 = 0$

Матрицы уравнения $Af \cdot x = Bf$

$Af := \begin{pmatrix} -\cos(\alpha) & 0 \\ -\sin(\alpha) & -1 \end{pmatrix} \quad Bf := \begin{pmatrix} F_2 + S_3 \\ -S_2 \end{pmatrix}$

$Af = \begin{pmatrix} -0.707 & 0 \\ -0.707 & -1 \end{pmatrix} \quad Bf := \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \end{pmatrix}$

Решение уравнения

$x := Af^{-1} \cdot Bf \quad x = \begin{pmatrix} -8.485 \\ 8 \end{pmatrix}$

$S_5 := -8.485 \quad S_6 := 8$

Узел C

$S_7 = x_1 \quad S_8 = x_2$

Уравнения равновесия узла C

$S_7 + S_5 \cdot \cos(\alpha) = 0$

$-S_8 + S_4 + S_5 \cdot \sin(\alpha) = 0$

Матрицы уравнения $Ac \cdot x = Bc$

$Ac := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad Bc := \begin{pmatrix} -S_5 \cdot \cos(\alpha) \\ -S_4 - S_5 \cdot \sin(\alpha) \end{pmatrix}$

Решение уравнения

$x := Ac^{-1} \cdot Bc \quad x = \begin{pmatrix} 6 \\ -14 \end{pmatrix}$

$S_7 := 6 \quad S_8 := -14$

Узел D

$S_9 = x_1 \quad S_{10} = x_2$

Уравнения равновесия узла D

$-S_9 \cdot \cos(\alpha) - S_7 = 0$

$-S_9 \cdot \sin(\alpha) - S_{10} + S_6 = 0$

Матрицы уравнения $Ad \cdot x = Bd$

$Ad := \begin{pmatrix} -\cos(\alpha) & 0 \\ -\sin(\alpha) & -1 \end{pmatrix} \quad Bd := \begin{pmatrix} S_7 \\ -S_6 \end{pmatrix}$

Окончание прил. 6

Решение уравнения $x := Ad^{-1} \cdot Bd$

$$x = \begin{pmatrix} -8.485 \\ 14 \end{pmatrix}$$

$S_9 := -8.485 \quad S_{10} := 14$

Узел В

Уравнения равновесия узла В

$-S_{11} = 0$

$Rb + S_{10} = 0$

Решение системы уравнений

$S_{11} := 0 \quad Rb := -S_{10} \quad Rb := -14 \quad kn$

Узел А

Уравнения равновесия узла А

$Xa + S_{11} + S_9 \cdot \cos(\alpha) = 0$

$Ya + S_8 + S_9 \cdot \sin(\alpha) = 0$

Решение системы уравнений

$Xa := -S_9 \cdot \cos(\alpha) - S_{11}$

$Ya := -S_8 - S_9 \cdot \sin(\alpha)$

$Xa = 6 \quad kn \quad Ya = 20 \quad kn$

Результаты расчета реакции связей

$Xa := 6 \quad kn \quad Ya := 20 \quad kn \quad Rb := -14 \quad kn$

Усилия в стержнях фермы в kn

При рассмотрении условий равновесия узлов В и А вычислены реакция 11-го стержня и реакции шарниров А и В. Реакции Xa, Ya и Rb были вычислены ранее при рассмотрении равновесия фермы в целом. Совпадение значений Xa, Ya, Rb свидетельствует о том, что расчеты выполнены правильно.

Знак минус в ответе указывает на то, что стержень сжат.

S =

	1
1	-2.828
2	2
3	2
4	-8
5	-8.485
6	8
7	6
8	-14
9	-8.485
10	14
11	0

ПРИЛОЖЕНИЕ 7

Определение реакций стержней, удерживающих плиту.

ORIGIN := 1

1. "Исходные данные

$d := 2$

Заданные силы: их модули, направляющие углы, координаты точек приложения

$F_1 := 100 \;\; \alpha1_1 := 90 \;\; \beta1_1 := 90 \;\; \gamma1_1 := 180 \;\; x1_1 := d \;\; y1_1 := d \;\; z1_1 := d$

$F_2 := 50 \;\; \alpha1_2 := 0 \;\; \beta1_2 := 90 \;\; \gamma1_2 := 90 \;\; x1_2 := d \;\; y1_2 := 0 \;\; z1_2 := d$

Направляющие углы, координаты точек приложения реакций связей.

$S_1 \;\; \alpha2_1 := 90 \;\; \beta2_1 := 90 \;\; \gamma2_1 := 180 \;\; x2_1 := d \;\; y2_1 := 0 \;\; z2_1 := d$

$S_2 \;\; \alpha2_2 := 90 \;\; \beta2_2 := 45 \;\; \gamma2_2 := 135 \;\; x2_2 := d \;\; y2_2 := 0 \;\; z2_2 := d$

$S_3 \;\; \alpha2_3 := 90 \;\; \beta2_3 := 90 \;\; \gamma2_3 := 180 \;\; x2_3 := d \;\; y2_3 := d \;\; z2_3 := d$

$S_4 \;\; \alpha2_4 := 135 \;\; \beta2_4 := 90 \;\; \gamma2_4 := 135 \;\; x2_4 := d \;\; y2_4 := d \;\; z2_4 := d$

$S_5 \;\; \alpha2_5 := 90 \;\; \beta2_5 := 90 \;\; \gamma2_5 := 180 \;\; x2_5 := 0 \;\; y2_5 := d \;\; z2_5 := d$

$S_6 \;\; \alpha2_6 := 135 \;\; \beta2_6 := 90 \;\; \gamma2_6 := 135 \;\; x2_6 := d \;\; y2_6 := 0 \;\; z2_6 := d$

$i := 1..2$

$\alpha1_i := \alpha1_i \cdot \frac{\pi}{180} \;\; \beta1_i := \beta1_i \cdot \frac{\pi}{180} \;\; \gamma1_i := \gamma1_i \cdot \frac{\pi}{180}$

Перевод углов в радианную меру

$\alpha1_1 = 1.571$

$\alpha1_2 = 0$

$j := 1..6$

$$\alpha2_j := \alpha2_j \cdot \frac{\pi}{180} \qquad \beta2_j := \beta2_j \cdot \frac{\pi}{180} \qquad \gamma2_j := \gamma2_j \cdot \frac{\pi}{180}$$

$\alpha1_1 = 1.571 \qquad \alpha1_2 = 0$

2. Матричное уравнение $A \cdot S = B$, где

А-матрица коэффициентов при неивестных; В-вектор-столбец реакций связей.
Матрицы А и В имеют следующий вид:
Элементы матрицы А

$j := 1..6$

$$a1_j := \cos(\alpha2_j) \qquad a2_j := \cos(\beta2_j) \qquad a3_j := \cos(\gamma2_j)$$

$$a4_j := \cos(\gamma2_j) \cdot y2_j - \cos(\beta2_j) \cdot z2_j \qquad a5_j := \cos(\alpha2_j) \cdot z2_j - \cos(\gamma2_j) \cdot x2_j$$

$$a6_j := \cos(\beta2_j) - \cos(\alpha2_j) \cdot y2_j$$

Окончание прил. 7

Элементы матрицы B

$$b_1 := -\sum_{i=1}^{2} \left(F_i \cdot \cos(\alpha 1_i)\right) \quad b_2 := -\sum_{i=1}^{2} \left(F_i \cdot \cos(\beta 1_i)\right) \qquad b_3 := -\sum_{i=1}^{2} \left(F_i \cdot \cos(\gamma 1_i)\right)$$

$$b_4 := -\sum_{i=1}^{2} \left[F_i \cdot \left(\cos(\gamma 1_i) \cdot y1_i - \cos(\beta 1_i) \cdot z1_i\right)\right] \quad b_5 := -\sum_{i=1}^{2} \left[F_i \cdot \left(\cos(\alpha 1_i) \cdot z1_i - \cos(\gamma 1_i) \cdot x1_i\right)\right]$$

$$b_6 := -\sum_{i=1}^{2} \left[F_i \cdot \left(\cos(\beta 1_i) \cdot x1_i - \cos(\alpha 1_i) \cdot y1_i\right)\right]$$

$i := 1..6 \quad j := 1..6$

$a_{1,j} := a1_j \quad a_{2,j} := a2_j \quad a_{3,j} := a3_j \quad a_{4,j} := a4_j \quad a_{5,j} := a5_j \quad a_{6,j} := a6_j$

$$A := \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & a_{1,4} & a_{1,5} & a_{1,6} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & a_{2,4} & a_{2,5} & a_{2,6} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} & a_{3,4} & a_{3,5} & a_{3,6} \\ a_{4,1} & a_{4,2} & a_{4,3} & a_{4,4} & a_{4,5} & a_{4,6} \\ a_{5,1} & a_{5,2} & a_{5,3} & a_{5,4} & a_{5,5} & a_{5,6} \\ a_{6,1} & a_{6,2} & a_{6,3} & a_{6,4} & a_{6,5} & a_{6,6} \end{pmatrix} \qquad B := \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \\ b_5 \\ b_6 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -0.707 & 0 & -0.707 \\ 0 & 0.707 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -0.707 & -1 & -0.707 & -1 & -0.707 \\ 0 & -1.414 & -2 & -1.414 & -2 & 0 \\ 2 & 1.414 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.707 & 0 & 1.414 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} -50 \\ -9.185 \times 10^{-15} \\ 100 \\ 200 \\ -300 \\ -6.123 \times 10^{-15} \end{pmatrix}$$

Решение системы уравнений

$S := A^{-1} \cdot B$

$$S = \begin{pmatrix} -50 \\ -6.123 \times 10^{-15} \\ -100 \\ -8.937 \times 10^{-15} \\ 2.842 \times 10^{-14} \\ 70.711 \end{pmatrix}$$

Результаты решения:
S1=-50 kn , S2=0, S3=-100 kn, S4=0 ,S5=0, S6=70.711 kn

ОГЛАВЛЕНИЕ

Учебное издание

Доронин Владимир Иванович
Иванова Галина Дмитриевна
Кузин Андрей Анатольевич
Рачек Николай Маркович

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА В ЗАДАЧАХ

В 3 частях. Часть 1. **СТАТИКА**

Учебное пособие

Редактор *Н.В. Смышляева*
Технический редактор *И.А. Нильмаер*

План 2016 г. Поз. 9.24. Подписано в печать 31.05.2016 г. Формат $60\times84^{1}/_{16}$.
Гарнитура «Times New Roman». Уч.-изд. л. 7,3. Усл. печ. л. 6,7. Зак. 62. Тираж 100 экз. Цена 328 руб.

Издательство ДВГУПС
680021, г. Хабаровск, ул. Серышева, 47.

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА В ЗАДАЧАХ

Часть 1

СТАТИКА

Учебное пособие

Хабаровск

2016