ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

«Начертательная геометрия – раздел геометрии, в котором пространственные фигуры, а также методы решения и исследования пространственных задач изучаются с помощью их изображений на плоскости»[1].

Методы начертательной геометрии являются теоретической базой для решения технических задач. В технике чертежи являются основным средством выражения человеческих идей. Они должны не только определять форму и размеры предметов, но и быть достаточно простыми и точными в графическом исполнении, помогать исследовать предметы и их отдельные элементы всесторонне. Для того чтобы правильно выразить свои мысли с помощью рисунка, эскиза, чертежа требуется знание теоретических основ построения изображений геометрических объектов, их многообразия и отношения между ними, что и составляет предмет начертательной геометрии.

Изображение фигуры на плоскости как графический способ представления информации о ней имеет преимущества в сравнении с другими способами:

– общение становится более доступным, потому что образы, создаваемые на основе визуального (зрительного) восприятия, обладают большей, чем слова, ассоциативной силой;

– изображения являются интернациональным языком общения, тогда как, например, вербальное общение требует для понимания, как минимум, знания языка собеседника.

Таким образом, теоретические основы визуализации информации о геометрических объектах, многообразие геометрических объектов пространства, отношения между ними и их графического отображения на плоскости составляют предмет начертательной геометрии.

Итак, в курсе начертательной геометрии студенты должны освоить:

1) методы отображения пространственных объектов на плоскости;

2) способы графического и аналитического решения различных геометрических задач;

3) приемы увеличения наглядности и визуальной достоверности изображений проецируемого объекта;

4) способы преобразования и исследования геометрических свойств изображенного объекта;

5) основы моделирования геометрических объектов и выполнить расчетно-графическую работу 1 «Альбом задач по начертательной геометрии», состоящую из 12 задач.

---

[1] Математический энциклопедический словарь. гл. ред. Ю.В. Прохоров. М.: Сов. энциклопедия. 1988.

Методические рекомендации по изучению курса «Начертательная геометрия»

Мыслительная деятельность человека является необходимым условием его социального бытия, формой отражения окружающего мира, условием успешного познания и активного преобразования действительности. Трудно и невозможно назвать хотя бы одну область деятельности человека, где мышление не играет существенной роли.

В процессе обучения в вузе главное состоит не только в том, чтобы студенты смогли усвоить научные основы предстоящей деятельности, но и в том, чтобы молодой человек научился управлять развитием своего мышления. С этой целью в структуре учебного пособия содержатся алгоритмы.

При выполнении заданий (решении задач) применяются алгоритмы развития мышления. При этом законы, закономерности, определения, выводы, правила и т. д. выстраиваются как знания.

Выделяют следующие способы построения алгоритма[2]:

а) из одного понятия:

– выделить существенные признаки понятия,

– определить взаимосвязь признаков между собой,

– установить последовательность наложения признаков на конкретный пример;

б) при комбинировании нескольких понятий:

– построить алгоритмы применения каждого понятия,

– сравнить алгоритмы (выделить общие и специфические признаки),

– определить взаимосвязь признаков между собой,

– установить последовательность наложения признаков на конкретный пример.

Алгоритм проведения анализа:

1) выделить в понятии все признаки предмета или явления (физические, химические свойства и отношения);

2) определить существенные признаки;

3) выделить несущественные признаки.

Алгоритм проведения синтеза:

1) определить все признаки, характеризующие предмет или явление;

2) выделить из них существенные, принадлежащие предмету или явлению, без которых последнее теряет свой смысл;

3) соотнести имеющиеся признаки с признаками известных понятий или ввести новое понятие.

[2] Карева Д. Ф., Дворянкина Е. К. Взаимодействие систем обучения и воспитания в вузовском образовании. Хабаровск. 2002. 293 с.

Алгоритм проведения сравнения (сравнительный анализ предполагает проведение анализа каждого понятия и сравнения их между собой):

1) провести анализ сравниваемых понятий:

– выделить в понятии все признаки предмета или явления (физические, химические свойства и отношения);

– определить существенные признаки;

– выделить не существенные признаки;

2) определить существенные и несущественные признаки;

3) сделать вывод:

– о полном совпадении понятий (если одинаковы все признаки);

– частичном совпадении понятий (если совпадение признаков частичное);

– несовпадении понятий (если нет одинаковых признаков).

Алгоритм обобщения:

1) разложить каждое из понятий на существенные признаки;

2) определить общие для всех понятий существенные признаки;

3) дать (сформулировать) обобщение на основе этих признаков;

4) найти (если существует) обобщающее понятие.

Алгоритм свертывания знаний:

1) разложить каждое из понятий на существенные признаки;

2) определить общие для понятий существенные признаки:

– для всех понятий (родовые признаки);

– для отдельных групп понятий (видовые признаки);

3) дать (сформулировать) обобщение на основе этих признаков;

4) найти (если существует) обобщающее понятие;

5) определить основные взаимосвязи между понятиями – совпадение, включение, соподчинения, противоположность, противоречие;

6) на основе выделенных взаимосвязей представить данную совокупность в виде схемы, графика, рисунка, таблицы.

В результате обучения студенты должны иметь опыт как разработки алгоритма применения знаний, так и способности его применения при выполнении заданий по курсу теории.

ОБОЗНАЧЕНИЯ, ПРИНЯТЫЕ В ПОСОБИИ

S – центр проецирования.

Плоскости проекций:

П – произвольная;

$П_1$ – горизонтальная;

$П_2$ – фронтальная;

$П_3$ – профильная.

Оси проекции: OX – ось абсцисс; OY – ось ординат; OZ – ось аппликат; начало координат – прописная буква O.

Точки, расположенные в пространстве, обозначаются прописными буквами латинского алфавита, а также арабскими цифрами: A, B, C, L, M,… N; 1, 2, 3, 4,…,12, 13, 14,…

Линии, расположенные произвольно относительно плоскостей проекций, обозначаются строчными буквами латинского алфавита:

a, b, c,…; l, m, n.

Линии уровня обозначаются: h – горизонталь; f – фронталь; p – профильная прямая.

- Примечание. Для проецирующих прямых специальных обозначений не предусмотрено.

Плоскости обозначаются прописными буквами латинского и греческого алфавита: P, Q, R, S, T, Σ, Λ, Θ…

Для обозначения плоскостей уровня используются прописные буквы только греческого алфавита: Г – горизонтальная плоскость; Ф – фронтальная плоскость; Р – профильная плоскость.

Проекции точек, линий и других геометрических образов обозначаются теми же буквами (или цифрами), что и оригинал, но с добавлением индекса A_1, A_2, A_3 или 1_1, 1_2, 1_3, соответствующей плоскости проекций, на которой они получены. Обозначения отношений между геометрическими образами сведены в таблицу.

Обозначение отношений между геометрическими образами

Обозначение	Смысловое значение	Пример символической записи
$\in$, $\subset$, $\supset$	принадлежность	$A \in l$ – точка A принадлежит прямой l; $l \subset P$ – прямая l лежит в плоскости P; $b \supset R$ – плоскость R проходит через прямую b
$\equiv$	совпадение	$(AB) \equiv (CD)$ – прямая, проходящая через точки A и B, совпадает с прямой, проходящей через точки C и D
‖ , //	параллельность	a // b – прямые a и b параллельны.
$\perp$	перпендикулярность	$c \perp d$ – прямые c и d перпендикулярны.
$\dot{-}$	скрещивание	$m \dot{-} n$ – прямые m и n скрещивающиеся.
$\cap$	пересечение	$k \cap l$ – прямые k и l пересекаются.
=	равенство, результат действия	$|AB| = |CD|$ – длина отреза AB равна длине отрезка CD
/	отрицание	$A \notin l$ – точка A не принадлежит прямой l.

1. МЕТОД ПРОЕКЦИЙ
1.1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ МЕТОДА ПРОЕЦИРОВАНИЯ

В основе любой науки есть базовые понятия. Для начертательной геометрии таким понятием является - проецирование.

Проецирование – метод получения проекций – изображений пространственных предметов на плоскости проекций при помощи пучка воображаемых проецирующих световых или зрительных лучей.

Сущность метода – имеется точка пространства, например А. Необходимо построить ее изображение на плоскости П. Операция проецирования заключается в следующем, через точку А необходимо проведении прямую до пересечения с плоскостью П. Эта прямая называется проецирующим лучом. Изображение $A_п$, полученное в результате пересечения плоскости П проецирующим лучом, называется проекцией точки А на плоскости П. Плоскость, на которой получено изображение, называется плоскостью проекций П (рис. 1.1).

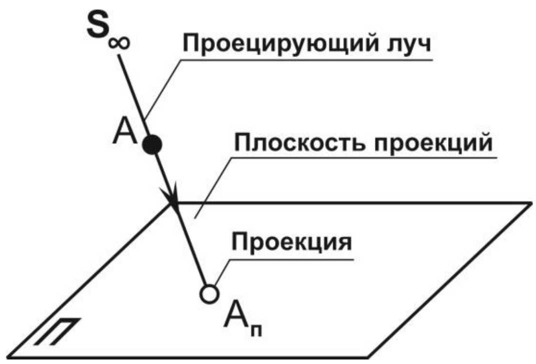


Рис.1.1. Метод проецирования

Если необходимо получить проекцию более сложного геометрического образа, например треугольника, то проецирующие лучи нужно проводить через три его вершины.

1.2. Виды проецирования

В начертательной геометрии различают два основных метода проецирования: центральное (рис. 1.2) и параллельное (рис. 1.3).

Центральное проецирование. Если все проецирующие лучи исходят из собственной точки S (точки, находящейся в обозримом пространстве), то проецирование называется центральным, а сама точка S – источником проецирующих лучей. Таким образом, аппарат центрального проецирования включает в себя центр проецирования – точку S, проецирующие лучи и плоскость проекций (рис. 1.2). Для проецирования произвольной точки через неё и центр проекций проводят прямую (проецирующий луч). Точка пересечения проецирующего луча с плоскостью проекций и является центральной проекцией заданной точки на выбранной плоскости проекций. На рис.1.2 центральной проекцией точки А является точка $A_п$, которая находится на пересечении прямой SA с плоскостью П. Следует отметить, что если точки расположены на одной проецирующей прямой, то их проекции совпадают. Такими точками на рис. 1.2 являются – точки B и C; B⊂(SB), C⊂(SC), $B_{п}=C_{п}$.

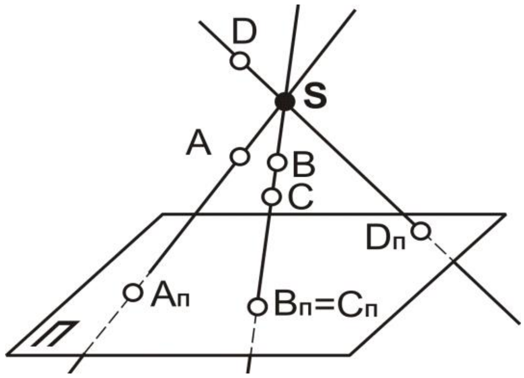


Рис. 1.2. Центральное проецирование

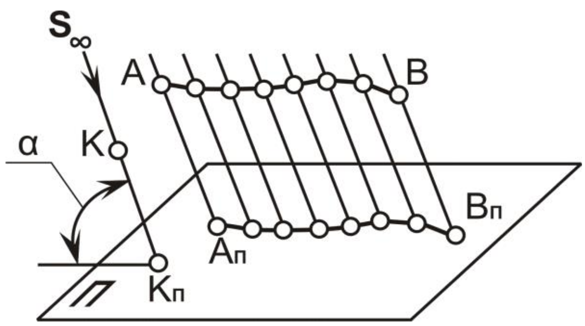


Рис. 1.3. Параллельное проецирование

Проекция кривой линии представляет собой линию пересечения проецирующей конической поверхности с плоскостью проекций. Так, на рис. 1.4. *а,* проецирующая поверхность Q пересекается с плоскостью проекций П по кривой $A_{п}B_{п}$, являющейся проекцией линии AB. Однако $A_{п}B_{п}$ – это проекция всех линий, принадлежащих проецирующей поверхности Q (рис. 1.4, *а*).

Для построения проекций линий, поверхностей или тел часто достаточно построить проекции лишь некоторых характерных точек. Например, при построении проекции треугольника ABC (рис. 1.4, *б*) на плоскости проекций П достаточно построить проекции трех его вершин – точки $A_{п}$, $B_{п}$, $C_{п}$.

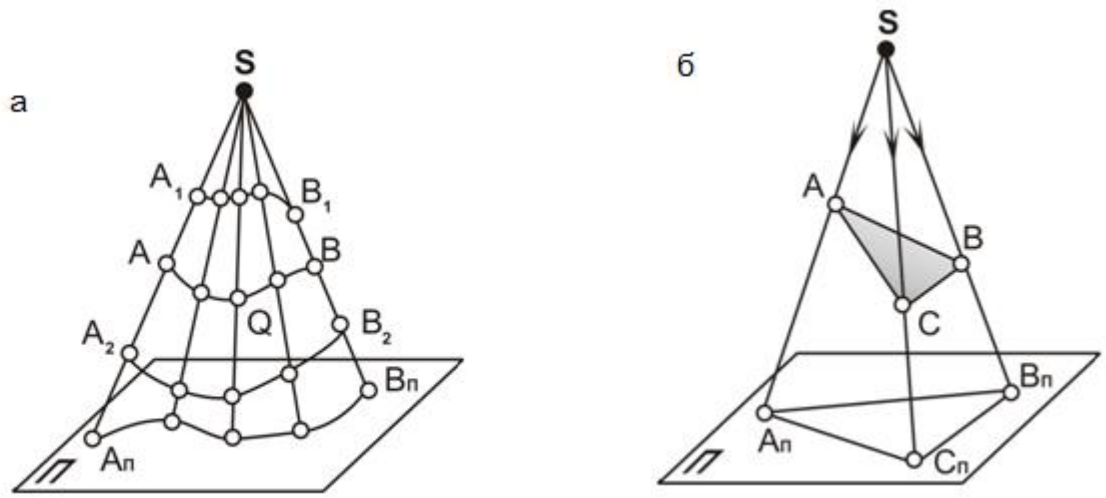


Рис. 1.4. Центральное проецирование геометрических объектов:
а – проецирование кривых линий; *б* – проецирование треугольника

Параллельное проецирование. Параллельное проецирование можно рассматривать как частный случай центрального проецирования, при котором центр проекций S удален в бесконечность (рис. 1.3).

При параллельном проецировании применяют параллельные проецирующие лучи, проведенные в заданном направлении относительно плоскости проекций.

Если направление параллельного проецирования перпендикулярно плоскости проекций, то проецирование называют *прямоугольным (ортогональным)* (рис. 1.5, *а*), в остальных случаях – *косоугольным* (рис. 1.5, *б*).

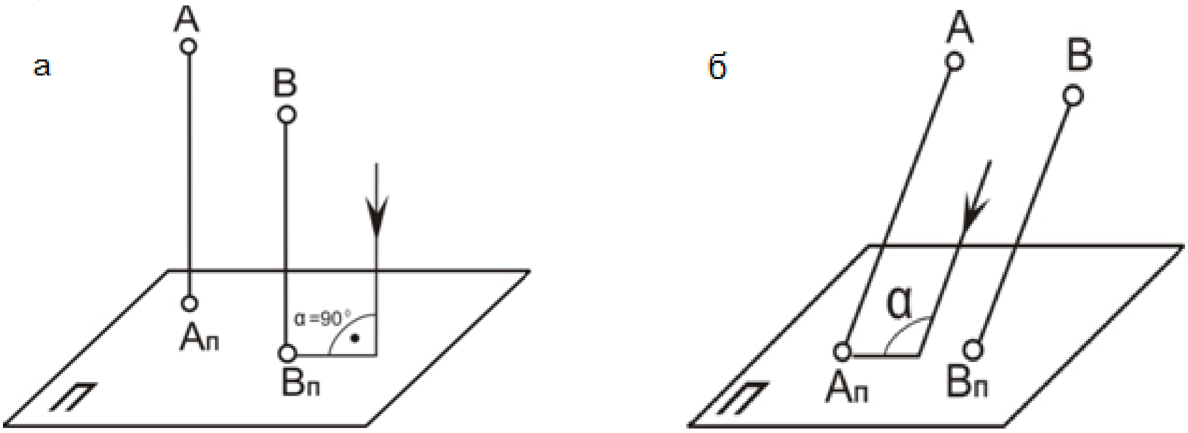


Рис. 1.5. Параллельное проецирование: *а* – прямоугольное проецирование; *б* – косоугольное проецирование

Технические чертежи получают методом параллельного прямоугольного проецирования. Такой метод был впервые систематизирован и изложен Гаспаром Монжем, поэтому его иногда называют методом Монжа. Это наиболее распространенный метод, используемый для технических целей, хотя он не даёт наибольшей наглядности, но вместе с тем ортогональное проецирование имеет ряд преимуществ перед центральным и параллельным косоугольным проецированием:

– простота геометрических построений ортогональных проекций предметов;

– сохранение на проекциях, при определенных условиях, формы и величины линейных и угловых размеров проецируемых предметов.

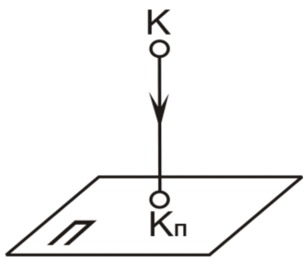


Рис. 1.6. Свойство 1. Проецирование точки

1.3. Основные свойства проекций

При проецировании устанавливается геометрическая (проекционная) связь между оригиналом и его проекцией. Геометрические образы (формы) содержат в себе свойства, сохраняющиеся в проекциях при любых их преобразованиях. Рассмотрим основные свойства проекций.

1. Проекция точки есть точка (рис. 1.6).

2. Проекция прямой линии на плоскость есть прямая линия (рис. 1.7, *а*), за исключением прямых линий, параллельных направлению проецирования, которые проецируются в точку (рис. 1.7, *б*).

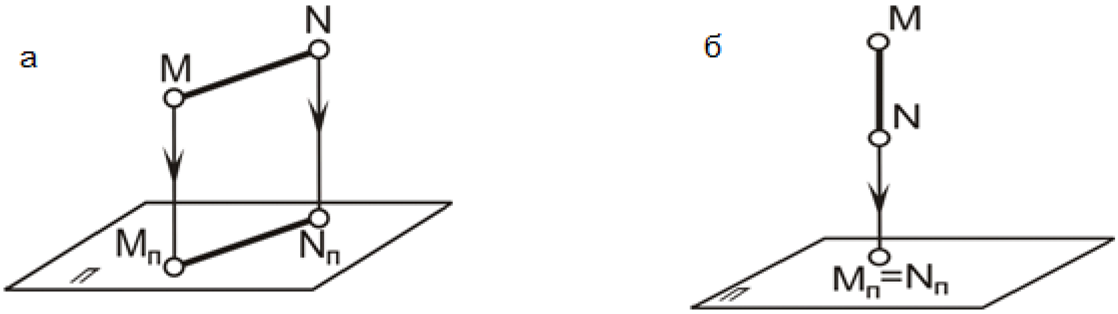


Рис. 1.7. Свойство 2. Проецирование прямой линии: *а* – общий случай; *б* – частный случай

3. Проекция точки, принадлежащей прямой, есть точка, принадлежащая этой прямой (рис. 1.8).

• Примечание. Свойства 1, 2, 3 являются общими для центрального и параллельного проецирования.

4. Если две прямые в пространстве пересекаются, то и проекции их пересекаются. (рис. 1.9).

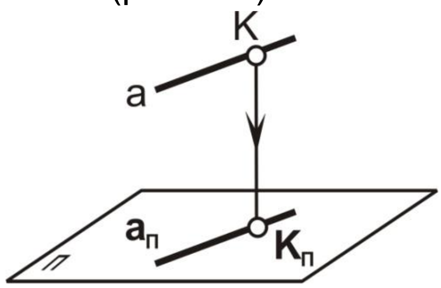


Рис. 1.8. Свойство 3. Проецирование точки, принадлежащей прямой линии

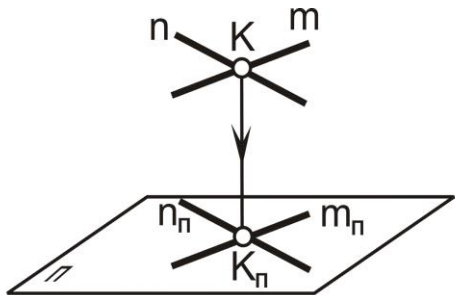


Рис. 1.9. Свойство 4. Проецирование пересекающихся прямых линий

5. Проекции параллельных прямых линий параллельны и имеют одно направление, а длины их находятся в таком же соотношении, как и длины самих отрезков (рис. 1.10).

6. Проекция точки делит проекцию отрезка в том же отношении, в каком точка делит отрезок (рис. 1.11).

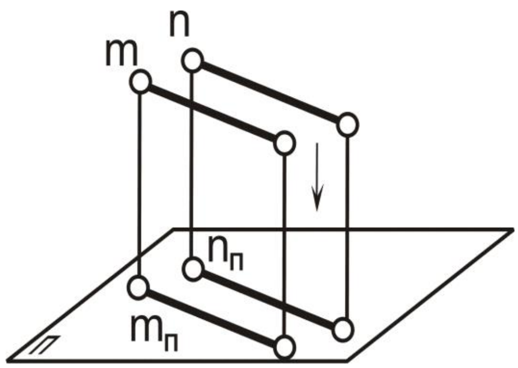


Рис. 1.10. Свойство 5. Проецирование параллельных прямых линий

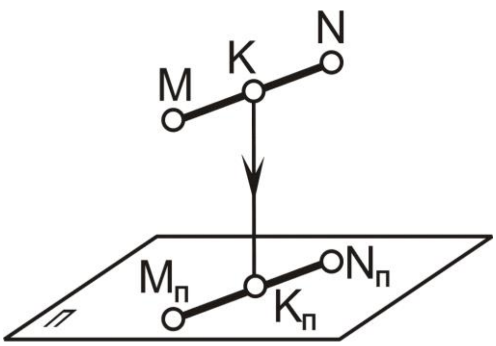


Рис. 1.11. Свойство 6. Проецирование отношения отрезков прямой линии

- Примечание. Свойства 4, 5, 6 характерны только для параллельного проецирования.

7. Если прямая линия либо плоская фигура параллельна плоскости проекций, то она проецируется на эту плоскость в натуральную величину (рис. 1.12).

8. При параллельном переносе плоскости проекций величина проекций остается неизменной (рис. 1.13).

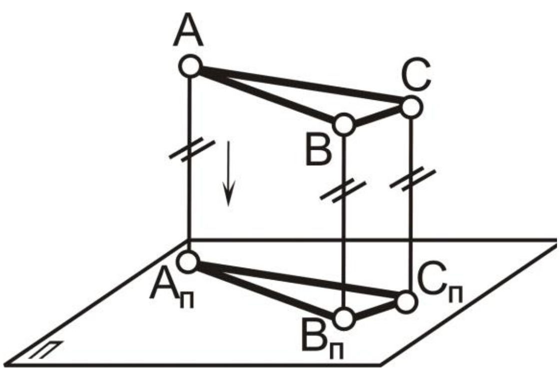


Рис. 1.12. Свойство 7. Проецирование плоской фигуры (треугольника)

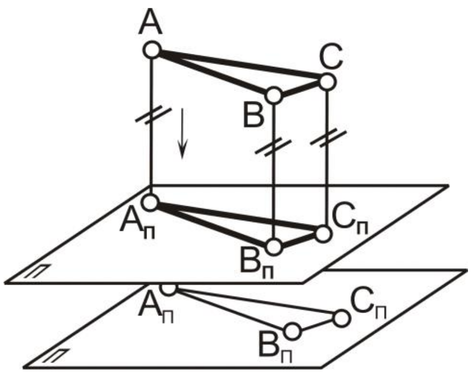


Рис. 1.13. Свойство 8. Проецирование плоскости при параллельном переносе

9. Если одна сторона прямого угла параллельна плоскости проекций, то угол на эту плоскость проецируется в натуральную величину (рис. 1.14).

Доказательство. Дан прямой угол ABC, у которого по условию прямая (BC) $\perp$ (AB) и (BC) || П (плоскости проекций). S – направление проецирующего луча. По построению прямая (BC) $\perp$ ($BB_п$) (проецирующему лучу). Следовательно, прямая BC $\perp$ β (AB x $BB_п$), так как она перпендикулярна к двум пересекающимся прямым, лежащим в этой плоскости. По условию прямая ($B_пC_п$) || (BC), поэтому ($B_пC_п$) $\perp$ β, т. е. и прямой ($A_пB_п$) этой плоскости. Следовательно, угол между прямыми ($A_пB_п$) и ($B_пC_п$) равен 90°, что и требовалось доказать.

- Примечание. Свойства 7, 8, 9 справедливы для прямоугольного проецирования.

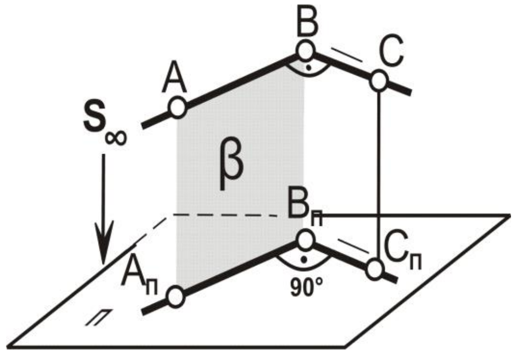


Рис. 1.14. Свойство 9. Проецирование прямого угла

1.4. Выводы по теме

1. Методом начертательной геометрии является графический метод получения изображения на плоскости, основанный на операции проецирования. Изображение, полученное в результате проецирования, называется проекцией.

2. Аппарат проецирования включает следующие элементы:
– геометрический образ (оригинал);
– проецирующий луч;
– плоскость проекций;
– проекцию.

3. Различают центральное и параллельное проецирование. Если все проецирующие лучи исходят из собственной точки (точки, находящейся в обозримом пространстве), проецирование называется центральным.

4. Параллельное проецирование можно рассматривать как частный случай центрального проецирования, при котором центр проекций удален в бесконечность.

5. При параллельном проецировании, если направление проецирования перпендикулярно плоскости проекций, проекции называют прямоугольными или ортогональными, в остальных случаях – косоугольными.

Ключевые слова

- Проецирование
- Проекция
- Плоскость проекций
- Проецирующий луч
- Центральное проецирование
- Параллельное проецирование
- Косоугольное проецирование
- Прямоугольное (ортогональное) проецирование
- Свойства проецирования

Вопросы для самопроверки

1. Назовите основной метод начертательной геометрии.
2. Какие геометрические элементы включает в себя аппарат проецирования?
3. Назовите основные способы проецирования и дайте им определения.
4. Определите основные свойства проецирования.

2. ПОСТРОЕНИЕ ОРТОГОНАЛЬНОГО ЧЕРТЕЖА

2.1. Построение чертежа по схеме Монжа

Процесс проецирования, рассмотренный в разд. 1, позволяет строить изображения по заданному оригиналу, т. е. решать прямую задачу начертательной геометрии – построение проекций оригинала методом проецирования. Наряду с этим возникает обратная задача – восстановление оригинала по его проекциям.

Данная задача реализуется в общепринятой схеме построения обратимого чертежа[3], применяемой в начертательной геометрии.

Как уже было сказано выше, основные принципы построения обратимых чертежей изложены Гаспаром Монжем – крупным французским геометром конца XVIII начала XIX в.

По схеме Монжа оригинал проецируется ортогонально на две взаимно-перпендикулярные плоскости проекций $П_1$ и $П_2$, называемые горизонтальной и фронтальной плоскостями проекций (рис. 2.1).

Плоскости проекций делят пространство на четыре части – четверти (квадранты), которые нумеруются в порядке, показанном на рис. 2.1, *а*. Плоскости $П_1$ и $П_2$ пересекаются по линии, которая является осью X.

Для того, чтобы перейти от пространственной формы (рис. 2.1.а) к плоскому чертежу (рис. 2.1, *б*), надо совместить $П_1$ и $П_2$ в одну плоскость. Полученный чертеж называют эпюром[4] Монжа.

[3] Обратимый чертеж – чертеж, геометрически равноценный изображаемой фигуре, позволяющий воспроизвести (реконструировать) оригинал.

[4] Эпюр [фр. epure] – чертеж.

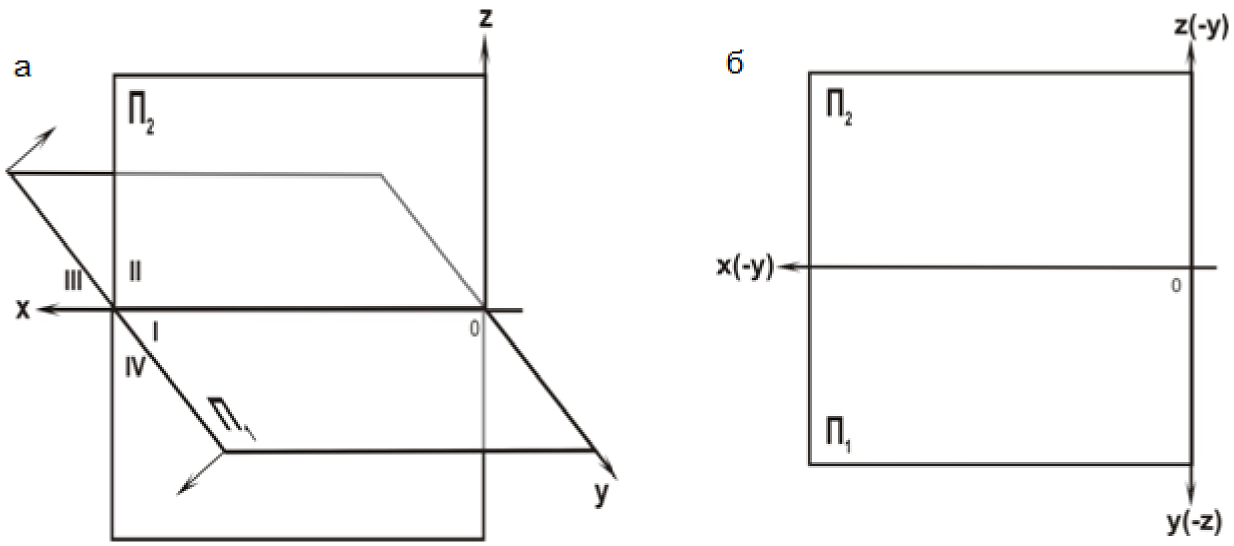


Рис. 2.1. Система плоскостей проекций $П_1П_2$: *а* – наглядное изображение; *б* – эпюр Монжа

2.2. Построение чертежей в декартовой системе координатных плоскостей проекций

Из практики исследования видно, что построение изображений в системе двух взаимно-перпендикулярных плоскостей проекций не всегда даёт однозначно полное преставление о форме и размерах оригинала (геометрического образа). Для решения данной проблемы вводят систему трёх взаимно-перпендикулярных плоскостей, дополняя систему двух плоскостей $П_1П_2$ профильной плоскостью $П_3$ (рис. 2.2).

Таким образом, в систему трех плоскостей проекций входят:

$П_1$ – горизонтальная плоскость проекций;

$П_2$ – фронтальная плоскость проекций;

$П_3$ – профильная плоскость проекций.

Для определения положения оригинала в пространстве по ортогональным проекциям Монжа наиболее удобно использовать совмещение данной модели системы трёх плоскостей проекции с системой координат, предложенной французским математиком Декартом[5] (рис. 2.3).

---

[5] Декарт Рене (1596–1650) – французский математик и философ, предложивший систему координат для положения систем точек в пространстве.

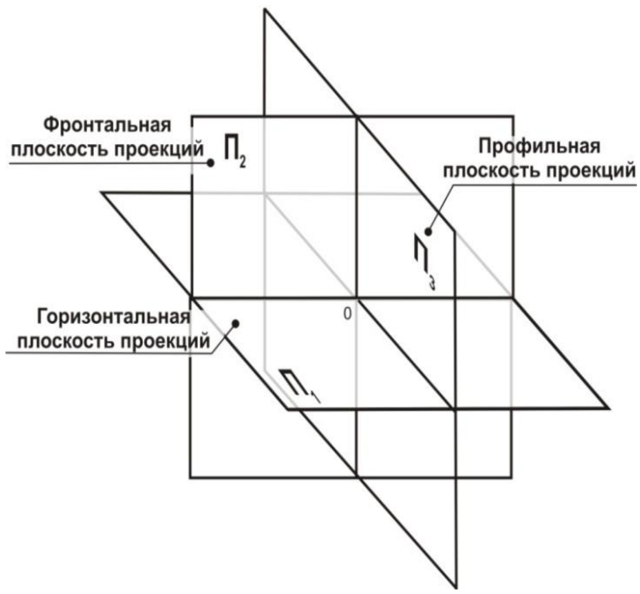


Рис. 2.2. Наглядное изображение системы плоскостей проекций $П_1П_2П_3$

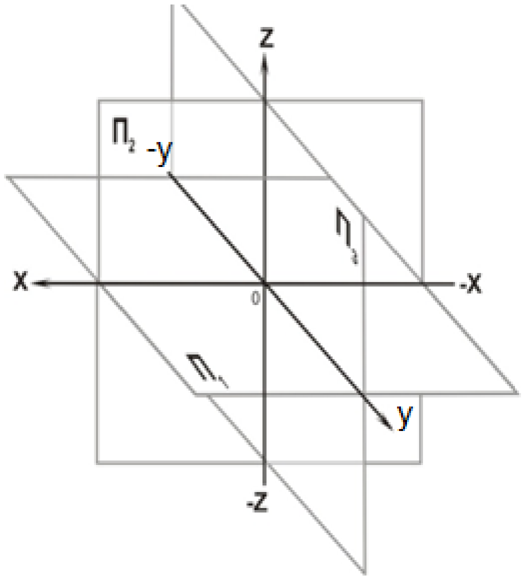


Рис. 2.3. Наглядное изображение совмещенной системы координатных осей X, Y, Z и системы плоскостей проекций $П_1П_2П_3$

Пересекаясь, координатные плоскости делят пространство на 8 частей – октантов[6]. Линии пересечения плоскостей называют осями координат, их обозначают x, y, z. Точка пересечения осей – начало координат– точка О.

Ось ОХ называют осью абсцисс[7], ось ОУ – осью ординат[8], ось OZ – осью аппликат[9]. Координатные оси могут иметь положительные и отрицательные направления. По известным координатам можно определить номер октанта, в котором находится геометрический образ (рис. 2.4).

---

[6] Октант [лат. octans] – восьмая часть окружности.
[7] Абцисса [лат. abscissus] – отсеченная, отдельная.
[8] Ордината [лат. ordinatus] – подряд проведенная.
[9] Аппликата [лат. applicata] – приложенная.

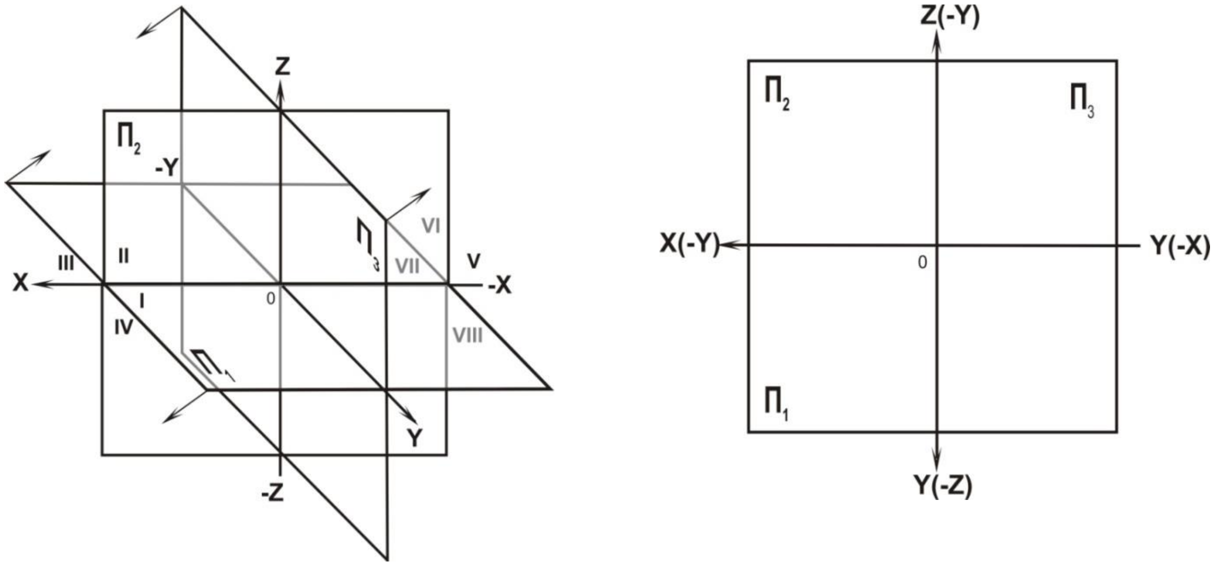


Рис. 2.4. Система плоскостей проекций $П_1П_2П_3$: наглядное изображениеи и комплексный чертёж

Таблица 2.1

Октант	*Координаты*		
	X	*Y*	*Z*
I	+	+	+
II	+	-	+
III	+	-	-
IV	+	+	-
V	-	+	+
VI	-	-	+
VII	-	-	-
VIII	-	+	-

В табл. 2.1 рассмотрены знаки координат в 1-м – 8-м октантах.

Для получения комплексного чертежа[10] в системе трех плоскостей проекций, плоскости вращают вокруг осей OY и OZ в следующем порядке:

1. Плоскость $П_1$ совмещают вращением вокруг оси x с плоскостью $П_2$.
2. Плоскость $П_3$ совмещают вращением вокруг оси z с плоскостью $П_2$ (рис. 2.4). При этом ось OY как бы «раздваивается» и повторяется в двух плоскостях: на горизонтальной плоскости – для построения горизонтальных проекций и на профильной – для построения профильных проекций.

На рис. 2.5 представлен результат проецирования геометрического образа в системе трех плоскостей проекций.

[10] Комплексный чертеж – чертеж, состоящий из двух или более связанных между собой проекций оригинала.

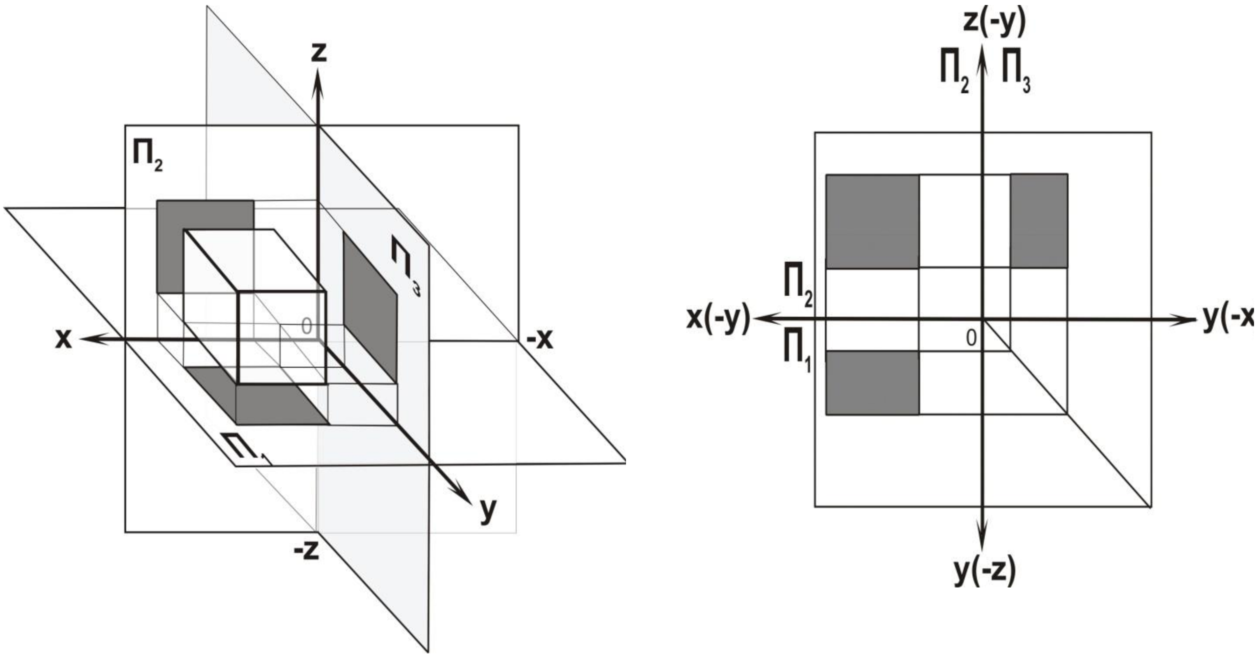


Рис. 2.5. Проецирование призмы в системе плоскостей проекций $П_1П_2П_3$: наглядное изображение и комплексный чертёж

2.3. Построение безосного чертежа

В технических чертежах координатные оси плоскостей не чертят, их - подразумевают. Такие чертежи называют безосными. Плоскости проекций, условно расположенные относительно оригинала, можно в воображении смещать параллельно самим себе (рис. 2.6).

По безосному чертежу можно судить только об относительном положении оригиналов, так как он не содержит числовых значений координат точек оригинала.

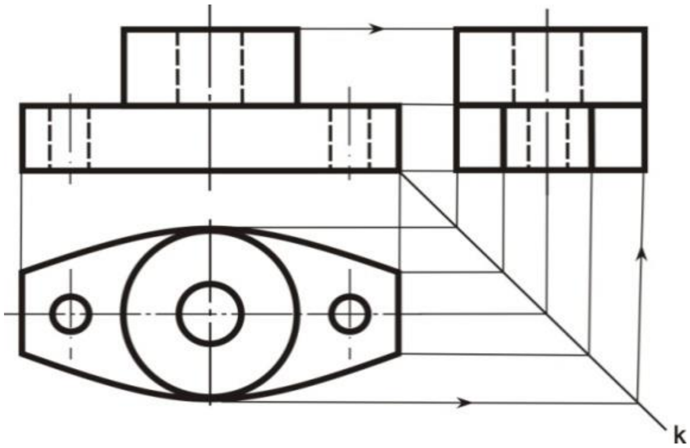


Рис. 2.6. Безосный чертеж

Отсутствие на чертеже осей не мешает определить третью проекцию любой точки по двум заданным проекциям, если на чертеже есть три проекции хотя бы одной точки.

Построения осуществляются с помощью постоянной прямой чертежа – биссектрисы прямого угла, образованного горизонтальной линией связи, которую проводят из горизонтальной проекции точки, заданной тремя проекциями, и вертикальной линии связи, опущенной из профильной проекции той же точки.

2.4. Выводы по теме

1. Чертежи, полученные с помощью параллельного (ортогонального) проецирования основаны на методе Г. Монжа, где проецирование осуществляется на две взаимно-перпендикулярные плоскости $П_1П_2$. На практике, чтобы сделать проекционный чертеж более ясным, используют третью профильную плоскость проекций $П_3$, расположенную перпендикулярно к $П_1$ и $П_2$.

2. Комплексным чертежом называется - чертеж, состоящий из двух или более связанных между собой проекций оригинала развернутых на одну плоскость.

3. Обратимый комплексный чертеж должен содержать не менее двух проекций геометрической фигуры.

5. Для того чтобы чертеж геометрического образа был обратим, он должен содержать столько проекций, чтобы каждая ее точка имела не менее трёх координат.

6. Чтобы определить положение геометрического образа в трехмерном пространстве, применяют декартовую систему координат.

Ключевые слова

- Эпюр
- Комплексный чертеж
- Система координатных плоскостей проекций
- Оси координат
- Обратимость чертежа
- Безосный чертеж
- Постоянная прямая чертежа k

Вопросы для самопроверки

1. Какой вид проецирования используется при построении чертежей по схеме Монжа?
2. Какие плоскости проекций участвуют в проецировании по схеме Монжа?
3. Что такое эпюр Монжа?
4. Опишите механизм образования эпюра Монжа.
5. Что такое комплексный чертеж?
6. Что необходимо для определения положения геометрического образа в пространстве?
7. Как образуется комплексный чертеж в системе трёх плоскостей проекций $П_1П_2П_3$?
8. Что такое безосный чертеж?

3. КОМПЛЕКСНЫЙ ЧЕРТЁЖ ТОЧКИ

Геометрические образы делятся на: *линейные* (точка, прямая, плоскость), *нелинейные* (кривая линия, поверхность), *составные* (многогранники, одномерные и двумерные обводы).

Рассмотрим способы их образования, графического задания и возможные варианты положения по отношению к плоскостям проекций.

3.1. Построение комплексного чертежа точки

Точкой в геометрии называют некий объект, у которого нет формы, размера, площади. Точка является нулемерным объектом. Точка - это объект, имеющий бесконечно-малые размеры, но имеющий точно заданные координаты.

Точка [11] одно из основных понятий геометрии. В современной математике точками называют элементы различной природы, из которых состоят пространства, например, в евклидовом пространстве точкой называют упорядоченную совокупность из n чисел.

В начертательной геометрии положение точки в пространстве можно определить её координатами. Замечательным признаком является то, что координата, характеризующая удаление точки от плоскости проекций, одноимённа с осью, которая не присутствует при образовании этой плоскости проекций. Так, удаление точки от $П_2$ измеряется координатой Y, а сама фронтальная плоскость проекций $П_2$ образуется пересечением осей OX и OZ.

Таким образом, каждая из трёх проекций точки характеризуется двумя координатами, их название соответствует названиям осей, которые образуют соответствующую плоскость проекций: горизонтальная – $A_1(X_A;Y_A)$; фронтальная – $A_2(X_A;Z_A)$; профильная – $A_3(Y_A;Z_A)$.

Трансляция координат между проекциями осуществляется с помощью линий связи. Так, в системе плоскостей проекций $П_1П_2$ общая для фронтальной и горизонтальной проекций координата x транслируется вертикальной линией связи A_2A_1 , перпендикулярной оси OX.

[11] Математический энциклопедический словарь / гл. ред. Ю.В. Прохоров. М.: Сов. энциклопедия. 1988.

Таблица 3.1

Алгоритм построения наглядного изображения точки по координатам

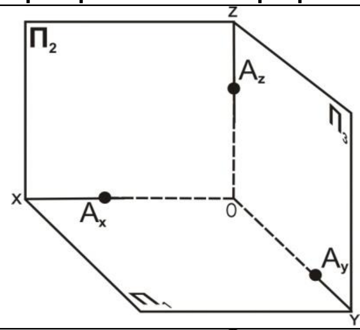
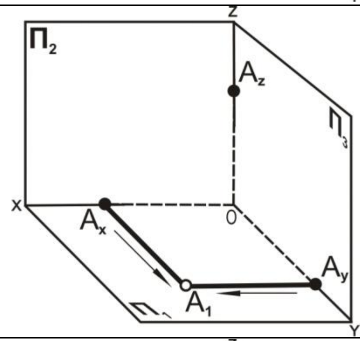
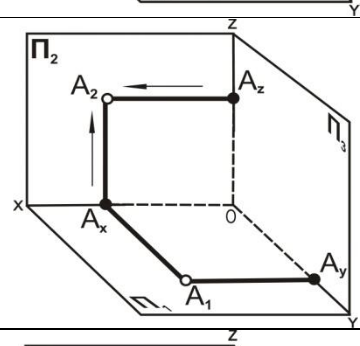
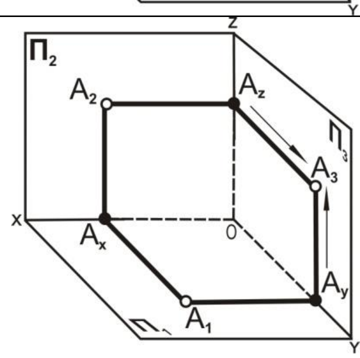
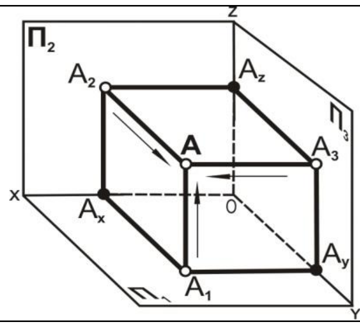
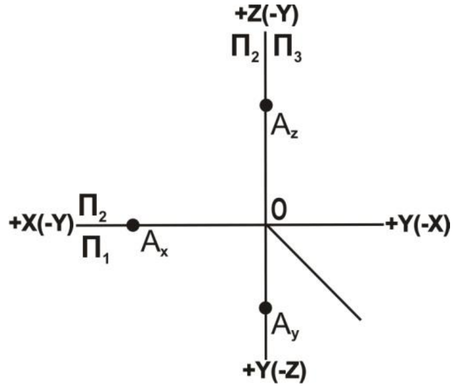
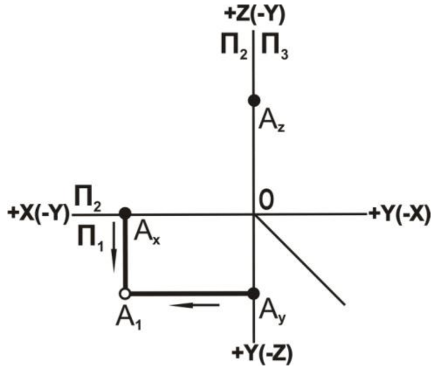
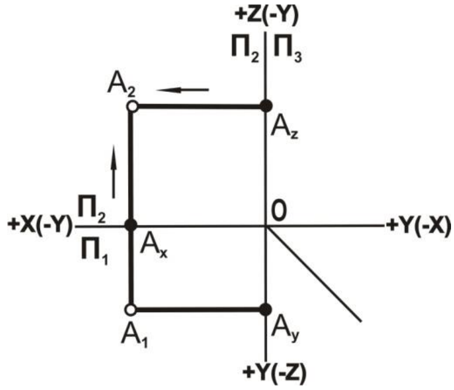
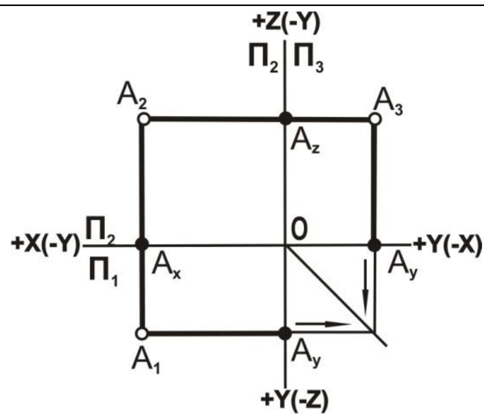
Словесная форма	Графическая форма
1. Отложить на осях X, Y, Z соответствующие координаты точки A. Получим точки A_x, A_y, A_z	
2. Горизонтальная проекция A_1 находится на пересечении линий связи: из точки A_x - прямая линия параллельно оси Y, из точки A_y, - прямая линия параллельно оси X.	
3. Фронтальная проекция A_2 находится на пересечении линий связи из точек A_x и A_z, проведенных параллельно осям Z и X	
4. Профильная проекция A_3 находится на пересечении линий связи из точек A_y и A_z, проведенных параллельно осям Z и Y	
5. Точка A находится на пересечении линий связи, проведенных ортогонально из точек A_1, A_2 и A_3.	

Таблица 3.2

Алгоритм построения комплексного чертежа точки по координатам

Словесная форма	Графическая форма
1. Отложить на осях X, Y, Z соответствующие координаты точки A. Получаем точки A_x, A_y, A_z	
2. Горизонтальная проекция A_1 находится на пересечении линий связи из точек A_x и A_y, проведенных параллельно осям Y и X	
3. Фронтальная проекция A_2 находится на пересечении линий связи из точек A_x и A_z, проведенных параллельно осям Z и X	
4. Профильная проекция A_3 находится на пересечении линий связи из точек A_z и A_y, проведенных параллельно осям Y и Z	

По двум данным проекциям можно построить проекции точки либо с помощью координат, либо при помощи линий связи. Чтобы получить профильную проекцию – из координаты Z провести линию связи параллельно оси X (горизонтальную). Параметр Z можно взять с фронтальной проекции. Параметр Y переносят с горизонтальной проекции, используя постоянную прямую чертежа K. У начала координат формируется квадрат со стороной, равной координате Y оригинала, что обеспечивает передачу координаты Y между горизонтальной и профильной проекциями. В табл. 3.1 и 3.2 представлены общие алгоритмы построения точки A по координатам в пространственной модели системы трёх плоскостей проекций $П_1П_2П_3$ и на комплексном чертеже.

3.2. Положение точки относительно плоскостей проекций

Положение точки в пространстве относительно плоскостей проекций определяется её координатами. Координатой X определяется удалённость точки от плоскости $П_3$ (проекция на $П_2$ или $П_1$), координатой У – удалённость от плоскости $П_2$ (проекция на $П_3$ или $П_1$), координатой Z – удаленность от плоскости $П_1$ (проекция на $П_3$ или $П_2$). В зависимости от значения этих координат точка в пространстве может занимать как общее, так и частное положение по отношению к плоскостям проекций (рис. 3.1).

Точка общего положения. Координаты точки общего положения не равны нулю ($x \neq 0, y \neq 0, z \neq 0$), и точка может располагаться в одном из восьми октантов в зависимости от знака координат (табл. 2.1).

На рис. 3.2 даны чертежи точек общего положения. Анализ их изображений позволяет сделать вывод, что они располагаются в следующих октантах пространства: A(+X;+Y; +Z) $\subset$ I октанту; B(+X;+Y;-Z) $\subset$ IV октанту; C(-X;+Y; +Z) $\subset$ V октанту; D(+X;+Y;+Z) $\subset$ II октанту.

Точки частного положения. У точки частного положения может одна из координат равняться нулю, поэтому проекция точки лежит на соответствующем поле проекций (плоскости проекций), две другие – на осях проекций. На рис. 3.3 такими точками являются точки A, B, C, D, G. Если $X_A = 0$, то точка $A \subset П_3$. Если $X_B = 0$, то $B \subset П_3$. Если $Y_C = 0$, то точка $C \subset П_2$. Если $Z_D = 0$, то точка; $D \subset П_1$.

Точка может принадлежать сразу двум плоскостям проекций, если она лежит на линии пересечения этих плоскостей – оси координат. У таких точек не равна нулю только координата на этой оси, а две другие координаты равны нулю. На рис. 3.3 такой точкой является точка G ($G \subset OZ$, то точка $X_G = 0$, $Y_G = 0$, $Z_G \neq 0$).

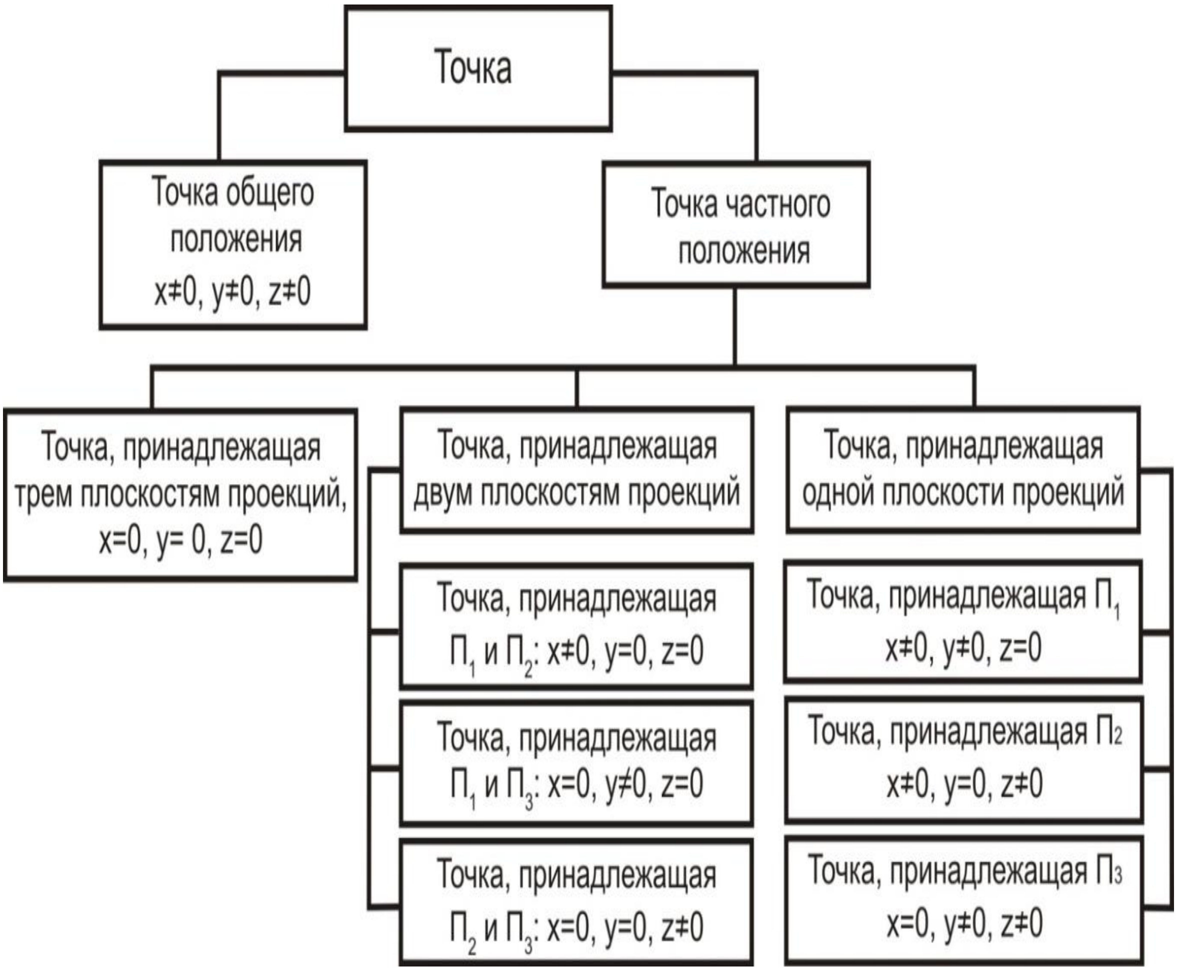


Рис. 3.1. Классификация точек

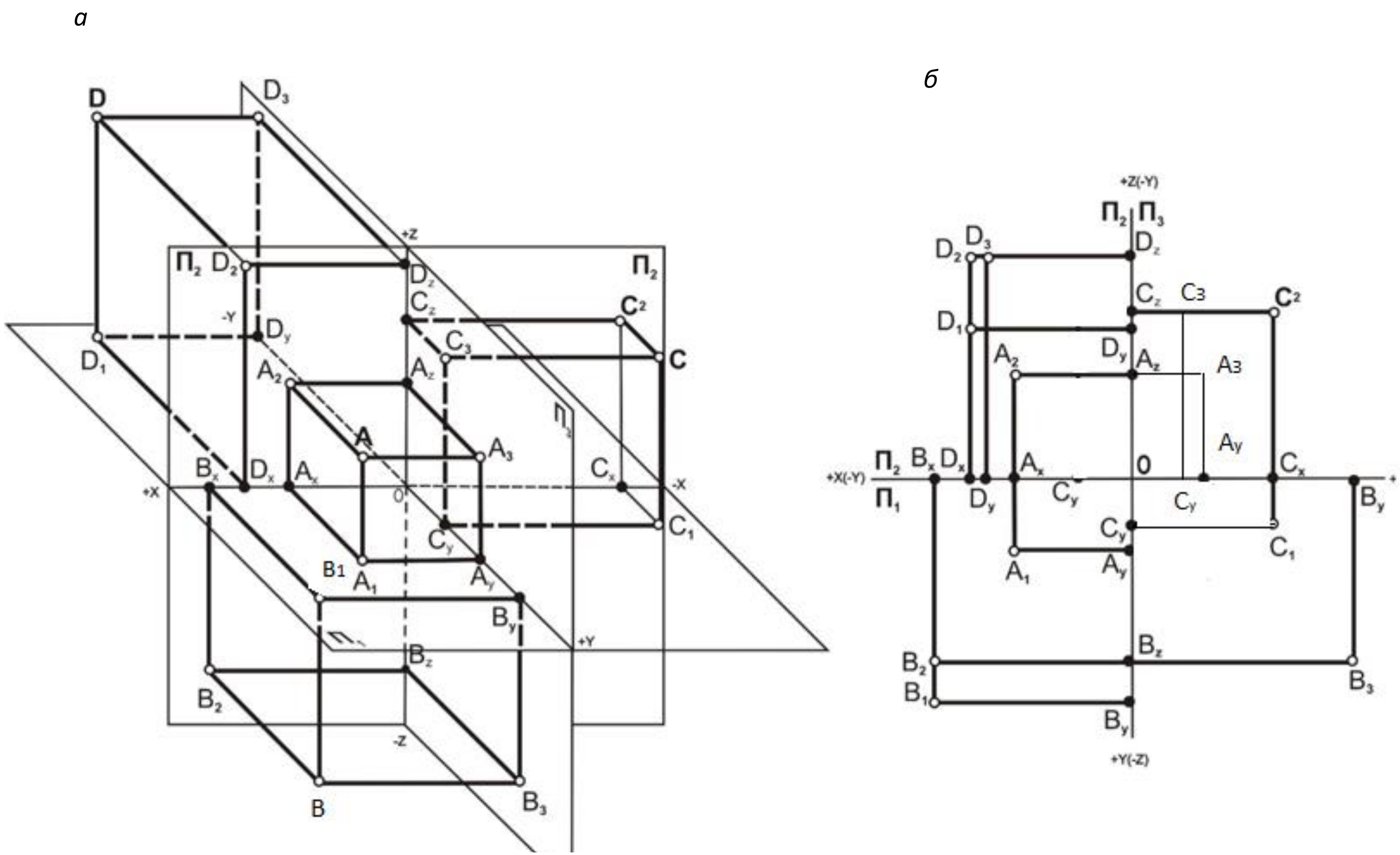
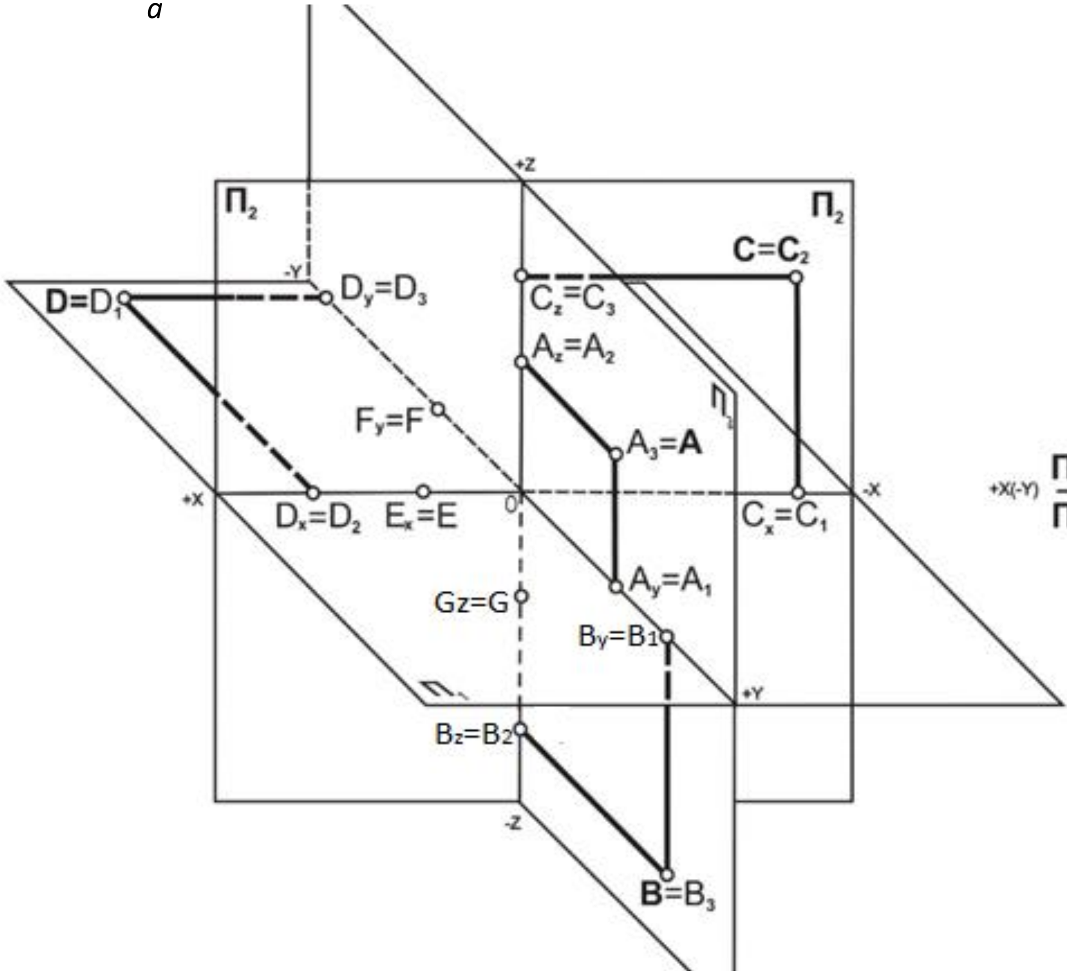


Рис. 3.2. Проецирование точки общего положения в системе плоскостей проекций $П_1П_2П_3$: *а* – наглядное изображение; *б* – комплексный чертёж

а



б

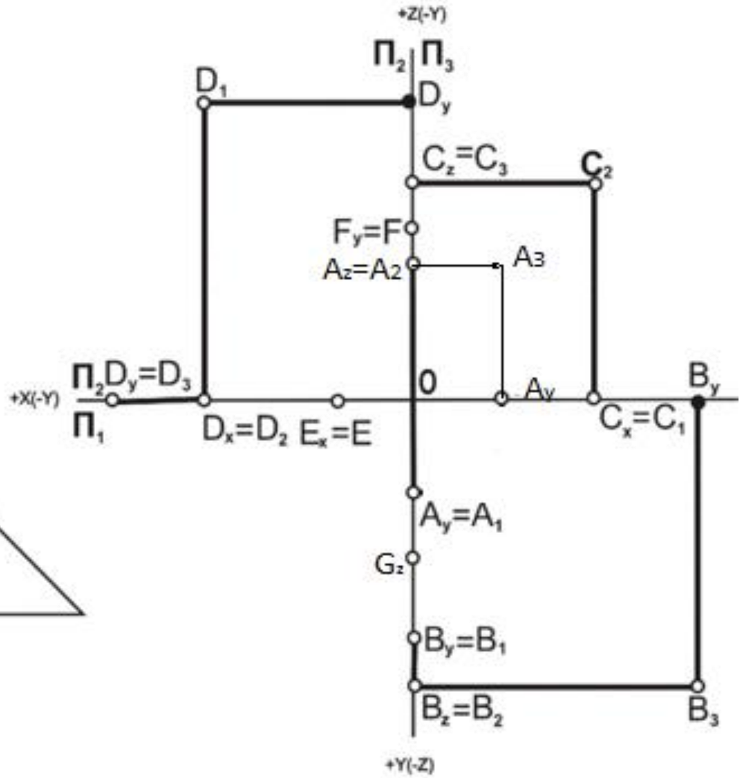


Рис. 3.3. Проецирование точки частного положения в системе плоскостей проекций $П_1П_2П_3$: *а* – наглядное изображение; *б* – комплексный чертёж

3.3. Взаимное положение точек в пространстве

Рассмотрим три варианта взаимного расположения точек в зависимости от координат, определяющих их положение в пространстве.

1. На рис. 3.4 точки А и В имеют различные координаты.

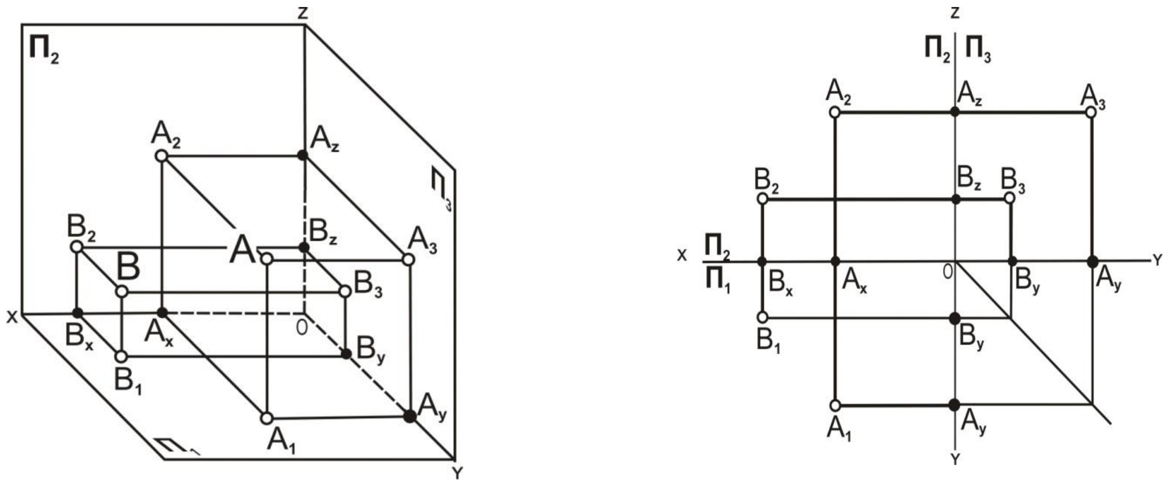


Рис. 3.4. Варианты взаимного расположения точек: наглядное изображение и комплексный чертёж

Их взаимное расположение можно оценить по удаленности от плоскостей проекций: $Y_A>Y_B$, тогда точка А расположена дальше от плоскости $П_2$ и ближе к наблюдателю, чем точка В; $Z_A>Z_B$, тогда точка А расположена дальше от плоскости $П_1$ и выше от наблюдателя, чем точка В; $X_A<X_B$, тогда точка В расположена дальше от плоскости $П_3$ и левее от наблюдателя, чем точка А.

2. На рис. 3.5 представлены точки A, B, C, D, у которых одна из координат совпадает, а две другие отличаются. Их взаимное расположе ние можно оценить по удалённости от плоскостей проекций следующим

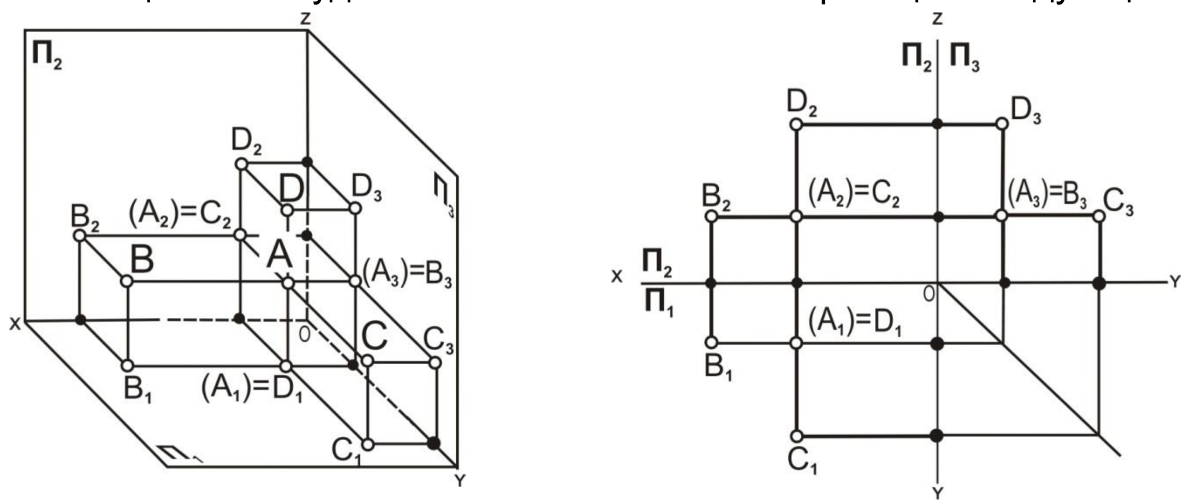


Рис. 3.5. Конкурирующие точки: наглядное изображение и комплексный чертёж

образом:

$Y_A=Y_B=Y_D$, значит точки A, B и D равноудалены от плоскости $П_2$, их горизонтальные и профильные проекции расположены соответственно на прямых $[A_1B_1] \parallel OX$ и $[A_3D_3] \parallel OZ$. Геометрическим местом таких точек служит плоскость, параллельная $П_2$;

$Z_A=Z_B=Z_C$, значит точки A, B и C равноудалены от плоскости $П_1$, их фронтальные и профильные проекции расположены соответственно на прямых $[A_2B_2] \parallel OX$ и $[A_3C_3] \parallel OY$. Геометрическим местом таких точек служит плоскость, параллельная $П_1$;

$X_A=X_C=X_D$, значит точки A, C и D равноудалены от плоскости $П_3$, их горизонтальные и фронтальные проекции расположены соответственно на прямых $[A_1C_1] \parallel OY$ и $[A_2D_2] \parallel OZ$. Геометрическим местом таких точек служит плоскость, параллельная $П_3$.

3. Если у точек равны две одноименные координаты, то они называются *конкурирующими*. Конкурирующие точки расположены на одной проецирующей прямой. На рис. 3.5 даны три пары таких точек, у которых: - $X_A=X_D$; $Y_A=Y_D$; $Z_D > Z_A$;

- $X_A=X_C$; $Z_A=Z_C$; $Y_C > Y_A$;

- $Y_A=Y_B$; $Z_A=Z_B$; $X_B > X_A$.

Различают горизонтально конкурирующие точки - A и D, расположенные на вертикальной прямой AD, фронтально конкурирующие точки - A и C, расположенные на горизонтальной прямой перпендикулярной $П_2$ - AC, профильно конкурирующие точки - A и B, расположенные на горизонтальной прямой перпендикулярной $П_3$ - AB.

3.4. Выводы по теме

1. Точка – линейный геометрический образ, одно из основных понятий начертательной геометрии.

2. Положение точки в пространстве можно определить тремя координатами (XYZ).

3. Каждую проекцию можно построить по двум координатам: горизонтальная проекция точки A – A_1 (X_A; Y_A);

фронтальная проекция точки A – A_2 (X_A;Z_A);

профильная проекция точки A – A_3 (Y_A;Z_A).

4. Трансляция координат между проекциями осуществляется с помощью линий связи. По двум проекциям можно построить третью проекцию точки либо с помощью координат, либо при помощи линий связи.

5. Точка по отношению к плоскостям проекций может занимать в пространстве как общее, так и частное положение.

6. Точка общего положения – точка, не принадлежащая ни одной из плоскостей проекций, т. е. лежащая в пространстве между плоскостями

проекций. Координаты точки общего положения не равны нулю ($x \neq 0, y \neq 0, z \neq 0$).

7. Точка частного положения – это точка, принадлежащая одной, двум или трем плоскостям проекций одновременно.

8. Конкурирующие точки – точки, одноименные координаты которых совпадают. Существуют горизонтально конкурирующие точки, фронтально конкурирующие точки, профильно конкурирующие точки.

Ключевые слова

- Точка
- Координаты точки
- Точка общего положения
- Точка частного положения
- Конкурирующие точки
- Линии связи

Способы деятельности, необходимые для решения задач:

– построение наглядного изображения точки по заданным координатам в системе трех плоскостей проекций;

– построение комплексного чертежа точки по заданным координатам в системе трех плоскостей проекций.

Вопросы для самопроверки

1. Как устанавливается связь координат точек с координатами проекций точек на комплексном чертеже в системе трех плоскостей проекций $П_1П_2П_3$?

2. Какими координатами определяется удалённость точек от горизонтальной, фронтальной, профильной плоскостей проекций?

3. Какие координаты и проекции точки будут изменяться, если точка перемещается в направлении, перпендикулярном профильной плоскости проекций $П_3$?

4. Какие координаты и проекции точки будут изменяться, если точка перемещается в направлении, параллельном оси OZ?

5. Какими координатами, определяется горизонтальная фронтальная и профильная проекция точки?

7. В каком случае проекция точки совпадает с самой точкой пространства и где располагаются две другие проекции этой точки?

8. Может ли точка принадлежать одновременно трём плоскостям проекций и в каком случае?

9. Как называют точки, одноимённые проекции которых совпадают?

10. Каким образом можно определить - какая из двух точек ближе к наблюдателю, если их фронтальные проекции совпадают?

Задания для самостоятельного решения

1. Построить наглядное изображение точек A, B, C, D относительно плоскостей проекций $П_1$, $П_2$. Положение точки заданы своими проекциями (рис. 3.6).

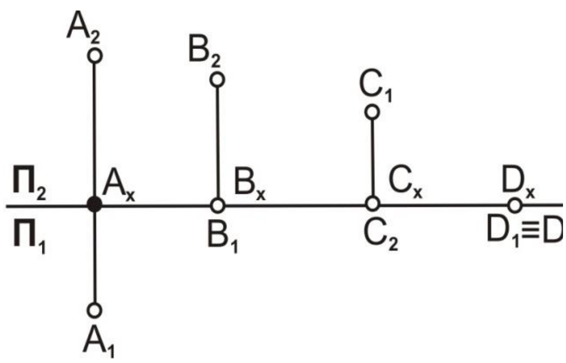


Рис. 3.6. Условие к заданию 1

2. Построить наглядное изображение и комплексный чертеж точек A и B по заданным координатам в системе двух плоскостей проекций $П_1$ и $П_2$: A(13; 5; 20), B(6; 5; –20). Построить проекции точки C, расположенной симметрично точке A относительно фронтальной плоскости проекций $П_2$.

3. Построить наглядное изображение и комплексный чертеж точек A, B, C в системе трех плоскостей проекций по заданным координатам: A(–20; 0; 0), B(–30; -20; 10), C(–10, –15, 0). Построить точку D, расположенную симметрично точке C относительно оси OX.

3.5. Решение типовой задачи (задача №1 из РГР «Альбом задач по начертательной геометрии»)

Задача 1. Дано: координаты X, Y, Z точек A,B,C,D,E,F (табл. 3.3)

Таблица 3.3

Координаты точек

Ось	A	B	C	D	E	F
X	0	10	20	–20	0	–10
Y	0	–50	10	–30	0	30
Z	5	–40	30	0	0	15

Требуется: построить по заданным координатам наглядное изображение и комплексный чертёж точек A, B, C, D, E, F в системе плоскостей проекций $П_1П_2П_3$.

План решения:

1. Проанализировать координаты точки. Сопоставить знаки координат с осями координат.
2. Определить четверть, в которой расположена точка.
3. Построить наглядное изображение системы трех плоскостей проекций (рис. 3.2).
4. Следовать этапам алгоритма построения наглядного изображения точки и ее проекций по координатам (табл. 3.1).

5. Следовать этапам алгоритма построения комплексного чертежа в системе трех плоскостей проекций (табл. 3.2).

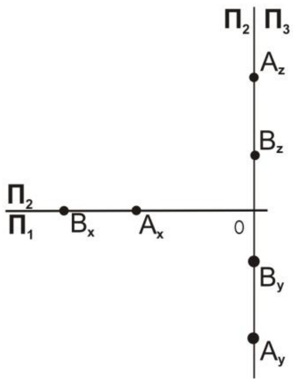
4. КОМПЛЕКСНЫЙ ЧЕРТЁЖ ПРЯМОЙ ЛИНИИ

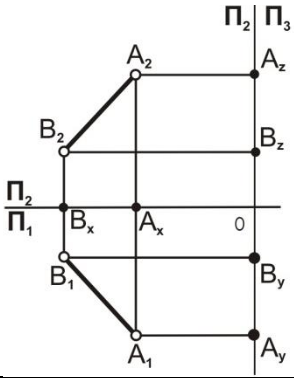
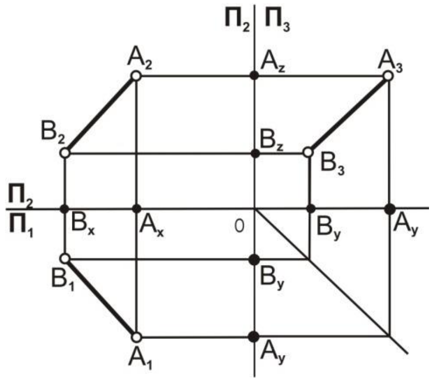
4.1. Построение комплексного чертежа прямой линии

Прямая линия – одномерный геометрический образ, имеющий только длину. Прямая – бесконечная линия. Один из способов задания прямой на эпюре – это две несовпадающие точки. На эпюре прямая линия задается двумя точками, принадлежащими ей. Таким образом, для получения комплексного чертежа прямой достаточно построить проекции двух её точек и соединить одноимённые проекции между собой: горизонтальную [A_1B_1], фронтальную [A_2B_2] и профильную [A_3B_3] проекции прямой линии. В табл. 4.1 дан алгоритм построения комплексного чертежа отрезка прямой линии по координатам двух её точек.

Таблица 4.1

Алгоритм построения проекций отрезка прямой линии

Словесная форма	Графическая форма
1. Отложить значения координат для точек A и B на осях x, y, z . Получаем: A_x, B_x на оси OX; A_y, B_y на оси OY; A_z B_z на оси OZ. *При построении этих точек необходимо учитывать знаки координат и откладывать их на осях в соответствующем направлении*	

2. Построить горизонтальные и фронтальные проекции точек A и B: $A_1(A_x; A_y)$, $B_1(B_x; B_y)$; $A_2(A_x; A_z)$, B_2 $(B_x;B_z)$. 3. Соединить A_1 с B_1. Получаем $[A_1B_1]$ – это проекция отрезка прямой линии на $П_1$ (горизонтальная). Соединить A_2 с B_2. Получаем $[A_2B_2]$ – это проекция отрезка прямой линии на $П_2$ (фронтальная).	
4. Строим профильные проекции точек A и B. Отложить значение координаты Y на оси OY профильной плоскости проекций. $A_3(A_y;\ A_z)$, B_3 $(B_y;\ B_z)$. Соединить A_3 с B_3. Получаем $[A_3B_3]$ - это проекция отрезка прямой линии на $П_3$ (профильная).	

4.2. Положение прямой линии относительно плоскостей проекций

По положению прямой линии относительно плоскостей проекций различают прямые общего положения и частного положения (рис. 4.1).

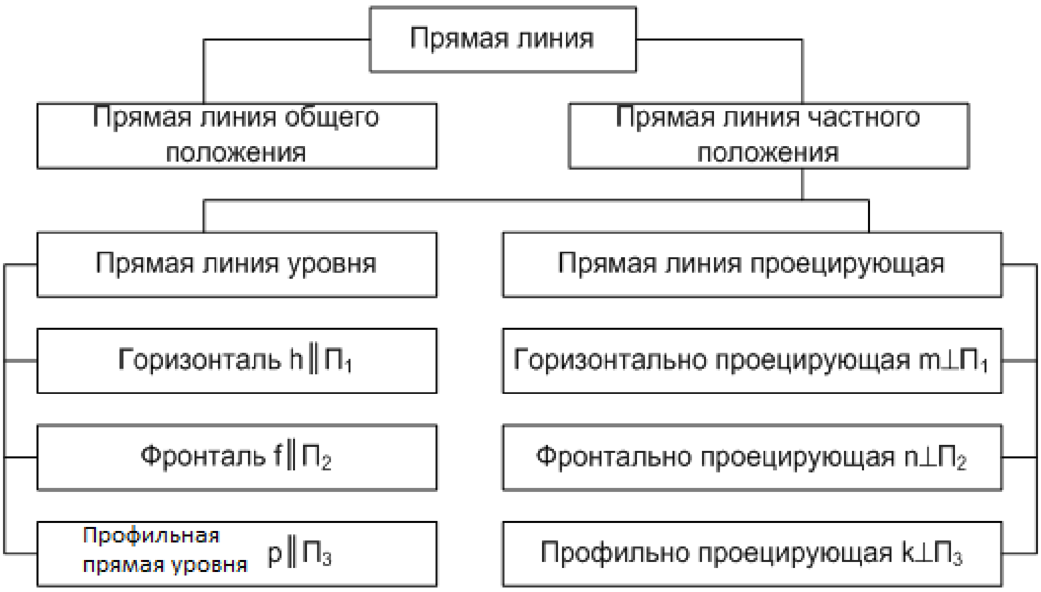


Рис. 4.1. Классификация прямых линий

Прямая линия общего положения – это прямая не параллельная и не перпендикулярная ни одной из плоскостей проекций. В системе плоскостей проекций $П_1П_2П_3$ прямая АВ будет иметь следующие проекции: $[A_1B_1]$ на $П_1$, $[A_2B_2]$ на $П_2$, и $[A_3B_3]$ на $П_3$ (рис. 4.2).

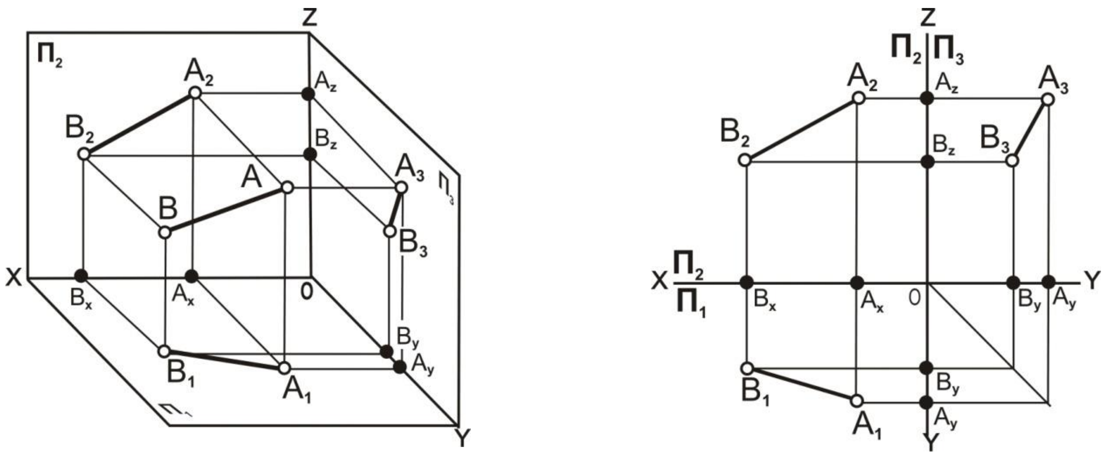


Рис. 4.2. Прямая линия общего положения: наглядное изображение и комплексный чертёж

Прямая линия частного положения – прямая, параллельная либо перпендикулярная одной из плоскостей проекций.

Прямая линия уровня – прямая, параллельная одной из плоскостей проекций.

Горизонталь h – прямая линия, параллельная горизонтальной плоскости проекций $П_1$ (рис. 4.3).

Свойства проекций горизонтали.

1. Горизонтальная проекция горизонтали h_1 (A_1B_1) равна натуральной величине отрезка, $[A_1B_1]=|AB|$.

2. Фронтальная и профильная проекции горизонтали параллельны осям проекций, h_2 - $[A_2B_2]$ II Ox, h_3 - $[A_3B_3]$ IIOY.

3. Угол наклона горизонтали к плоскости $П_2$ - β проецируется на плоскость $П_1$ в натуральную величину.

4. Горизонталь на комплексном чертеже определяется двумя проекциями h_1, h_2.

Фронталь *f* – прямая линия, параллельная фронтальной плоскости проекций $П_2$ (рис. 4.4).

Свойства проекций фронтали.

1. Фронтальная проекция фронтали $f_2(A_2B_2)$ равна натуральной величине отрезка, $[A_2B_2]=|AB|$.

2. Горизонтальная и профильная проекции фронтали параллельны осям проекций: f_1 - $[A_1B_1]$ II Ox, f_3 - $[A_3B_3]$ II OZ.

3. Угол наклона фронтали к плоскости $П_1$- α проецируется в натуральную величину на плоскость $П_2$.

4. Фронталь на комплексном чертеже определяется двумя проекциями f_1, f_2.

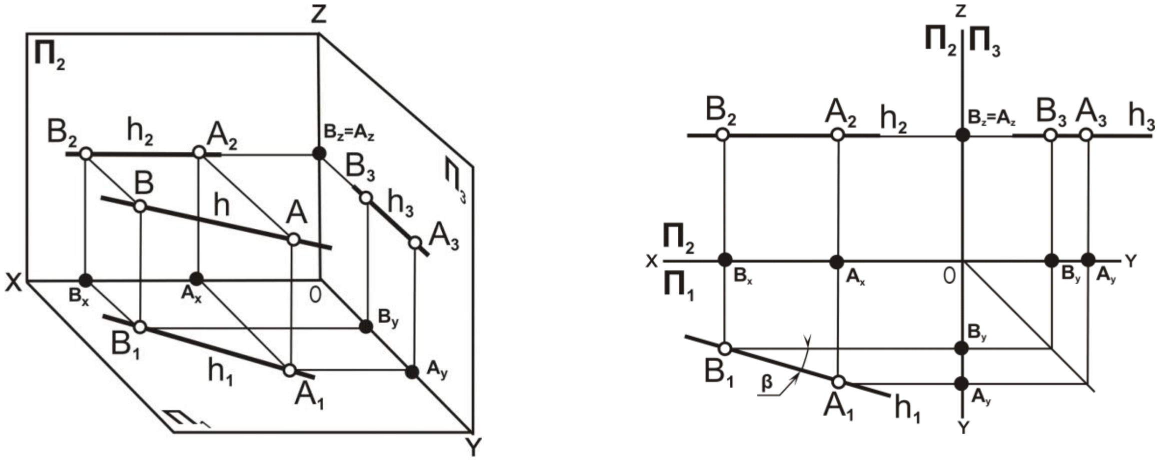


Рис. 4.3. Горизонталь h: наглядное изображение и комплексный чертёж

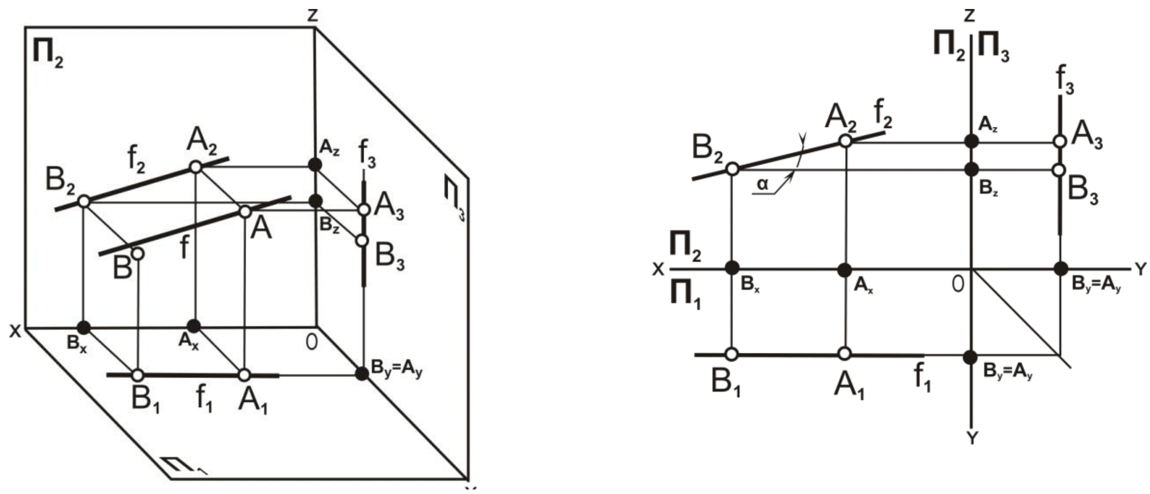


Рис. 4.4. Фронталь f: наглядное изображение и комплексный чертёж

Профильная прямая p – это прямая линия, параллельная профильной плоскости проекций $П_3$ (рис. 4.5).

Свойства проекций профильной прямой.

1. Профильная проекция профильной прямой $p_3(A_3B_3)$ равна натуральной величине отрезка, $[A_3B_3]=|AB|$.

2. Горизонтальная и фронтальная проекции параллельны осям проекций: p_1 - $[A_1B_1]$ II Oy, p_2 - $[A_2B_2]$ II OZ.

3. Углы наклона α и β проецируются в натуральную величину на плоскость $П_3$.

4. Профильная прямая на комплексном чертеже определяется двумя проекциями p_2, p_3.

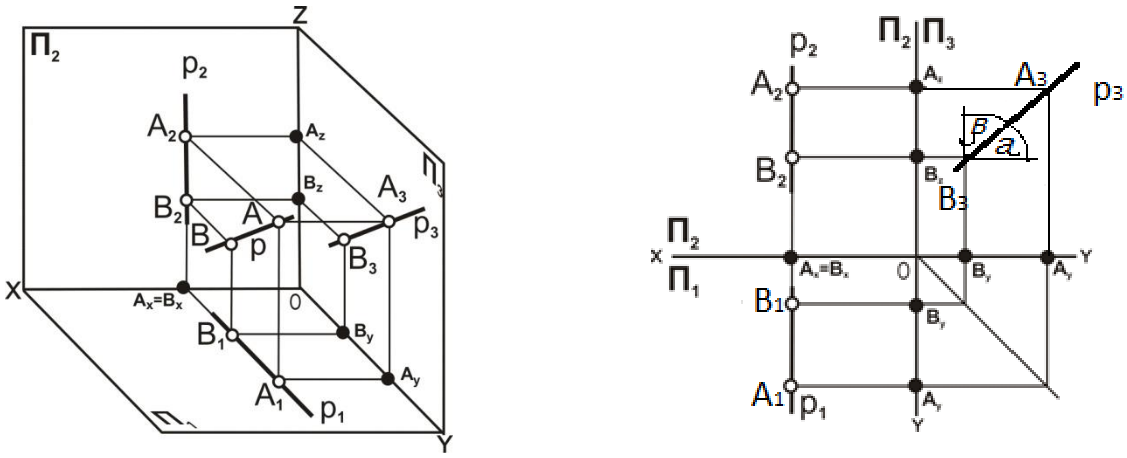


Рис. 4.5. Профильная прямая p: наглядное изображение и комплексный чертёж

Проецирующая прямая линия – это прямая, перпендикулярная плоскости проекций.

Горизонтально-проецирующая прямая – прямая, перпендикулярная горизонтальной плоскости проекций $П_1$ (рис. 4.6).

Свойства проекций горизонтально-проецирующей прямой.

1. Горизонтальная проекция прямой линии $m_1(A_1B_1)$ вырождается в точку, $A_1 \equiv B_1$.

2. Фронтальная проекция $m_2(A_2B_2) \perp OX$; II OZ.

3. Горизонтально-проецирующая прямая параллельна одновременно $П_2$ и $П_3$, следовательно, $[A_2B_2] = [A_3B_3] = |AB|$.

Фронтально-проецирующая прямая – прямая линия, перпендикулярная фронтальной плоскости проекций $П_2$ (рис. 4.7).

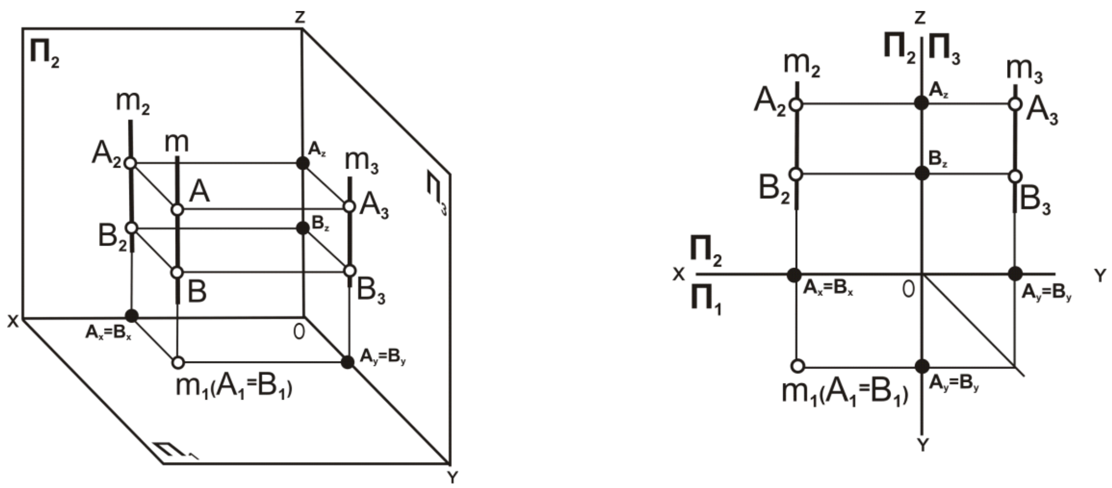


Рис. 4.6. Горизонтально-проецирующая прямая: наглядноеизображение и комплексный чертёж

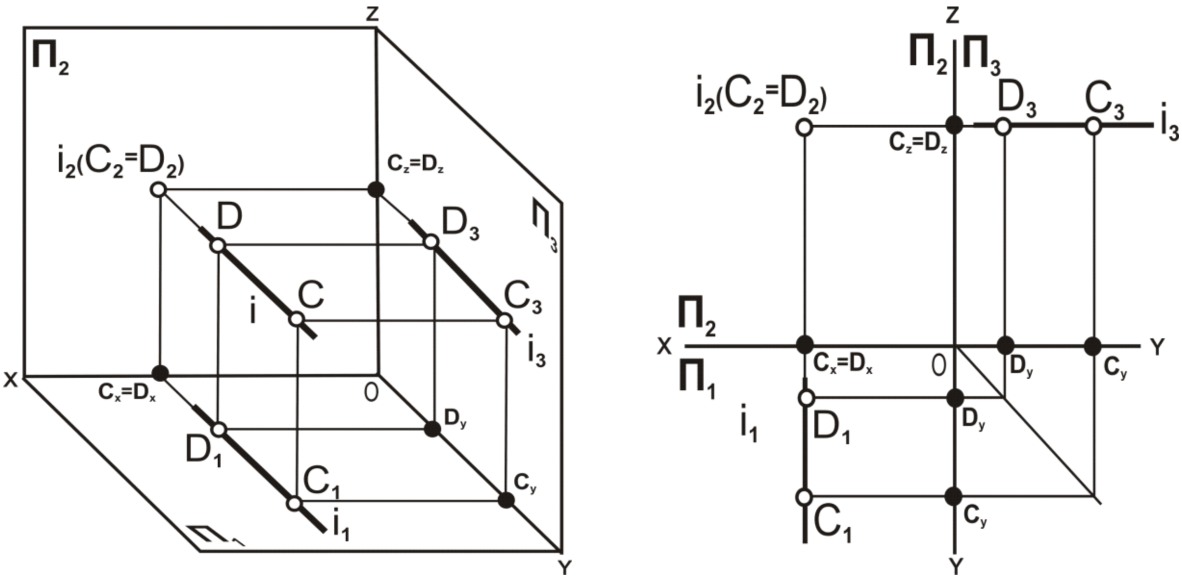


Рис. 4.7. Фронтально-проецирующая прямая: наглядное изображение и комплексный чертёж

Свойства проекций фронтально-проецирующей прямой.

1. Фронтальная проекция прямой линии $i_2(C_2D_2)$ вырождается в точку, $C_2 \equiv D_2$.

2. Горизонтальная проекция $i_1(C_1D_1)$ и профильная проекция $i_3(C_3D_3)$ II OY.

3. Фронтально-проецирующая прямая параллельна одновременно $П_1$ и $П_3$, следовательно, $[C_1D_1] = [C_3D_3] = |CD|$.

Профильно-проецирующая прямая – прямая, перпендикулярная профильной плоскости проекций $П_3$ (рис. 4.8).

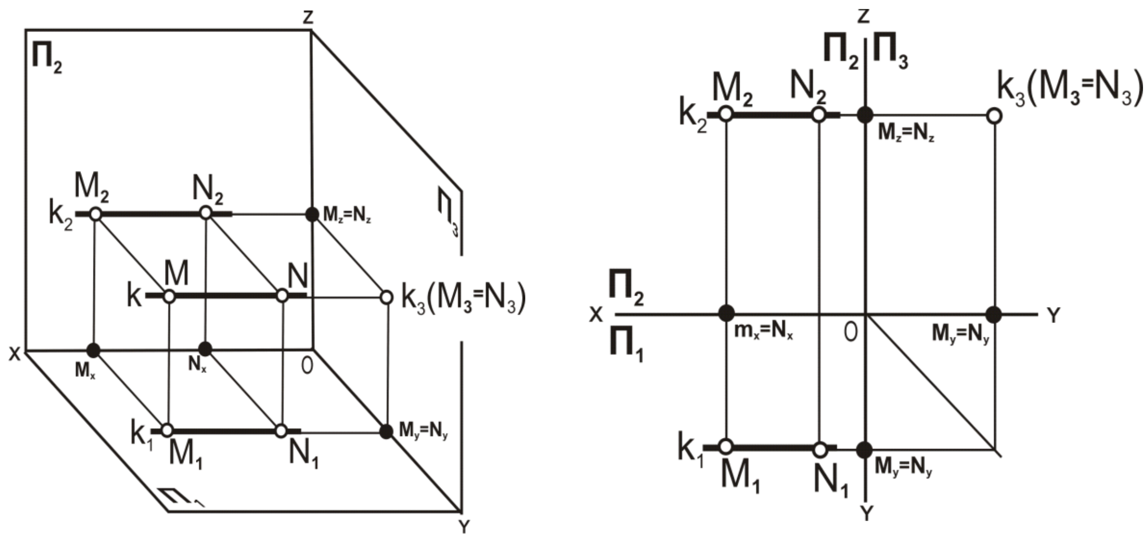


Рис. 4.8. Профильно-проецирующая прямая: наглядное изображение и комплексный чертёж

Свойства проекций профильно-проецирующей прямой.

1. Профильная проекция прямой линии $k_3(M_3N_3)$ вырождается в точку, $M_3 \equiv N_3$.

2. Горизонтальная $k_1(M_1N_1)$ и фронтальная $k_2(M_2N_2)$ проекции параллельны между собой и оси OX, а также перпендикулярны оси OZ.

3. Профильно-проецирующая прямая параллельна одновременно $П_1$ и $П_2$, следовательно, $[M_2N_2] = [M_1N_1] = |MN|$.

4.3. Определение натуральной величины отрезка прямой

На рисунке 4.2.б изображен комплексный чертеж прямой линии общего положения. Встает вопрос: как, пользуясь эпюром, определить натуральную длину отрезка общего положения и углы наклона его к плоскостям проекций? Это легко сделать, используя ***метод прямоугольного треугольника. Натуральная длина отрезка прямой есть гипотенуза прямоугольного треугольника, у которого первый катет – проекция этого отрезка на плоскость проекций, второй катет – алгебраическая (или графическая) разность расстояний от концов отрезка до той плоскости проекций, на которой взят первый катет, а угол между гипотенузой и первым катетом есть угол наклона отрезка прямой к той плоскости проекций, на которой взят первый катет***. Выполним некоторые преобразования геометрического образа (данного отрезка) (рис. 4.9).

Алгоритм построений натуральной величины отрезка прямой линии и определение углов наклона к плоскостям проекций на комплексном чертеже.

1. Определить по чертежу разность высот точек A и B. Определить на сколько точка A выше точки B. $\Delta z = Z_A - Z_B$

2. Определить разность приближений точек A и B. Определить на сколько точка A ближе точки B. $\Delta y = Y_A - Y_B$.

3. В плоскости проекций $П_2$ построить прямоугольный треугольник $A_2A_2`B_2$. Для этого – к фронтальной проекции отрезка $[A_2B_2]$ построить перпендикуляр длиной равной $\Delta y$. Откладывать $\Delta y$ можно и от $B_2$, в любую сторону. Получим новую точку $A_2`$. Соединить $A_2`$ и $B_2$. Получим треугольник у которого катет $[A_2A_2`] = \Delta y$ (натуральная величина приближения A и B). Треугольник построен по двум катетам и прямому углу между ними $[A_2B_2] \perp \Delta y$.

4. В плоскости проекций $П_1$ построить прямоугольный треугольник

$A_1A_1`B_1$. Для этого – к горизонтальной проекции отрезка $[A_1B_1]$ построить перпендикуляр длиной равной $\Delta z$. Откладывать $\Delta z$ можно и от $B_1$, в любую сторону. Получим новую точку $A_1`$. Соединить $A_1`$ и $B_1$. Получим треугольник у которого катет $[A_1A_1`] = \Delta z$ (натуральная величина превышения А и В). Треугольник построен по двум катетам и прямому углу между ними $[A_1B_1] \perp \Delta z$.

5. $|A_2`B_2| = |A_1`B_1| = |AB|$.

6. Угол α – угол наклона отрезка прямой линии АВ к плоскости $П_1$, угол β – угол наклона отрезка прямой линии АВ к плоскости $П_2$.

- Примечание: $A_2`$ и $A_1`$ - есть точка А перемещенная.

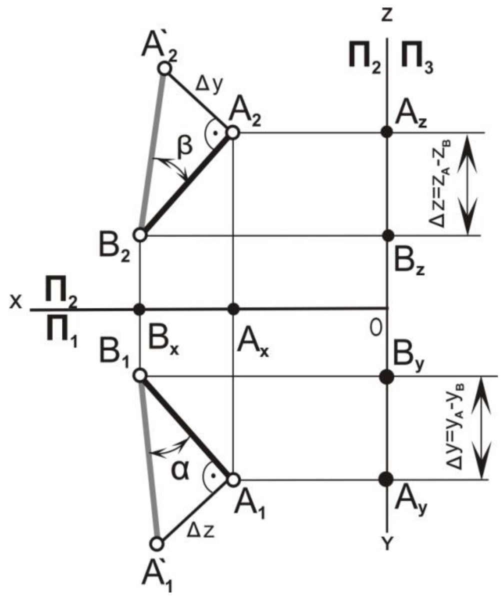


Рис. 4.9. Определение натуральной величины отрезка

4.4. Взаимное положение прямых линий

Две прямые в пространстве могут быть параллельными, пересекаться (частный случай: перпендикулярно) и скрещиваться.

Параллельные прямые – не пересекаются, лежат в одной плоскости**.** Если прямые параллельны, то их одноименные проекции параллельны[12] (рис. 4.10). Если AB II CD, то $[A_1B_1]$ II $[C_1D_1]$; $[A_2B_2]$ II $[C_2D_2]$; $[A_3B_3]$ II $[C_3D_3]$ (рис. 4.10). В свою очередь, если все одноименные проекции прямых линий параллельны, то прямые линии параллельны. Если хоть на одной из одноименных проекций линии не параллельны, то такие линии не параллельны (рис. 4.11).

Пересекающиеся прямые – это линии, которые имеют одну общую точку**.** Если прямые пересекаются, то их проекции также пересекаются, а точки пересечения проекций находятся в проекционной связи[13] (рис. 4.12). Рассмотрим два частных случая.

1. Если одна из прямых параллельна какой-либо плоскости проекций, например, профильной, то по двум проекциям невозможно судить об их взаимном расположении (рис. 4.13).

2. Если пересекающиеся прямые расположены в общей для них проецирующей плоскости, например перпендикулярной фронтальной

плоскости проекций. То о взаимном расположении прямых, лежащих

[12] Подразд. 1.3. Свойство 5.

[13] Подразд. 1.3. Свойство 4.

в этой плоскости, можно судить по одной горизонтальной проекции $[A_1B_1] \cap [C_1D_1] \Rightarrow AB \cap CD$ (рис. 4.14).

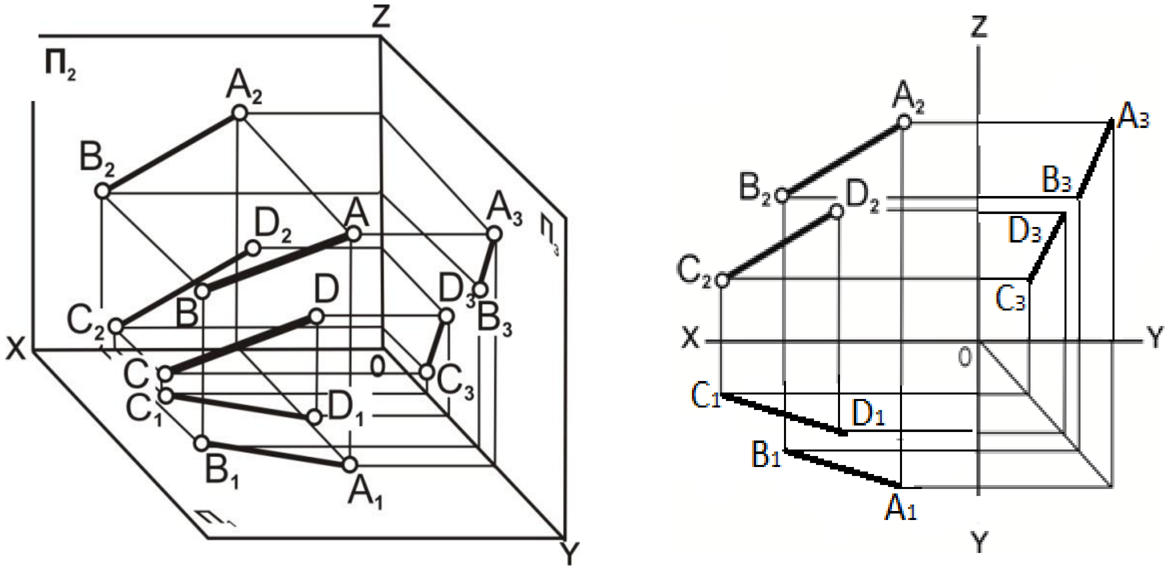


Рис. 4.10. Прямые линии, параллельные: наглядное изображение и комплексный чертёж

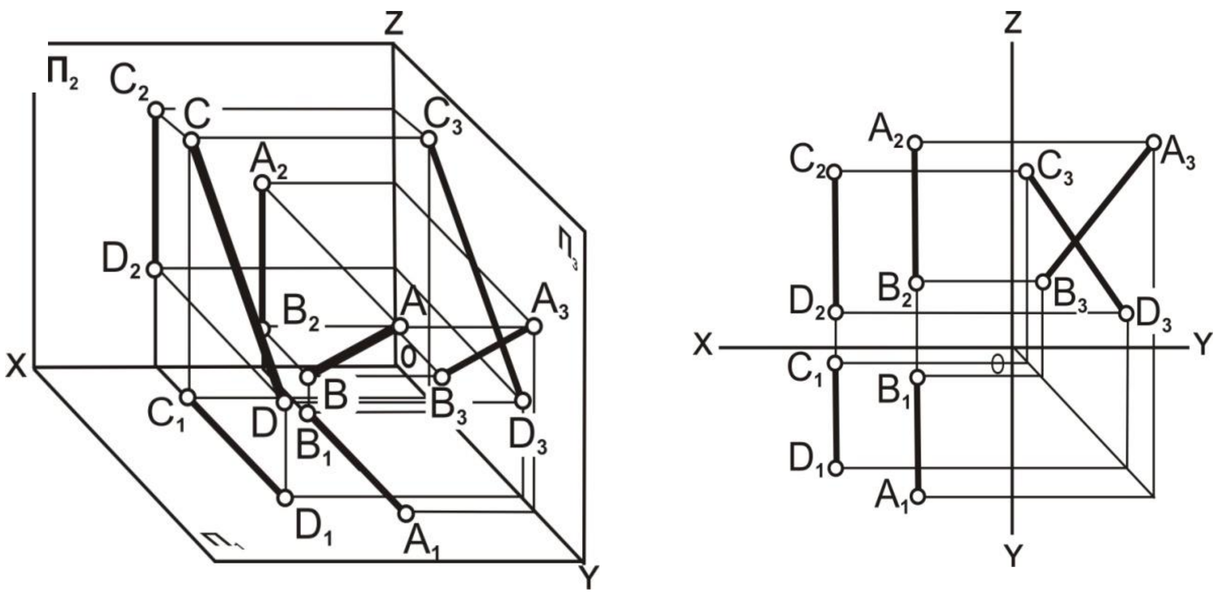


Рис. 4.11. Прямые линии, непараллельные: наглядное изображение и комплексный чертёж

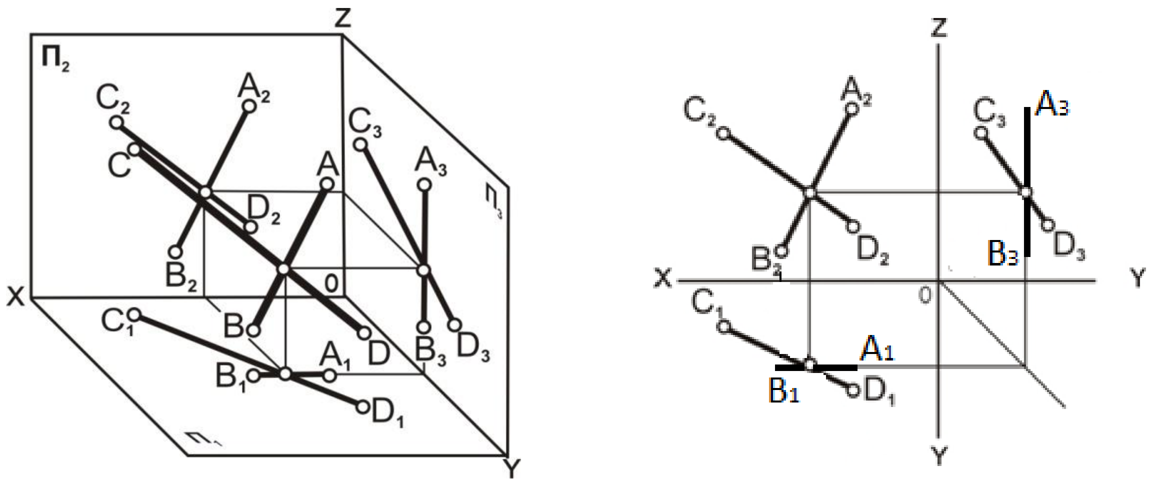
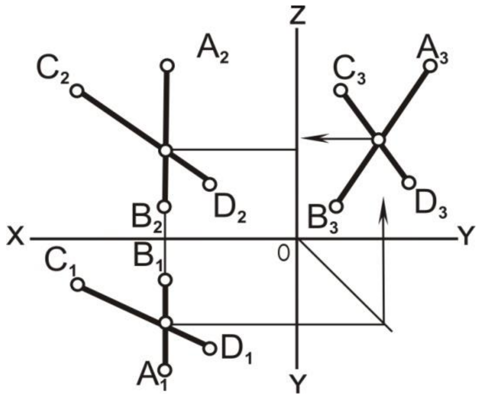


Рис. 4.12. Прямые линии пересекающиеся: наглядное изображение и комплексный чертёж



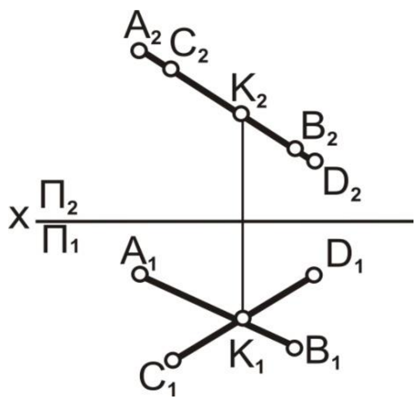


Рис. 4.13. Прямые линии не пересекаются Рис. 4.14. Прямые линии пресекаются

Скрещивающиеся прямые – не имеют общих точек и не лежат в одной плоскости**.** Если одна из двух прямых линий лежит в некоторой плоскости, а другая прямая линия пересекает эту плоскость в точке, не лежащей на первой прямой, то эти прямые – скрещивающиеся (рис. 4.15).

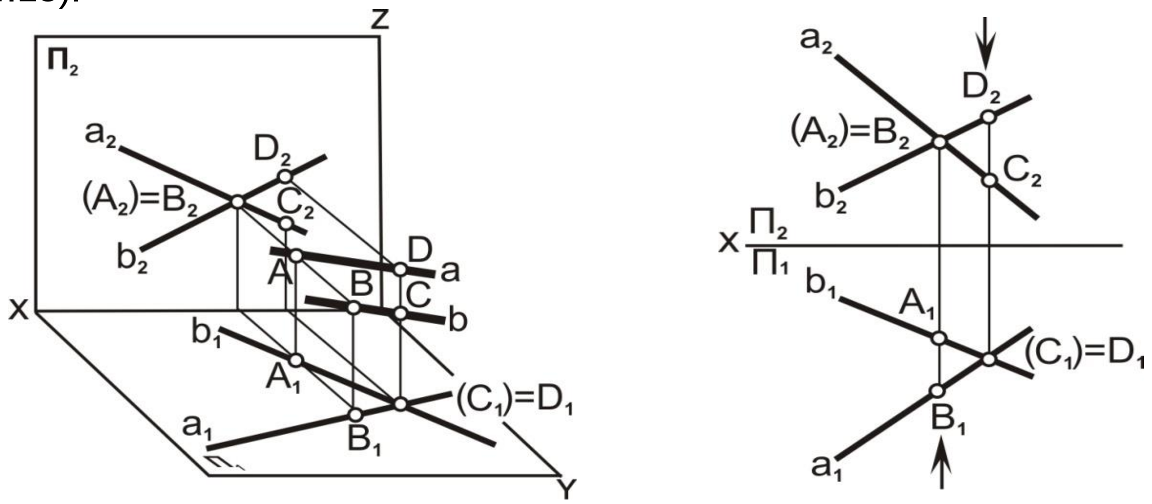


Рис. 4.15. Прямые линии скрещивающиеся: наглядное изображение и комплексный чертёж

4.5. Взаимное положение точки и прямой линии

Точка может принадлежать прямой или не принадлежать.

1. Если точка принадлежит прямой линии, то её проекции принадлежат одноимённым проекциям этой прямой линии: $C \subset l \Rightarrow C_1 \subset l_1$, $C_2 \subset l_2$ (рис. 4.16).

2. Если точка не принадлежит прямой линии, то, по крайней мере, одна из её проекций не принадлежит одноимённой проекции прямой: A, B и D не принадлежат прямой l, причем точка D расположена над прямой, а точка B – перед прямой.

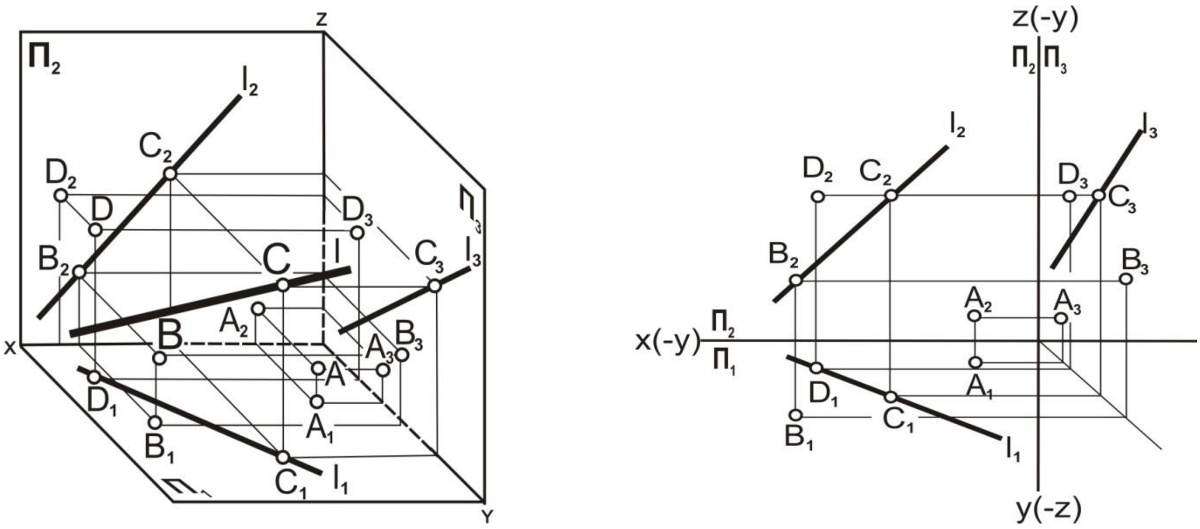


Рис. 4.16. Взаимное положение прямой линии и точек: наглядное изображение и комплексный чертёж

4.6. Выводы по теме

1. Для получения комплексного чертежа прямой линии, достаточно построить проекции точек и соединить их одноимённые проекции прямыми линиями.
2. Прямая линия относительно плоскостей проекций занимает общее положение и частное.
3. Прямые частного положения – это прямые, которые параллельны, либо перпендикулярны одной из плоскостей проекций.
4. Прямые уровня – прямые, параллельные одной из плоскостей проекций. Различают три основные линии уровня: горизонтальную, фронтальную и профильную прямые.
5. Проецирующие прямые – это прямые, перпендикулярные плоскости проекций. Различают три основные проецирующие линии: горизонтально проецирующую, фронтально проецирующую и профильно проецирующую прямые.

6. Прямые линии в пространстве могут быть параллельны, пересекаться и скрещиваться.

7. Точка принадлежит прямой линии, если её проекции принадлежат одноименным проекциям прямой.

Ключевые слова

- Прямая линия
- Прямая линия общего положения
- Прямые уровня (горизонталь, фронталь, профильная прямая)
- Проецирующие прямые
- Параллельные прямые
- Пересекающиеся прямые
- Скрещивающиеся прямые

Способы деятельности, необходимые для решения задач

– построение проекций отрезка прямой линии на комплексном чертеже в системе двух, трех плоскостей проекций;

– определение натуральной величины отрезка прямой линии методом прямоугольного треугольника;

– построение прямых, параллельных плоскостям проекций.

Вопросы для самопроверки

1. По каким свойствам проекций на эпюре определяется положение прямых линий в пространстве:

– прямых линий общего положения;

– прямых линий уровня;

– проецирующих прямых линий?

2. Как определить углы наклона прямой линии общего положения к плоскостям проекций $П_1$ и $П_2$?

3. Как на комплексном чертеже определить взаимное положение двух прямых линий?

4. Как располагаются проекции точки С относительно проекций прямой АВ, если: $C \in AB$; С над АВ; С перед АВ?

Задания для самостоятельного решения

1. Дана прямая общего положения m (m_1, m_2) и точка К ($К_1$, $К_2$) вне её. Через точку К провести:

– прямую n параллельно m, $m \parallel n$;

– прямую h, пересекающую m. Построить все возможные варианты;

– прямую общего положения *a*, пересекающую прямую m.

2. Построить чертеж отрезка АВ, если он находится в первой четверти пространства, параллельно $П_2$.

3. Определить, лежат ли точки B и C на прямой AD (рис. 4.17).

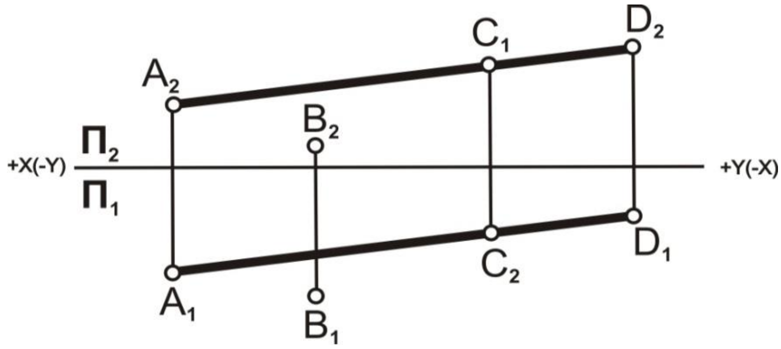


Рис. 4.17. Условия к заданию 3

4.7. Решение типовых задач (задачи № 2, 3 из РГР «Альбом задач по начертательной геометрии»)

Задача 2. а. Дано: точки с координатами – A(70; 30; 15), B(10; 30; 65).

Требуется: по заданным координатам построить проекции отрезка в системе плоскостей $П_1П_2$, определить натуральную величину отрезка прямой линии и углы наклона к плоскостям проекций способом прямоугольного треугольника.

План решения:

1. По данным координатам определить положение прямой линии относительно плоскостей проекций: координаты Y у точек A и B равны, $Y_A=Y_B=30$, следовательно, точки A и B равноудалены от фронтальной плоскости проекций $П_2$, отрезок прямой линии AB параллелен фронтальной плоскости проекций $П_2$, [AB] II $П_2$. Таким образом, отрезок прямой линии AB является фронталью.

2. Выделить свойства проекций прямых, параллельных плоскостям проекций: так как отрезок прямой линии AB параллелен фронтальной плоскости $П_2$, [AB] II $П_2$, то согласно свойству проецирования [14] фронтальная проекция отрезка прямой линии $[A_2B_2]$ равна натуральной величине [AB], IABI = IA_2B_2I.

3. Построить проекции отрезка прямой линии AB по координатам двух её точек согласно алгоритму, пункты 1- 5 (табл. 4.2).

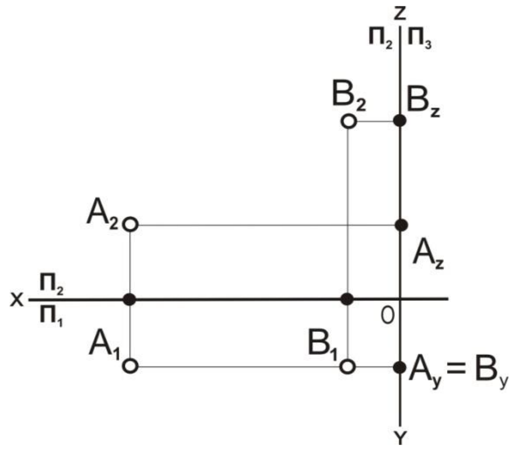
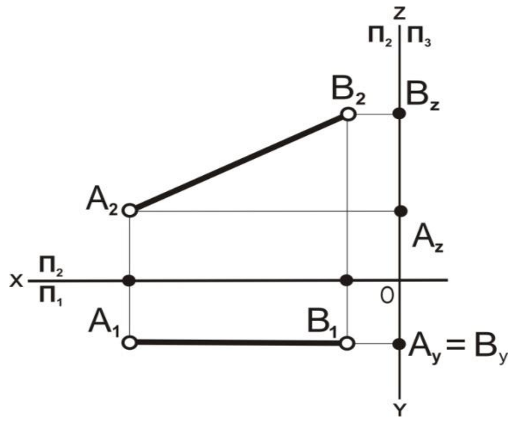
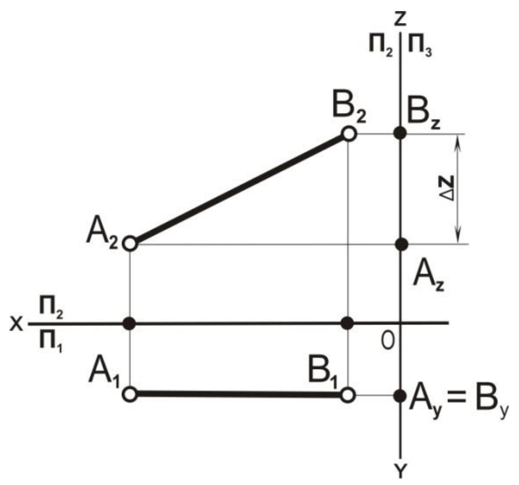
4. Применить метод прямоугольного треугольника для определения натуральной величины отрезка прямой линии AB на плоскости $П_1$. Выполнить необходимые геометрические построения согласно алгоритму, пункты 6 - 9 (табл. 4.2).

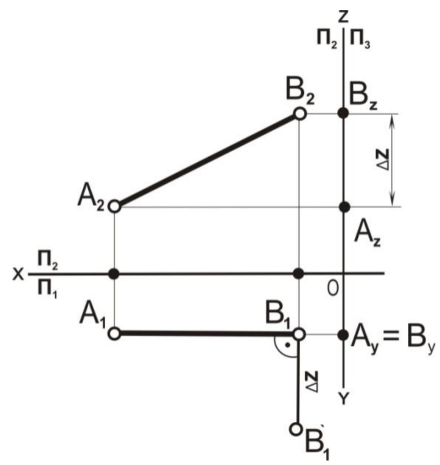
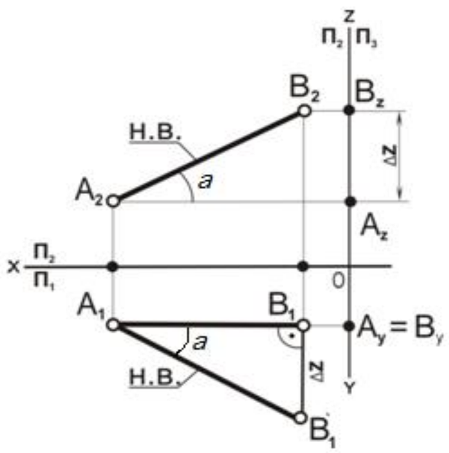
---

[14] Подразд. 1.3. Свойство 7.

Таблица 4.2

Алгоритм построения решения в задаче 2.а

Словесная форма	Графическая форма
1. Отложить на осях x, y, z значение координат для точек A и B. 2. Построить проекции точек A и B: A_1(Ax; Ay), B_1(Bx; By), A_2(Ax; Az), B_2 (Bx;Bz) 3. A_1 (70; 30), B_1 (10; 30), 4. A_2 (70; 15), B_2 (10; 65)	
5. Соединить одноименные проекции: A_1 с B_1, A_2 с B_2. Получим проекции отрезка AB: $[A_1B_1]$ и $[A_2B_2]$	
6. Определить ΔZ и ΔY отрезка AB: ΔZ – это разность расстояний удаленности точек A и B до $П_1$; $ΔZ = B_z – A_z = 65 – 15 = 50$, ΔY – это разность расстояний удаленности точек A и B от $П_2$, $ΔY = B_y – A_y = 30 – 30 = 0$	

7. К горизонтальной проекции отрезка АВ построить перпендикуляр длиной ΔZ. $[A_1B_1] \perp \|B_1B`_1\|$ От точки $B_1$ на перпендикуляре отложить Δz, $\|B_1B`_1\| = \Delta Z$ $B`_1$ – горизонтальная проекция точки В. Точка В - перемещенная.	
8. Соединить точки A_1 с $B`_1$. Отрезки $[A_1\ B`_1]$ и $[A_2B_2]$ являются натуральной величиной отрезка АВ, так как (АВ) || $П_1$, IABI = $\|A`_1 B_1\| = \|A`_2B_2\|$. 9. a – угол наклона отрезка АВ к плоскости $П_1$	

Задача 2.б. Дано: точки с координатами А(30; –85; 45), В(20; –40; 65).

Требуется: 1. По заданным координатам построить проекции отрезка в системе двух плоскостей проекций $П_1П_2$.

2. Определить натуральную величину отрезка прямой линии и углы наклона к плоскостям проекций.

План решения:

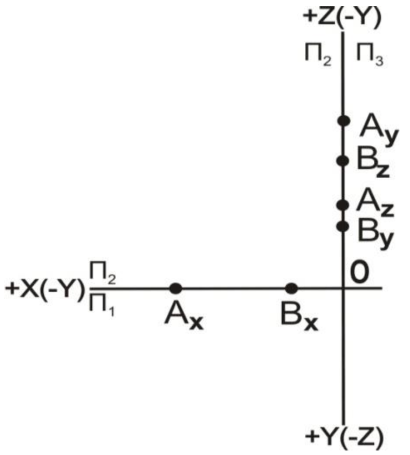
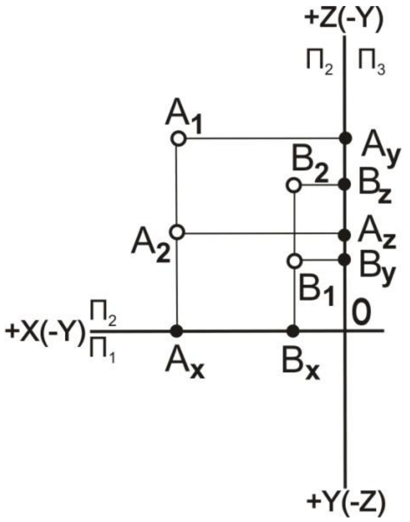
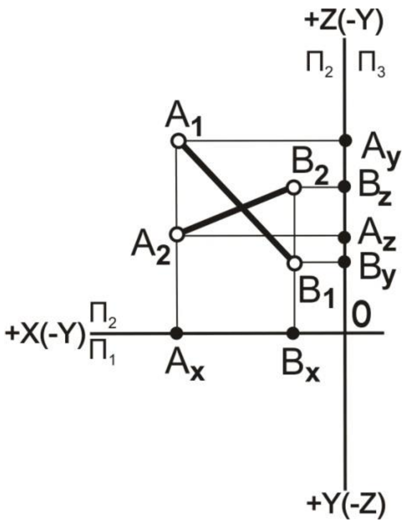
1. По данным координатам определить положение прямой линии относительно плоскостей проекций: отрезок прямой линии АВ занимает общее положение.

2. Применить алгоритм построения проекций отрезка прямой линии по координатам двух точек, пункты 1 – 3 (табл. 4.3).

3. Применить метод прямоугольного треугольника для определения натуральной величины отрезка прямой линии АВ. Выполнить необходимые геометрические построения согласно алгоритму,пункты 4 – 8 (табл. 4.3).

Таблица 4.3

Алгоритм построения решения в задаче 2.б

Словесная форма	Графическая форма
1. Отложить значения координат для точки А и В на осях x, y, z	
2. Построить проекции точки А и В. Горизонтальные проекции строятся по координатам A_1(Ax; A–y), B_1(Bx; B–y). A_1(30; –85), B_1(20; –40). Фронтальные проекции строятся по координатам A_2(Ax; Az), B_2 (Bx;Bz) A_2(30; 45), B_2 (20;65).	
3. Соединить соответствующие проекции точек A_1 с B_1, A_2 с B_2. Получим проекции отрезка АВ [A_1B_1] и [A_2B_2]: [A_1B_1] – проекция отрезка на $П_1$ (горизонтальная проекция); [A_2B_2] –проекция отрезка на $П_2$ (фронтальная проекция).	

Окончание табл. 4.3

<table>
<tr><th>Словесная форма</th><th>Графическая форма</th></tr>
<tr><td>

4. Определить ΔZ и ΔY:

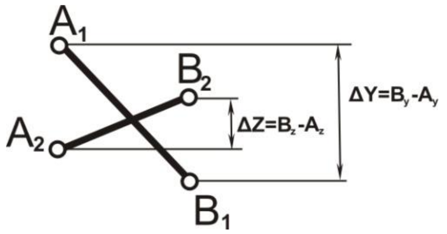
ΔZ – разность расстояний удаленности точек А и В от $П_1$,

$\Delta Z = B_Z - A_Z = 65 - 45 = 20$;

ΔY – разность расстояний удаленности точек А и В от $П_2$,

$\Delta Y = B_y - A_y = 85 - 40 = 35$

</td><td>

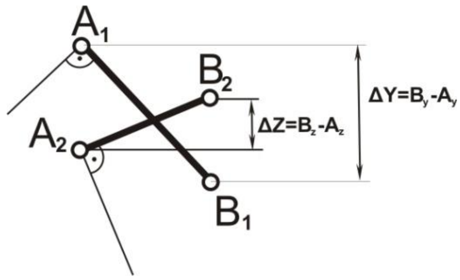


</td></tr>
<tr><td>

5. К горизонтальной проекции отрезка $[A_1B_1]$ построить перпендикуляр.

К фронтальной проекции отрезка $[A_2B_2]$ поострить перпендикуляр.

</td><td>



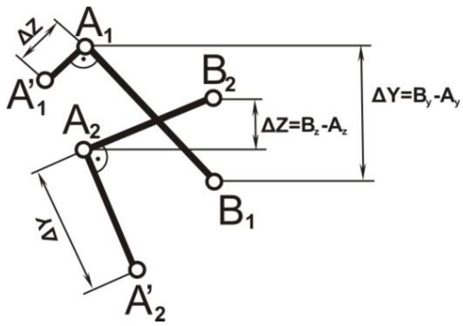
</td></tr>
<tr><td>

6. На перпендикуляре от точки A_1 отложить расстояние ΔZ, получим отрезок $|A_1\ A`_1| = 20$.

На перпендикуляре от точки A_2 отложить расстояние $\Delta Y = 35$, получим отрезок $|A_2\ A`_2| = 35$

$A`_2$ ; $A`_1$ – горизонтальная и фронтальная проекция точки А. Точка А – перемещенная.

</td><td>



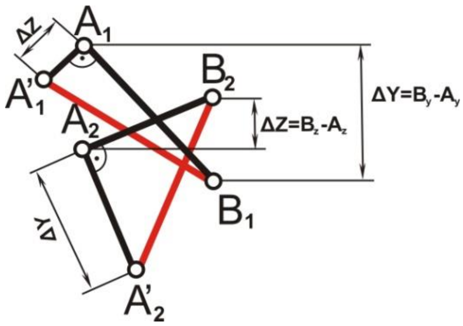
</td></tr>
<tr><td>

7. Соединить точки $A`_1$ с $B_1$ и $A`_2$ с B_2.

Отрезки $[A`_1\ B_1]$ и $[A`_2B_2]$ равны натуральной величине отрезка АВ,

$|AB| = [A`_1\ B_1] = [A`_2B_2]$

</td><td>



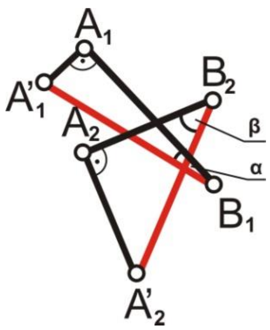
</td></tr>
<tr><td>

8. Обозначить углы наклона к плоскостям проекций $П_1$ и $П_2$:

$\angle\alpha$ – угол наклона отрезка АВ к плоскости $П_1$;

$\angle\beta$ – угол наклона отрезка АВ к плоскости $П_2$.

</td><td>



</td></tr>
</table>

Задача 3. Дано: точка А, прямая а (рис. 4.18).

Требуется: через точку А провести фронтальную прямую f, так, чтобы она пересекала прямую а. Провести прямую b, параллельную прямой линии а.

План решения:

1. Выделить признаки, характеризующие понятие «фронтальная прямая» и «прямые пересекающиеся».

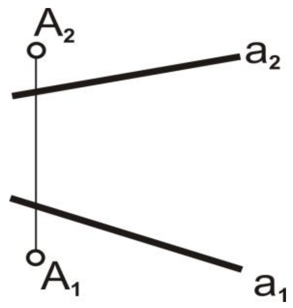


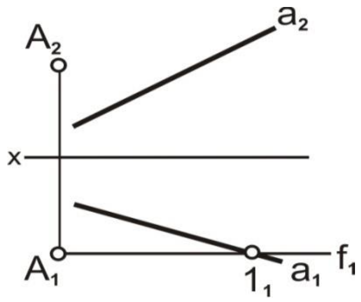
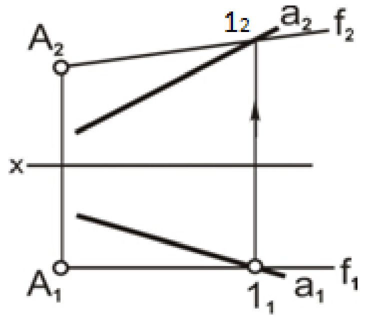
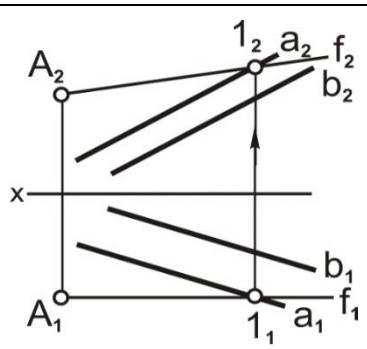
Рис. 4.18.
Условие задачи 3

2. Определить алгоритм построения комплексного чертежа фронтальной прямой, пересекающей прямую линию а, проходящую через точку А. Пункты 1 – 3.

3. Выделить признаки, характеризующие понятие «параллельные прямые». Выполнить необходимые геометрические построения, пункт 4 (табл. 4.4).

Таблица 4.4

Алгоритм построения решения в задаче 3

Словесная форма	Графическая форма
1. Через точку A_1 провести f_1 параллельно оси Ох, $f_1 \parallel Ox$. Получаем точку 1_1, $f_1 \cap a_1 = 1_1$.	
2. Линией проекционной связи получить 1_2. Для этого из 1_2 построить вертикальную линию связи вверх, до пересечения с a_2. 3. Соединить точки A_2 и 1_2. Получим f_2	
4. Построить b_1 параллельно a_1 и Построить b_2 параллельно a_2. Получим $b_1 \parallel a_1$ и $b_2 \parallel a_2 \Rightarrow b \parallel a$	

5. КОМПЛЕКСНЫЙ ЧЕРТЁЖ ПЛОСКОСТИ

Плоскость – двухмерный геометрический образ, имеющий длину и ширину. Плоскость не имеет толщины, бесконечна и не прозрачна.

5.1. Задание плоскости на комплексном чертеже

Плоскость определяется тремя своими точками, каждая из которых может быть задана двумя проекциями. Следовательно, на комплексном чертеже плоскость может определяться проекциями своих точек, не лежащих на одной прямой. Рассмотрим варианты задания плоскости:

1) тремя точками, не лежащими на прямой (рис. 5.1);
2) двумя пересекающимися прямыми (рис. 5.2);
3) двумя параллельными прямыми (рис. 5.3);
4) прямой и точкой вне этой прямой (рис. 5.4);
5) плоской фигурой (рис. 5.5);
6) следом (рис. 5.6).

Примечание. Каждый последующий способ задания плоскости может быть получен из предыдущего.

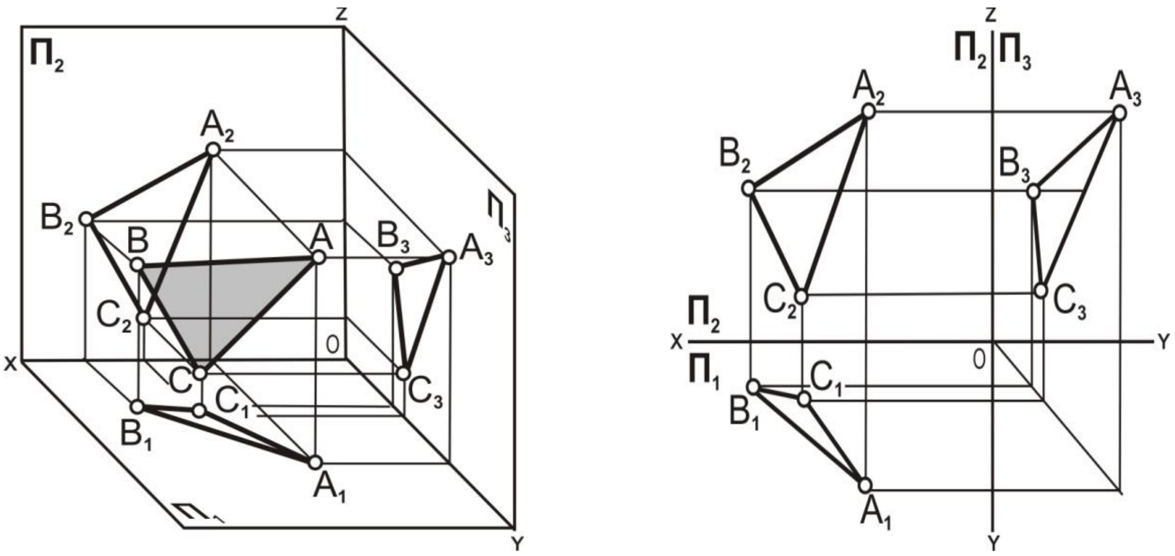


Рис. 5.1. Плоскость задана проекциями трех точек A, B, C: наглядное изображение и комплексный чертёж

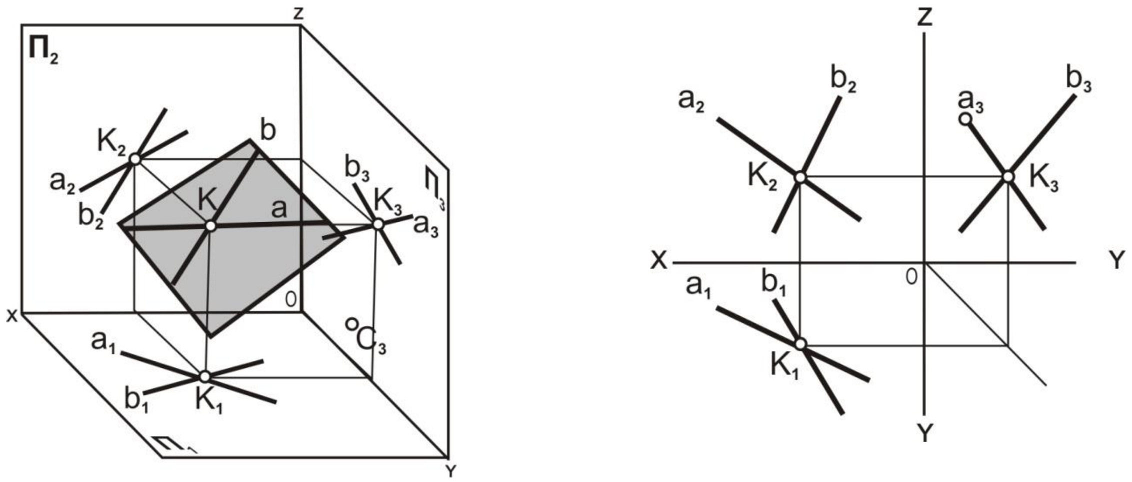


Рис. 5.2. Плоскость задана проекциями двух пересекающихся прямых a и b: наглядное изображение и комплексный чертеж

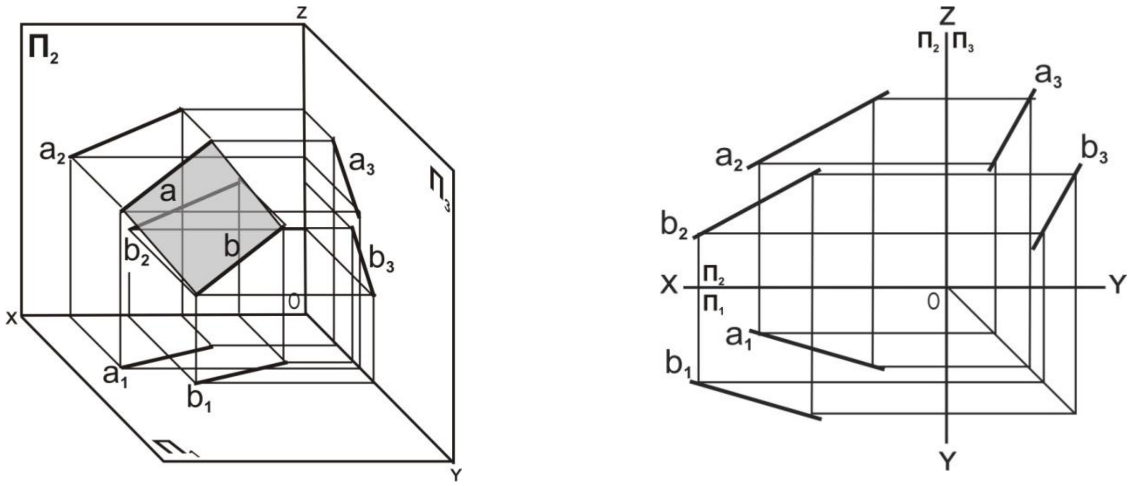


Рис. 5.3. Плоскость задана проекциями двух параллельных прямых a и b: наглядное изображение и комплексный чертёж

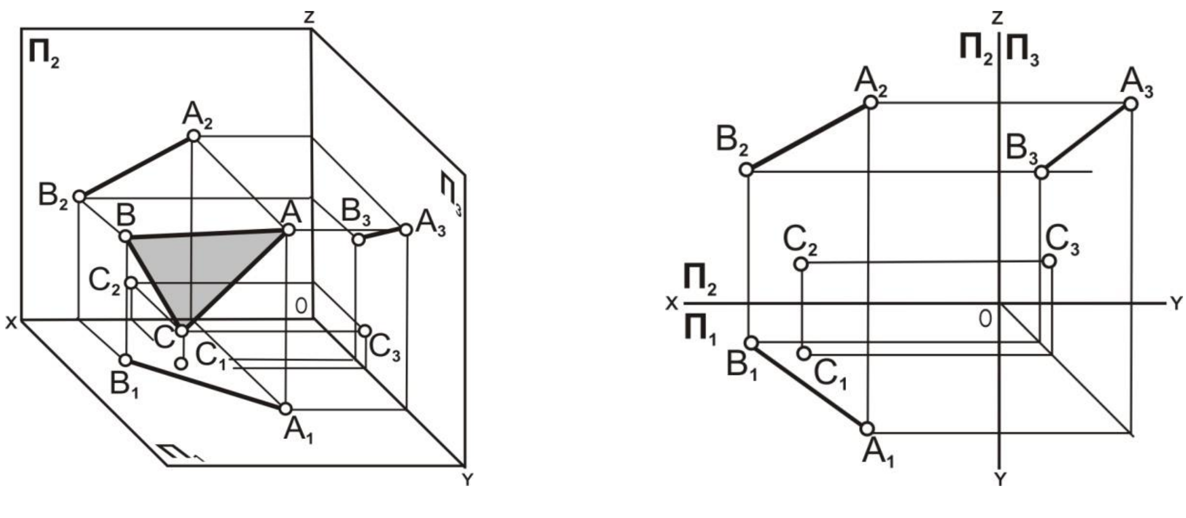


Рис. 5.4. Плоскость задана проекциями прямой линии AB и точки C: наглядное изображение и комплексный чертёж

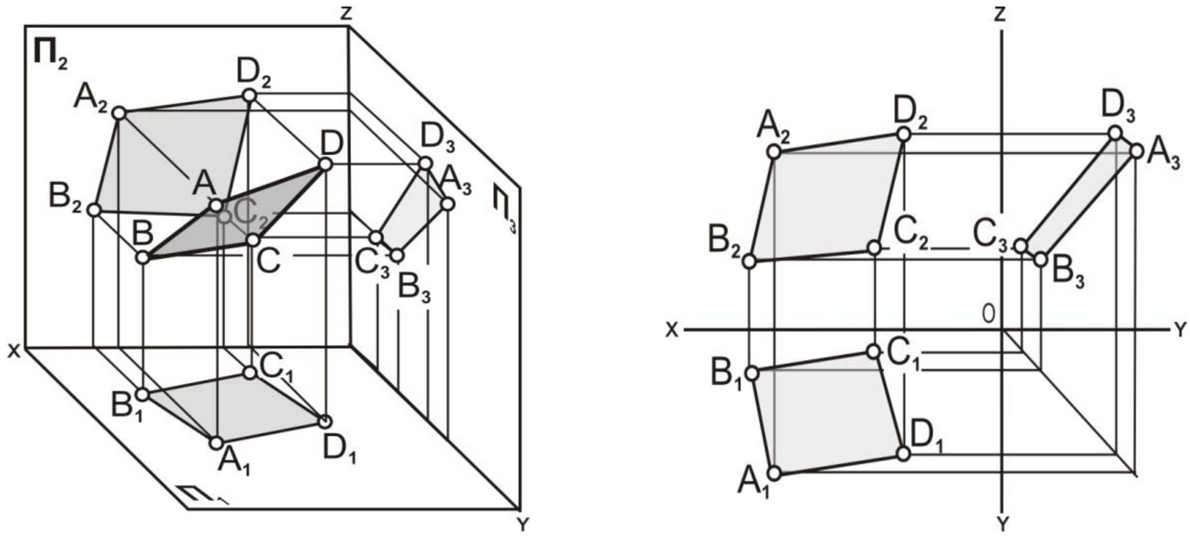


Рис. 5.5. Плоскость задана проекциями плоской фигуры ABCD: наглядное изображение и комплексный чертёж

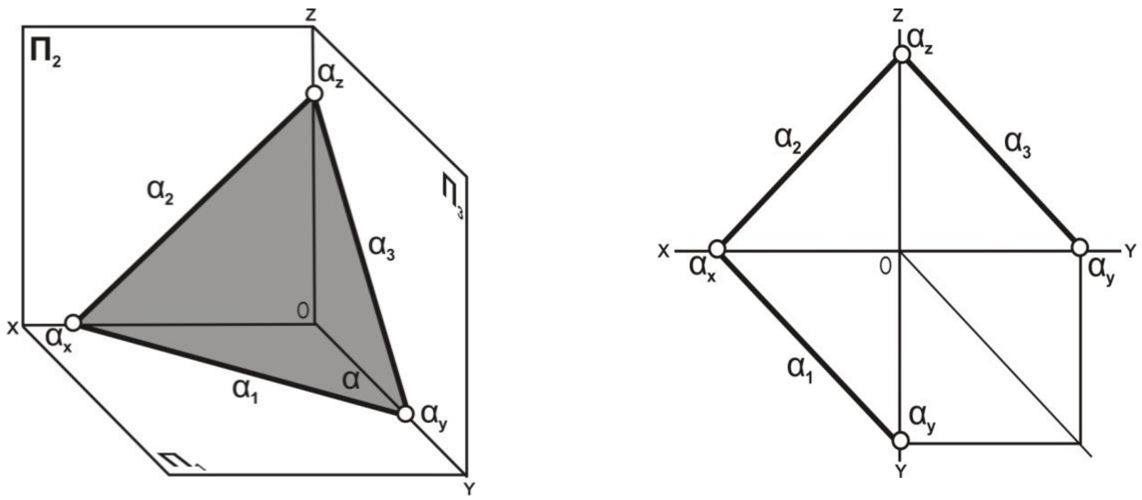


Рис. 5.6. Плоскость задана следами α_1, α_2, α_3: наглядное изображение и комплексный чертёж

Следом плоскости называется прямая линия, по которой плоскость пересекается с плоскостью проекций. В зависимости от того, какую плоскость проекций пересекает плоскость α, различают горизонтальный след α_1, фронтальный след α_2 и профильный след α_3. Следы плоскости общего положения пересекаются попарно на осях в точках α_x,α_y,α_z. Эти точки называются точками схода следов, их можно рассматривать как вершины трехгранных углов, образованных данной плоскостью с двумя из трех плоскостей проекций (рис. 5.6). Каждый из следов плоскости совпадает со своей одноименной проекцией, а две другие разноименные проекции лежат на осях.

5.2. Положение плоскости относительно плоскостей проекций

По положению плоскости относительно плоскостей проекций различают плоскости общего положения и частного положения (рис. 5.7).

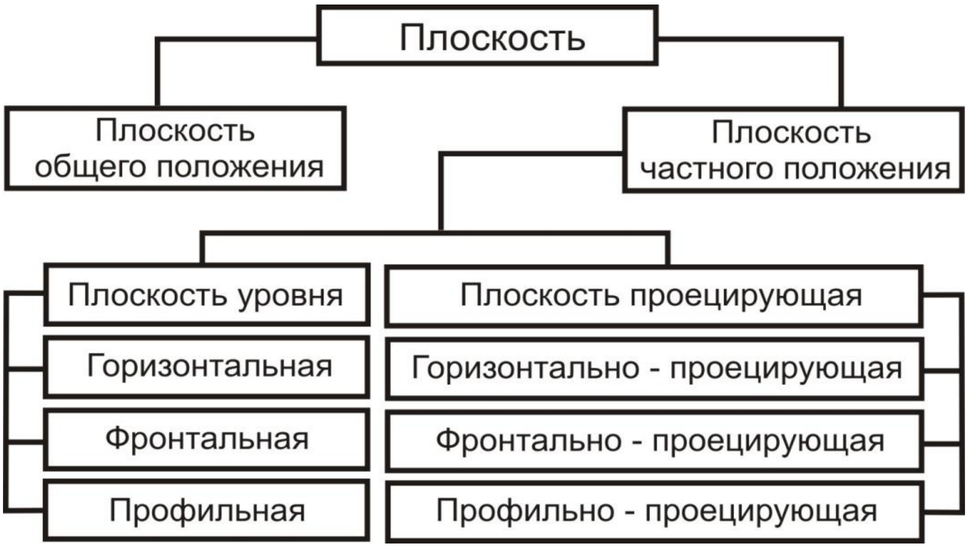


Рис. 5.7. Классификация плоскостей

Плоскость общего положения - это плоскость, которая не перпендикулярна и не параллельна ни одной плоскости проекций. Такая плоскость может быть задана любым из перечисленных выше способов (рис. 5.1– 5.6).

Плоскостью частного положения называют плоскость, которая перпендикулярна или параллельна какой-либо плоскости проекций.

Проецирующие плоскости - это плоскости, перпендикулярные одной из плоскостей проекций. Проецирующая плоскость и все, лежащие в ней, элементы проецируются на перпендикулярную ей плоскость проекций в прямую, совпадающую со следом этой плоскости. Такая плоскость может быть задана одной прямой – своим следом, а другие её проекции обычно не задаются.

Горизонтально-проецирующая плоскость – плоскость, перпендикулярная горизонтальной плоскости проекций $\alpha(\Delta ABC) \perp \Pi_1$ (рис. 5.8).

Свойства проекций горизонтально-проецирующей плоскости:

1. Горизонтальной проекцией плоскости α является прямая линия, совпадающая со следом $[A_1B_1C_1]$.

2. Угол β – натуральная величина угла наклона горизонтально-проецирующей плоскости к плоскости проекций Π_2.

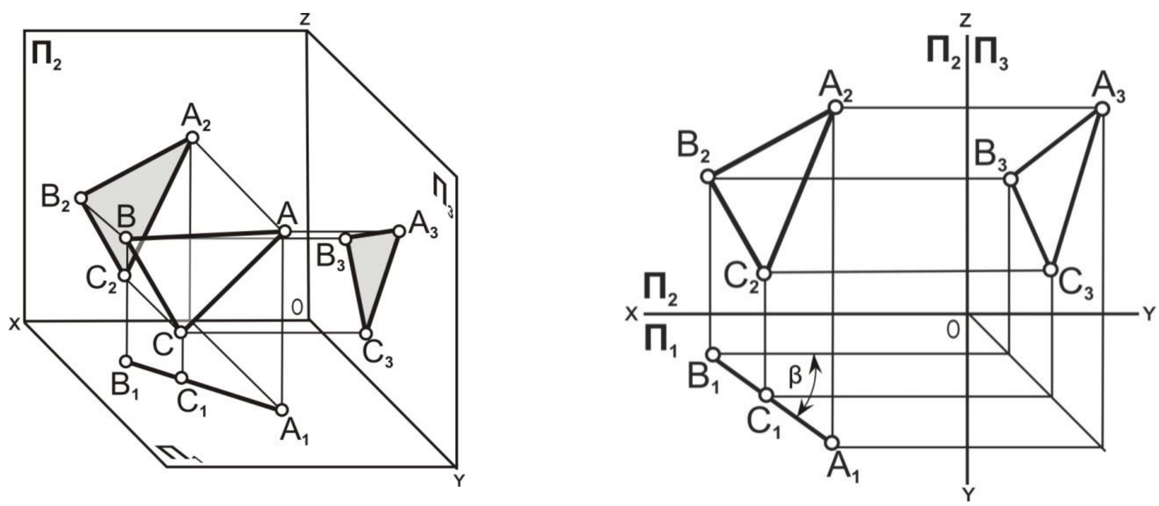


Рис. 5.8. Горизонтально-проецирующая плоскость: наглядное изображение и комплексный чертёж

Фронтально - проецирующая плоскость – плоскость, перпендикулярная фронтальной плоскости проекций $\alpha(\Delta ABC)\perp П_2$ (рис. 5.9).

Свойства проекций фронтально-проецирующей плоскости:

1. Фронтальной проекцией плоскости α является прямая линия, совпадающая со следом $A_2B_2C_2$.

2. Угол α – натуральная величина угла наклона фронтально-проецирующей плоскости к плоскости проекций $П_1$.

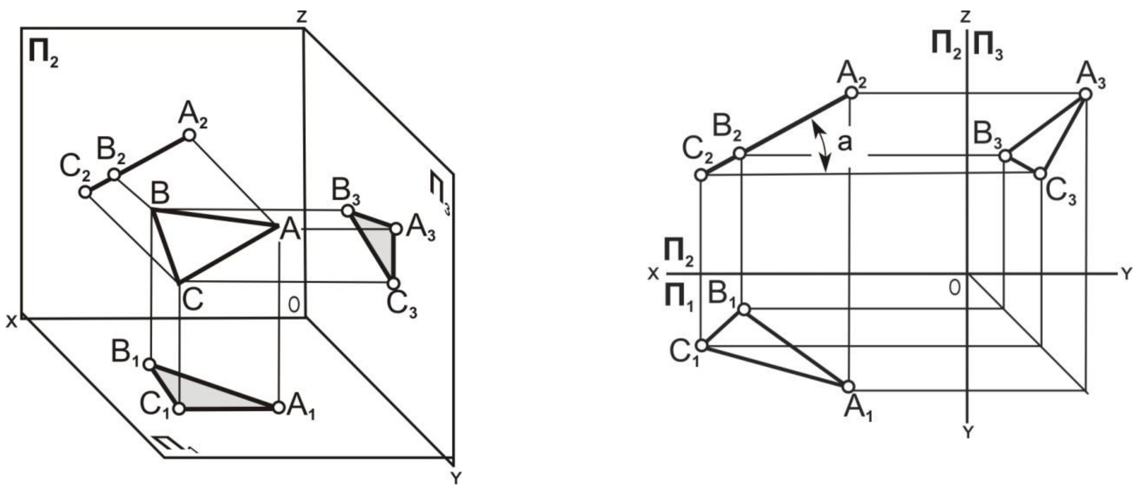


Рис. 5.9. Фронтально-проецирующая плоскость: наглядное изображение и комплексный чертёж

Профильно-проецирующая плоскость – плоскость, которая перпендикулярна профильной плоскости проекций $\alpha(\Delta ABC) \perp П_3$ (рис. 5.10).

Свойства проекций профильно-проецирующей плоскости:

1. Профильной проекцией плоскости α является прямая линия, совпадающая со следом $[A_3B_3C_3]$.

2. Угол α – натуральная величина угла наклона профильно-проецирующей плоскости к плоскости проекций $П_1$.

3. Угол β – натуральная величина угла наклона профильно-проецирующей плоскости к плоскости проекций $П_2$.

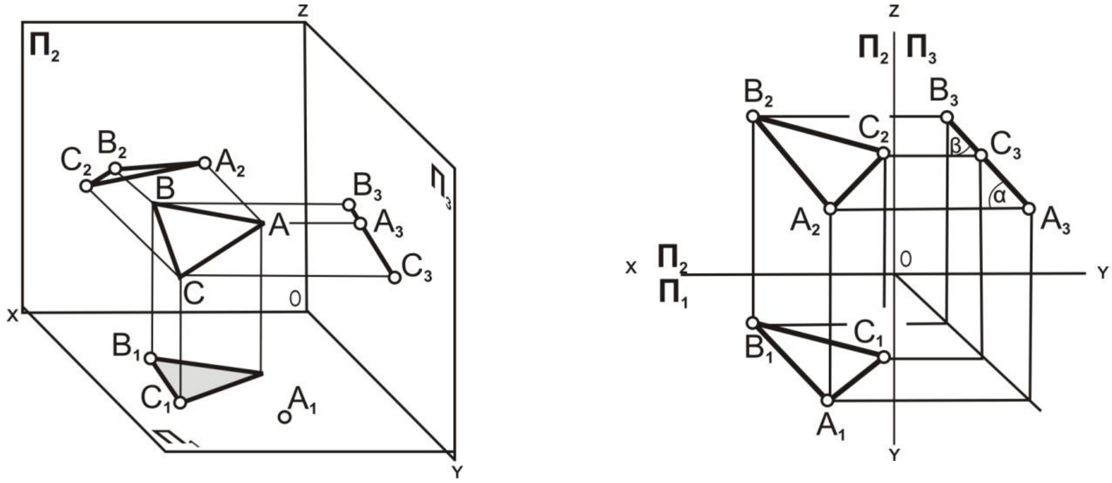


Рис. 5.10. Профильно-проецирующая плоскость: наглядное изображение и комплексный чертёж

Плоскость уровня – это плоскость, параллельная одной из плоскостей проекций.

Горизонтальная плоскость уровня – плоскость, параллельная горизонтальной плоскости проекций $\alpha(\Delta ABC) \parallel П_1$ (рис. 5.11).

Свойства проекций горизонтальной плоскости уровня:

1. Горизонтальная проекция горизонтальной плоскости уровня проецируется на плоскость $П_1$ без искажения (в натуральную величину).

2. Фронтальная и профильная проекции проецируются в прямые линии (след плоскости) $A_2B_2C_2 \parallel OX$ и $B_3A_3C_3 \parallel OY$.

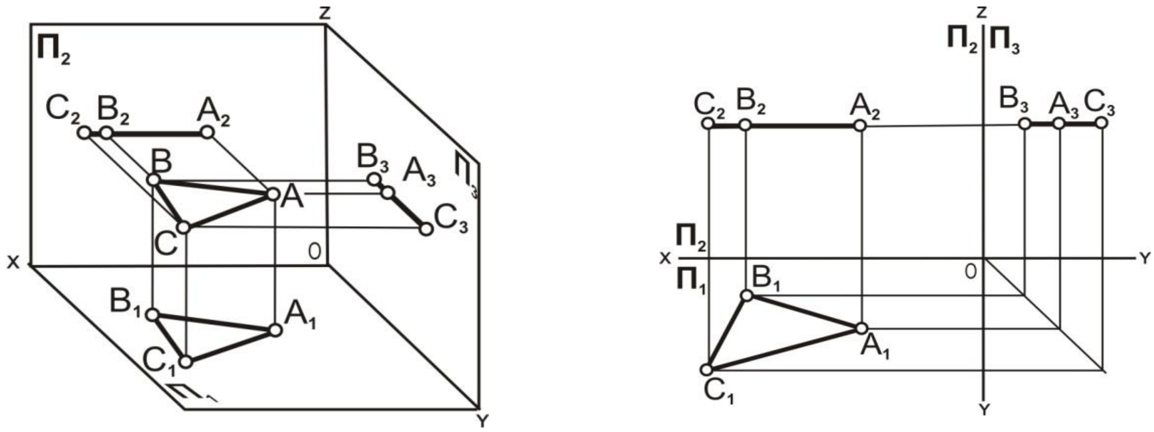


Рис. 5.11. Горизонтальная плоскость уровня: наглядное изображение и комплексный чертёж

Фронтальная плоскость уровня – плоскость, параллельная фронтальной плоскости проекций $П_2$, α(ΔABC) II $П_2$ (рис. 5.12).

Свойства проекций фронтальной плоскости уровня:

1. Фронтальная проекция фронтальной плоскости уровня проецируется на плоскость $П_2$ без искажения (натуральная величина).

2. Горизонтальная и профильная проекции проецируются в прямые линии (след плоскости) $C_1B_1A_1$ II OX и $A_3C_3B_3$ II OZ.

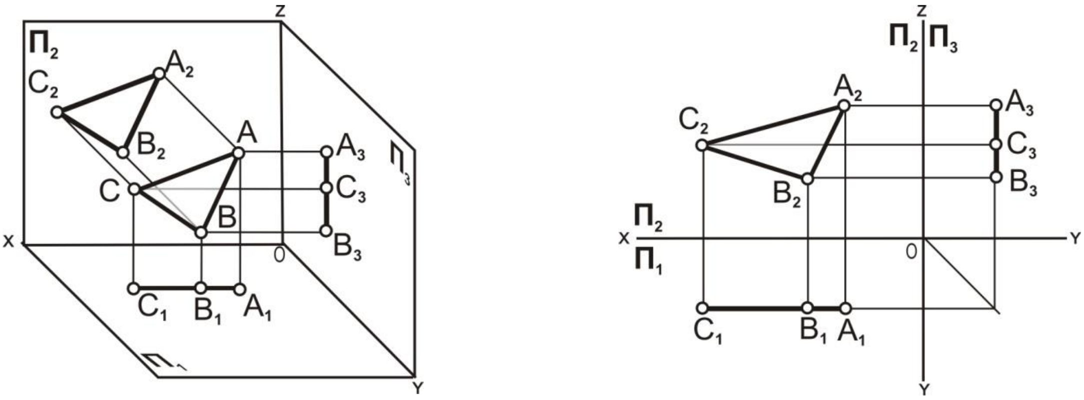


Рис. 5.12. Фронтальная плоскость уровня: наглядное изображение и комплексный чертёж

Профильная плоскость уровня – плоскость, параллельная профильной плоскости проекций $П_3$, α (ΔABC) II $П_3$ (рис. 5.13).

Свойства проекций профильной плоскости уровня:

1. Профильная проекция профильной плоскости уровня проецируется на плоскость $П_3$ без искажения (натуральная величина).

2. Горизонтальная и фронтальная проекции проецируются в прямые (след плоскости) $C_1A_1B_1$ II ОУ и $A_2B_2C_2$ II OZ.

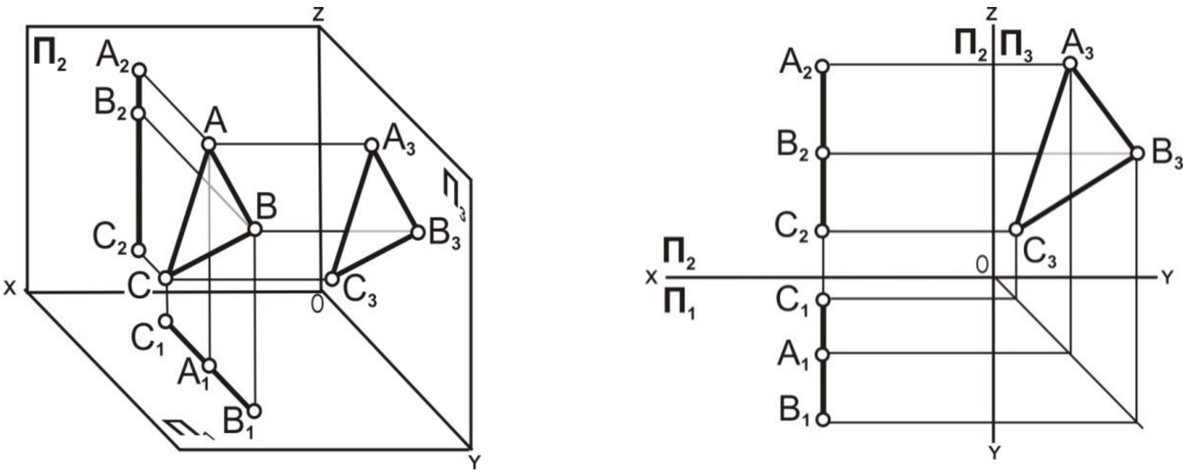


Рис. 5.13. Профильная плоскость уровня: наглядное изображение и комплексный чертёж

5.3. Принадлежность прямой и точки плоскости. Главные линии плоскости

1. Прямая линия принадлежит плоскости, если хотя бы две её точки принадлежат этой плоскости, $BC \subset \Sigma(m \cap n) \Rightarrow B \subset n,\ C \subset m$ (рис. 5.14).

2. Точка лежит в плоскости, если она располагается на прямой, принадлежащей данной плоскости.

3. Прямая принадлежит плоскости, если имеет с плоскостью одну общую точку и параллельна какой-либо прямой, расположенной в этой плоскости. Пусть плоскость α задана $m \cap n$, $m \cap k = C$, $k \parallel n$ (рис. 5.15).

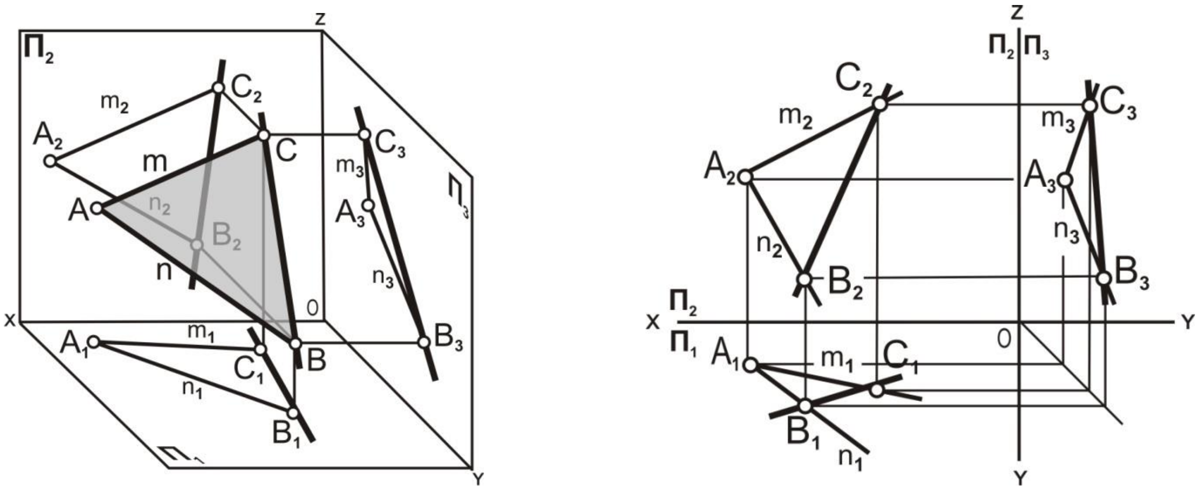


Рис. 5.14 . Принадлежность прямой линии плоскости: наглядное изображение и комплексный чертёж

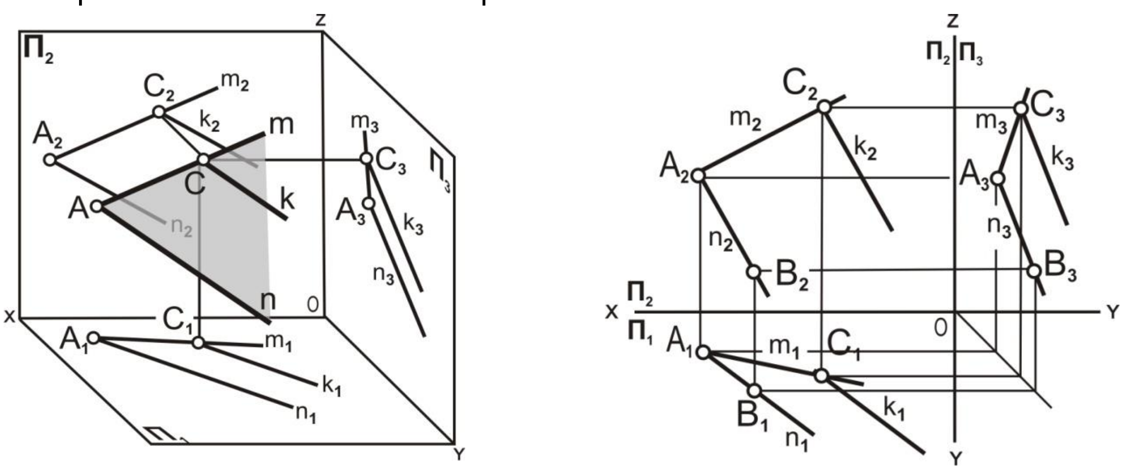


Рис. 5.15. Принадлежность прямой линии плоскости: наглядное изображение комплексный чертёж

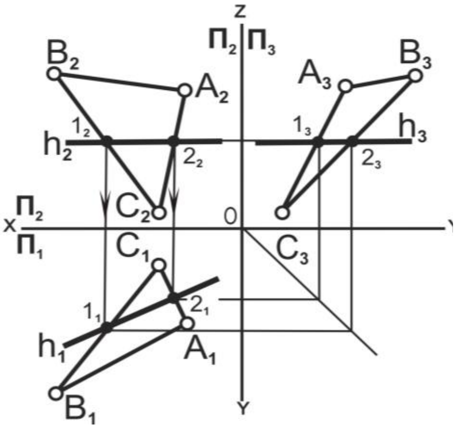


Рис. 5.16. Горизонталь плоскости

4. Среди прямых линий, принадлежащих плоскости, особое значение имеют прямые, параллельные плоскостям проекций. Ими являются главные линии плоскости: *горизонталь, фронталь, профильная прямая уровня, линия наибольшего наклона (ската).*

Горизонталь h – прямая линия, принадлежащая плоскости и параллельная горизонтальной плоскости проекций $П_1$, $h \subset \Sigma(\Delta ABC)$, $h \parallel П_1$ (рис. 5.16).

Свойства проекций горизонтали:

1. Фронтальная проекция горизонтали – горизонтальная линия, $h_2 \parallel (OX)$.

2. Горизонтальная проекция горизон-тали – есть натуральная величина.

<u>Алгоритм построения горизонтали</u>.

1. Построить фронтальную проекцию горизонтали h_2, $h_2 \parallel (OX)$.

2. Отметить точки 1_2 и 2_2. Получим $B_2C_2 \cap h_2 = 1_2$, $A_2C_2 \cap h_2 = 2_2$.

3. Построить горизонтальные проекции точек 1 и 2 линиями проекционной связи. $1_1 \subset B_1C_1$; $2_1 \subset A_1C_1$.

4. Соединить точки 1_1 и 2_1. Получим h_1 – горизонтальную проекцию горизонтали h.

Фронталь f – прямая линия, принадлежащая плоскости и параллельная фронтальной плоскости проекций $П_2$, $f \subset \alpha(\Delta ABC)$, $f \parallel П_2$ (рис. 5.17).

Свойства проекций фронтали:

1. Горизонтальная проекция фронтали – есть горизонтальная линия, $f_1 \parallel OX$.

2. Фронтальная проекция фронтали – есть натуральная величина.

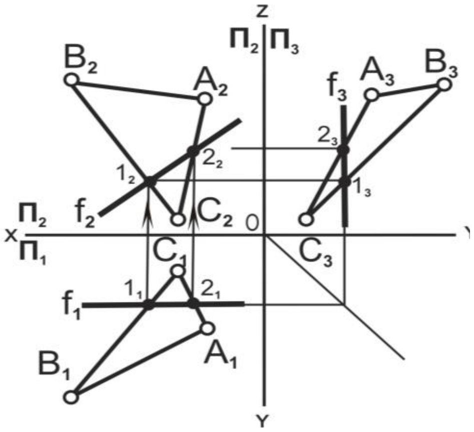


Рис. 5.17. Фронталь плоскости

<u>Алгоритм построения фронтали</u>.

1. Построить горизонтальную проекцию горизонтали, $f_1 \parallel OX$.

2. Отметить точки 1_1 и 2_1. Получим $B_1C_1 \cap f_1 = 1_1$, $A_1C_1 \cap f_1 = 2_1$.

3. Построить фронтальные проекции точек 1 и 2 линиями проекционной связи, $1_2 \subset B_2C_2$, $2_2 \subset A_2C_2$.

4. Соединить точки 1_2 с 2_2, получим f_2 – фронтальную проекцию фронтали f.

Профильная прямая p – прямая линия принадлежит плоскости и параллельна профильной плоскости проекций $П_3$, $p \subset \alpha(ABC)$, $p \parallel П_3$ (рис. 5.18). Проекции p_1 и p_2 профильной прямой p совпадают с одной вертикальной линией связи.

Свойства проекций профильной прямой:

1. Горизонтальная и фронтальная проекции профильной прямой – есть вертикальная линия $p_1 \parallel OY$, $p_2 \parallel Oz$.

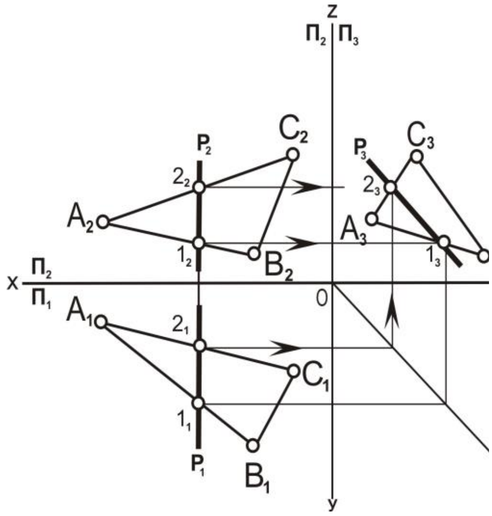


Рис. 5.18. Профильная прямая

2. Профильная проекция профильной прямой – есть натуральная величина.

<u>Алгоритм построения профиля.</u>

1. Построить фронтальную проек-цию профильной прямой p_2, $p_2 \parallel Oz$.
2. Отметить точки 1_2 и 2_2 $A_2B_2 \cap p_2 = 1_2$, $A_2C_2 \cap p_2 = 2_2$.
3. Построить профильные проекции точек 1 и 2 линиями проекционной связи, $1_3 \subset A_3B_3$, $2_3 \subset A_3C_3$.
4. Соединить точку 1_3 с 2_3. Получаем p_3 – профильную проекцию профиля p.

Линия наибольшего наклона (ЛНН) – прямая линия, лежащая в плоскости, перпендикулярная линии уровня: горизонтали, фронтали либо профильной прямой. Линия наибольшего наклона к горизонтальной плоскости проекций называется ***линией наибольшего ската*** (ЛНС). наибольшего ската строится по ее принадлежности данной плоскости

Горизонтальная проекция линии наибольшего ската плоскости общего положения перпендикулярна горизонтальной проекции горизонтали этой плоскости. $n \subset \alpha(h \cap f)$, $n \perp h$, $(n_1 \perp h_1)$. Фронтальная проекция линии наибольшего ската связана линиями проекционной связи (рис. 5.19).

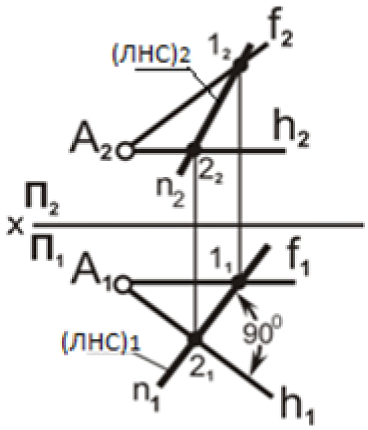


Рис.5.19. Построение линии наибольшего ската

<u>Алгоритм построения линии наибольшего ската плоскости.</u>

1. Построить перпендикуляр к натуральной величине горизонтали h_1, $h_1 \perp n_1$.
2. Отметить проекции точек 1_1 и 2_1.

3. Построить фронтальные проекции точек 1 и 2 (1_2 и 2_2).

4. Соединить проекции точек 1_2 и 2_2. Получим n_2 – фронтальную проекцию ЛНС.

5.4. Взаимное положение двух плоскостей

Две плоскости в пространстве могут быть взаимно параллельными или пересекающимися. В частном случае две плоскости могут совпадать друг с другом. Взаимно-перпендикулярные плоскости представляют собой частный случай пересекающихся плоскостей (см. раздел 5.5.3).

5.4.1. Пересечение двух плоскостей.

Линией пересечения двух плоскостей является прямая линия. Существует два типа задач на определение линии пересечения плоскостей: построение линии пересечения двух плоскостей общего положения и построение линии пересечения плоскости общего и плоскости частного положения. Для построения линии пересечения двух плоскостей общего положения используют метод вспомогательных секущих плоскостей - посредников.

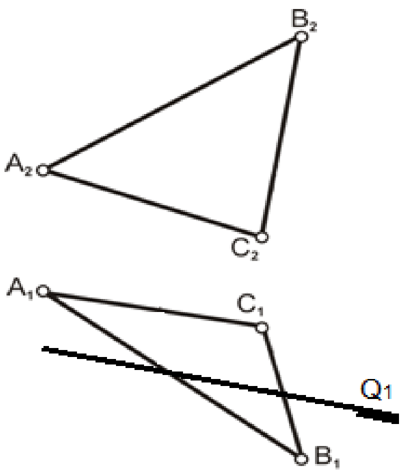


Рис.5.20.

Пример 1. Дано: плоскости $\Sigma(\Delta ABC)$ и $Q(Q_1)$ (рис. 5.20). Требуется: построить линию пересечения этих плоскостей.

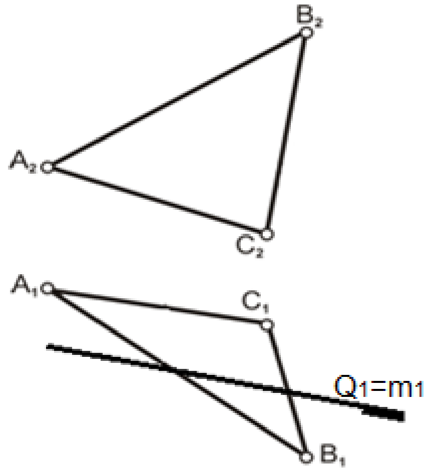
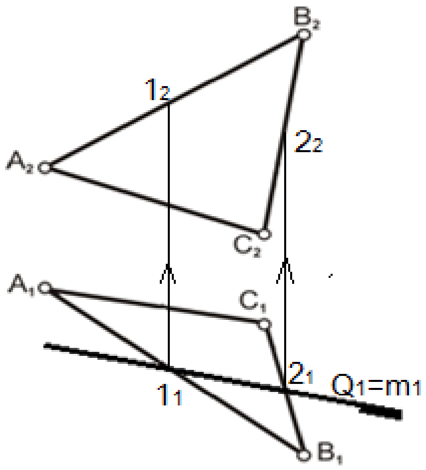
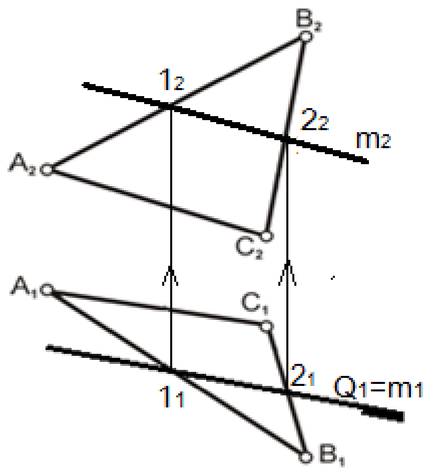
План решения:

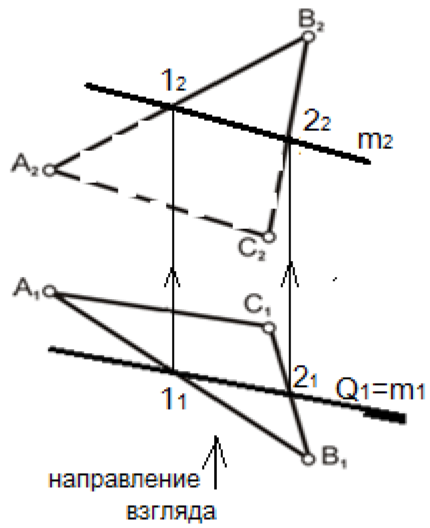
1. Проводим анализ условия. Какие плоскости заданы в условии? Общего положения или частного? Вспоминаем свойства плоскости частного положения (пл. Q, заданная следом Q_1), условия принадлежности прямой плоскости.

2. Проводим геометрические построения согласно алгоритму (табл.5.1).

Таблица 5.1

Алгоритм построения линии пересечения плоскости общего положения и плоскости частного положения

Словесная форма	Графическая форма
1. Σ(ΔABC) – плоскость общего положения, $Q(Q_1)$ – пл. частного положения, следовательно, линия пересечения – это прямая (m), которая совпадает на эпюре со следом плоскости, $Q_1 = m_1$. Пл. Σ(ΔABC) ∩ пл. $Q(Q_1)$= m.	
2. Так как m ∈ пл. Σ(ΔABC) и m ∈ пл. $Q(Q_1)$, то можем отметить две общие точки 1 и 2. На m_1 отмечаем горизонтальные проекции общих точек (1_1 и 2_1). Построив линии связи, найдем фронтальные проекции общих точек (1_2 и 2_2).	
3. Соединив проекции точек 1_2 и 2_2, получим фронтальную проекцию (m_2). искомой линии пересечения.	

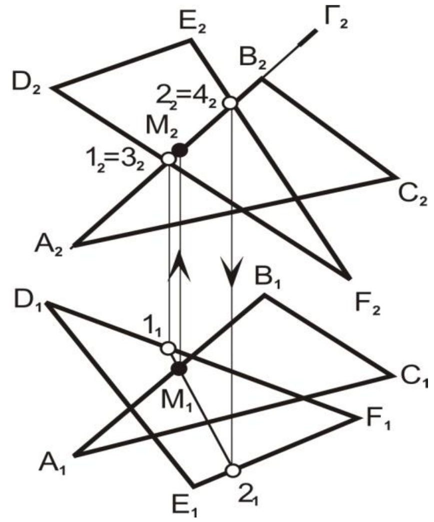
4. Определить видимость плоскости Σ(ΔABC) относительно пл. Q(Q_1) на фронтальной плоскости проекций. Направление взгляда на горизонталь-ной плоскости проекций показывает стрелка. Ближе к наблюдателю (дальше от фронтальной плоскости проекций) находится вершина B_1, следовательно вершина B_2 будет видима на $П_2$. Прилегающие отрезки 1_2 -B_2 и 2_2 -B_2 – видимы. Оставшаяся часть треугольника – не видима.	

Пример 2. Дано: плоскости Ω(ΔDEF) и Σ(ΔABC).

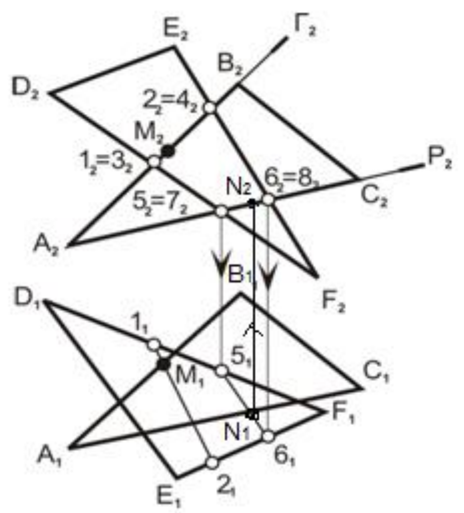
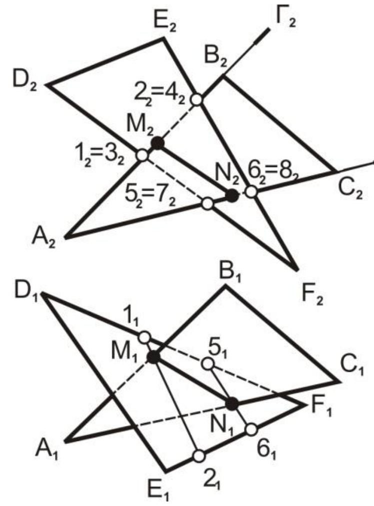
Требуется: построить линию пересечения двух плоскостей общего положения Ω(ΔDEF) и Σ(ΔABC) (табл. 5.2).

Таблица 5.2

Алгоритм построения линии пересечения плоскостей общего положения

Словесная форма	Графическая форма
1. Заключить прямую AB во вспомогательную плоскость-посредник Г($Г_2$), [A_2B_2] ≡ $Г_2$. Построить линию пересечения заданной плоскости Ω(ΔDEF) с Г($Г_2$), получим (1;2). Ω ∩ Г = (1;2). Построить линию пересечения заданной плоскости Σ(ΔABC) с Г($Г_2$), получим (AB). Σ ∩ Г = (AB). Найти точку пересечения полученных прямых: (1;2) ∩ (AB) = M. Точка M принадлежит одновременно трем плоскостям: Ω(ΔDEF), Г($Г_2$), Σ(ΔABC)	

Окончание таблицы 5.2

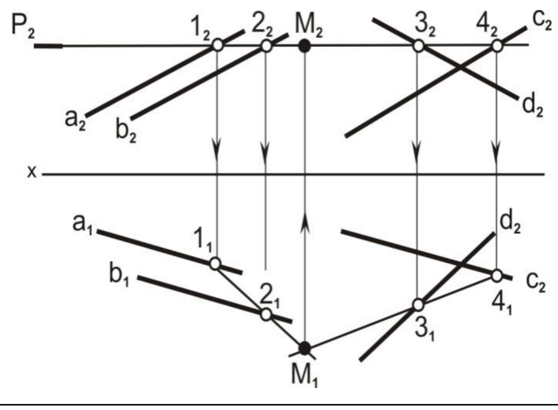
2. Заключить прямую АС во вспомогательную плоскость-посредник $P(P_2)$, $[A_2C_2] \equiv P_2$. Построить линию пересечения заданной плоскости $\Omega(\Delta DEF)$ с $P(P_2)$, получим (5;6). $\Omega \cap P = (5;6)$. Построить линию пересечения заданной плоскости $\Sigma(\Delta ABC)$ с $P(P_2)$, получим (АС). $\Sigma \cap P = (AC)$. Найти точку пересечения полученных прямых: $(5;6) \cap (AC) = N$. Точка N принадлежит одновременно трем плоскостям: $\Omega(\Delta DEF)$, $P(P_2)$, $\Sigma(\Delta ABC)$	
3. Соединить одноименные проекции точек M и N, линия MN – искомая линия пересечения. 4. Определить видимость плоскостей с помощью конкурирующих точек	

Пример 3. Дано: плоскости $\Lambda(a \parallel b)$ и $\Delta(c \cap d)$.

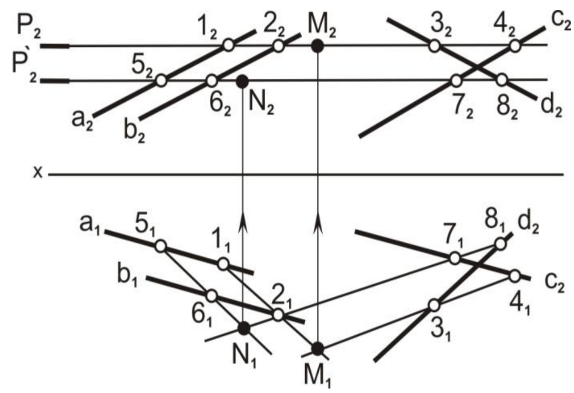
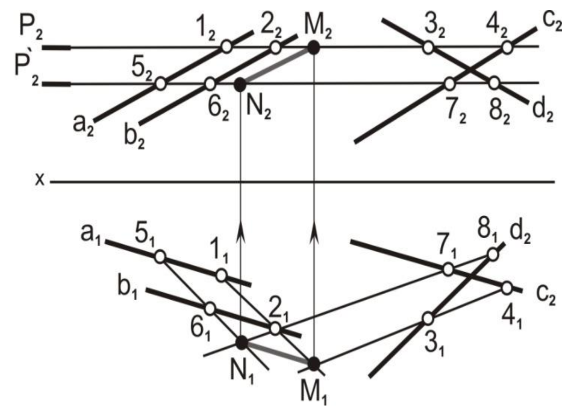
Требуется: построить линию пересечения двух плоскостей общего положения $\Lambda(a \parallel b)$ и $\Delta(c \cap d)$ (табл. 5.3).

Таблица 5.3

Алгоритм построения линии пересечения плоскостей общего положения

Словесная форма	Графическая форма
1. Провести первую вспомогательную плоскость $P(P_2)$. Построить линии пересечения плоскостей $\Lambda(a \parallel b)$ с $P(P_2)$ и $\Delta(c \cap d)$ с $P(P_2)$. $(\Lambda_2 \cap P_2) = (1_2 2_2)$ и $(\Delta_2 \cap P_2) = (3_2 4_2)$. Построить горизонтальные проекции полученных линий. Получим: $(1_1 2_1) \cap (3_1 4_1) = M_1$. Построить фронтальную проекцию M_2	

Окончание таблицы 5.3

2. Провести вторую вспомогательную плоскость $P`(P`_2)$. Построить линии пересечения плоскостей $\Lambda(a\,II\,b)$ с $P`(P`_2)$и $\Delta(c\cap d)$ с $P`(P`_2)$. $(\Lambda_2 \cap P`_2) = (5_2 6_2)$ и $(\Delta_2 \cap P`_2) = (7_2 8_2)$. Построить горизонтальные проекции полученных линий. Получим: $(5_1 6_1) \cap (7_1 8_1) =$ $[N_1]$. Построить фронтальную проекцию N_2	
3. Соединить точки M1 с N1 и M2 с N2. Получим: MN= $\Lambda(a\,II\,b) \cap \Delta(c\cap d)$ – искомая линия пересечения.	

5.4.2. Параллельность плоскостей.

Две плоскости параллельны, если две пересекающиеся прямые одной плоскости параллельны двум пересекающимся прямым другой плоскости. На рис. 5.21 представлены две плоскости, которые параллельны, так как каждая из плоскостей содержит прямые, которые пересекаются и параллельны прямым другой плоскости: Q(ΔABC) II P(DM∩DN), так как AB II DM и BC II DN; A_2B_2 II D_2M_2 и B_2C_2 II D_2N_2; A_1B_1 II D_1M_1 и B_1C_1 II D_1M_1.

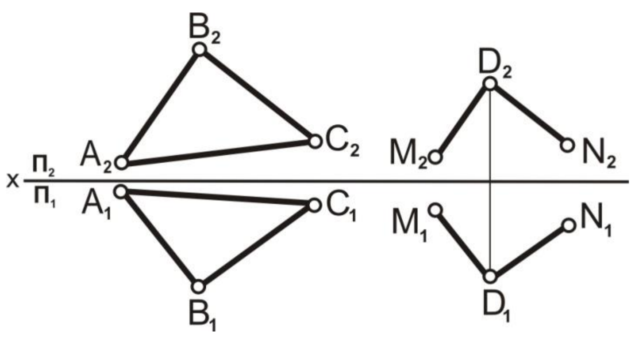


Рис. 5.21. Плоскости параллельные

Пример. Через точку D провести плоскость Q, параллельно данной Σ(ΔABC).

Алгоритм решения (рис. 5.21):

1. Через точку D провести прямую DM, параллельно AB. Получим $D_1M_1 \parallel A_1B_1$ и $D_2M_2 \parallel A_2B_2$.

2. Через точку D провести прямую DN, параллельно BC. Получим $D_1N_1 \parallel B_1C_1$ и $D_2N_2 \parallel B_2C_2$.

Вывод. Плоскость Ω задана двумя пересекающимися прямыми:

$DM \cap DN = D$. Плоскость Σ задана (ΔABC), где $AB \cap BC = B$. При этом $DM \parallel AB$ и $DN \parallel BC$, то плоскости Q и Σ параллельны.

5.5. Взаимное положение прямой линии и плоскости

Возможны следующие случаи относительного расположения прямой линии и плоскости:

– прямая линия принадлежит плоскости (см. раздел 5.3);

– прямая линия пересекает плоскость (частный случай – под прямым углом);

– прямая линия параллельна плоскости.

5.5.1. Прямая линия, пересекающая плоскость.

Построение точки пересечения прямой линии с плоскость – одна из основных задач начертательной геометрии. Существует три типа таких задач, две из которых являются частными случаями. Рассмотрим этапы решения каждой из них.

Пример 1. Дано: плоскость общего положения Σ(ΔABC) и прямая общего положения b. Требуется: построить точку пересечения заданной прямой с плоскостью.

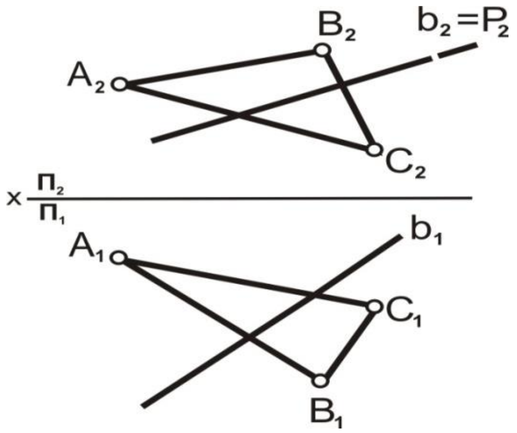
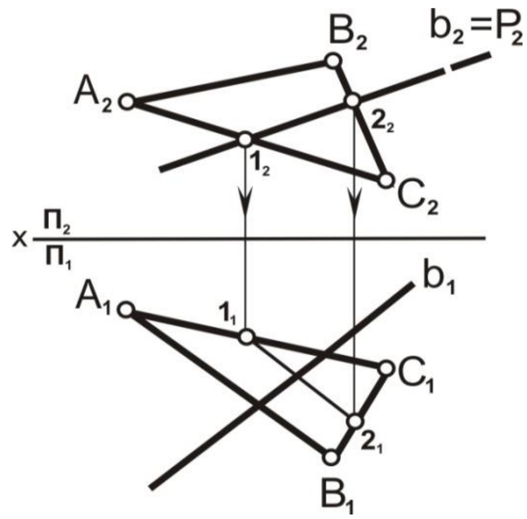
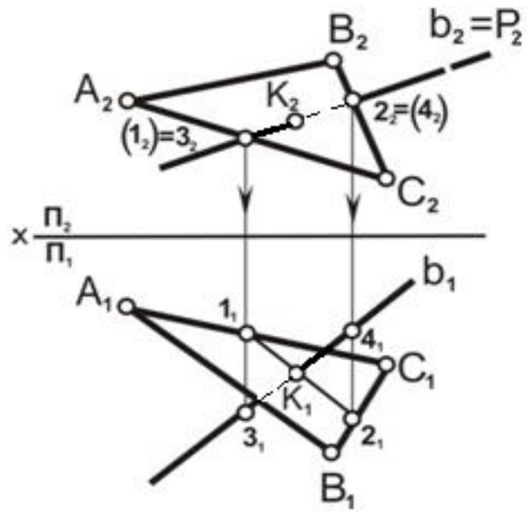
Для решения задачи применяют метод вспомогательных секущих плоскостей-посредников, преимущественно проецирующих (табл. 5.4).

Решение частных случаев задачи на определение точки пересечения прямой с плоскостью основано на свойствах проекций геометрических образов частного положения.

Пример 2. Дано: прямая общего положения a и фронтально-проецирующая плоскость $P(P_2)$. Требуется: построить точку пересечения прямой общего положения с проецирующей плоскостью (рис. 5.22).

Таблица 5.4

Алгоритм построения точки пересечения прямой и плоскости общего положения

Словесная форма	Графическая форма
1. Заключить прямую b во вспомогательную плоскость-посредник P, $[b_2] \equiv [P_2]$ P – фронтально-проецирующая плоскость, на эпюре задана следом $P(P_2)$	
2. Построить линию пересечения вспомогательной плоскости с заданной, $\Sigma(\Delta ABC) \cap P_2 = (1;2)$. $P_2 \cap B_2C_2 = 2_2$; $P_2 \cap A_2C_2 = 1_2$; $1_1 \subset A_1C_1$; $2_2 \subset B_1C_1$.	
3. Найти точку пересечения полученной линии с заданной прямой: $[1_1;2_1] \cap b_1 = K_1$; находим $K_2 \subset [1_2;2_2]$. $b \cap \Sigma(\Delta ABC) = K$. 4. Определить видимость заданной прямой по правилу конкурирующих точек[15].	

15 Подразд. 3.3. Конкурирующие точки.

Алгоритм построения.

1. Опустить перпендикуляр линии связи из точки M_2 до пересечения с a_1. Получим точку M_1.

2. Показать видимость прямой а: полупрямая, находящаяся выше плоскости Р (P_2), будет видимой на горизонтальной плоскости проекций до точки пересечения с плоскостью М.

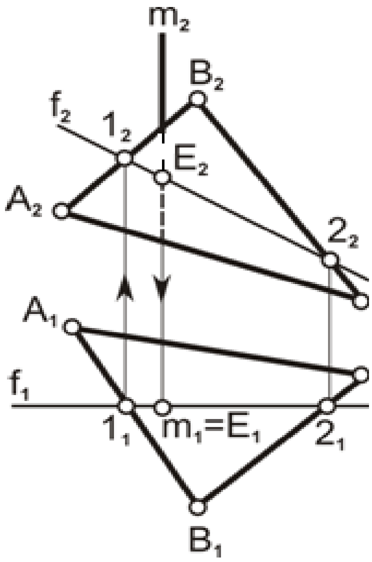


Рис. 5.23. Построение точки пересечения проецирующей прямой и плоскости общего положения

Пример 3. Дано: плоскость общего положения P(ΔABC) и прямая горизонтально-проецирующая m. Требуется: построить точку пересечения проецирующей прямой с плоскостью общего положения (рис. 5.23).

Алгоритм построения.

1. Через m_1 провести фронталь f_1, принадлежащую плоскости P(ΔABC), $m_1 \equiv E_1$. Точка E_1 – горизонтальная проекция искомой точки пересечения прямой m с плоскостью P(ΔABC).

2. Построить f_2 линиями проекционной связи, $E_2 \subset f_2$, $f_2 \cap m_2 = E_2$. Точка E_2 – фронтальная проекция искомой точки пересечения прямой m с плоскостью P(ΔABC).

3. Показать видимость прямой m относительно точки Е.

5.5.2. Прямая линия, перпендикулярная плоскости.

Согласно элементарной геометрии, прямая перпендикулярна плоскости, если она перпендикулярна двум пересекающимся прямым этой плоскости. На заданной плоскости в качестве двух пересекающихся прямых целесообразно выбирать линии уровня – фронталь и горизонталь. В этом случае основанием решения будут являться свойства проецирования прямого угла (рис. 1.14).

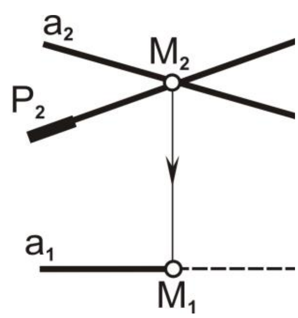


Рис. 5.22. Построение точки пересечения прямой общего положения с проецирующей плоскостью

Таким образом, признак перпендикулярности прямой и плоскости можно сформулировать так: прямая перпендикулярна плоскости, если ее горизонтальная проекция перпендикулярна к горизонтальной проекции горизонтали плоскости, а фронтальная проекция прямой перпендикулярна к фронтальной проекции фронтали плоскости.

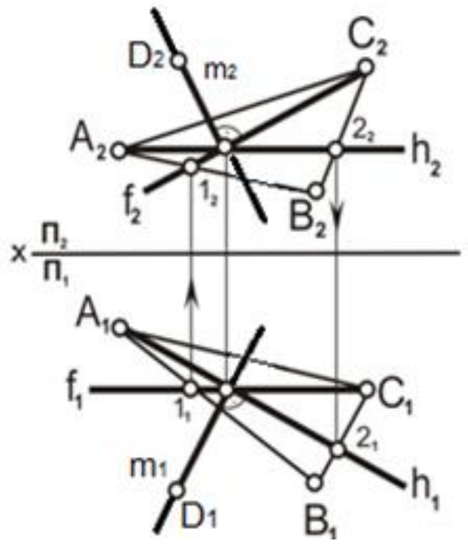


Рис. 5.24 Построение перпендикуляра к плоскости

Пример построения перпендикуляра к плоскости. Дано: плоскость общего положения Q(ΔABC) и точка вне плоскости D. Требуется: из заданной точки D построить перпендикуляр (прямая m) к плоскости Q(ΔABC) (рис. 5.24).

Алгоритм построения:

1. Построить фронталь и горизонталь плоскости: $h(h_1; h_2)$,$f(f_1; f_2)$.

2. Из точки D_1 провести перпендикуляр к горизонтальной проекции горизонтали, $D_1 \supset m_1$, $m_1 \perp h_1$. Из точки D_2 провести перпендикуляр к фронтальной проекции фронтали, $D_2 \supset m_2$, $m_2 \perp f_2$.

3. Вывод: прямая $m \perp Q(\Delta ABC)$, так как $m_2 \perp A_2B_2C_2$; $m_1 \perp A_1B_1C_1$.

5.5.3. Перпендикулярность двух плоскостей.

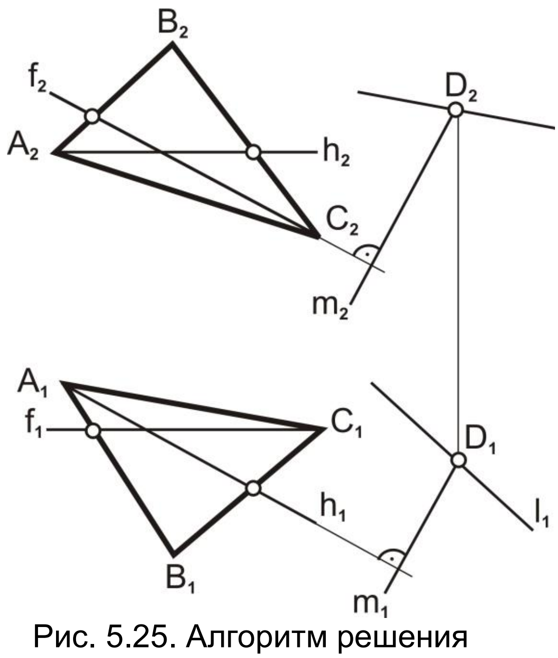


Рис. 5.25. Алгоритм решения задачи

Две плоскости перпендикулярны, если хотя бы одна прямая одной плоскости перпендикулярна двум пересекающимся прямым другой плоскости.

Пример. Через заданную прямую l и точку D, лежащую на этой прямой, построить плоскость P, перпендикулярную данной Σ(ΔABC) (рис. 5.25).

Алгоритм решения.

1. Построить горизонталь h и фронталь f плоскости Σ (Δ ABC).

2. Через точку D провести перпендикуляры к натуральным

величинам горизонтали h_1 и фронтали f_2. $D_1 \supset m_1 \perp h_1$; $D_2 \supset m_2 \perp f_2$.

3. Получили: плоскость Р задана двумя пересекающимися прямыми в точке D: ($m \cap l = D$). При этом $m \perp \Sigma(\Delta ABC)$, следовательно плоскость Р перпендикулярна плоскости Σ.

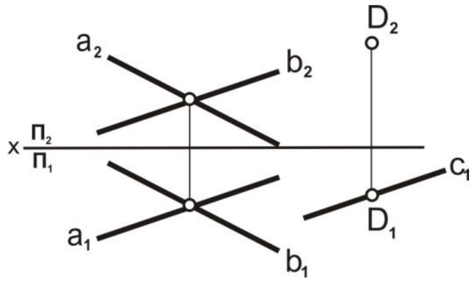
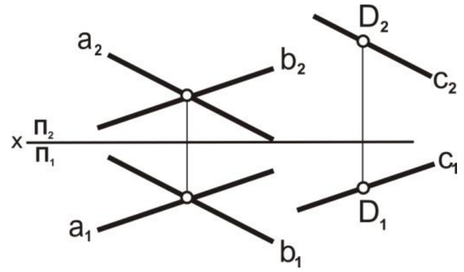
5.5.4. Прямая линия, параллельная плоскости.

Прямая параллельна плоскости, если она параллельна одной из прямых, лежащих в этой плоскости и не принадлежит этой плоскости. В общем случае, для решения задач на построение прямой параллельно плоскости можно следовать этапам алгоритма, приведенным в табл. 5.5.

Пример. Дано: плоскость общего положения $W(a \cap b)$ и точка D вне плоскости. Требуется: через точку D построить прямую параллельную заданной плоскости.

Таблица 5.5

Алгоритм построения прямой, параллельной плоскости

Словесная форма	Графическая форма
1. Через точку D_1 провести прямую c_1, параллельно a_1 (либо b_1). Получаем: $D_1 \supset c_1 \parallel a_1$	
2. Через точку D_2 провести c_2, параллельно a_2. Получаем: $D_2 \supset c_2 \parallel a_2$. Вывод: так как $D_1 \supset c_1 \parallel a_1$ и $D_2 \supset c_2 \parallel a_2$, то $D \supset c \parallel W(a \cap b)$.	

5.6. Выводы по теме

1. Плоскость в пространстве может быть задана:
– проекциями трёх точек, не лежащих на одной прямой линии;
– проекциями прямой линии и точки, не лежащей на этой прямой;
– проекциями двух параллельных прямых;
- проекциями двух пересекающихся прямых;
– проекциями плоской фигуры;
– следами плоскости.

2. Плоскость в пространстве занимает: общее положение - не перпендикулярное ни одной плоскости проекций и частное положение -

перпендикулярное, либо параллельное плоскости проекций. Различают проецирующие плоскости и плоскости уровня.

3. Прямая линия может принадлежать плоскости, быть параллельна плоскости, пересекать плоскость, быть перпендикулярна плоскости.

Среди прямых, принадлежащих плоскости, выделяют главные линии плоскости – это горизонталь, фронталь, профильную прямую, линию наибольшего наклона.

Прямая перпендикулярна плоскости, если ее горизонтальная проекция перпендикулярна к горизонтальной проекции горизонтали плоскости, а фронтальная проекция перпендикулярна к фронтальной проекции фронтали плоскости.

4. Две плоскости могут быть: параллельны и пересекаться. Линией пересечения двух плоскостей является прямая линия. Проекции прямой линии пересечения двух плоскостей общего положения определяются проекциями двух точек, принадлежащих одновременно обеим плоскостям.

Ключевые слова

- Плоскость
- Плоскость общего положения
- Плоскость уровня (горизонтальная, фронтальная, профильная)
- Проецирующая плоскость
- Условие принадлежности прямой плоскости
- Главные линии плоскости (горизонталь, фронталь, профильная прямая, линия наибольшего наклона)
- Условие перпендикулярности прямой и плоскости
- Условие параллельности двух плоскостей
- Условие перпендикулярности плоскостей

Способы деятельности, необходимые для решения задач

– построение горизонтали, фронтали, линии наибольшего наклона (ската) плоскости;

– построение точки пересечения прямой и плоскости;

– построение прямой линии, параллельной плоскости;

– построение перпендикуляра к плоскости;

– построение плоскости, параллельной данной;

– построение линии пересечения двух плоскостей;

– построение плоскости, перпендикулярной данной.

Вопросы для самопроверки

1. Какими способами плоскость задается на комплексном чертеже?

2. Привести классификацию плоскостей по положению относительно плоскостей проекций.

3. Что такое главные линии плоскости? Перечислите их, дайте характеристику.

4. При каких условиях плоскости параллельны?

5. Как провести перпендикуляр к плоскости?

6. Каким методом определяется линия пересечения двух плоскостей общего положения? В чем сущность метода?

Задания для самостоятельного решения

1. В плоскости Δ(A, B, C) провести горизонталь на расстоянии l от плоскости $П_1$ (рис. 5.26).

2. Через прямую m провести горизонтально-проецирующую плоскость Σ и фронтально-проецирующую плоскость Δ (рис. 5.27).

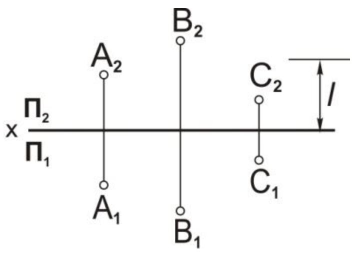


Рис. 5.26

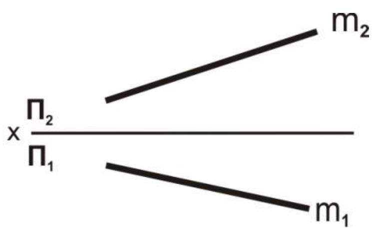


Рис. 5.27

3. Найти линию пересечения плоскостей P(AB∩BC) и α($α_2$) (рис. 5.28).

4. Построить линию пересечения плоскостей Σ(ΔABC) и Δ(DEFG) (рис. 5.29).

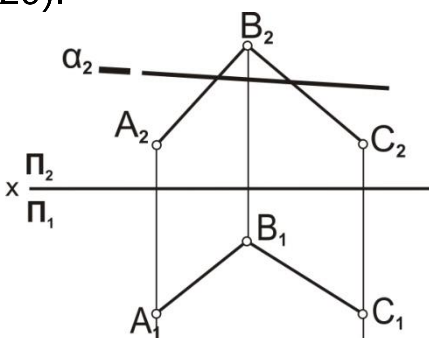


Рис. 5.28

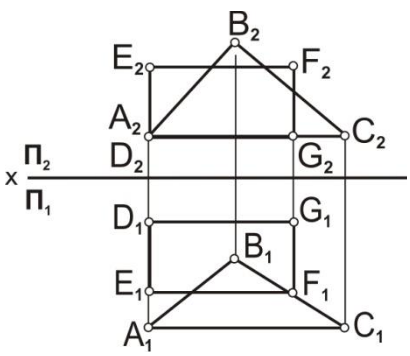


Рис. 5.29

5. Найти точку пересечения прямой AB с плоскостью Σ(ΔCDE) (рис.5.30). Определить видимость прямой AB.

6. Через точку A провести прямую b, параллельную плоскости Σ(ΔBCD) (рис. 5.31).

7. Через точку пересечения прямой MN с заданной плоскостью P(ΔABC) провести в плоскости P прямую, перпендикулярную MN (рис.5.32).

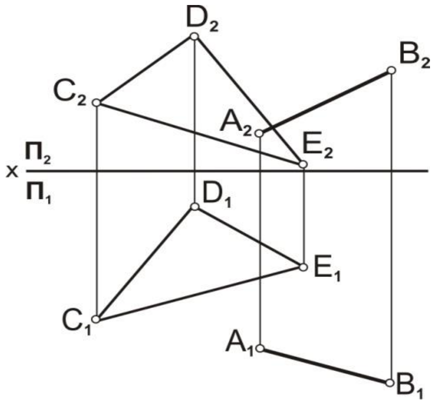


Рис. 5.30

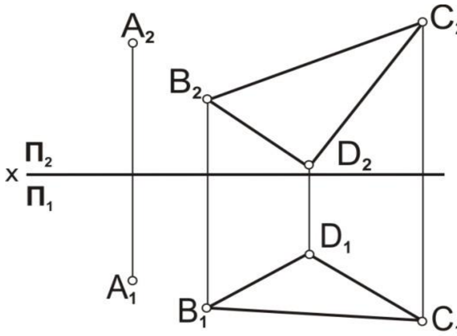


Рис. 5.31

8. Через точку А провести плоскость, перпендикулярную отрезку ВС (рис. 5.33).

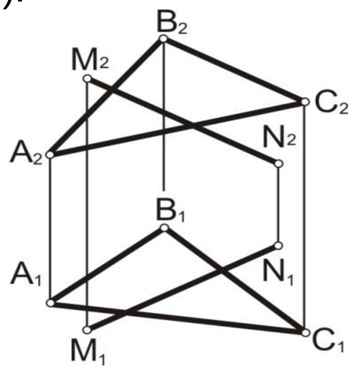


Рис. 5.32

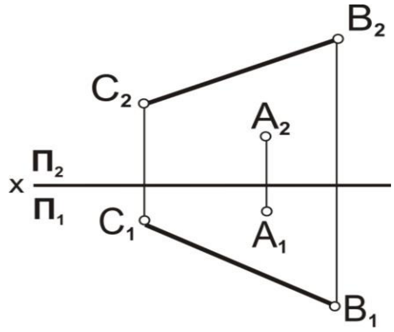


Рис. 5.33

5.7. Решение типовых задач (задачи № 4, 5, 6, 7 из РГР «Альбом задач по начертательной геометрии»)

Задача 4. Дано: плоскости Σ(ABC) и Δ(DEFK) (рис. 5.34).

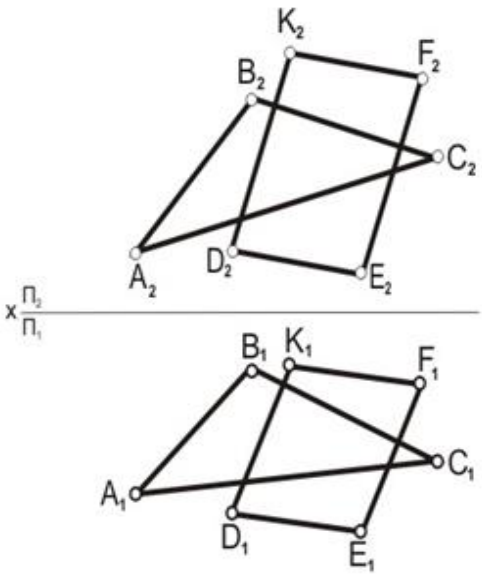


Рис.5.34

Требуется: построить линию пересечения плоскостей.

План решения:

1. Выполнить анализ условия задачи:

– определить признаки понятий «плоскость», «плоскость общего положения», «плоскость частного положения»; «линия»;

– выяснить какое положение занимают данные плоскости: общее или частное;

– определить условия нахождения общего элемента.

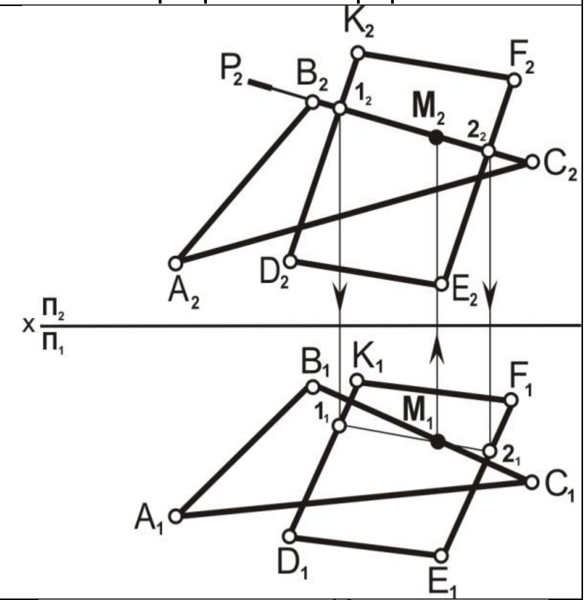
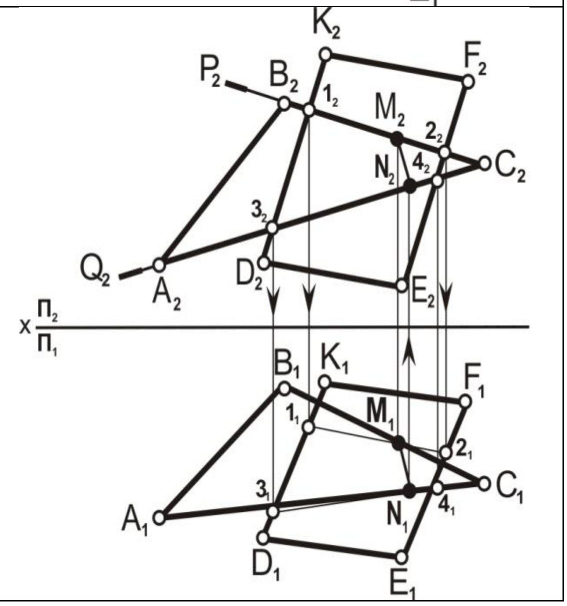
2. На основе анализа определить тип задачи[16]: пересечение плоскостей общего положения либо пересечение плоскостей общего и частного положения. Выбрать подходящий способ решения. Составить алгоритм геометрических построений.

3. Выполнить необходимые геометрические построения: построить две точки M и N, принадлежащие обеим плоскостям (табл. 5.6).

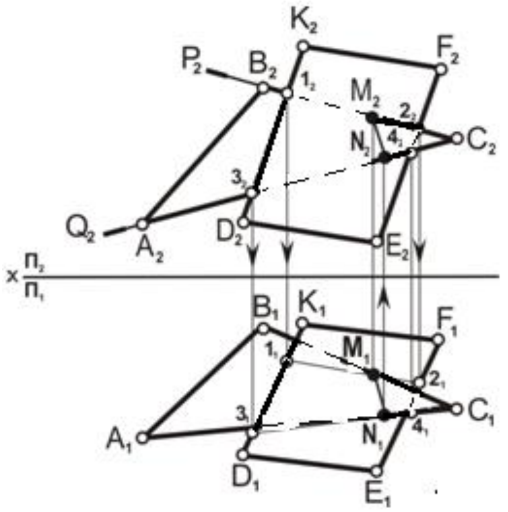
4. Составить словесное обоснование решения задачи.

Таблица 5.6

Алгоритм геометрических построений решения в задаче 4

Словесная форма	Графическая форма
1. Заключить прямую BC во вспомогательную плоскость-посредник $P(P_2)$, $B_2C_2 \equiv P_2$. 2. Построить линию пересечения плоскостей $\Sigma(ABC)$ и $P(P_2)$, получим: $\Sigma \cap P = BC$. Построить линию пересечения плоскостей $\Delta(DEFK)$ и $P(P_2)$, получим: $\Delta \cap P = (1,2)$ Построить точку пересечения полученных прямых : $(BC) \cap (1,2) = M$. M – точка, принадлежащая одновременно трем плоскостям: $P(P_2)$, $\Sigma(ABC)$ и $\Delta(DEFK)$.	
3. Заключить прямую AC во вспомогательную плоскость-посредник $Q(Q_2)$, $A_2C_2 \equiv Q_2$. 4. Построить линию пересечения плоскостей $\Sigma(ABC)$ и $Q(Q_2)$, получим: $\Sigma \cap Q = AC$. Построить линию пересечения плоскостей $\Delta(DEFK)$ и $Q(Q_2)$, получим: $\Delta \cap Q = (3,4)$. Построить точку пересечения полученных прямых : $AC \cap (3,4) = N$. N - точка, принадлежащая одновременно трем плоскостям: $P(P_2)$, $\Sigma(ABC)$ и $\Delta(DEFK)$.	

[16] Подразд. 5двух плоскостей.

5. Соединить одноименные проекции точек M и N, линия MN – искомая линия пересечения. 6. Определить видимость плоскостей способом конкурирующих точек	

Задача 5. Дано: прямая l, плоскость Σ(ΔABC) (рис. 5.35). Требуется: построить точку пересечения прямой и плоскости.

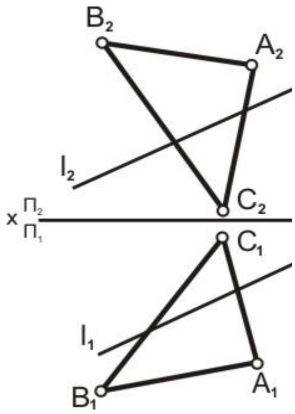


Рис. 5.35. Условие к задаче 5

План решения:

1. Выполнить анализ условия задачи:

– определить признаки понятий «плоскость», «плоскость общего положения», «плоскость частного положения»; «линия»;

– выяснить какое положение занимает плоскость и прямая: общее или частное;

– определить условие нахождения общего элемента.

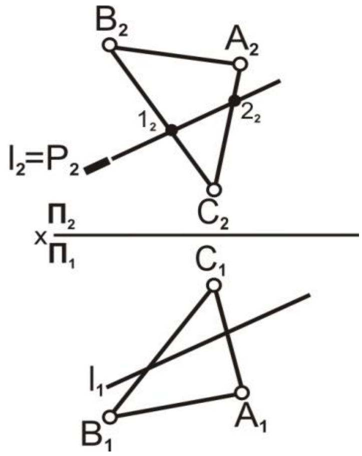
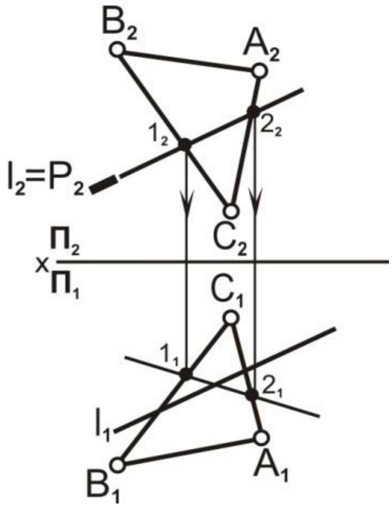
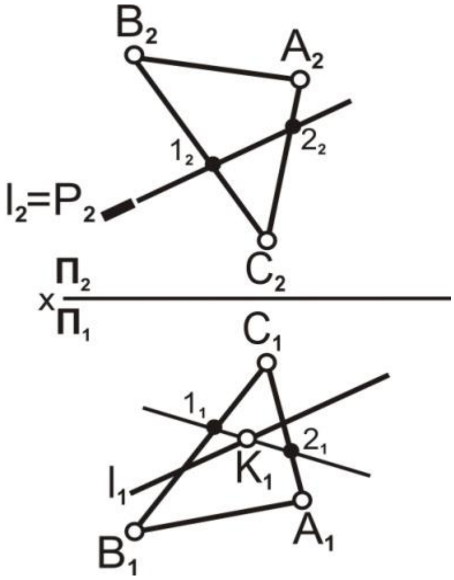
2. Определить тип задачи: пересечение плоскости общего положения и прямой общего положения, пересечение плоскости общего и прямой частного положения, пересечение прямой и плоскости частного положения. Составить алгоритм решения задачи и построить точку, принадлежащую одновременно плоскости и прямой.

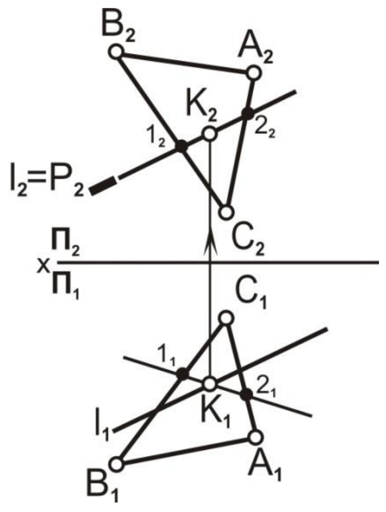
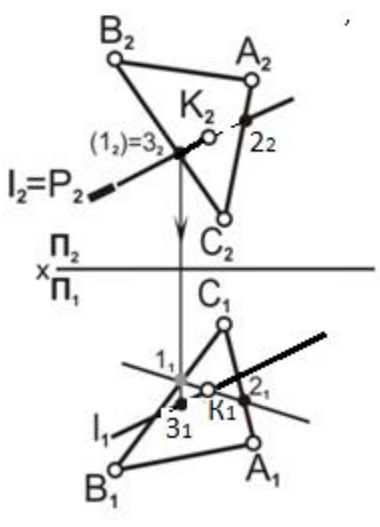
3. Выполнить необходимые геометрические построения.

4. Составить словесное обоснование решения задачи (табл. 5.7).

Таблица 5.7

Алгоритм геометрических построений решения в задаче 5

Словесная форма	Графическая форма
1. Заключить прямую l во вспомогательную плоскость-посредник P (P_2), Теперь $l_2 \equiv P_2$. $(1_2 2_2)$ – фронтальная проекция линии пересечения вспомогательной плоскости P(P_2) с данной плоскостью Σ(ΔABC), $P \cap \Sigma = (1,2)$.	
2. При помощи линий проекционной связи построить горизонтальную проекцию линии (1 2)– ($1_1 2_1$).	
3. Построить точку пересечения полученной линии с заданной: ($1_1 2_1$) пересекает горизонтальную проекцию l_1 в точке K_1; $l_1 \cap (1_1;2_1) = K_1$. 4. Отметить точку K_1, которая является горизонтальной проекцией искомой точки пересечения	

5. Построить фронтальную проекцию точки K линиями проекционной связи: $K_2 \supset l_2$	
6. Определить видимость прямой линии l при помощи конкурирующих точек. *Например, точки 1 и 3 являются фронтально конкурирующими. Точка 1, принадлежащая плоскости Σ, находится за точкой 3, принадлежащей прямой l, т. е. прямая l находится перед плоскостью Σ и ее фрагмент видим.*	

Задача 6. Дано: плоскость Σ(ΔАВС) и точка D вне плоскости. Требуется: определить расстояние от точки D до плоскости Σ(ΔАВС) (рис.5.36).

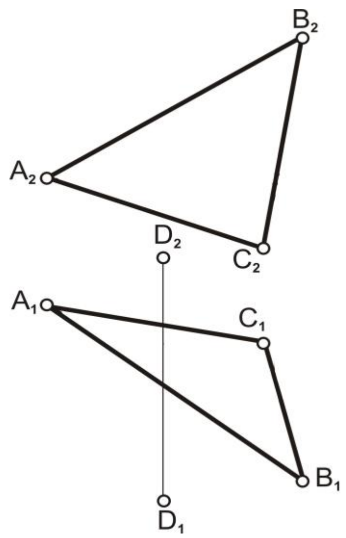


Рис. 5.36. Условие к задаче 6

План решения :

1. Выполнить анализ условия задачи:

– определить признаки понятий «плоскость», «плоскость общего положения», «плоскость частного положения»;

– определить, что является расстоянием от точки до плоскости и условия его определения.

2. Составить план решения задачи исходя из следующего:

– необходимо через точку D построить перпендикуляр к плоскости;

– необходимо определить точку пересечения перпендикуляра с плоскостью –K;

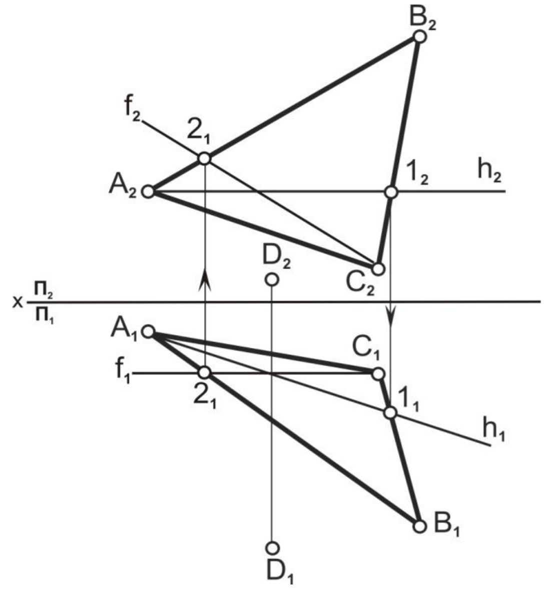
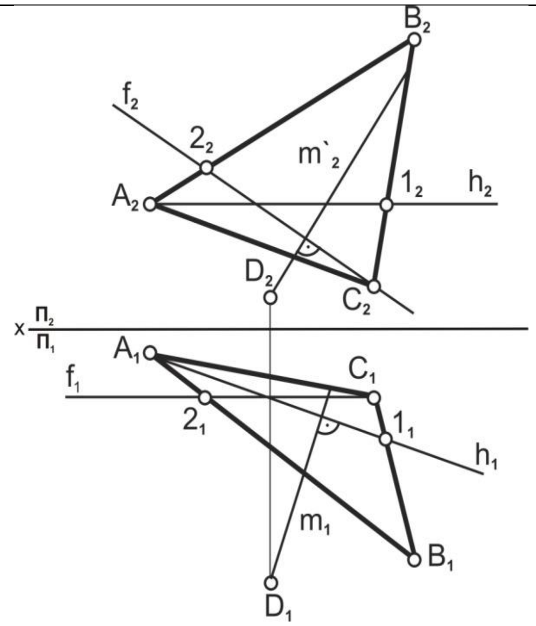
– необходимо определить натуральную величину отрезка KD.

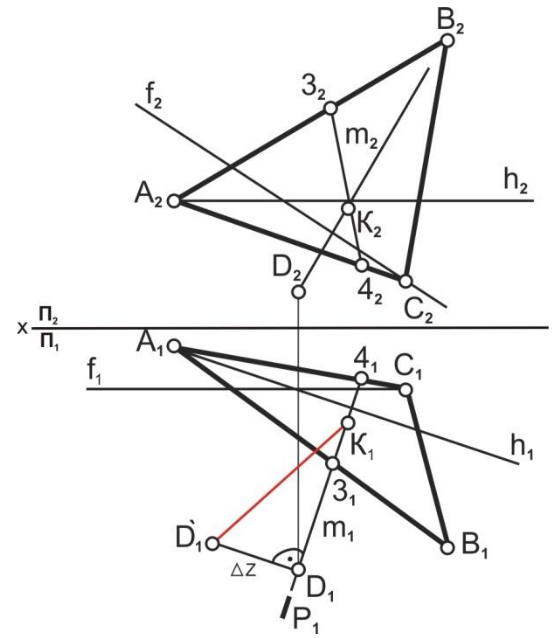
3. Выполнить необходимые геометрические построения (табл. 5.8).

4. Составить словесное обоснование решения задачи.

Таблица 5.8

Алгоритм геометрических построений в задаче 6

Словесная форма	Графическая форма
1. В плоскости треугольника построить горизонталь h: – на фронтальной проекции треугольника провести прямую, параллельную оси OX, – фронтальную проекцию горизонтали, $h_2 \parallel OX$; – в проекционной связи найти горизонтальную проекцию горизонтали. 2. В плоскости треугольника построить фронталь f: – на горизонтальной проекции треугольника провести прямую, параллельную оси OX, – горизонтальную проекцию фронтали, $f_1 \parallel OX$; – в проекционной связи найти фронтальную проекцию фронтали	
3. Через заданную точку D построить перпендикуляр к плоскости треугольника: – на горизонтальной проекции построить перпендикуляр к горизонтальной проекции горизонтали: $D_1 \supset m_1 \perp h_1$; – на фронтальной плоскости проекции построить перпендикуляр к фронтальной проекции фронтали: $D_2 \supset m_2 \perp f_2$. Получили $m \perp \Sigma(\Delta ABC)$.	

4. Теперь необходимо определить точку K – точку пересечения перпендикуляра m с плоскостью Σ(ΔABC). Решаем как задачу 5. Заключить перпендикуляр m во вспомогательную горизонтально проецирующую плоскость, $P(P_1) \equiv m_1$. 5. Найти линию пересечения вспомогательной плоскости с плоскостью треугольника: $\Sigma(\Delta ABC) \cap P(P_1)=(3,4)$. 6. Определить точку пересечения перпендикуляра с полученной линией: $m_2 \cap (3_2,4_2) = K_2$. K – точка пересечения перпендикуляра с плоскостью: $K = m \cap \Sigma$. 7. Определить расстояния от точки D до плоскости Σ методом прямоугольного треугольника (задача 2). $[D`_1K_1]=\lvert DK\rvert$ – искомое расстояние от точки D до плоскости Σ(ΔABC).	

Задача 7 а (варианты с 1–12). Дано: плоскость Q(ΔABC) и точка D на прямой l (рис. 5.37). Требуется: через точку D lпровести плоскость, перпендикулярную данной.

План решения:

1. Выполнить анализ условия задачи:

– выделить признаки, характеризующие понятие «плоскость», «перпендикулярность плоскостей»;

– выяснить условия перпендикулярности плоскостей.

2. Составить план решения[17].

3. Выполнить необходимые геометрические построения (табл. 5.9).

4. Составить словесное обоснование решения задачи.

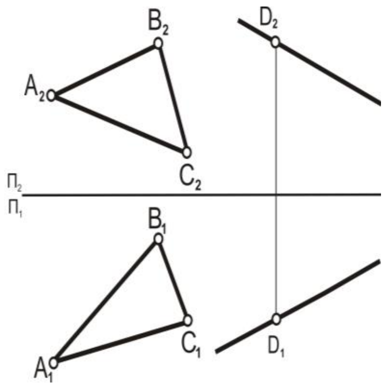


Рис. 5.37. Условие к задаче 7а

Задача 7 б (варианты 13–18). Дано: плоскость P(a II b) и точка S (рис. 5.38). Требуется: через точку S провести плоскость, параллельную данной.

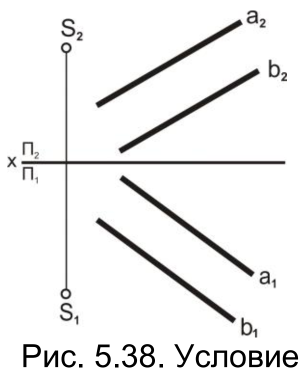
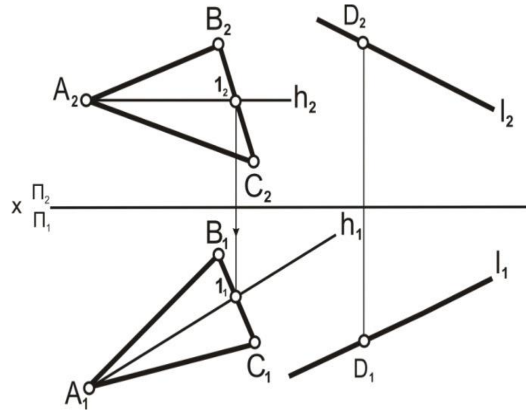
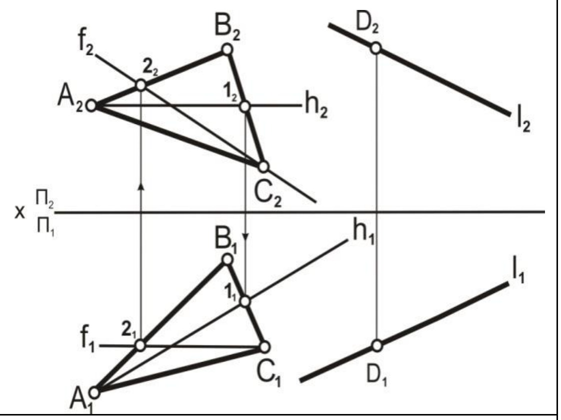
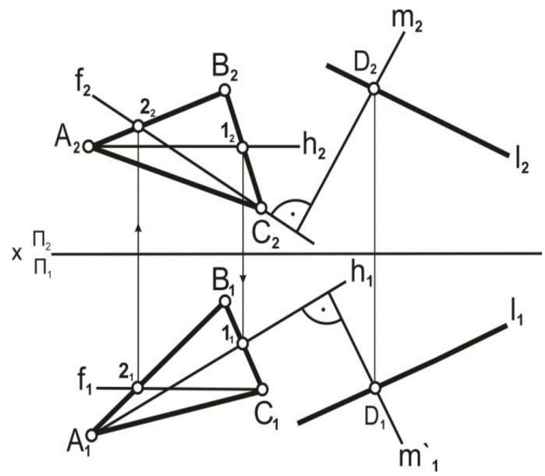


Рис. 5.38. Условие к задаче 7б

Таблица 5.9

Алгоритм решения в задаче 7 а

Словесная форма	Графическая форма
1. В плоскости Q(ΔABC) построить горизонталь h: – на фронтальной проекции треугольника провести прямую, параллельную оси OX – фронтальную проекцию горизонтали, h_2 II OX; – в проекционной связи найти горизонтальную проекцию горизонтали h_1	
2. В плоскости Q(ΔABC) построить фронталь f: – на горизонтальной проекции треугольника провести прямую, параллельную оси OX, – горизонтальную проекцию фронтали, f_1 II OX; – в проекционной связи найти фронтальную проекцию фронтали f_2.	
3. Через точку D построить перпендикуляр к плоскости треугольника: – на горизонтальной проекции построить перпендикуляр к горизонтальной проекции горизонтали, $m_1 \perp h_1$; – на фронтальной проекции построить перпендикуляр к фронтальной проекции фронтали, $m_2 \perp f_2$. Получили плоскость (m ∩ l), где m ⊥ Q(ΔABC).	

План решения:

1. Выполнить анализ данных условия задачи. Выделить признаки, характеризующие понятие «плоскость», «плоскости параллельны» [18]; определить недостающие элементы чертежа, необходимые для выполнения условия параллельности плоскостей.

[18] Подразд. 5.4.2. Плоскости параллельные.

2. Наметить ход действий:

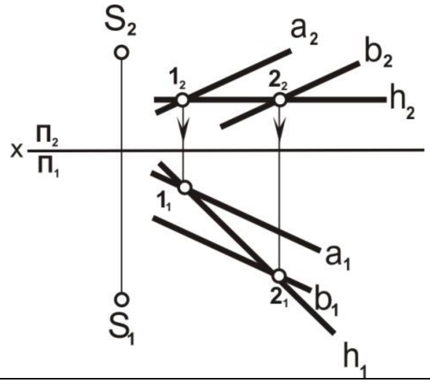
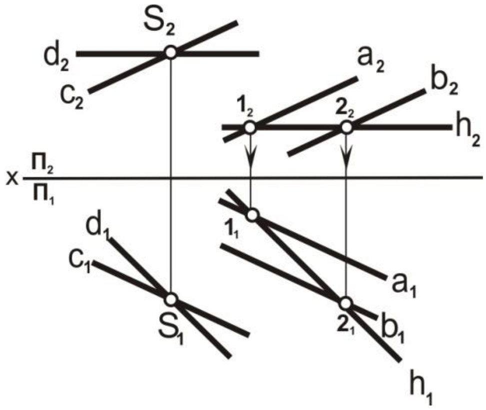
– через одну точку можно построить новую плоскость заданную двумя пересекающимися прямыми;

– преобразовать способ задания данной плоскости так, чтобы она содержала пересекающиеся прямые; определить, какие прямые, принадлежащие плоскости, можно построить всегда.

3. Выполнить построения (табл. 5.10).

Таблица 5.10

Алгоритм решения в задаче 7 б

Словесная форма	Графическая форма
1. Преобразовать данную плоскость P(aIIb), заданную параллельными прямыми, так чтобы она содержала прямые, пересекающиеся. В пределах плоскости строим прямую h (либо f), пересекающую данные прямые a и b.	
2. Через точку S провести прямую c, параллельную a; $c_1 \parallel a_1$, $c_2 \parallel a_2$. 3. Через точку S провести прямую d, параллельную h; $d_1 \parallel h_1$, $d_2 \parallel h_2$. Получим: плоскость Δ(c∩d=S), Δ ll P, так как c ll a, d ll h, где h⊂P.	

Задача 7 в (варианты 19–26). Дано: прямая h, точка A, принадлежащая h, A∈h, прямая a (рис. 5.39). Требуется: через точку A, лежащую на горизонтали [19], провести прямую AB так, чтобы она пересекала за-данную прямую a и была перпендикулярна горизонтали (либо фронтали).

[19] В ряде вариантов задачи 7в в условии присутствует фронталь. Решение задачи выполняется аналогично.

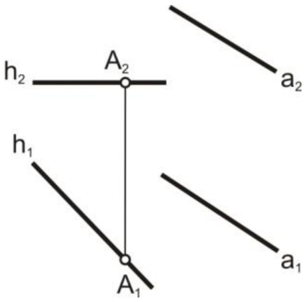


Рис. 5.39. Условие к задаче 7в

План решения:

1. Выполнить анализ условия задачи.

Выделить признаки, характеризующие понятия «горизонталь («фронталь»), «прямые пересекающиеся», «перпендикулярность прямых».

2. Составить алгоритм решения[20]:

2.1. Построим прямую линию, перпендикулярную заданной.

Для этого: через A_1 построим прямую перпендикулярную h_1 до пересечения с a_1; $A_1 \supset l_1 \cap a_1 = B_1$. Построить фронтальную проекцию точки $B(B_2)$ на прямой а линиями проекционной связи; $B \in a \Rightarrow B_2 \in a_2$.

2.2. Соединить точки A_2 с B_2; $l_2(A_2B_2) \cap a_2 = B_2$.

3. Выполнить построения согласно рис. 5.40.

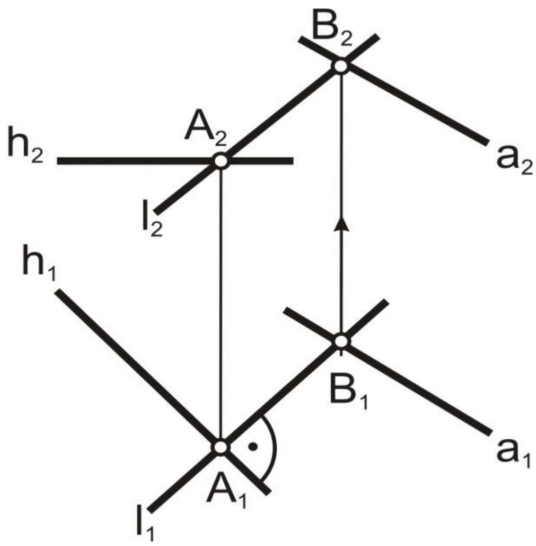


Рис. 5.40. Геометрические построения к задаче 7 в

6. МЕТОДЫ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ КОМПЛЕКСНОГО ЧЕРТЕЖА

При решении многих задач начертательной геометрии бывает целесообразно преобразовать проекции одной или нескольких фигур таким образом, чтобы они заняли частное положение относительно плоскостей проекций: параллельное либо перпендикулярное.

Методами преобразования комплексного чертежа являются метод замены плоскостей проекций, метод плоскопараллельного перемещения, метод вращения вокруг проецирующей оси, метод

[20] Подразд. 4.4. Пересекающиеся прямые. Подразд. 5.5.2. Прямая линия, перпендикулярная плоскости.

вращения вокруг линии уровня. Данными методами можно выполнить четыре основные задачи преобразования.

1. Прямую линию общего положения преобразовать в прямую линию уровня.

2. Прямую линию уровня преобразовать в прямую линию проецирующую.

3. Плоскость общего положения преобразовать в плоскость проецирующую.

4. Плоскость проецирующую преобразовать в плоскость уровня.

Формулировки и результаты решения этих задач для разных методов преобразования – одинаковы, но процесс решения отличается.

6.1. Метод замены плоскостей проекций

Сущность способа состоит в том, что при неизменном положении заданного оригинала в пространстве меняется положение плоскости проекций, которую располагают так, чтобы оригинал занимал к ней частное положение. Обязательным условием является взаимная перпендикулярность плоскостей проекций.

На рис. 6.1 введена новая плоскость $П_4$ перпендикулярно плоскости проекций $П_1$. Получена проекция – A_4. Согласно методу Монжа, положение точки в пространстве определяется двумя ее проекциями, например A_1 и A_2. Из рис. 6.1 видно, что и другая пара проекций – A_1 и A_4 также определяет положение точки в пространстве. Системы плоскостей $П_1П_2$ и $П_1П_4$ равноправны, так как плоскости $П_2$ и $П_4$ перпендикулярны $П_1$. Поэтому свойства, установленные ранее для системы плоскостей $П_1П_2$, распространяются на новую систему $П_1П_4$. Таким образом, сущность задачи состоит в том, чтобы, соблюдая определенные закономерности, перейти от чертежа в старой системе плоскостей, к чертежу, выполненному в новой системе плоскостей проекций. Положение объекта в пространстве остается неизменным, а меняется положение плоскостей проекций. Очевидными будут те свойства, которые связаны с положением неподвижности плоскости $П_1$, т. е.: 1) положение горизонтальной проекции A_1 точки A; 2) высота точки A: $|A_1A|=|A_xA_2|=|A`_xA_4| = z$.

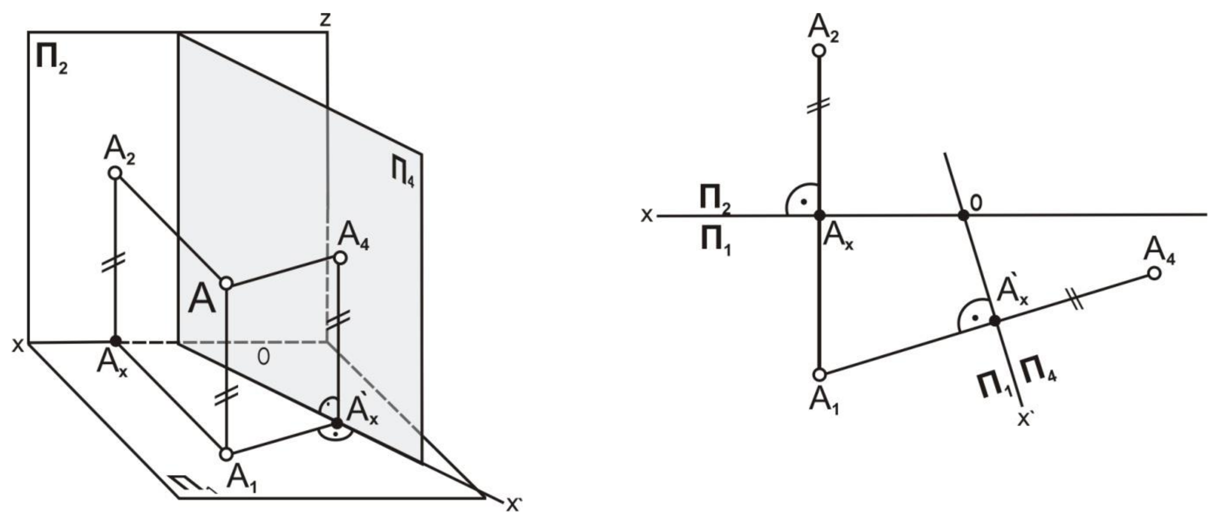


Рис. 6.1. Метод замены плоскостей проекций: наглядное изображение и комплексный чертёж

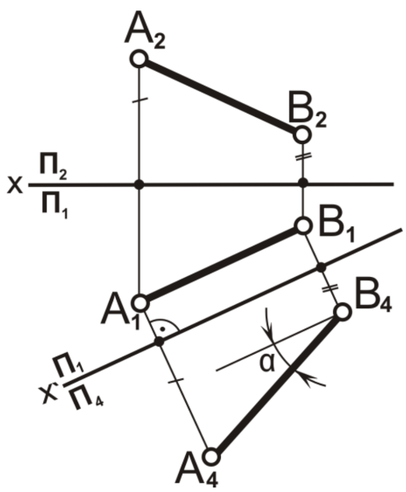


Рис. 6.2. Преобразование прямой общего положения в прямую уровня методом замены плоскостей проекций

Пример 1. Дано: отрезок прямой общего положения AB. Требуется: преобразовать прямую линию общего положения в линию уровня (рис. 6.2).

План решения:

1. Параллельно горизонтальной проекции отрезка AB провести новую ось проекций x`, которая определяет положение новой плоскости $П_4$, ($A_1B_1$) II x`.

2. Провести перпендикуляры линий связи из точки A_1 и B_1 к новой оси x`.

3. На этих перпендикулярах от оси x` отложить расстояния, равные удалению точек A и B от плоскости $П_1$, т. е. значению z для точек A и B.

4. Соединить точки A_4 и B_4 прямой линией.

Вывод. В системе плоскостей $П_1П_4$ прямая AB II $П_4$, т. е. заняла положение уровня. Отрезок AB проецируется на плоскость $П_4$ в истинную величину, т. е. $[A_4B_4] = |AB|$; α – величина угла наклона прямой AB к плоскости $П_1$.

Пример 2. Дано: горизонталь h(AB).

Требуется: преобразовать линию уровня в проецирующую прямую (рис. 6.3).

План решения:

1. Провести новую ось проекций x`,

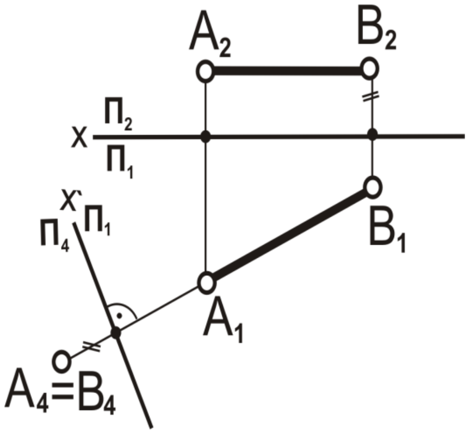


Рис.6.3. Преобразование прямой уровня в проецирующую методом замены

которая определяет положение новой плоскости $П_4$ перпендикулярно горизон-тальной проекции отрезка АВ, $[A_1B_1] \perp x`$.

2. Провести перпендикуляр линий связи из точки A_1 и B_1 к новой оси х`.

3. На перпендикуляре от оси х` отложить расстояние, равное удалению точек А и В от плоскости $П_1$, т. е. значению z для точек А и В, $A_z = B_z$. Получаем $A_4 \equiv B_4$.

Вывод. В системе плоскостей $П_1П_4$ прямая $AB \perp П_4$, т. е. заняла проецирующее положение по отношению к плоскости $П_4$.

Для того чтобы прямую общего положения преобразовать в проецирующую, необходимо выполнить две последовательные замены плоскостей проекций. Вначале - прямую следует преобразовать в линию уровня (рис. 6.2), а затем - линию уровня преобразовать в - проецирующую (рис. 6.3).

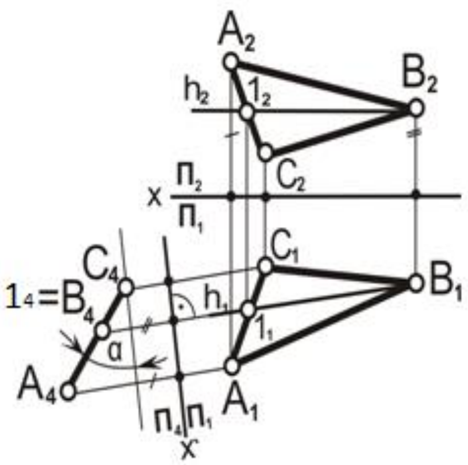


Рис. 6.4. Преобразование плоскости общего положения в плоскость проецирующую методом замены

Пример 3. Дано: плоскость общего положения Σ(АВС). Требуется: преобра-зовать плоскость общего положения в - проецирующую (рис. 6.4).

План решения:

1. Построить горизонталь в плоскости.

2. Перпендикулярно h_1 провести новую ось проекций х`, которая определяет положение новой плоскости $П_4$.

3. От точек A_1, B_1, C_1, 1_1 провести перпендикуляры линий связи к новой оси х`.

4. На перпендикулярах линий связи от оси x` отложить расстояния, равные удалению точек A, B, C от плоскости $П_1$, то есть значение z для этих точек.

5. Полученные точки A_4, B_4, C_4 соединить прямой линией.

Вывод. В системе плоскостей проекций $П_1П_4$ плоскость $\Delta(ABC) \perp П_4$,

т. е. заняла проецирующее положение; α – величина угла наклона плоскости Σ(ABC) к плоскости $П_1$.

Пример 4. Дано: горизонтально-проецирующая плоскость P(ABC). Требуется: преобразовать проецирующую плоскость в плоскость уровня (рис. 6.5).

План решения:

1. Провести новую ось проекций x` параллельно A_1B_1 на удобном от нее расстоянии.

2. Провести перпендикуляры линий связи к новой плоскости от точек A, B, C.

3. На перпенди-кулярах отложить расстояния удаления точек A, B, C от плоскости $П_1$, то есть значение z для этих точек

4. Построить проекции точек A, B и C на плоскость $П_4$, A_4, B_4, C_4. Треугольник $A_4B_4C_4$ является проекцией треугольника (ABC) на плоскость $П_4$.

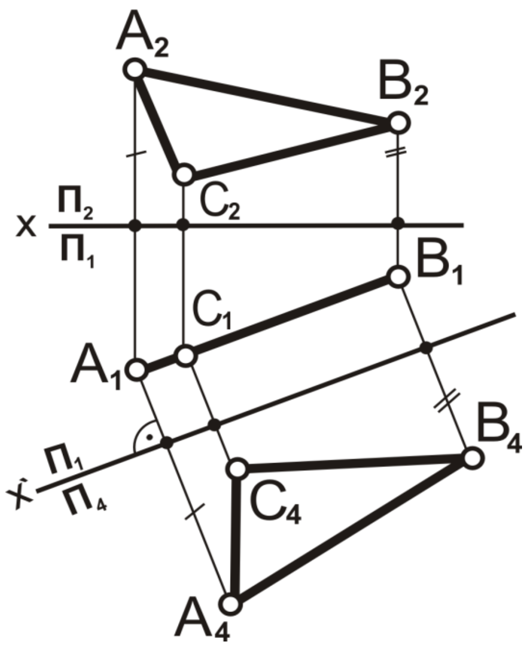


Рис. 6.5. Преобразование плоскости проецирующей в плоскость уровня методом замены

Вывод. В системе плоскостей $П_1П_4$ плоскость P (ABC) II $П_4$, Треугольник ($A_4B_4C_4$) является натуральной величиной треугольника ABC.

Для того чтобы плоскость общего положения преобразовать в плоскость уровня, необходимо выполнить две последовательные замены плоскостей проекций. Вначале плоскость необходимо преобразовать в проецирующую (рис. 6.4), а затем - проецирующую плоскость преобразовать в плоскость уровня (рис 6.5).

Пример 5. Дано: треугольник ABC. Требуется: методом замены плоскостей проекций построить натуральную величину треугольника ABC.

План решения:

1. Выполнить анализ условия задачи:

- какое положение занимает плоскость заданного треугольника относительно плоскостей проекций,

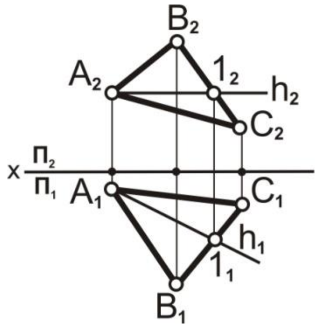
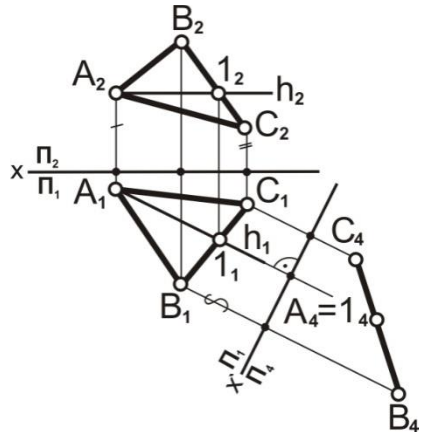
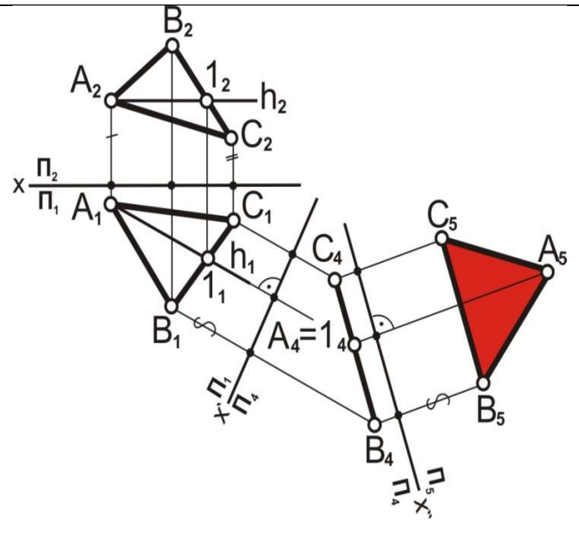
- выделить признаки, характеризующие понятия «плоскость общего положения», «плоскость уровня»,

- свойства проекций плоскости уровня.

2. Составить алгоритм решения задачи.
3. Выполнить необходимые геометрические построения (табл. 6.1).
4. Составить словесное обоснование решения задачи.

Таблица 6.1

Алгоритм решения в примере 5

Словесная форма	Графическая форма
1. Построить горизонталь (либо фронталь) в плоскости треугольника АВС: – провести фронтальную проекцию горизонтали h_2 (горизонтальная линия), – линиями проекционной связи построить h_1 (натуральная величина горизонтали).	
2. Выполнить первую замену плоскостей проекций $П_1П_4$ и преобразовать плоскость треугольника общего положения АВС в проецирующую: – провести ось x` перпендикулярно горизонтальной проекции горизонтали h_1, построить проекцию треугольника АВС на плоскости $П_4$	
3. Выполнить вторую замену плоскостей проекций $П_4П_5$ и преобразовать проецирующую плоскость треугольника (АВС) в плоскость уровня: – провести ось x`` параллельно проекции ($A_4B_4C_4$); – от оси отложить расстояния удаления точек А, В, С до плоскости $П_4$; – соединить полученные точки A_5, B_5, C_5. Проекция треугольника ($A_5B_5C_5$) определяет натуральную величину $\|A_5B_5C_5\|$ = IABCI	

6.2. Метод вращения

Сущность этого способа заключается в том, что положение плоскостей проекций остается неизменном. Изменяется положение заданных геометрических элементов относительно плоскостей проекций путем вращения их вокруг некоторой оси до тех пор, пока элементы не займут частное положение в исходной системе плоскостей проекций.

В качестве осей вращения удобнее всего выбирать проецирующие прямые или прямые уровня, тогда точки будут вращаться в плоскостях, параллельных или перпендикулярных плоскостям проекций. Таким образом, различают следующие случаи метода вращения: метод вращения вокруг проецирующих прямых (проецирующей оси), метод плоскопараллельного перемещения (переноса), метод вращения вокруг прямых уровня.

6.2.1. Метод вращения вокруг проецирующей оси.

Рассмотрим пример на рис. 6.6, где показано вращение точки на эпюре Монжа. Предположим, что точка А вращается вокруг оси i и описывает окружность с центром в точке О. Плоскость окружности Θ перпендикуляра оси i и параллельна плоскости $П_2$ ($\Theta \perp i$, $\Theta \parallel П_2$). Траектория движения точки А будет проецироваться на плоскость $П_2$ в виде окружности радиусом R, а на плоскость $П_1$ – в виде отрезка длиной 2R. Если точку А повернуть против часовой стрелки на угол φ в новое положение А\`, то фронтальная проекция $A`_2$ повернется на тот же угол и попадает в точку $A`_1$.

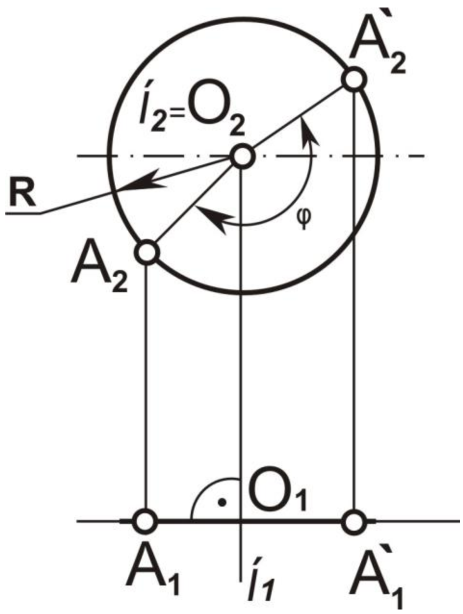


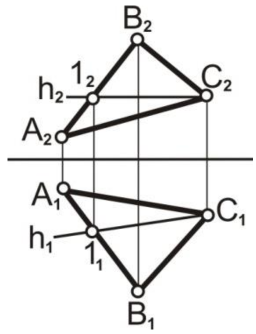
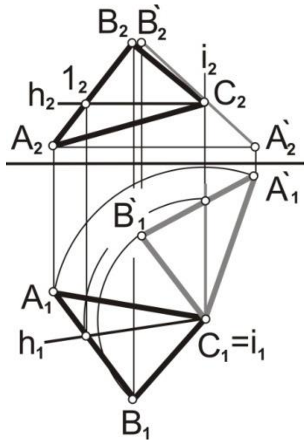
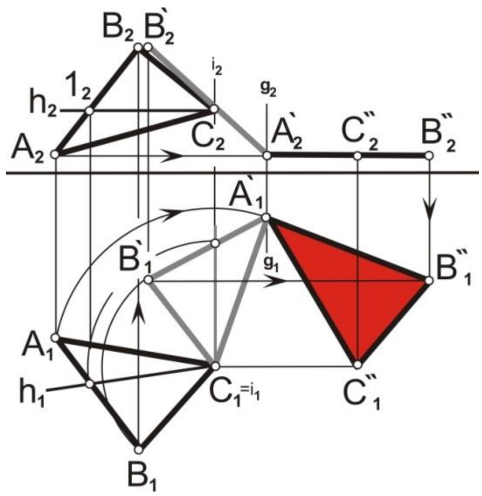
Рис. 6.6. Метод вращения вокруг проецирующей оси

В процессе решения задач методом вращения вокруг проецирующих осей этапы преобразования геометрических элементов аналогичны тем, которые выполняются методом замены плоскостей проекций.

Пример. Дано: плоскость общего положения $\Sigma(\Delta ABC)$. Требуется: методом вращения вокруг проецирующей прямой определить натуральную величину треугольника ABC (табл. 6.2).

Таблица 6.2

Алгоритм геометрических построений в примере

<table>
<tr><th>Словесная форма</th><th>Графическая форма</th></tr>
<tr><td>1. Построить горизонталь (либо фронталь) в плоскости $\Sigma(\Delta ABC)$:
– провести фронтальную проекцию горизонтали h_2 (горизонтальная линия);
– линиями проекционной связи построить h_1 (натуральная величина горизонтали)</td><td>
</td></tr>
<tr><td>2. Преобразовать плоскость треугольника общего положения (ABC) в проецирующую, повернув его вокруг оси i и установить треугольник $ABC \perp \Pi_2$:
– провести ось $i \perp \Pi_1$ через вершину C, $C_1 \equiv i_1$;
– переместить горизонтальную проекцию горизонтали h_1 перпендикулярно оси Ox, $h_1 \perp Ox$, а $A`_1B`_1C`_1=A_1B_1C_1$;<br>– на $\Pi_2$ треугольник проецируется в прямую линию $A`_2B`_2$</td><td>
</td></tr>
<tr><td>3. Преобразовать плоскость проецирующего треугольника A`B`C` в плоскость уровня, повернув его вокруг оси g, ABC II $\Pi_1$:<br>– провести вторую ось $g \perp \Pi_2$ через вершину A`;
– фронтальная проекция $A'_2\ C''_2\ B''_2$ будет параллельна оси Ox;
– горизонтальная проекция определяет натуральную величину треугольника: $|A'_1\ B''_1\ C''_1|$=IABCI</td><td>
</td></tr>
</table>

6.2.2. Метод плоскопараллельного перемещения.

Плоскопараллельным перемещением фигуры в пространстве называется такое ее перемещение, при котором все точки фигуры перемещаются в параллельных плоскостях. В плоскопараллельном движении относительно плоскости Π_1 все точки фигуры перемещаются в горизонтальных плоскостях, и горизонтальные проекции этих точек перемещаются, не изменяя своего взаимного положения. Фронтальная проекция тех же точек переходит в новые положения, двигаясь по прямым, перпендикулярным линиям связи. При плоскопараллельном движении относительно плоскости $П_2$ происходят аналогичные перемещения проекций. Плоскопараллельное перемещение может рассматриваться как вращение вокруг некоторой оси, перпендикулярной плоскости проекций и не показанной на чертеже.

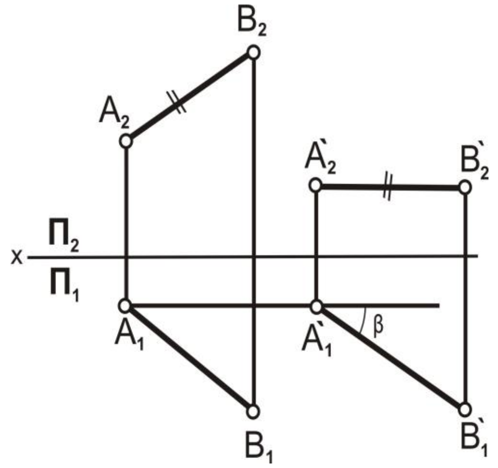


Рис. 6.7. Преобразование прямой общего положения в прямую уровня плоскопараллельным перемещением

Пример 1. Дано: отрезок прямой линии общего положения АВ. Требуется:

преобразовать прямую линию общего положения в линию уровня (рис. 6.7).

План решения:

1. Выделить признаки, характеризующие понятие «прямая уровня». Перемещение отрезка начинаем с фронтальной проекции. Расположить новую фронтальную проекцию [$A`_2B`_2$] в любом месте эпюра параллельно $П_1$, соблюдая условие, что $|A`_2B`_2| = |A_2B_2|$. [$A`_2B`_2$] || OX.

2. Через вершины заданной горизонтальной проекции [A_1B_1] провести горизонтальные прямые, линиям связи, и найти точки их пересечения с вертикальными линиями связи, проведенными из точек [$A`_2B`_2$].

Вывод. Горизонтальной проекцией отрезка [AB] будет являться отрезок [$A`_1B`_1$], равный натуральной величине отрезка [AB], $|A`_1B`_1| = |AB|$; β величина угла наклона заданной прямой АВ к плоскости $П_2$.

Пример 2. Дано: отрезок прямой линии уровня АВ (горизонталь).

Требуется: преобразовать заданную линию уровня в проецирующую прямую (рис. 6.8).

План решения:

1. Выделить признаки, характеризующие понятие «проецирующая прямая». Переместить проекцию [A_1B_1] в положение,

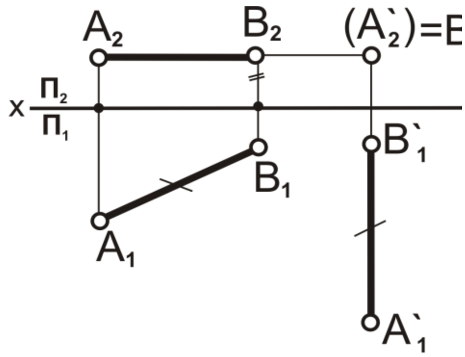


Рис. 6.8. Преобразование прямой уровня в проецирующую прямую плоскопараллельным перемещением

перпендикулярное $П_2$, $[A'_1B'_1] \perp (Ox)$, $|A'_1B'_1| = |AB|$.

2. На пересечении линий связи от A_2B_2 и $[A'_1B'_1]$ найти $[A'_2B'_2]$.

Вывод. Отрезок прямой уровня АВ преобразовался во фронтально-проецирующую прямую методом плоскопараллельного перемещения.

Для того, чтобы прямую линию общего положения преобразовать в проецирующую, необходимо выполнить два последовательных перемещения. Вначале прямую общего положения следует преобразовать в линию уровня (рис. 6.7), а затем - линию уровня преобразовать в проецирующую (рис. 6.8).

Пример 3. Дано: плоскость общего положения P(ABC). Требуется: преобразовать плоскость общего положения в проецирующую (рис. 6.9).

План решения:

1. Выделить признаки, характеризующие понятия «плоскость проецирующая». Построить горизонталь в плоскости P (ABC), h (h_1, h_2).

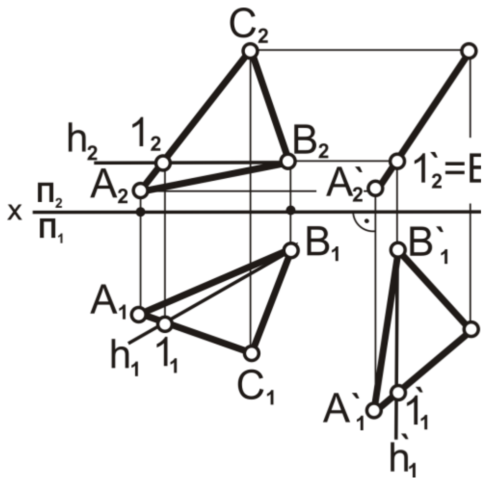


Рис. 6.9. Преобразование плоскости общего положения в плоскость проецирующую плоскопараллельным перемещением

2. Переместить горизонтальную проекцию треугольника $A_1B_1C_1$ так, чтобы прямая h_1 оказалась перпендикулярна оси Ox, $h`_1 \perp Ox$, $(A_1B_1C_1) = (A`_1B`_1C`_1)$.

3. Провести горизонтально линии проекционной связи из точек A_2, B_2, C_2. На пересечении с вертикальными линиями проекционной связи из соответствующих проекций точек линии $A`_1B`_1, C`_1$, получить новую проекцию треугольника $(A`_2B`_2C`_2)$.

Вывод. Плоскость P(ABC) преобразовалась во фронтально проецирующую плоскость методом плоскопараллельного перемещения; $P(ABC) \perp П_2$.

Пример 4. Дано: фронтально-проецирующая плоскость Σ(ABC). Требуется: преобразовать проецирующую плоскость в плоскость уровня (рис. 6.10).

План решения:

1. Выделить признаки, характеризующие понятие «плоскость уровня». Переместить проекцию треугольника $(A_2B_2C_2)$ так, чтобы она оказалась параллельной $П_1$. Получим проекцию $(A`_2B`_2C`_2) \parallel Ox$.

2. Провести горизонтально линии проекционной связи от проекций точек A_1, B_1, C_1. Провести вертикально линии проекционной связи от точек $A`_2B`_2C`_2$. На пересечении линий связи получим точки $A`_1B`_1C`_1$.

Вывод. Плоскость Σ (ABC) преобразовалась в горизонтальную плоскость уровня методом плоскопараллельного перемещения, Σ (ABC) II $П_1$.

Для того, чтобы плоскость общего положения преобразовать в плоскость уровня, необходимо выполнить два последовательных перемещения. Вначале плоскость общего положения следует преобразовать в проецирующую (рис. 6.9), а затем - проецирующую плоскость преобразовать в плоскость уровня (рис. 6.10).

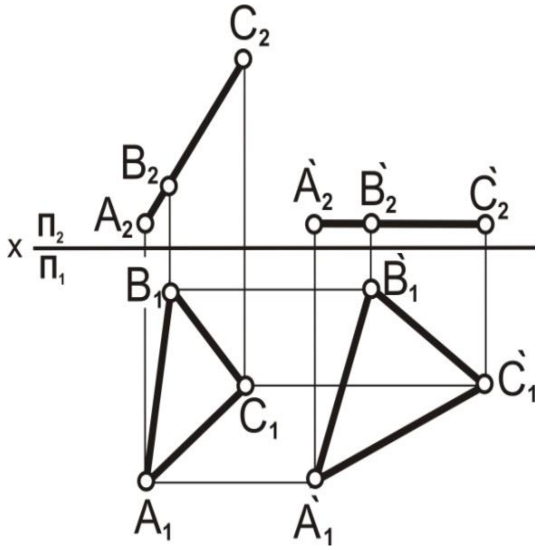


Рис. 6.10. Преобразование проецирующей плоскости в плоскость уровня плоскопараллельным перемещением

6.2.3. Метод вращения вокруг линии уровня.

Метод вращения вокруг линии уровня используется для определения натуральных величин элементов плоских фигур в тех случаях, когда плоскую фигуру можно совместить с плоскостью уровня. В этом случае она проецируется на соответствующую плоскость без искажения. Кроме того, этот метод удобен для определения углов между двумя пересекающимися прямыми, двумя плоскостями, прямой и плоскостью.

Рассмотрим вращение точки вокруг линии уровня (рис. 6.11). Точка А, вращаясь вокруг горизонтали h, описывает окружность радиусом, равным натуральной величине отрезка АО, $O_1A`_1$=IAOI, который можно определить методом прямоугольного треугольника. Аналогичным образом можно выполнить построения, вращая точку А вокруг фронтали.

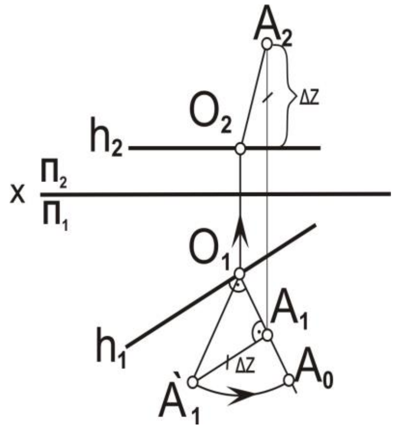


Рис. 6. 11. Метод вращения вокруг прямой уровня

6.3. Выводы по теме

1. Способы преобразования комплексного чертежа главным образом предназначены для решения метрических задач, связанных с определением действительных размеров и формы изображенных на чертеже геометрических образов. Для реализации этих целей преобразования выполняются так, чтобы

геометрический образ занял частное положение относительно плоскостей проекций.

2. Изменения взаимного расположения геометрического образа и системы плоскостей проекций можно достигнуть двумя способами:

– заменой данной системы плоскостей проекций новой системой так, чтобы неподвижный объект в пространстве оказался в частном положении (метод замены плоскостей проекций);

– перемещением объекта в пространстве так, чтобы он оказался в частном положении относительно неизмененной системы плоскостей проекций (метод вращения).

3. Способы преобразования комплексного чертежа включают четыре задачи преобразования:

– прямой линии общего положения в прямую уровня;

– прямой линии уровня в проецирующую прямую;

– плоскости общего положения в плоскость проецирующую;

– проецирующую плоскость в плоскость уровня.

Формулировки и результаты решения этих задач одинаковы, но процесс преобразования отличается в различных видах преобразований.

Ключевые слова

- Метод замены плоскостей проекций
- Метод вращения вокруг проецирующих прямых
- Метод вращения вокруг прямой уровня
- Метод плоскопараллельного перемещения

Способы деятельности, необходимые для решения задач

– преобразование геометрических образов методом замены плоскостей проекций;

– преобразование геометрических образов методом плоскопараллельного перемещения.

Вопросы для самопроверки

1. С какой целью применяют методы преобразования комплексного чертежа?
2. В чем суть метода замены плоскостей проекций?
3. Как сформулировать четыре основные задачи преобразования?
4. В чем состоит суть способа вращения?
5. Для решения каких задач целесообразно применять способ вращения вокруг прямых уровня?

Задания для самостоятельного решения

1. Определить натуральную величину отрезка AB прямой общего положения методом замены плоскостей проекций (рис. 6.12).

2. Определить величину угла между скрещивающимися прямыми AB и CD методом замены плоскостей проекций (рис. 6.13).

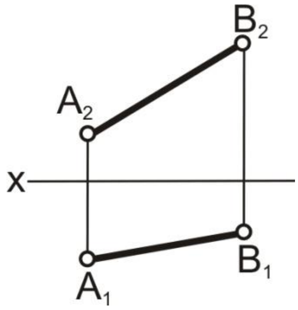


Рис.6.12

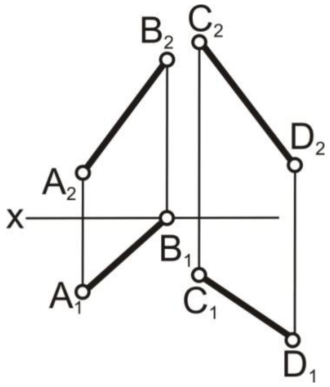


Рис.6.13

3. Определить натуральную величину четырехугольника ABCD методом вращения вокруг горизонтали (рис. 6.14).

4. Определить угол между гранями ABC и ABD методом плоскопараллельного перемещения (рис. 6.15).

5. Определить расстояние от точки до прямой методом замены плоскостей проекций (рис. 6.16).

6. Определить расстояние от точки до плоскости методом плоскопараллельного перемещения (рис. 6.17).

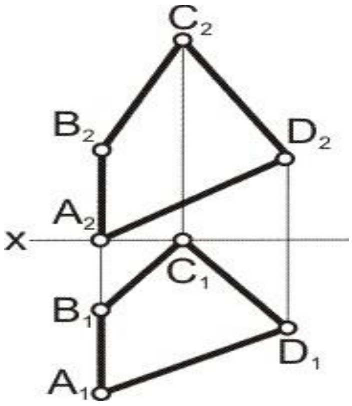


Рис. 6.14

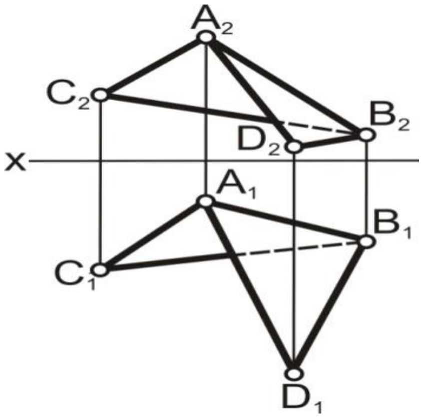


Рис. 6.15

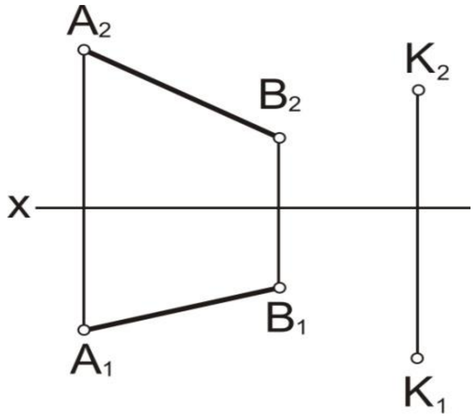


Рис. 6.16

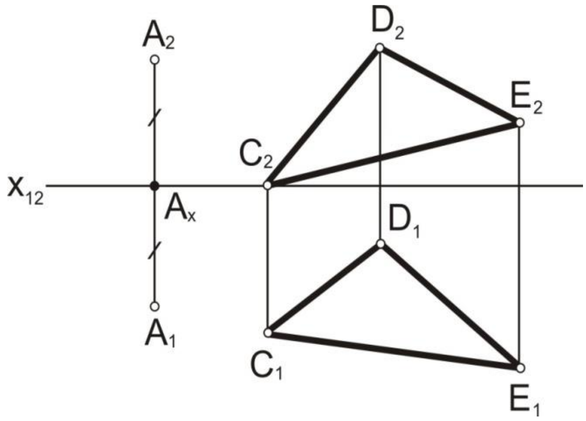


Рис. 6.17

7. Вокруг заданной оси i повернуть прямую AB до ее пересечения с прямой CD (рис. 6.18).

8. Последовательным преобразованием привести треугольник ABC в положение, параллельное плоскости $П_1$ (рис. 6.19).

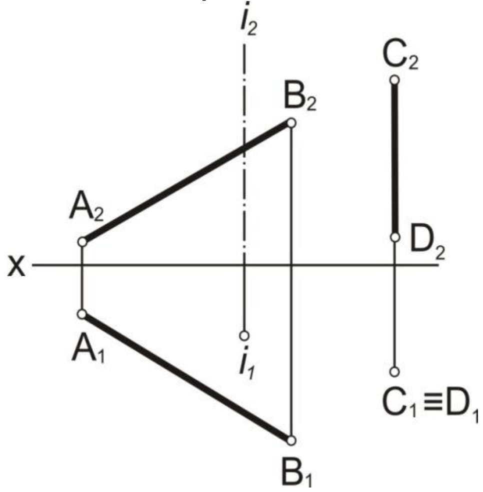


Рис. 6.18

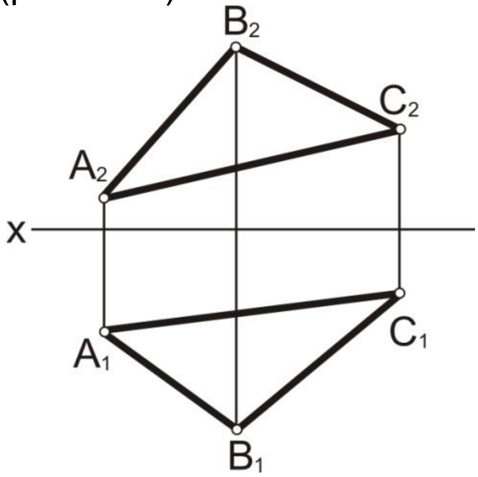


Рис. 6.19

6.4. Решение типовых задач (задачи № 8, 9, 10 из РГР «Альбом задач по начертательной геометрии»)

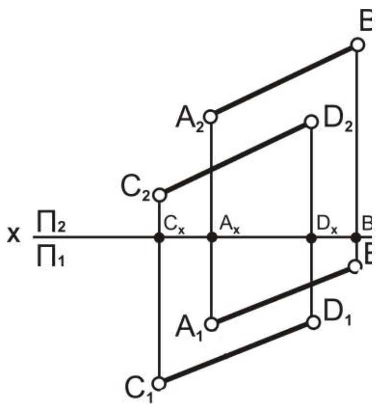


Рис. 6.20. Параллельные прямые

Задача 8 а (варианты 1 – 6). Дано: AB II CD - отрезки прямой общего положения (рис. 6.20). Требуется: методом замены плоскостей проекций определить расстояние между параллельными прямыми.

План решения:

1. Выполнить анализ условия задачи. Определить признаки понятий: «параллельные прямые», «расстояние между прямыми».

2. Определить алгоритм решения исходя из следующего:

– необходимо преобразовать прямые общего положения в прямые уровня;

– необходимо преобразовать прямые уровня в проецирующие.

3. Выполнить построения согласно алгоритму:

- выполнить первую замену плоскостей проекций и преобразовать отрезки прямых линий AB и CD в прямые уровня (рис. 6.21). Для этого построить ось x` параллельно проекциям прямых, OX` II A_1B_1 II C_1D_1. Перпендикулярно оси OX` провести линии проекционной связи из точек $A_1$, $B_1$, $C_1$, $D_1$. На линиях связи от новой оси OX` отложить расстояния удаленности точек A, B, C, D до плоскости проекций $П_1$, а именно расстояние z каждой точки $A_xA_2 = A_x'A_4$, $B_xB_2 = B_x'B_4$, $C_xC_2 = C_x'C_4$, $D_xD_2 = D_x'D_4$;

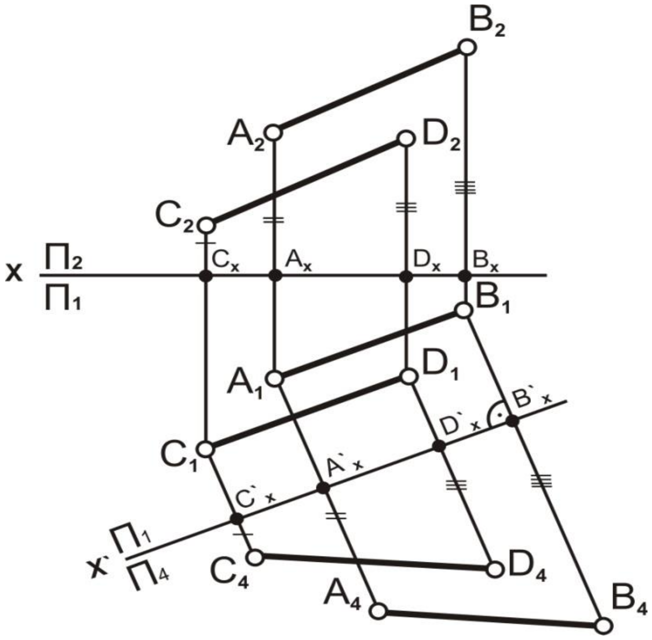


Рис. 6.21. Первая замена плоскостей

- выполнить вторую замену плоскостей проекций и преобразовать отрезки прямых линий уровня AB и CD в проецирующие прямые

(рис. 6.22). Провести ось x`` перпендикулярно линиям связи от проекций [$A_4B_4$], [$C_4D_4$]. На линиях связи от оси OX`` отложить расстояния удаления точек A, B, C, D до плоскости проекций $П_4$.

$A_x''A_5 = A_x'A_1$, $B_x''B_5 = B_x'B_1$, $C_x''C_5 = C_x'C_1$, $D_x''D_5 = D_x'D_1$;

Отрезки AB и CD на плоскость $П_5$ проецируются в точки: $A_5 \equiv B_5$, $C_5 \equiv D_5$. Соединить полученные точки $A_5 = B_5$ с $C_5 = D_5$ линией и получим расстояние между двумя параллельными прямыми (наикратчайшее).

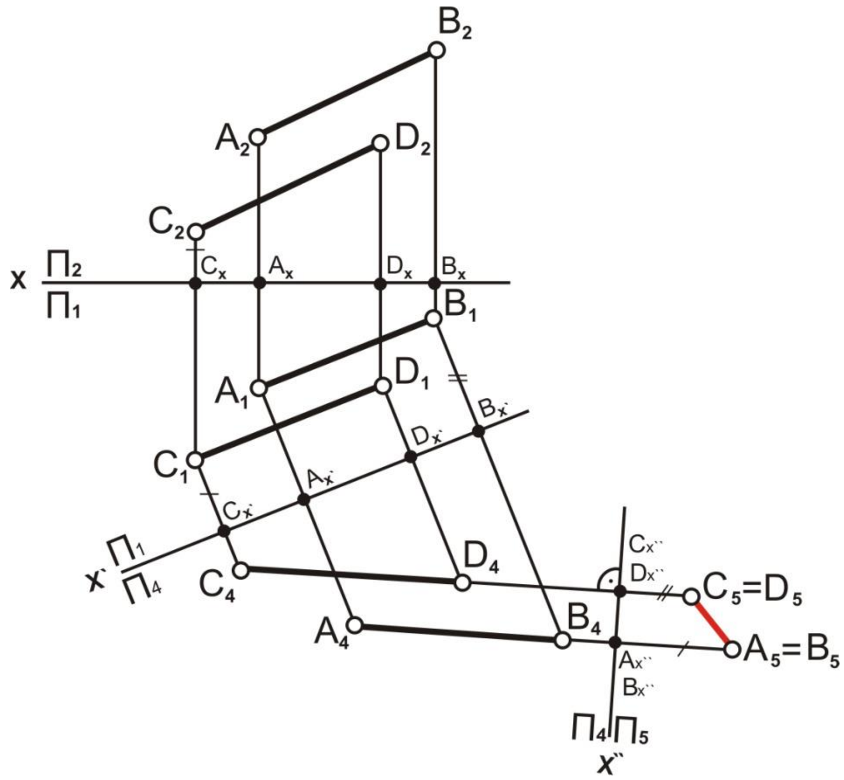


Рис. 6.22. Вторая замена плоскостей

Задача 8 б (варианты 7 – 12). Дано: отрезки скрещивающихся прямых линий AB и CD. Требуется: методом замены плоскостей проекций определить расстояние между скрещивающимися прямыми.

План решения:

1. Выполнить анализ условия задачи. Определить признаки понятий: «скрещивающиеся прямые», «расстояние между скрещивающимися прямыми».

2. Определить алгоритм решения исходя из следующего:

– необходимо выполнить преобразование одной из прямых общего положения в прямую уровня;

– полученную прямую уровня преобразовать в проецирующую.

3. Выполнить построения согласно алгоритму.

3.1. Выполнить первую замену плоскостей $П_1П_4$ и преобразовать эпюр так, чтобы отрезки прямой линии AB стали прямой уровня. Для этого провести ось x`– ось пересечения плоскостей проекций $П_1П_4$, параллельно проекции прямой AB, OX`II A_1B_1. Перпендикулярно оси OX` из точек $A_1$, $B_1$, $C_1$, $D_1$провести линии проекционной связи. На линиях связи от оси OX` отложить расстояния удаленности точек A, B, C, D до плоскости проекций $П_1$. Полученные проекции точек соединить: A_4 с B_4, C_4 с D_4 (рис. 6.23).

3.2. Выполнить вторую замену плоскостей $П_4П_5$ и преобразовать эпюр так, чтобы отрезок прямой линии уровня AB стал проецирующей прямой.

Провести ось x`` – ось пересечения плоскостей проекций П4П5 – перпендикулярно проекции А4В4. Провести линии проекционной связи от А4, В4, С4, D4 перпендикулярно новой оси. На линиях связи от оси ОХ`` отложить расстояния удаления точек А, В, С, D до плоскости проекций П4. Получить проекции точек на плоскости П5. Отрезок АВ на плоскость П5 проецируется в точку: $A_5 \equiv B_5 \equiv N_5$. Построить из точки N5 перпендикуляр (наикратчайшее расстояние от АВ к СД) к C5D5: $M_5N_5 \perp C_5D_5$ (рис. 6.24).

M N – есть искомое расстояние между скрещивающимися прямыми.

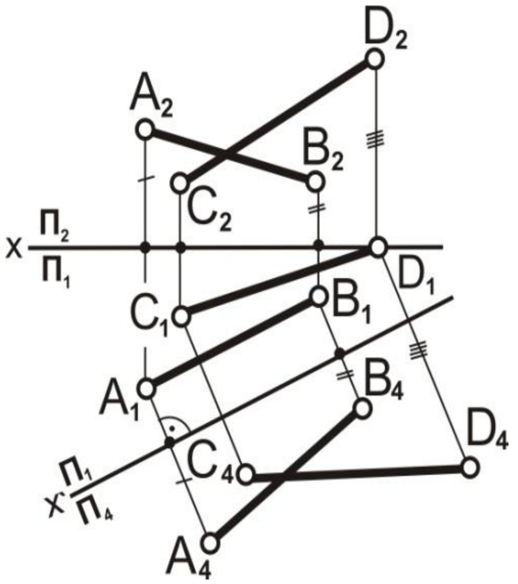


Рис. 6.23. Первая замена плоскостей

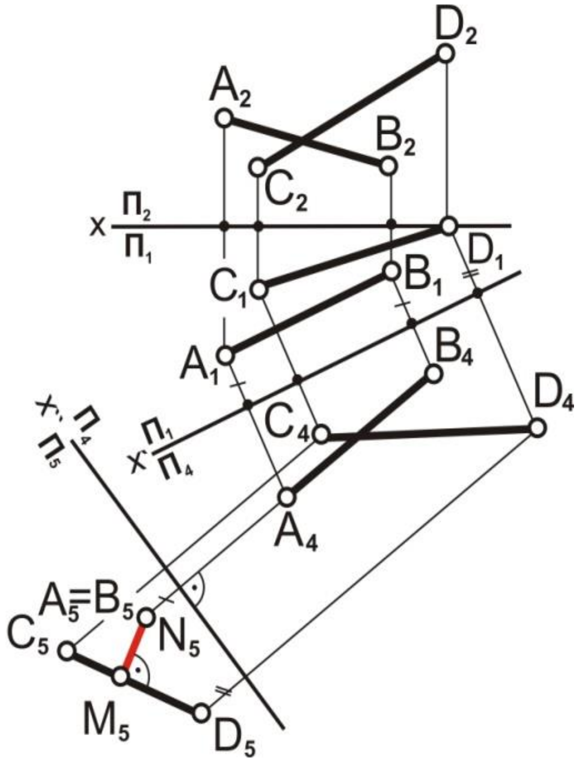


Рис. 6.24. Вторая замена плоскостей

Задача 8 в (варианты 13 – 18). Дано: двугранный угол ABCD (рис. 6.25). Требуется: методом замены плоскостей проекций определить натуральную величину двугранного угла.

План решения:

1. Выполнить анализ условия задачи. Определить признаки понятий: «двугранный угол», «измерение углов».

2. Определить алгоритм решения исходя из следующего:

– необходимо выполнить преобразование двугранного угла так, чтобы ребро угла (АВ) из прямой общего

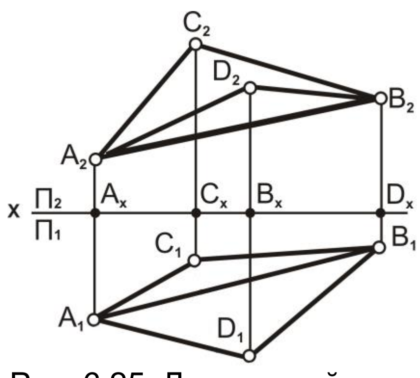


Рис. 6.25. Двугранный угол

положения преобразовался в прямую уровня;

– необходимо преобразовать прямую уровня в проецирующую. Остальные точки C и D переносить последовательно.

3. Выполнить построения согласно алгоритму.

3.1. Выполнить первую замену плоскостей $П_1П_4$ так, чтобы преобразовать ребро двугранного угла AB в прямую уровня (рис. 6.26). Для этого провести ось x`(ось пересечения плоскостей проекций $П_1П_4$) параллельно проекции прямой, OX` II A_1B_1. Из точек A_1, B_1, C_1 D_1 провести линии связи перпендикулярно оси OX`. На полученных линиях связи от оси OX` отложить расстояния удаленности точек A, B, C, D от плоскости проекций $П_1$. Построить проекцию двугранного угла на плоскости $П_4$. Для этого соединить полученные точки отрезками A_4B_4, C_4B_4, C_4A_4, A_4D_4,

DD_4B_4.

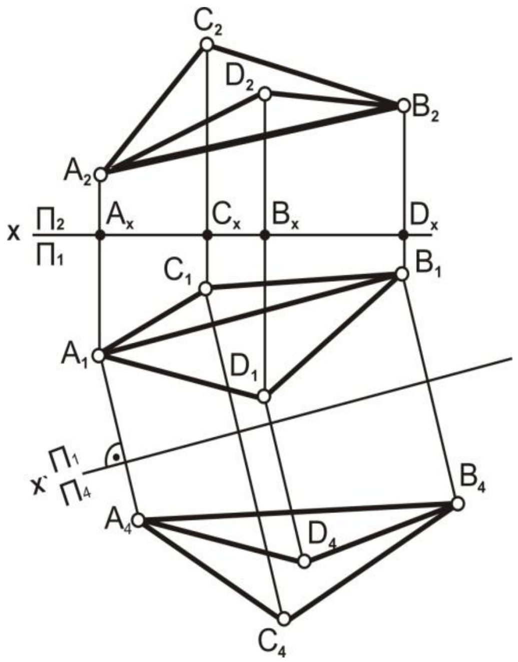


Рис. 6.26. Первая замена плоскостей

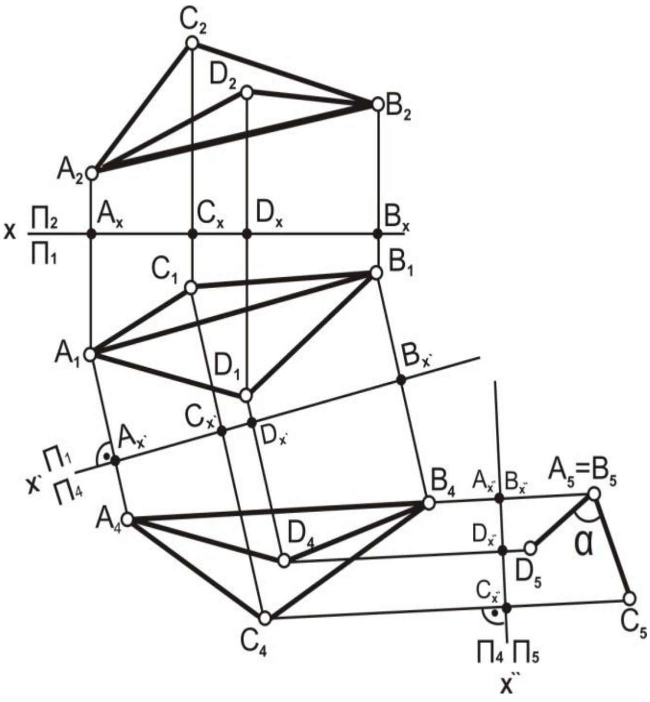


Рис. 6.27. Вторая замена плоскостей

3.2. Выполнить вторую замену плоскостей $П_4П_5$ так, чтобы преобразовать ребро двугранного угла AB из линии уровня в проецирующую прямую (рис. 6.27). Для этого провести ось OX`` перпендикулярно проекции $A_4B_4$. На линиях проекционной связи от оси OX`` отложить расстояния удаленности точек A, B, C, D до плоскости проекций $П_4$. Построить проекцию угла на плоскости $П_5$. Плоскости граней заданного угла проецируются в прямые линии, а ребро AB – в точку. Угол α проецируется в плоскости $П_5$ в натуральную величину.

Угол α - есть искомый угол, натуральная величина.

Задача 8 г (варианты 19 – 26). Дано: отрезок прямой линии общего положения AB, точка D вне отрезка (рис. 6.28). Требуется: методом замены плоскостей проекций определить расстояние между прямой и точкой.

План решения:

1. Выполнить анализ условия задачи. Определить признаки понятия: «расстояние между точкой и прямой».

2. Определить алгоритм решения исходя из следующего:

– необходимо выполнить преобразование прямой общего положения в прямую уровня;

– необходимо преобразовать прямую уровня в проецирующую.

3. Выполнить построения согласно алгоритму (табл. 6.3).

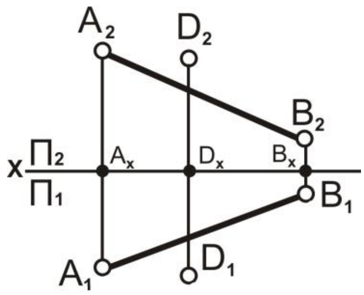
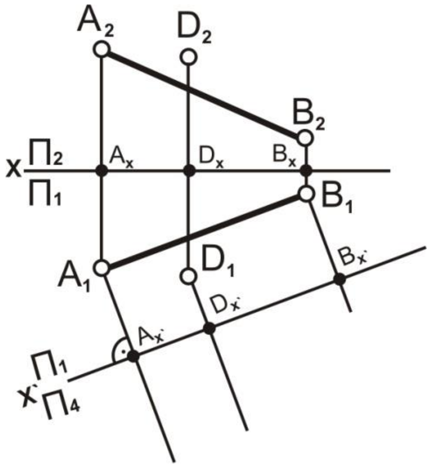
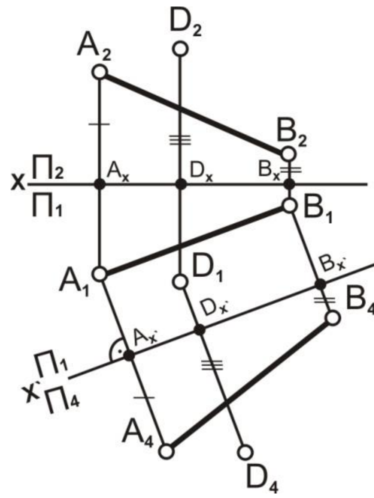
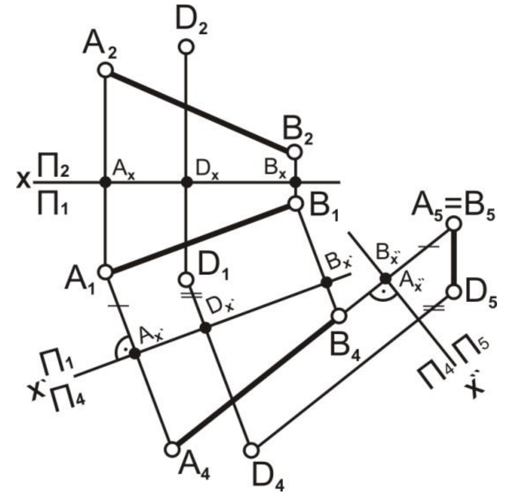


Рис. 6.28. Прямая и точка

Таблица 6.3

Алгоритм геометрических построений в задаче 8 г

Словесная форма	Графическая форма
1. Выполнить первую замену плоскостей проекций: построить ось x\` (ось пересечения плоскостей проекций $П_1П_4$ ) параллельно одной из проекций прямых, OX\` II A_1B_1. Перпендикулярно оси OX\` из точек A_1, B_1, D_1 провести линии проекционной связи.	
2. На линиях связи от оси OX\` отложить расстояния удаленности точек A, B, D до горизонтальной плоскости проекций $П_1$: $IA_2A_xI = IA_{x'}A_4I$, $IB_2B_xI = IB_{x'}B_4I$, $ID_2D_xI = ID_{x'}D_4I$	

3. Выполнить вторую замену плоскостей проекций: построить ось OX`` перпендикулярно проекциям $A_4B_4$. 4. На линиях связи от оси OX`` отложить расстояния удаленности точек A, B, D до плоскости проекций $П_4$: $|A_1A_x`| = |A_5A_x``| = |B_1B_x`|=|B_5B_x``|$, $|D_1D_x`|=|D_5D_x``|$. Прямая AB на плоскости $П_5$ проецируется в точку: $A_5 \equiv B_5$. $|A_5D_5|$ – искомое расстояние между прямой AB и точкой D.	

Задача 9. Дано: плоскость P(ΔABC) и точка D вне плоскости (рис. 6.29). Требуется: методом плоскопараллельного перемещения или вращением вокруг проецирующей прямой определить расстояние от точки до плоскости.

План решения:

1. Выполнить анализ условия задачи. Определить признаки понятий «плоскость», «плоскопараллельное перемещение», «расстояние от точки до плоскости».

2. Определить алгоритм решения исходя из следующего:

– необходимо преобразовать данную плоскость общего положения в проецирующую (рис. 6.30);

3. Выполнить построения согласно алгоритму.

3.1. В плоскости P (ΔABC) построить горизонталь h (h_1h_2).

3.2. Переместить горизонтальную проекцию плоскости так, чтобы её горизонталь стала перпендикулярна $П_2$, при этом $\Delta A_1B_1C_1$ и $\Delta A'_1B'_1C'_1$ соразмерны.

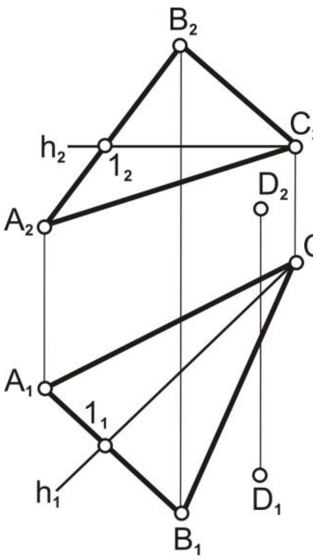


Рис. 6.29

3.3. Построить фронтальную проекцию фронтально-проецирующей плоскости P´ линиями проекционной связи, которая выродится в прямую $A'_2B'_2C'_2$.

3.4. Построить проекции точки D´ – D'_1 и D'_2.

3.5. Из точки D'_2 построить перпендикуляр к P'_2 (наикратчайшее расстояние от точки до плоскости).

3.6. Построить проекции точки встречи перпендикуляра с плоскостью K'_2 и K'_1, затем K_1 и K_2. Отрезок $D'_1K'_1 \parallel П_2$, следовательно, $D'_2K'_2$ – натуральная величина и определяет расстояние от точки D до плоскости P.3.7. Соединить одноименные проекции точек D и K.

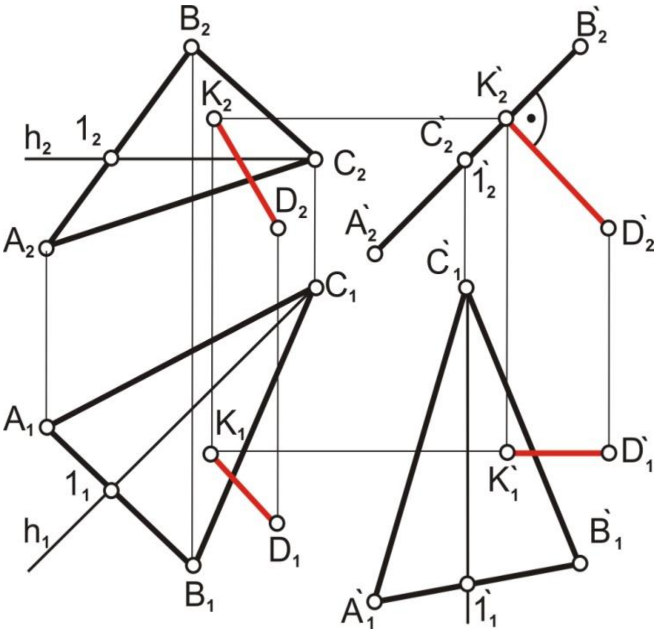


Рис. 6.30. Геометрические построения в задаче 9

Задача 10. Дано: плоскость P(ΔABC)(рис.6.31).Требуется: определить натураль-ную величину треугольника методом вращения вокруг горизонтали (либо фронтали).

План *решения:*

1. Выполнить анализ условия задачи. Определить признаки понятий: «плоскость», «горизонталь», «вращение вокруг горизонтали».

2. Определить алгоритм решения:

– необходимо провести горизонталь плоскости P(ΔABC);

–методом прямоугольного треугольника определить радиус вращения.

3. Выполнить построения согласно алгоритму (табл. 6.4).

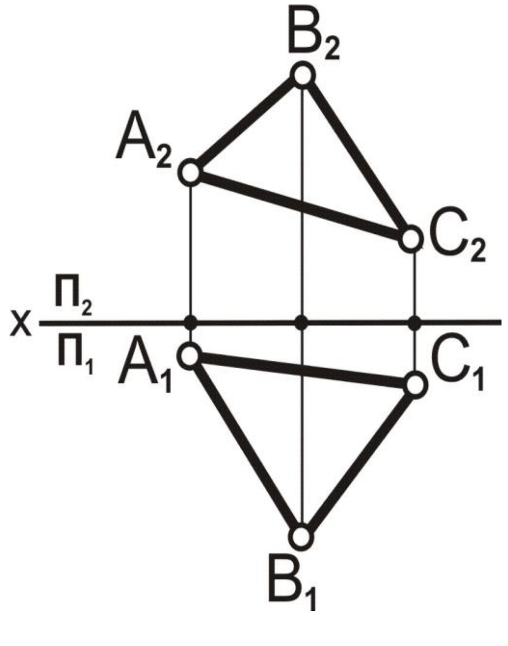
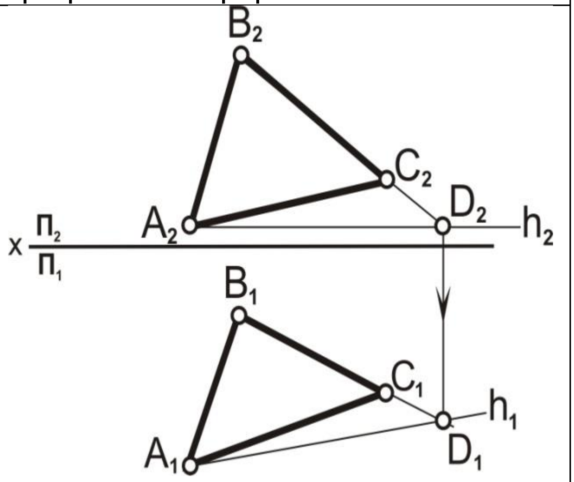
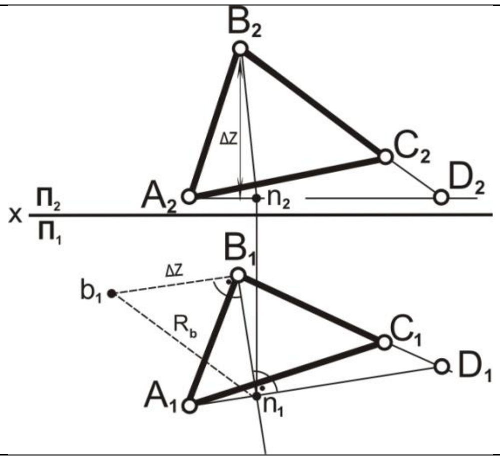
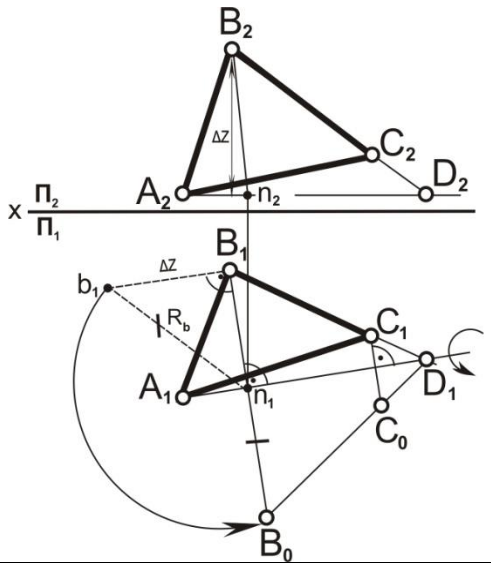
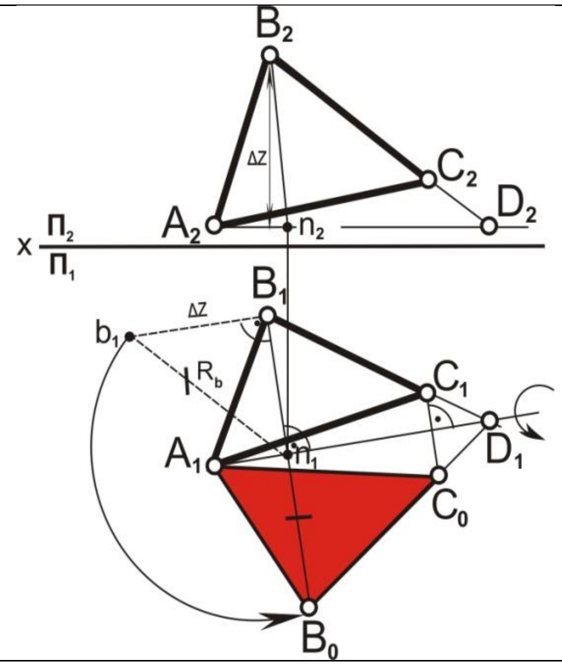


Рис. 6.31

Таблица 6.4

Алгоритм решения в задаче 10

Словесная форма	Графическая форма
1. Построить горизонталь h в плоскости P(ΔABC): – через A_2 провести фронтальную проекцию горизонтали h_2 (горизонтальная линия); – линиями проекционной связи построить горизонтальную проекцию горизонтали h_1	
2. Принять горизонталь за ось вращения, при котором точки A и D остаются неподвижны, а вершины B и C вращаются по окружности. 3. Определить радиус вращения для точки B методом прямоугольного треугольника: – из точки B_1 провести перпендикуляр к h_1, $B_1n_1 \perp h_1$; – определить ΔZ для отрезка Bn	
3. Построить точку B_0: – радиусом Rb провести дугу до пересечения с перпендикуляром B1n1. 4. Построить точку C_0: – из C1 провести перпендикуляр к h1 (A1D1); – определить точку C_0 на пересечении прямой B_0D_1 с траекторией ее вращения	

5. Соединить полученные точки в треугольник $A_1B_0C_0$, которые определяют натуральную величину треугольника, $\lvert A_1B_0C_0\rvert = \lvert ABC\rvert$	

7. КОМПЛЕКСНЫЙ ЧЕРТЁЖ ПОВЕРХНОСТЕЙ

7.1. Определение поверхности

В начертательной геометрии фигуры задаются графически, поэтому целесообразно дать следующее определение поверхности.

Поверхность – это множество всех последовательных положений линии, движущейся по определенному закону. Линия может быть прямой, либо кривой. Непрерывно перемещающаяся линия называется **образующей** (рис. 7.1); неподвижные линии, по которым движется образующая при образовании поверхности, – **направляющими** (рис. 7.1). Направляющих может быть одна и более линий.

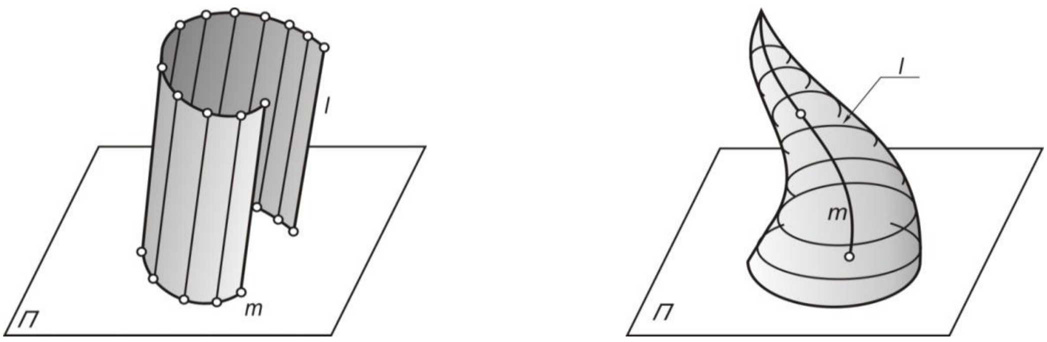


Рис. 7.1. Элементы поверхностей: l – образующая; m – направляющая

7.2. Задание поверхности на комплексном чертеже

Для построения проекций поверхности или тела, ограниченного поверхностью, обычно не строят всех её точек, а определяют только очерк поверхности (рис. 7.2).

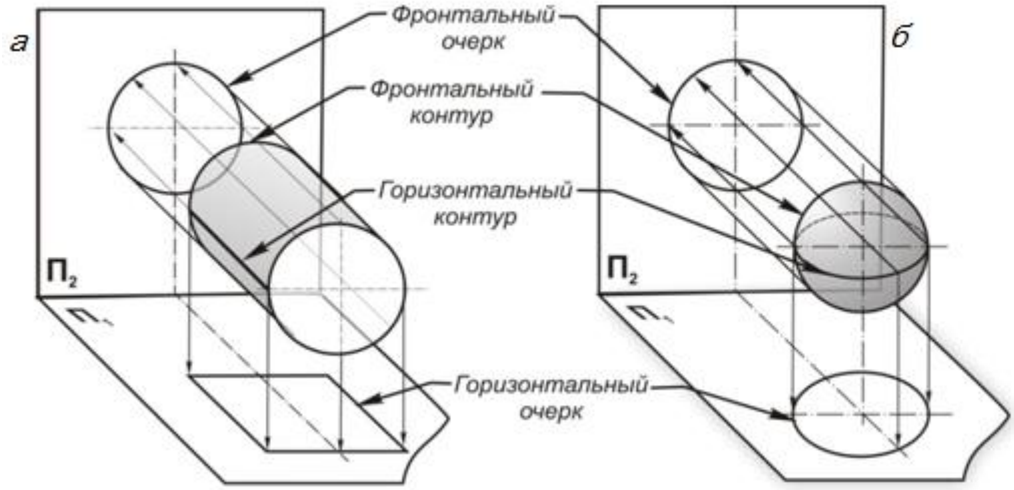


Рис. 7.2. Построение проекций поверхностей: *а* – цилиндрической; *б* – сферы

Очерком поверхности называют линию, ограничивающую проекцию фигуры на плоскости проекций. Проекции любой точки поверхности лежат внутри очерка (в частном случае - на очерке). Если линией контура поверхности служит образующая поверхности, то её называют *контурной образующей*, а её проекцию – *очерковой образующей*.

При построении эпюра поверхности направление проецирования совпадает с направлением взгляда наблюдателя, поэтому контурная линия является границей видимости поверхности: та её часть, которая расположена перед линией контура, – видима, остальная – невидима.

Очерковая линия разделяет проекцию на видимую и невидимую части. Проекции точек поверхности, расположенные на очерках, будем называть точками перемены (границы) видимости. Невидимые точки принято обозначать в скобках.

7.3. Классификация поверхностей

Многообразие форм поверхностей создает большие трудности при их изучении. Для того чтобы обеспечить процесс изучения поверхностей, необходимо их систематизировать. К сожалению, невозможно разработать универсальную классификацию поверхностей. Внутри каждого способа образования поверхностей существует своя база для систематизации, например, в кинематическом способе образования поверхностей в основе систематизации лежит вид образующей и закон ее перемещения. Одна из возможных классификаций представлена на рис. 7.3.

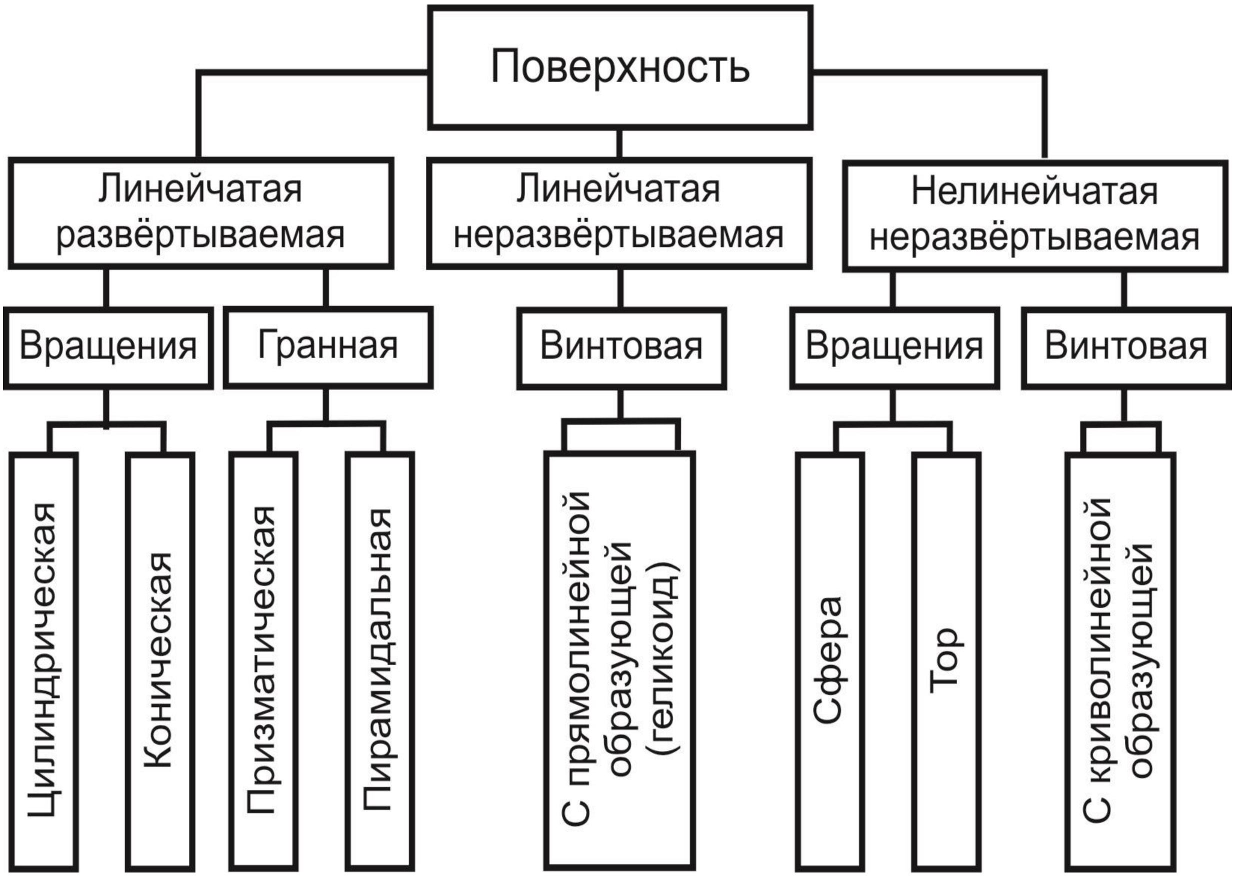


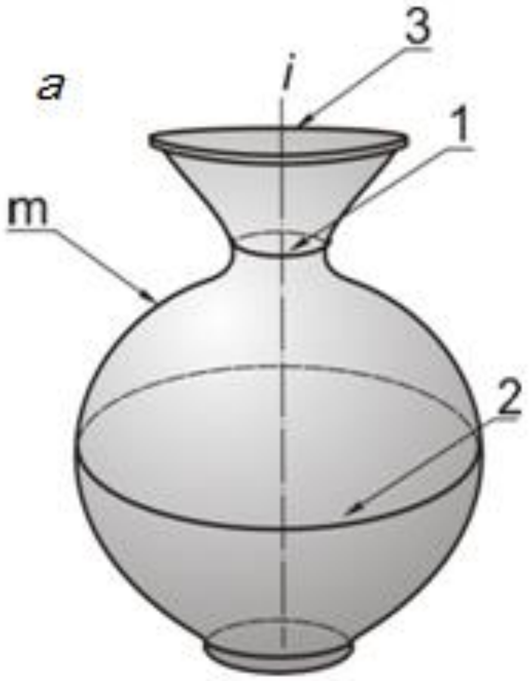
Рис. 7.3. Классификация поверхностей

Линейчатые поверхности. Поверхности, которые образуются при некотором закономерном движении прямой в пространстве, называются *линейчатыми*. Линейчатые поверхности в общем случае однозначно определяются тремя направляющими линиями *m, n, f*.

Линейчатые поверхности делятся на развёртываемые и неразвёртываемые. *Развертываемые* поверхности могут без деформации (складок и разрывов) совмещаться с плоскостью. К наиболее распространенным развёртываемым поверхностям относятся: цилиндрические, конические, призматические, пирамидальные.

Поверхности вращения общего вида. Поверхности вращения общего вида – это поверхности, образованные произвольной линией (образующей l) при ее вращении вокруг неподвижной оси (оси поверхности i).

При задании поверхности вращения на комплексном чертеже ось вращения i располагают перпендикулярно одной из плоскостей проекций. Элементы поверхности: *m* – главный меридиан, *1* – горло, *2* – экватор (рис.7.4, *а*). В этом случае все параллели поверхности, горло *1* и экватор *2* проецируются на $П_1$ в истинную величину, а на $П_2$ – в отрезки прямых, перпендикулярные i_2 – проекции оси i. Для задания поверхности вращения общего вида на комплексном чертеже строят проекции главного меридиана m_1 и m_2, проводят проекции горла, экватора и двух параллелей (7.5, *б*).



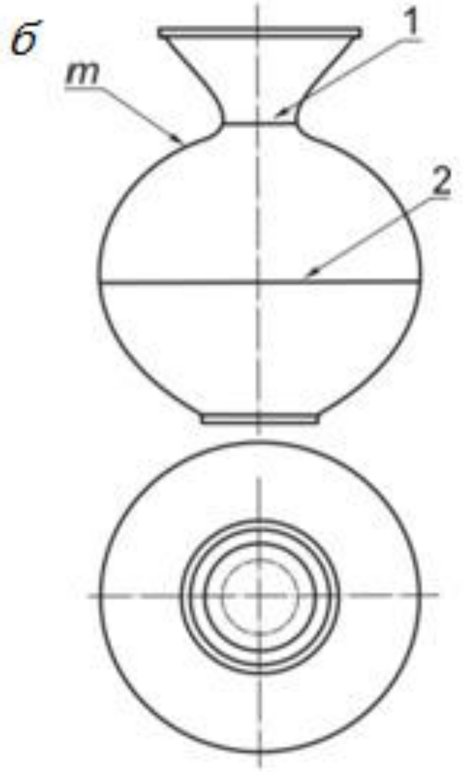


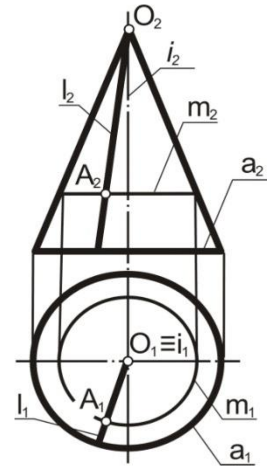
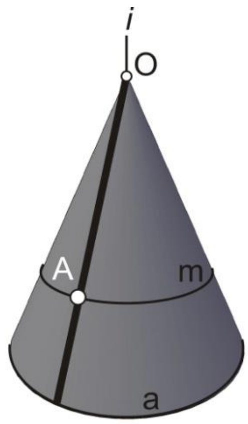
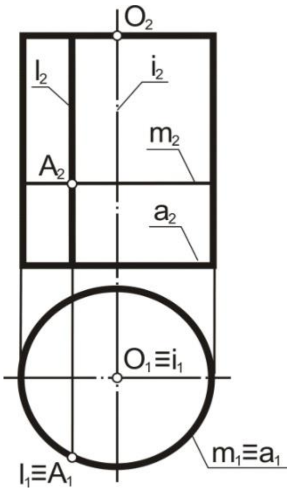
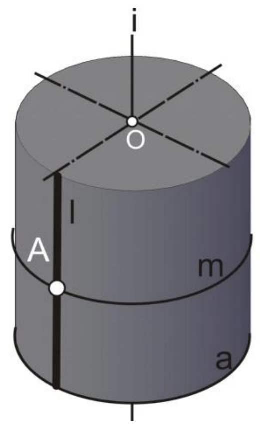
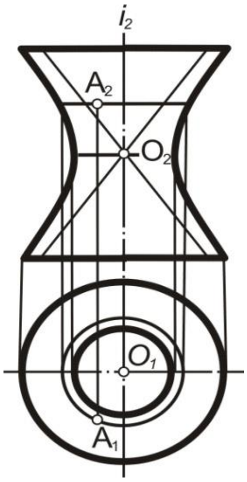
Рис. 7.4. Поверхность вращения общего вида: *а* – наглядное изображение; *б* – комплексный чертеж; *1* – горло; *2* – экватор; *m* – главный меридиан

Свойства поверхностей вращения.

1. Вращаясь вокруг своей оси, поверхность может сдвигаться без деформации вдоль самой себя.

Таблица 7.1

Линейчатые развертываемые поверхности вращения

<table>
<tr><th>Наименование поверхности</th><th>Комплексный чертёж</th><th>3D модель</th></tr>
<tr><td>Конус вращения</td><td>
</td><td>
</td></tr>
<tr><td>Цилиндр вращения</td><td>
</td><td>
</td></tr>
<tr><td>Гиперболоид однополостный</td><td>
</td><td>
</td></tr>
</table>

2. Если меридиан поверхности вращения проходит через две точки поверхности, то он является кратчайшей линией между этими точками и все меридианы равны между собой.

3. Каждая из параллелей поверхности вращения пересекает меридиан под прямым углом, т. е. параллели и меридианы образуют прямоугольную сеть на поверхности вращения.

4. Поверхность вращения можно задать кривой, если эта кривая пересекает все ходы точек образующей линии.

Линейчатые развертываемые поверхности вращения. Линейчатые развертываемые поверхности вращения – это поверхности, образованные вращением прямолинейной образующей l вокруг неподвижной оси поверхности l по кривой или ломаной направляющей m, развертки которых можно совместить с плоскостью без разрывов и складок.

К наиболее распространенным линейчатым развертываемым поверхностям вращения относятся: цилиндр вращения, конус вращения, однополостный гиперболоид (табл. 7.1).

Цилиндрическая поверхность. Поверхность, образованная параллельным перемещением прямолинейной образующей l по кривой направляющей m, называется *цилиндрической*.

Конус вращения. Поверхность, образованная движением прямолинейной образующей l, проходящей через неподвижную точку – вершину O по криволинейной направляющей m, называется *конической*.

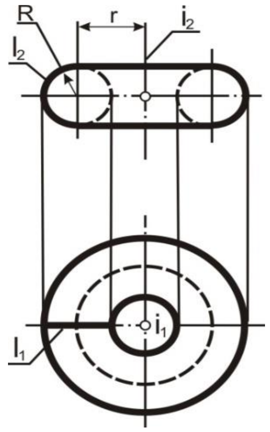
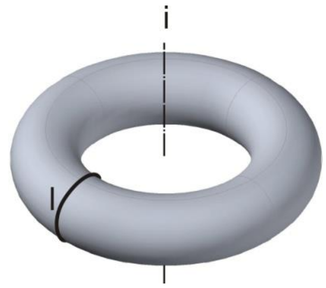
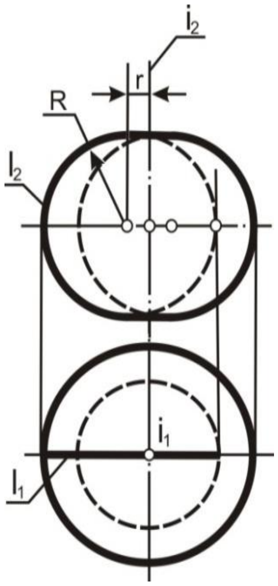
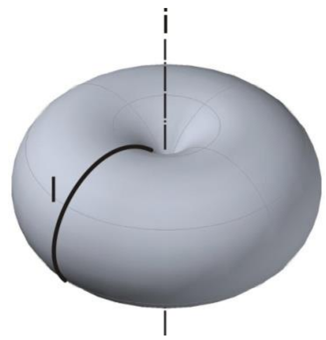
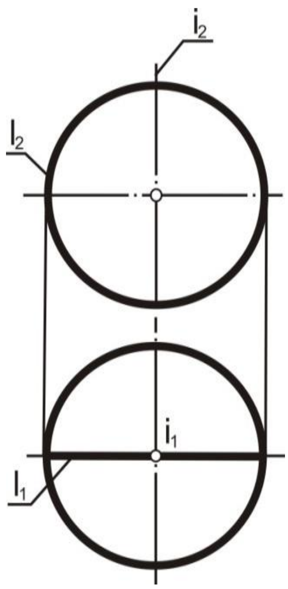
Однополостный гиперболоид вращения. Поверхность, образованная вращением прямолинейной образующей l по криволинейной направляющей m вокруг оси i, при этом образующая l и ось i – скрещиваются, называется *однополостным гиперболоидом вращения*.

Нелинейчатые неразвертываемые поверхности вращения. *Нелинейчатые неразвертываемые поверхности вращения* - это поверхности, образованные вращением криволинейной образующей l вокруг неподвижной оси поверхности i по криволинейной направляющей m, развертки которых невозможно совместить с плоскостью без разрывов и складок. К распространенным нелинейчатым неразвертываемым поверхностям вращения относятся тор и сфера.

Тор. Поверхность, образованная вращением окружности (образующей l) вокруг оси i, не проходящей через ее центр, но расположенной в плоскости окружности. В зависимости от соотношения значений радиуса образующей l окружности R и расстояния r от центра окружности до оси вращения i возможны три разновидности поверхностей (табл. 7.2).

Таблица 7.2

Нелинейчатые неразвертываемые поверхности вращения

<table>
<tr><th>Наименование поверхности</th><th>Комплексный чертёж</th><th>3D модель</th></tr>
<tr><td>Тор открытый</td><td>
</td><td>
</td></tr>
<tr><td>Тор закрытый</td><td>
</td><td>
</td></tr>
<tr><td>Сфера</td><td>
</td><td>
</td></tr>
</table>

Открытый тор. Если R < r, то образующая окружность *l* не пересекает ось вращения i, поверхность называется кольцом или открытым тором.

Закрытый тор. Если R ≥ R, то окружность касается оси или пересекает ее, поверхность называется закрытым тором.

Сфера. Если r = 0, то образуется сфера.

Линейчатые развертываемые гранные поверхности. *Гранной* называется поверхность, образованная частями пересекающихся плоскостей. Элементами гранных поверхностей являются грани, ребра и вершины. Грань – это отсек плоскости. Ребро – линии пересечения плоскостей (граней). Вершина – точки пересечения ребер (рис. 7.5).

Гранные поверхности бывают: призматические и пирамидальные.

Гранная поверхность называется *призматической*, если все ее ребра параллельны между собой (рис. 7.6, *а*).

Гранная поверхность называется *пирамидальной*, если все её ребра пересекаются в одной точке – вершине (рис. 7.6, *б*).

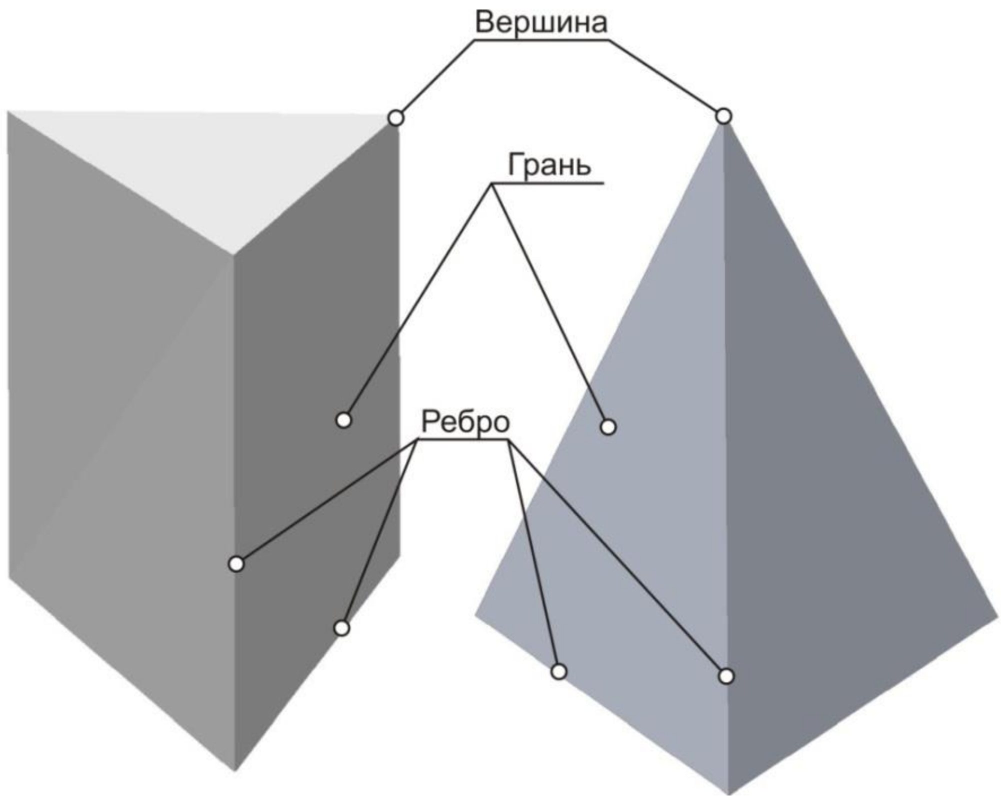


Рис. 7.5. Элементы гранных поверхностей: призмы и пирамиды

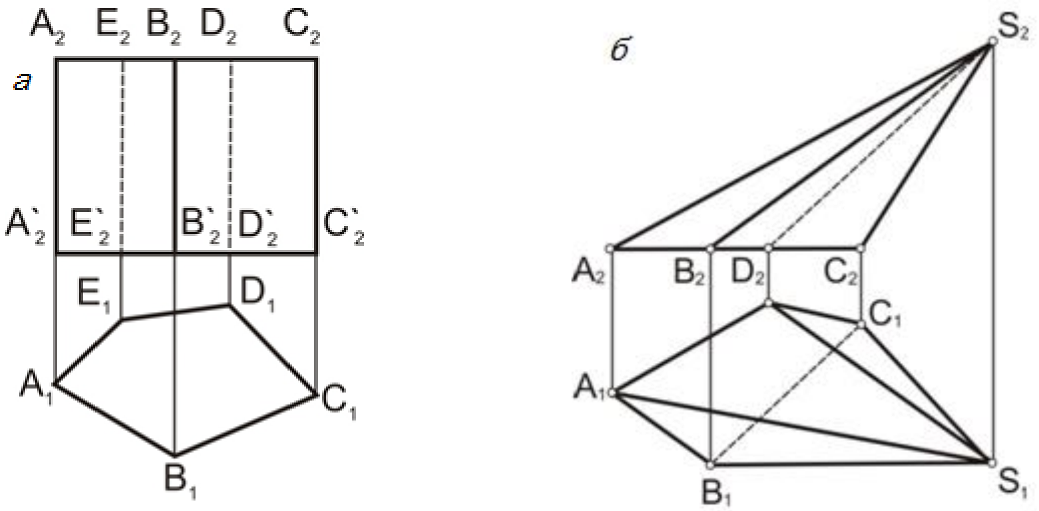


Рис. 7.6. Комплексные чертежи гранных поверхностей: *а* – призма; *б* – пирамида

Винтовые поверхности. Поверхности, образованные винтовым перемещением образующей l, называются *винтовыми.* Винтовую поверхность можно задать начальным положением образующей l и направляющей m – цилиндрической винтовой линией, которая называется гелисой. Все винтовые поверхности неразвертываемые. В зависимости от вида образующей различают линейчатые винтовые поверхности и нелинейчатые винтовые поверхности.

Геликоид. Поверхности, образованные при винтовом перемещении прямолинейной направляющей называются геликоидами.

В зависимости от величины угла наклона образующей к оси геликоиды бывают прямыми, если угол равен 90^0, и наклонными (косыми), если угол – произвольный, отличный от 0 и 90^0.

Прямой геликоид. Поверхность, образованная движением прямолинейной образующей l по двум направляющим, одна из которых цилиндрическая винтовая линия m, другая – ось винтовой поверхности l (рис. 7.7).

Прямые и наклонные геликоиды подразделяются на закрытые и открытые. Признаком для такого деления служит взаимное расположение оси геликоида и образующей. Если образующая и ось пересекаются, геликоид называют закрытым, если скрещиваются – открытым.

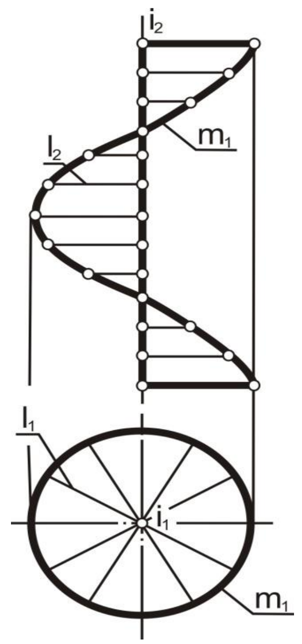


Рис. 7.7. Комплексный чертёж прямого геликоида

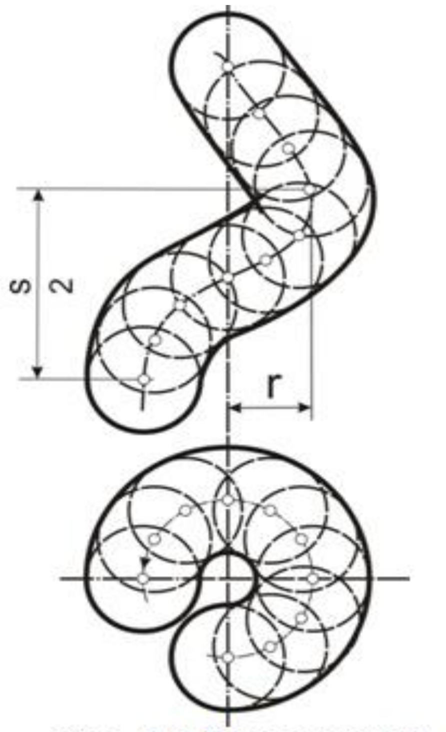


Рис. 7.8. Комплексный чертеж геликоидального круглого цилиндра

Следует отметить одно важное свойство винтовых поверхностей, состоящее в том, что они могут сдвигаться, т. е., совершая винтовое перемещение, поверхность скользит вдоль самой

себя. Это свойство обеспечивает винтовым поверхностям широкое применение: винты, шнеки, сверла, пружины, поверхности лопаток турбин и вентиляторов, рабочие органы судовых движителей, конструкции винтовых линий и др. Винтовые поверхности, и в частности прямой и наклонный геликоиды, широко применяются в технике. Этими поверхностями ограничены червяки (в червячных передачах), винты, болты и т. п.

Нелинейчатые неразвертываемые винтовые поверхности. Поверхности, образованные винтовым перемещением криволинейной образующей l по двум направляющим, называются нелинейчатыми неразвертываемыми винтовыми поверхностями. К таким поверхностям относятся, например, геликоидальный круглый цилиндр.

Геликоидальный круглый цилиндр. Образующая у такой поверхности – окружность, которая находится в нормальной плоскости винтового хода ее центра. На рис. 7.8 показана поверхность геликоидального круглого цилиндра, образованного движением шара заданного радиуса r. Горизонтальный и фронтальный очерки поверхности представлены кривыми линиями, огибающими семейство окружностей, центры которых находятся в точках на соответствующих проекциях базовой линии.

7.4. Точки, принадлежащие поверхности

Чтобы задать на чертеже проекции точек, принадлежащих, многограннику или кривой поверхности, необходимо предварительно построить какую-либо линию на заданной поверхности, а затем на проекциях этой линии взять проекции искомых точек. В качестве таких линий, принадлежащих, например, поверхностям вращения, могут быть выбраны образующие, параллели, меридианы и др. В ряде случаев, если образующая поверхность тела прямая – проецирующая, то отсутствующие на чертеже проекции точек могут быть найдены без дополнительных построений.

Пример 1. Дано: цилиндрическая поверхность, фронтальные проекции точек А, В и С (A_2, B_2 и C_2) . Требуется: построить горизонтальные проекции точек А, В, С, принадлежащих цилиндрической поверхности (рис. 7.9).

План решения:

1. Все образующие цилиндра перпендикулярны к $П_1$, в этом случае горизонтальные проекции всех точек, расположенных на этой поверхности,

находятся на горизонтальной (вырожденной) проекции поверхности.

2. Опустить линии связи на $П_1$ и отметить проекции точек A_1, B_1 и C_1, учитывая, что точка В находится на невидимой части поверхности при взгляде на $П_2$.

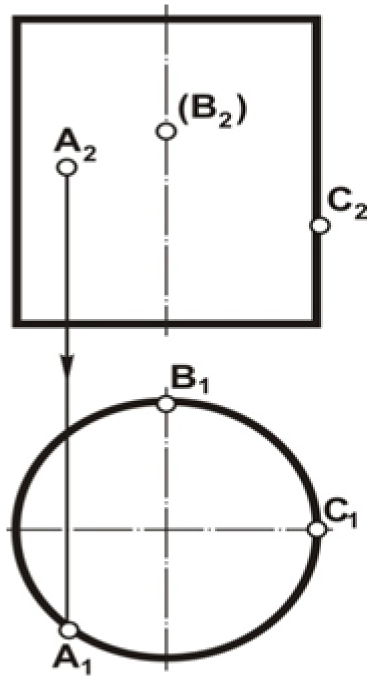


Рис.7.9. Точки на поверхности цилиндра

В случае, если заданы горизонтальные проекции точек на данной поверхности, то положение их фронтальных проекций не определено (без наличия профильных проекций поверхности и точек).

Пример 2. Дано: конус вращения и проекции точек $F(F_2)$, $E(E_1)$ и $C(C_2)$. Требуется: построить проекции точек $E(E_2)$, $F(F_1)$, $C(C_1)$ (рис. 7.10).

План решения:

1. Точка F принадлежит фронтальной очерковой образующей SB (S_2B_2): опустить линию проекционной связи из F_2 на горизонтальную проекцию образующей S_1B_1 получить F_1.

2. Для построения точки $E(E_2)$:

– через проекцию E_1 провести образующую из S_1 (S_11_1);

– построить проекцию образующей на $П_2$ – 1_2S_2;

– линией проекционной связи на 1_2S_2 построить точку E_2.

3. Для построения точки С (C_1):

– через проекцию C_2 провести параллель параллельно A_2B_2;

– построить проекцию параллели на $П_1$ – окружность радиусом R (величина радиуса R определяется по фронтальной проекции).

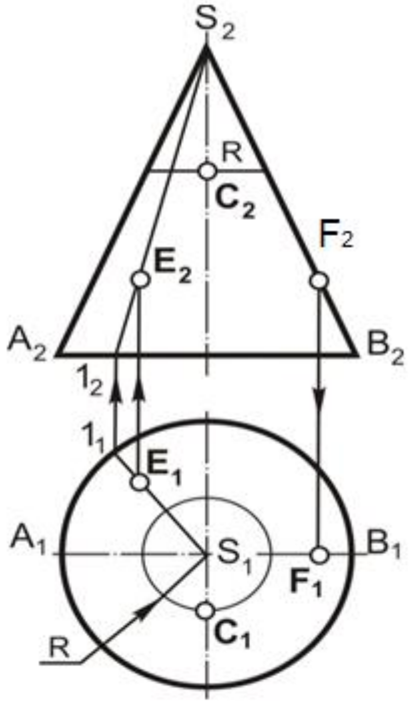


Рис.7.10. Точки на поверхности конуса

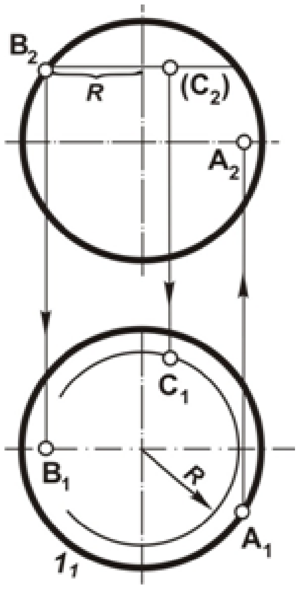


Рис.7.11. Точки на поверхности сферы

Пример 3. Дано: сфера, проекции точек A(A_1), B(B_2) и C(C_2). Требуется: построить проекции точек A(A_2), B(B_1) и C(C_1) (рис. 7.11).

План решения:

1. Точка A принадлежит экватору сферы, фронтальную проекцию точки отметить на проекции одноимённой линии.

2. Точка B принадлежит главному меридиану сферы, горизонтальную проекцию точки отметить на проекции одноимённой линии.

3. Построение точки C(C_1).

3.1. Через проекцию C_2 провести параллель – прямую, параллельную экватору.

3.2. Построить проекцию параллели на $П_1$ – окружность радиуса R (величина радиуса R определяется по фронтальной проекции).

3.3. Отметить проекцию C_1 на проекции параллели.

Пример 4. Дано: пирамида, проекции точек К($К_1$) и L(L_2). Требуется: построить проекции точек К($К_2$), L(L_1) (рис. 7.12).

План решения:

1. Для построения К($К_2$):

– через проекцию $К_1$ провести образующую из вершины S_1 (S_1K_1);

– построить проекцию образующей на $П_2$ (S_2K_2);

– отметить проекцию точки К($К_2$) на (S_2K_2);

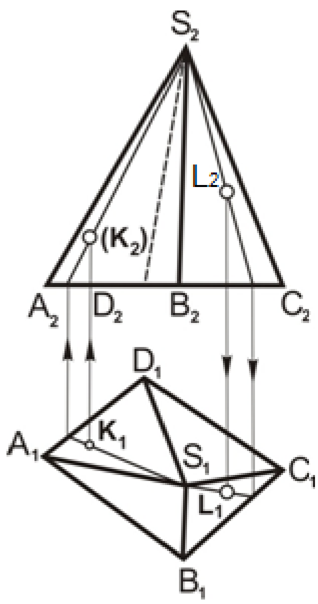


Рис.7.12. Точки на поверхности пирамиды

2. Для построения точки L(L_1):

– через проекцию L_2 провести образующую из вершины S_2 (S_2L_2);

– построить проекцию образующей на $П_1$ (S_1L_1);

– отметить проекцию точки L(L_1) на (S_1L_1);.

Возможно построение недостающих проекций точек с помощью вспомогательных прямых – горизонталей, например, через проекцию точки К – $К_1$ провести $h_1 \parallel A_1D_1$, затем построить h_2, а на ней – точку $К_2$.

7.5. Сечение поверхностей плоскостями

Сечение поверхности вращения плоскостью. В сечении тела вращения плоскостью получается плоская кривая линия. Обычно ее строят по отдельным точкам, которые затем соединяют между собой плавной кривой по лекалу.

Точки, по которым строится кривая, разделяют на характерные (их называют особыми, опорными) и промежуточные.

К характерным относятся:

– крайние (самая верхняя и самая низкая, правая и левая, дальняя и ближняя); точки границы видимости – отделяющие видимую часть кривой от невидимой;

– точки, лежащие на контурах пересекающихся тел;

– концы осей эллипса и вершин параболы и гиперболы.

Когда характерные точки отстоят далеко друг от друга, то для более точного выявления хода кривой строят промежуточные точки, которые выбираются произвольно. Следует иметь в виду, что нередко заранее известна форма кривой, получающейся в сечении.

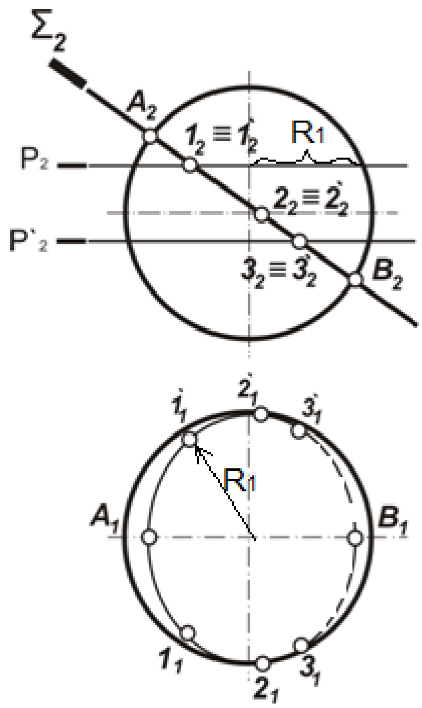


Рис.7.13. Сечение сферы плоскостью

Сфера. Линия сечения сферы представляет собой окружность. По мере удаления секущей плоскости от центра сферы диаметр окружности, получающейся в сечении, уменьшается.

Пример 1. Дано: секущая плоскость $\Sigma(\Sigma_2)$, сфера. Требуется: построить сечение сферы плоскостью (рис. 7.13).

План решения:

1. Отметить характерные точки A и B (A_2 и B_2), которые лежат на главном меридиане сферы.

2. Найти горизонтальные проекции (A_1 и B_1), опуская линий связи до пересечения с горизонтальной осевой линией на $П_1$.

3. Отметить точки 2 и 2`, лежащие на экваторе сферы. Горизонтальные проекции точек 2 и 2` находим, опуская линий связи до пересечения с горизонтальным очерком сферы.

4. Определить ряд точек, лежащих между точками A и B, например, точки 1, 1` и 3, 3`. Их горизонтальные проекции можно построить при помощи метода вспомогательных секущих плоскостей:

– провести вспомогательную плоскость $P(P_2)$ через точку 1 и 1`. Линия пересечения плоскости $P(P_2)$ и сферы будет представлять собой окружность, радиус которой равен расстоянию от осевой линии до очерка сферы - R1;

–на горизонтальной проекции построить окружность радиусом R1 (линию пересечения плоскости $P(P_2)$ со сферой);

– найти точки 1 и 1`, опуская перпендикуляры линий связи из точек $1_2$ и $1`_2$ до пересечения с окружностью линии пересечения. В результате получаются точки 1_1 и $1`_1$. Точки 3 и 3` строятся аналогично.

5. Соединить по порядку полученные точки A_1, 1_1, 2_1, 3_1, B_1, $3`_1$, $2`_1$, $1`_1$, которые принадлежат линии проекции контура сечения, учитывая видимость.

Цилиндр вращения пересекается плоскостью по окружности, если плоскость перпендикулярна оси; по эллипсу – во всех остальных случаях. При пересечении цилиндра вращения плоскостью, параллельной оси вращения, получается прямоугольник.

Если секущая плоскость перпендикулярна оси вращения, то в результате сечения цилиндра этой плоскостью получится окружность. В общем случае, когда секущая плоскость наклонена к оси вращения цилиндра, в сечении получится эллипс.

Пример 2. Дано: цилиндр вращения и плоскость $\Delta(\Delta_2)$. Требуется: построить сечение цилиндра плоскостью (рис. 7.14).

План решения:

1.Обозначить характерные точки: 1 и 5, 3 и 3`.

2. Отметить точки 1, 5, 3, 3` на горизонтальной и профильной проекции цилиндра. На плоскости $П_1$ эти точки лежат на линии окружности основания. На плоскости $П_3$ точки 1 и 5 лежат на вертикальной оси симметрии, а точки 3 и 3` – на крайних образующих.

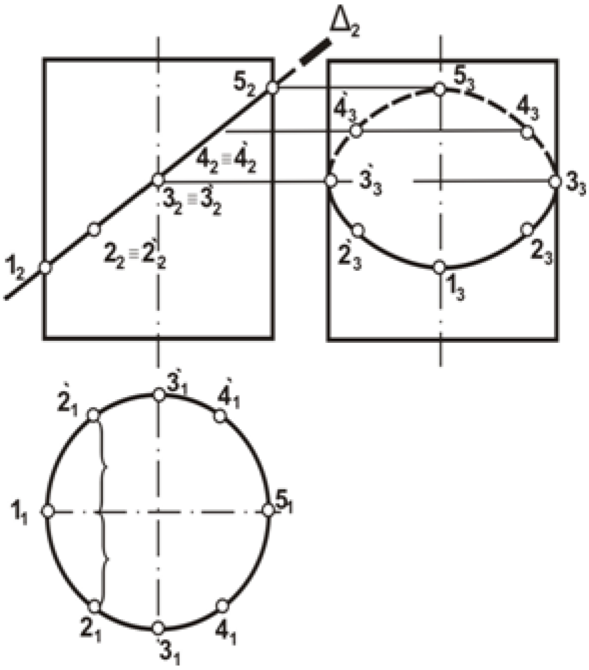


Рис.7.14. Сечение цилиндра плоскостью

3. Построение проекций промежуточных точек, которых должно быть 10–12, показано на примере точек 2, 2`, 4, 4` (чем больше точек, тем точнее строится линия сечения).

4. Соединить полученные точки на профильной проекции с учетом видимости. Получили эллипс. На горизонтальной проекции контур эллипса совпадает с контуром основания цилиндра.

Пример 3. Дано: конус вращения и плоскость $P(P_1)$. Требуется: построить сечение конуса плоскостью (рис. 7.15).

План решения:

1. Необходимо проанализировать расположение секущей плоскости относительно оси вращения конуса. Возможны пять вариантов формы кривой, полученной в сечении (см. библ.список, п.3, §13-15). В данном

примере плоскость Р и ось вращения конуса перпендикулярны к плоскости $П_1$, следовательно, они параллельны между собой и заданная плоскость Р пересекает коническую поверхность по гиперболе. Фигура сечения представляет собой часть плоскости, ограниченной гиперболой и замыкающей ее хордой.

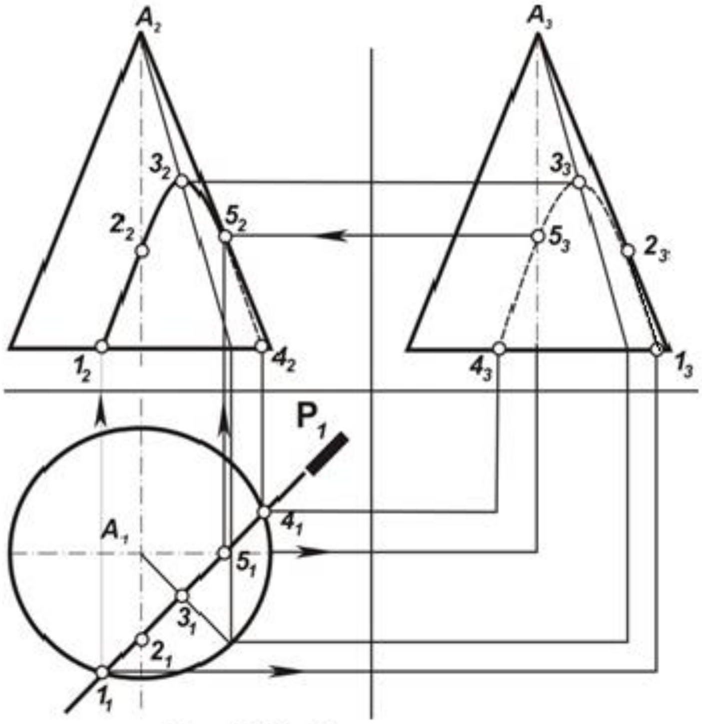


Рис.7.15. Сечение конуса вращения плоскостью

2. На горизонтальной проекции конуса определить точки 1, 3, 4 (1_1, 3_1, 4_1):

– точки 1 и 4 являются границами хорды, по которой Р пересекает основание конуса;

– точка 3 – вершина гиперболы. Она находится в середине горизонтальной проекции фигуры сечения.

3. Найти фронтальные и профильные проекции точек 1, 3, 4:

– точки 1 и 4 проецируем на основание конуса на фронтальную и профильную его проекции;

– точку 3 находим с помощью образующей. Строим остальные точки гиперболы 2 и 5;

– точка 5_2 лежит на очерковой образующей;

– точка 5_3 – на осевой линии профильной проекции конуса;

– точка 2_2 лежит на осевой линии фронтальной проекции;

– 2_3 лежит на очерковой образующей профильной проекции. На фронтальной проекции соединяем точки 1_2, 2_2,3_2,5_2,4_2 с учетом видимости;

– на профильной проекции соединить точки 1_3, 2_3, 3_3, 5_3, 4_3 с учетом видимости.

Пересечение гранной поверхности плоскостью. Геометрическая фигура, получающаяся в результате пересечения многогранника плоскостью, *является* многоугольником. В частном случае эти многоугольники могут распадаться на несколько многогранников, вырождаться в прямые и точки.

Пример 4. Дано: пирамида SABC и плоскость $\Sigma(\Sigma_2)$. Требуется: построить линию пересечения пирамиды плоскостью.

План решения:

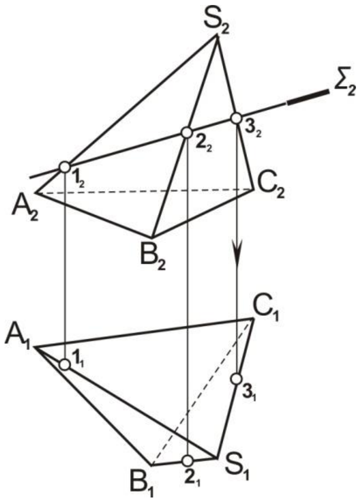
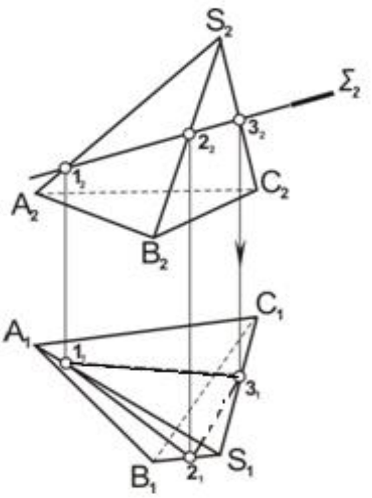
1. Выполнить анализ условия задачи:

- определить признаки понятий «пирамида», «плоскость», «сечение»;

- определить, что будет являться искомым сечением и условие его определения, исходя из того, что поверхность прямолинейная;

Таблица 7.3

Алгоритм построения линии сечения пирамиды плоскостью

Словесная форма	Графическая форма
1. Определить точки 1_2, 2_2, 3_2, которые являются точками пересечения плоскости $\Sigma(\Sigma_2)$ с ребрами данной пирамиды $SABC(S_2A_2B_2C_2)$ и принадлежат линии пересечения этой плоскости с пирамидой. 2. Определить горизонтальные проекции точек 1, 2, 3 (точки 1_1, 2_1, 3_1). Получим: $1 \in AS \Rightarrow [1_1 \in A_1S_1]$, $2 \in BS \Rightarrow [2_1 \in B_1S_1]$, $3 \in CS \Rightarrow [3_1 \in C_1S_1]$	
3. Попарно соединить точки, принадлежащие одной плоскости, с учетом видимости. Линия 1-2-3 = SABC ∩ Σ	

2. Составить алгоритм решения задачи (табл. 7.3):

- определить точки (вершины многоугольника);

- определить видимость сторон многоугольника.

3. Выполнить необходимые геометрические построения.

4. Составить словесное обоснование решения задачи.

7.6. Пересечение поверхности прямой линией

При пересечении любой поверхности прямой линией получатся две точки. Для нахождения точек пересечения прямой с какой-либо поверхностью необходимо:

- через данную прямую провести вспомогательную плоскость,
- найти линию пересечения вспомогательной плоскости с данной поверхностью,
- найти точки пересечения полученной линии с данной прямой,
- найденные точки будут искомыми точками пересечения прямой с поверхностью.

Обычно в качестве вспомогательной плоскости выбирают проецирующую плоскость. Поскольку линию пересечения поверхности с проецирующей плоскостью строить проще, чем с плоскостью общего положения.

Пример 1. Дано: поверхность m и прямая общего положения a. Требуется: построить точки пересечения прямой поверхности (табл. 7.4).

7.7. Выводы по теме

1. В начертательной геометрии основным способом образования поверхностей является *кинематический способ.*

В этом случае *поверхность рассматривается как совокупность последовательных положений некоторой линии, перемещающейся в пространстве по какому-либо закону.*

Сама линия при движении может оставаться неизменной или непрерывно меняться.

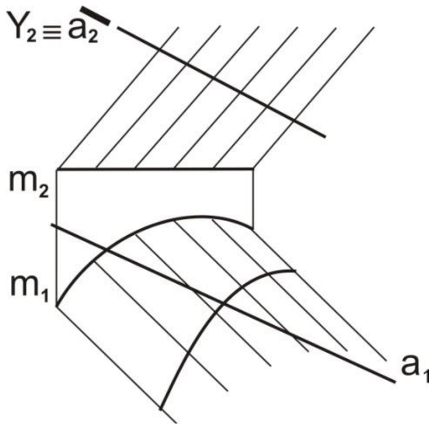
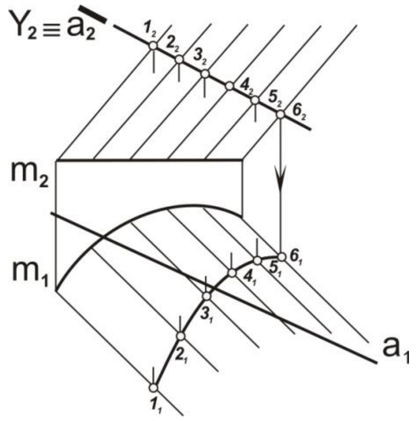
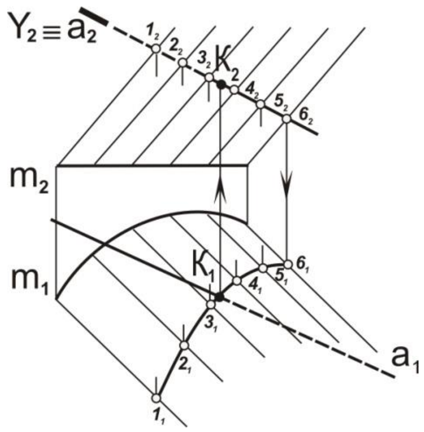
В общем случае поверхность может быть образована *направляющей m,* перемещающейся по некоторым неподвижным *образующим t*. Видно, что можно поменять местами образующие и направляющие, при этом получится одна и та же поверхность.

2. Для задания поверхности на комплексном чертеже необходимо иметь на нем такие элементы поверхности, которые позволяют построить каждую ее точку. Совокупность таких элементов поверхности называют определителем поверхности. Часто поверхность задают проекциями ее направляющих и указывают способ построения ее образующих.

3. Поверхности вращения образуются вращением произвольной образующей вокруг неподвижной оси.

Таблица 7.4

Алгоритм построения пересечения прямой с поверхностью

Словесная форма	Графическая форма
1. Заключить данную прямую линию а во вспомогательную плоскость Y, a⊂Y. *Вспомогательную плоскость следует выбирать так, чтобы в результате получались простейшие сечения (линии, окружности)*	
2. Определить линию пересечения вспомогательной плоскости Y с заданной поверхностью, Y∩a = l(1-2-3-4-5-6)	
3. Найти точку пересечения полученной линии с заданной линией а, (1-2-3-4-5-6) ∩a =K. 4. Определить видимость прямой линии а.	

Линейчатые поверхности образуются движением прямой линии (в частности винтовые поверхности, образуемые движением прямой линии по винтовым направляющим).

Поверхности второго порядка пересекаются с плоскостью по кривой второго порядка, а максимальное число точек пересечения такой поверхности с прямой равно двум.

Циклические поверхности образуются движением окружности.

4. Линия пересечения кривой поверхности с плоскостью представляет собой плоскую кривую. Обычно построение этой линии производят по её отдельным точкам. Основным способом построения линии пересечения поверхности с плоскостью является способ вспомогательных секущих проецирующих плоскостей.

5. Для определения точек пересечения прямой с поверхностью необходимо провести через данную прямую вспомогательную плоскость, после чего найти линию пересечения этой вспомогательной плоскости с данной поверхностью. Точки пересечения полученной линии с заданной прямой и будут искомыми точками пересечения прямой с поверхностью.

Ключевые слова

- Поверхность
- Элементы поверхности: образующая и направляющая
- Определитель кинематической поверхности
- Очерковая образующая
- Развертываемые и неразвертываемые поверхности
- Линейчатые поверхности
- Поверхности вращения
- Винтовые поверхности
- Сечение поверхности плоскостью

Способы деятельности, необходимые для решения задач

– построение проекций точек, принадлежащих поверхности;
– построение сечения поверхности плоскостью;
– построение точек пересечения прямой линии и поверхности.

Вопросы для самопроверки

1. Что называется поверхностью в начертательной геометрии?
2. Что такое образующая и направляющая поверхности?
3. Что называется очерком поверхности? Какую линию называют очерковой образующей?
4. Чем можно задать поверхность вращения?
5. Как образуются поверхности конуса, цилиндра, сферы и тора?
6. Какие линии на поверхности вращения называются параллелями и меридианами?
7. Какие поверхности называются линейчатыми?
8. Какие поверхности называются развертываемыми и неразвертываемыми?
9. Какие линии поверхности используют для построения точек принадлежащих поверхности?
10. Какое сечение у конуса вращения образуется, если:

а) секущая плоскость проходит через ось конуса вращения;

б) секущая плоскость перпендикулярна к оси конуса вращения;

в) секущая плоскость наклонена к оси конуса вращения, пересекая все его образующие;

г) секущая плоскость параллельна одной из образующих?

11. Какое сечение образуется при сечении сферы плоскостью?

12. Определите общий порядок нахождения точек пересечения прямой и поверхности.

Задания для самостоятельного решения

1. Построить сечение поверхности вращения плоскостью $Y(Y_2)$ (рис. 7.16).

2. Построить сечение гранной поверхности плоскость $Q(Q_1)$ (рис. 7.17).

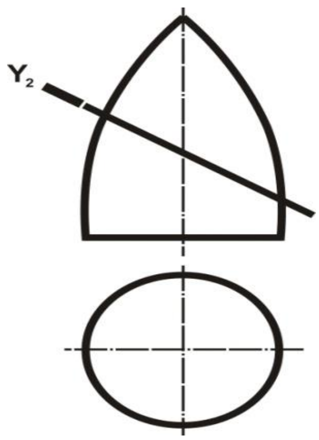


Рис. 7.16

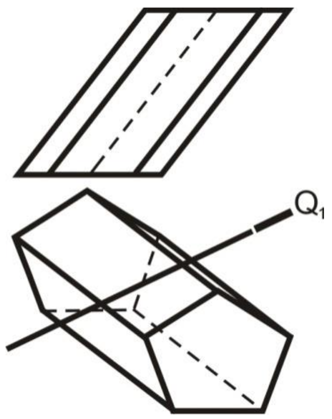


Рис. 7.17

3. Построить точки пересечения прямой e с поверхностью (рис. 7.18).

4. Построить точки пересечения прямой b с поверхностью (рис. 7.19).

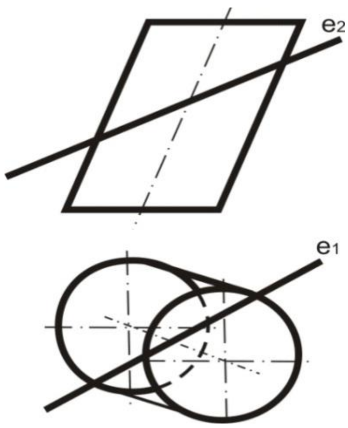


Рис. 7.18

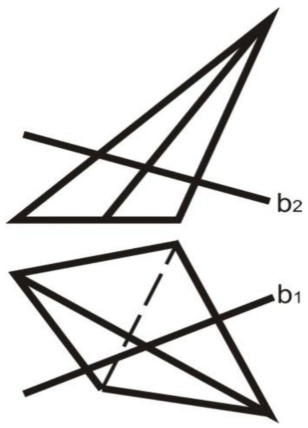


Рис. 7.19

5. Построить проекции точек пересечения прямой АВ с поверхностью конуса (рис. 7.20).

6. Найти на поверхности цилиндра точку, ближайшую к заданной точке А (рис. 7.21).

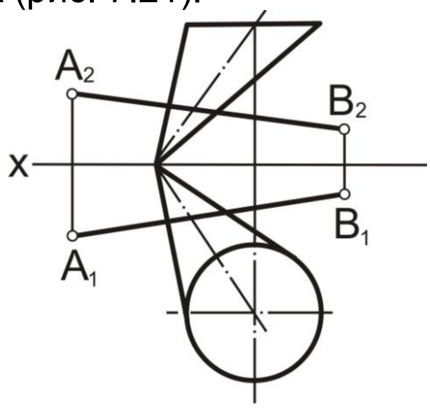


Рис. 7.20

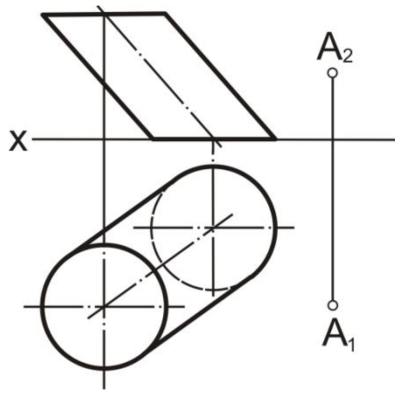


Рис. 7.21

7.8. Решение типовых задач (задачи № 11, 12 из РГР «Альбом задач по начертательной геометрии»)

Задача 11 а. Дано: конус наклонный и плоскость $\Sigma(\Sigma_2)$. Требуется: построить линию пересечения конуса плоскостью.

Решение: 1. Выполнить анализ условия задачи:

- определить признаки понятий «конус наклонный», «плоскость», «сечение»;

- определить, что будет являться искомым сечением и условие его определения, исходя из того, что поверхность вращения;

2. Составить алгоритм решения задачи:

- определить точки будущей кривой;

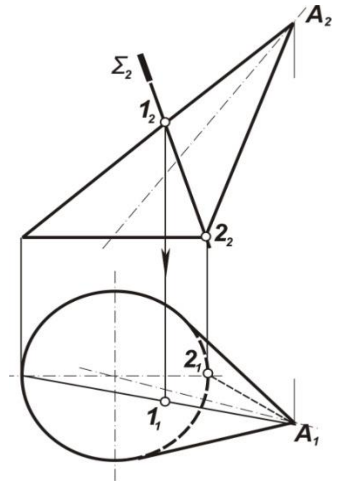
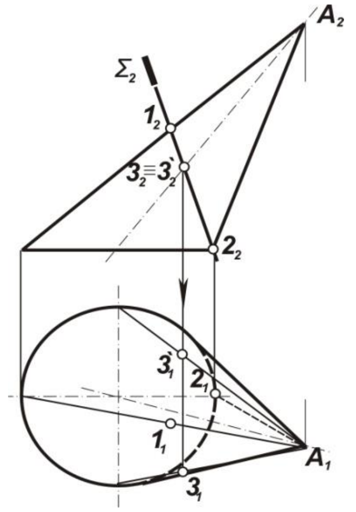
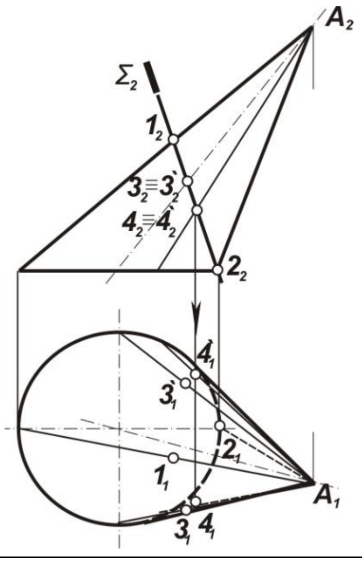
- определить видимость кривой линии.

3. Выполнить необходимые геометрические построения (табл. 7.4).

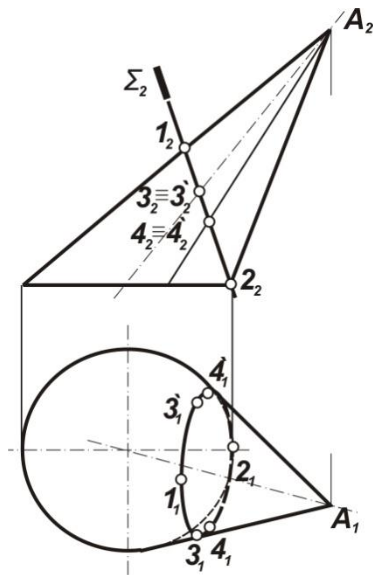
4. Составить словесное обоснование решения задачи.

Таблица 7.4

Алгоритм построения линии сечения наклонного конуса плоскостью

Словесная форма	Графическая форма
1. Точка 1 принадлежит фронтальному очерку конуса и плоскости $\Sigma(\Sigma_2)$, точка 2 принадлежит основанию конуса и плоскости $\Sigma(\Sigma_2)$. 1 – высшая точка будущего сечения, 2 – низшая. Построить горизонтальные проекции точек 1 и 2: на горизонтальной плоскости проекций построить крайнюю образующую, на которой лежит точка 1. Опустить линию связи из 1_2 на полученную образующую $\rightarrow 1_1$. Опустить линию связи из 2_2 до пересечения с контуром основания конуса $\rightarrow 2_1$.	
2. Отметить фронтально конкурирующие точки 3≡3´ ($3_2 \equiv 3_2´$), фронтальные проекции образующих, на которых лежат точки, совпадают с осью вращения конуса. Построить горизонтальные проекции образующих и на них спроецировать горизонтальные проекции точек 3_1 и $3_1´$	
3. Точки 4 и 4´ построить аналогично точкам 3 и 3´. Отметить проекции точек $4_2 \equiv 4_2´$, через отмеченные точки провести образующие, построить горизонтальные проекции образующих и на них отметить горизонтальные проекции точек 4_1 и $4_1´$	

Окончание табл. 7.4

Словесная форма	Графическая форма
4. Соединить горизонтальные проекции полученных точек плавной кривой. Участок линии, который располагается на невидимой части поверхности конуса – показать линией невидимого контура.	

Задача 11 б. Дано: призматическая поверхность, секущая плоскость Δ(Δ2) (рис. 7.22). Требуется: построить сечение поверхности плоскостью. Определить натуральную величину сечения.

План решения:

1. Выполнить анализ условия задачи. Определить признаки понятий: «гранная поверхность», «призматическая поверхность», «плоскость», «сечение гранной поверхности плоскостью».

2. Определить алгоритм решения исходя из следующего: необходимо построить линии пересечения данной секущей плоскости с каждой из граней призмы.

3. Выполнить необходимые геометрические построения (рис. 7.23):

3.1. Отметить точки 1_2, 2_2, 3_2, которые являются фронтальными проекциями точек пересечения плоскости Δ_2 с ребрами граней данной призмы.

3.2. Определить горизонтальные проекции точек 1, 2, 3 (точки 1_1, 2_1, 3_1). Для этого необходимо опустить линий связи из точек 1_2, 2_2, 3_2 до пересечения с соответствующими ребрами призмы:

$1 \in AA`$, $2 \in BB`$, $3 \in CC`$.

3.3. Соединить последовательно точки 1_1, 2_1, 3_1, обвести горизонтальную проекцию контура сечения с учетом видимости.

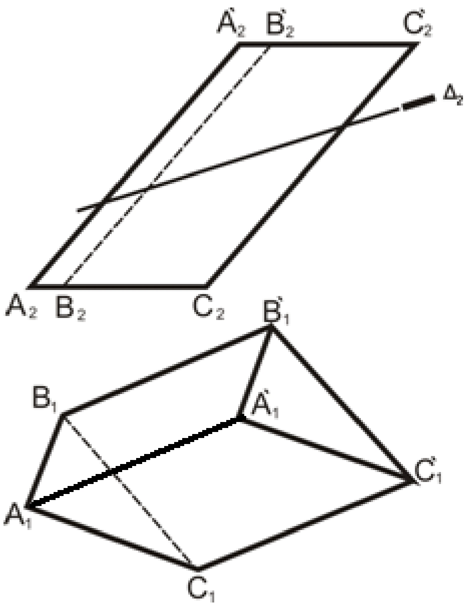


Рис.7.22. Наклонная призма

3.4. Найти натуральную величину методом плоскопараллельного перемещения:

– привести плоскость Δ в положение, параллельное Π_1 ($\Delta`_2 \parallel OX$);

– на новой проекции плоскости перенести точки Δ ($\Delta`_2$), отметить точки $1`_2$, $2`_2$, $3`_2$ на расстоянии таком же, как на фронтальной проекции;

– из точек $1`_2$, $2`_2$, $3`_2$ опустить линий связи до пересечения с горизонтальными линиями, проведенными из точек $1_1$, $2_1$, $3_1$. На пересечении соответствующих вертикальных линий связи и горизонтальных прямых получаем точки $1`_1$, $2`_1$, $3`_1$, принадлежащие контуру сечения призмы плоскостью Δ.

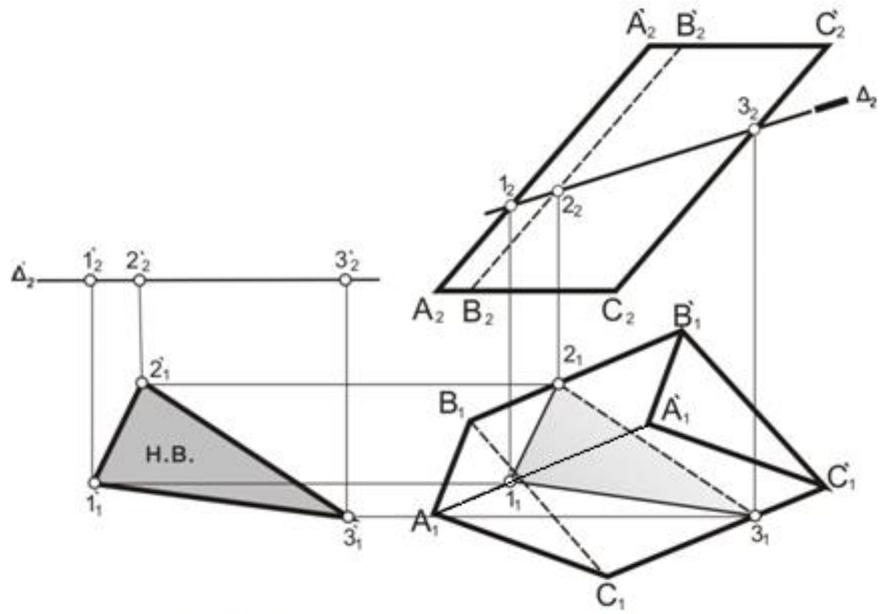


Рис.7.23. Геометрические построения в задаче 11б

Задача 11 в. Дано: цилиндрическая поверхность, секущая плоскость $\Delta(\Delta_2)$ (рис. 7.24). Требуется: построить сечение поверхности плоскостью. Определить натуральную величину сечения.

План решения:

1. Выполнить анализ условия задачи. Определить признаки понятий: «поверхность», «поверхность цилиндрическая», «плоскость», «сечение цилиндрической поверхности плоскостью».

2. Определить алгоритм решения исходя из следующего: необходимо определить точки,

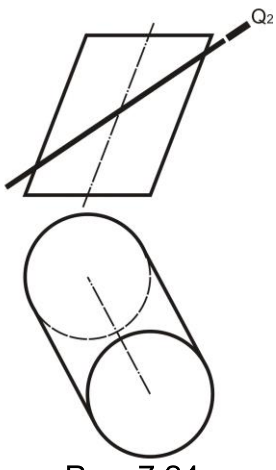
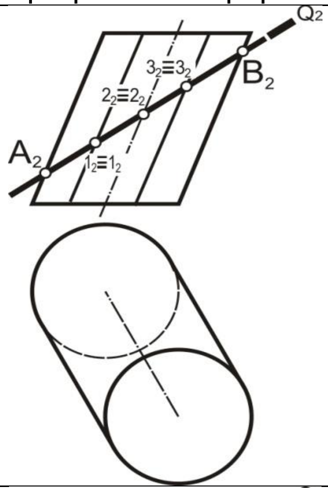
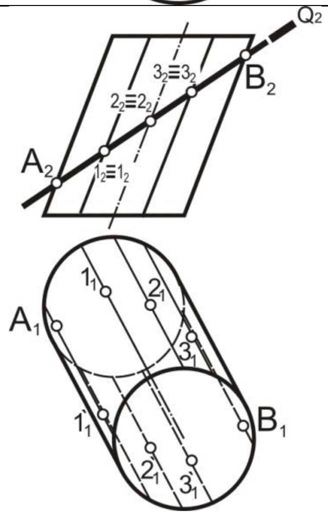
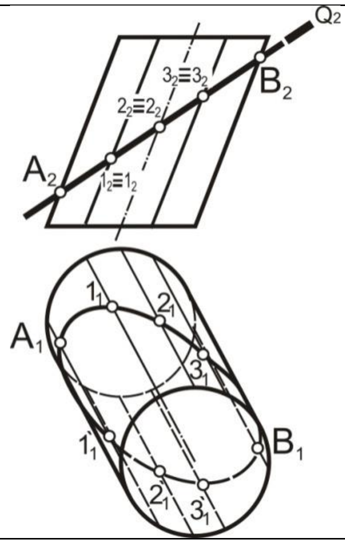


Рис. 7.24.

Таблица 7.5

Алгоритм геометрических построений в задаче 11 в

Словесная форма	Графическая форма
1. Отметить характерные точки А и В: (A_2, B_2) и промежуточные 1 и 1`, 2 и 2`, 3 и 3` ($1_2$, $1`_2$, 2_2, $2`_2$ ,$3_2$, $3`_2$) точки, принадлежащие линии пересечения плоскости Q с цилиндрической поверхностью	
2. Построить горизонтальные проекции точек А, В, 1 …3 и 1`…3` при помощи образующих боковой поверхности цилиндра	
3. Соединить последовательно точки A_1, B_1, $1_1…3_1$ и $1_1`…3_1`$. Обвести проекцию линии сечения с учетом видимости	

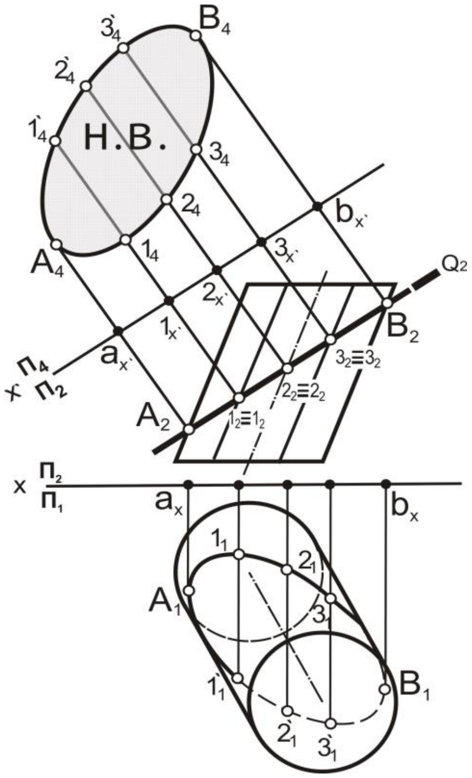


Рис. 7.25. Определение натуральной величины сечения цилиндрической поверхности плоскостью методом замены плоскостей проекций

принадлежащие контуру сечения с помощью образующих цилиндрической поверхности. Натуральную величину сечения можно определить методом замены плоскостей проекций.

3. Выполнить геометрические построения согласно алгоритму (табл. 7.5).

4. Найти натуральную величину сечения методом замены плоскостей проекций (рис. 7.25):

– задать новую систему плоскостей проекций $П_2П_4$, где ось x` – линия пересечения плоскостей проекций $П_2П_4$;

– из точек A_2, B_2, $1_2…3_2$ провести перпендикуляры к оси x`;

– на оси x` отметить точки A_x, B_x, $1_x…3_x$;

–из точек A_x, B_x, $1_x…3_x$ на перпендикулярах отложить расстояние, равное удаленности точек A, B, 1 …3 и 1`…3` от горизонтальной плоскости проекций $П_1$;

– соединить все полученные точки линией.

Полученный эллипс – это натуральная величина сечения данной поверхности плоскостью Q.

Задача 12а. Дано: призматическая поверхность и прямая l. Требуется: построить точки пересечения поверхности с прямой l. Определить видимость прямой .

План решения:

1. Выполнить анализ условия задачи. Определить признаки понятий: «гранная поверхность», «призматическая поверхность», «прямая», «пересечение гранной поверхности прямой общего положения».

2. Определить последовательность решения исходя из общего алгоритма определения точек пересечения прямой общего положения и поверхности.

3. Выполнить геометрические построения (рис. 7.26):

3.1. Заключить l во вспомогательную плоскость $\Delta(\Delta_2)$. $l_2\equiv \Delta_2$.

3.2. Определить фронтальные проекции точек пересечения плоскости Δ с ребрами данной призмы 1_2, 2_2, 3_2, 4_2,.

3.3. Определить горизонтальные проекции точек 1, 2, 3, 4 (точки 1_1, 2_1, 3_1, 4_1). $1 \in AA` \Rightarrow 1_1 \in A_1A`_1$; $2 \in BB` \Rightarrow 2_1 \in B_1B`_1$; $3 \in CC` \Rightarrow 3_1 \in C_1C`_1$; $4 \in DD` \Rightarrow 4_1 \in D_1D`_1$. Попарно соединить точки, принадлежащие одной плоскости пирамиды с учетом видимости. Линия (1-2-4-3) = (ABCD A\`B\`C\`D\`)∩Δ .

3.4. Определить точки M и N (L ∩ (1-2-4-3) = M, N): $M \in (1,2) \Rightarrow M_1 \in (1_1,2_1)$; $M_2 \in (1_2,2_2)$; $N \in (1,3) \Rightarrow N_1 \in (1_1,3_1)$; $N_2 \in (2_2,3_2)$. Показать видимость прямой l.

4. M и N ⊃ l ⊃ (ABCD A\`B\`C\`D\`)

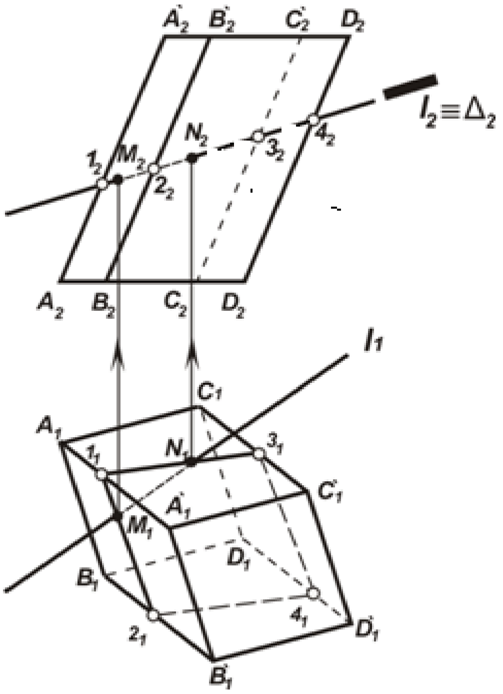


Рис.7.26. Геометрические построения к задаче 12а

Задача 12 б. Дано: коническая поверхность и прямая l. Требуется: построить точки пересечения поверхности и прямой l. Определить видимость прямой.

План решения:

1. Выполнить анализ условия задачи. Определить признаки понятий: «поверхность», «коническая поверхность», «прямая», «пересечение конической поверхности прямой общего положения».

2. Определить алгоритм решения исходя из общего правила определения точек пересечения прямой общего положения и поверхности.

3. Выполнить геометрические построения (рис. 7.27).

3.1. Заключить прямую l во вспомогательную плоскость $\Sigma(\Sigma_2)$.

3.2. Отметить характерные точки 1_2, 3_2, $3`_2$ 5_2, принадлежащие линии пересечения плоскости Σ с конусом.

3.3. Построить горизонтальные проекции точек 1, 3, 3\`, 5 (точки $1_1$, $3_1$, $3`_1$ 5_1) с помощью образующих. Точки 1 и 5 лежат на крайних образующих конуса. Построить горизонтальные проекции крайних образующих. Опустить линий связи из точек 1_2 и 5_2 до пересечения с соответствующей образующей. Точки 3 и 3\` найти таким же образом.

3.4. Кроме характерных точек линии пересечения конуса и плоскости Σ, необходимо построить ряд промежуточных точек. К примеру, точки 2 ,2\`, 4 и 4\`. Эти точки можно определить также при помощи образующих.

4. Соединить точки 1_1, 2_1, $2`_1$, $3_1$, 3\`1, 4_1, $4`_1$, 5_1 с учетом видимости.

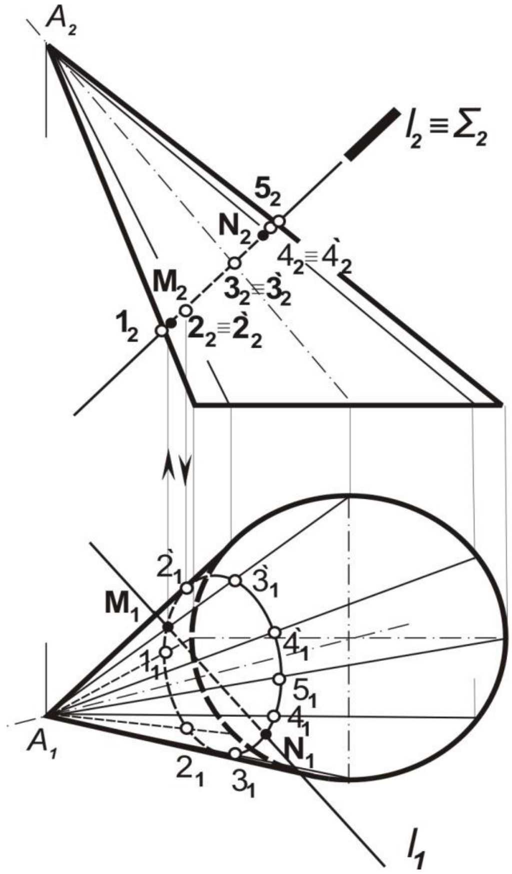


Рис. 7.27. Геометрические построения к задаче 12 б

5. Определить точки M и N. Сначала найти точки M_1 и N_1 там, где прямая l пересекла полученную линию пересечения. Построить фронтальные проекции точек M и N. Показать видимость прямой l.

8. УКАЗАНИЯ НА ВЫПОЛНЕНИЕ РАСЧЕТНО-ГРАФИЧЕСКОЙ РАБОТЫ

Расчётно-графическая работа выполняется в соответствии с вариантом (приложение 4). Условия задач представлены в приложении 3.

Задачи по начертательной геометрии выполняются на форматах А4 (297 x 210) и оформляются в виде альбома. Титульный лист оформляется в соответствии с приложением 1.

Расположение решения задач, а также необходимые надписи должны быть оформлены так, как это представлено в приложении 2.

Все надписи на формате выполняются стандартным шрифтом № 3,5 – 5 по ГОСТ 2.304-81.

Решение каждой задачи выполняется на отдельном формате в тонких линиях и должно максимально заполнять площадь формата. После проверки решения чертеж желательно обвести цветом:

- черным – заданные элементы;

- синим или зеленым – линии вспомогательного построения;
- красным – искомые элементы.

Толщина линий обводки:

- заданные геометрические элемены – от 0,5 до 0,8 мм;
- оси проекций, линии проекционной связи в три раза тоньше линий геометрических элементов;
- линии вспомогательных построений в два раза тоньше линий геометрических элементов.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Начертательная геометрия – наука, изучающая пространственные формы и способы изображения их на плоскости.

Основная задача начертательной геометрии состоит в изучении методов построения изображения пространственных форм и в разработке способов решения пространственных задач при помощи изображений.

Начертательная геометрия является базой для изучения инженерно-технических дисциплин: черчения, архитектуры, деталей машин и механизмов, теоретической и строительной механики и др.

Начертательная геометрия имеет особое значение для развития пространственного воображения, которое необходимо в практической деятельности инженера, конструктора, дизайнера.

Прямой задачей начертательной геометрии является построение чертежа, т. е. изображения предмета на плоскости и изучение способов этого построения.

Обратной задачей является восстановление по проекционному чертежу формы, размеров оригинала, взаимного расположения его элементов и других геометрических параметров.

В учебном пособии рассмотрены основные вопросы методов построения проекционного чертежа, а также способы решения некоторых позиционных и метрических задач из «Альбома 12 задач», предлагаемых студентам в качестве первой расчетно-графической работы при изучении курса «Начертательная геометрия». Решения задач представлены в виде алгоритмов мыслительной деятельности, что способствует развитию мышления и логики в целом.

ПРИЛОЖЕНИЕ 1

ОБРАЗЕЦ ОФОРМЛЕНИЯ ТИТУЛЬНОГО ЛИСТА К РАСЧЕТНО-ГРАФИЧЕСКОЙ РАБОТЕ 1

«Альбом задач по начертательной геометрии»

Дальневосточный государственный университет
путей сообщения

Естественно-научный институт

Кафедра "Вычислительная техника
и компьютерная графика"

АЛЬБОМ ЗАДАЧ
ПО НАЧЕРТАТЕЛЬНОЙ ГЕОМЕТРИИ

РГР 08.05.03 2.1 16.000 - 116

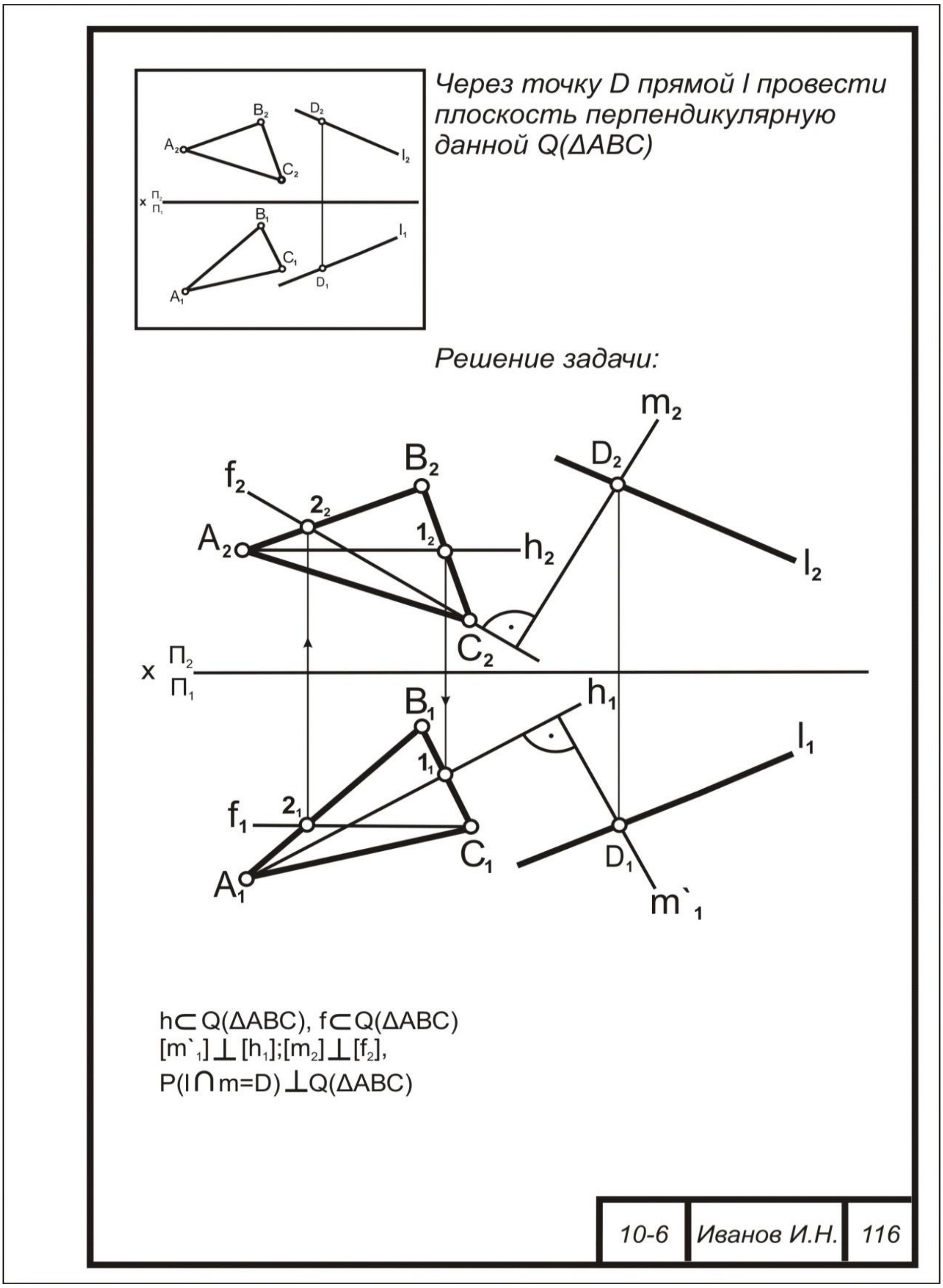
Разработал: Иванов И.Н.
Проверил:

Хабаровск
2016

ПРИЛОЖЕНИЕ 2

ПРИМЕР ОФОРМЛЕНИЯ ЛИСТА С РЕШЕНИЕМ ЗАДАЧИ К РАСЧЕТНО-ГРАФИЧЕСКОЙ РАБОТЕ 1

«Альбом задач по начертательной геометрии»



ПРИЛОЖЕНИЕ 3

УСЛОВИЯ ЗАДАЧ

1. По заданным координатам построить три проекции точек A, B, C, D, E, F. Определить в каком октанте находятся точки.

2. По заданным координатам построить проекции прямой АВ. Определить натуральную величину отрезка и углы наклона к плоскостям проекций $\pi 1$, $\pi 2$ методом прямоугольного треугольника.

3. Через точку К провести прямую h // $\pi 1$ (четные варианты), либо прямую f // $\pi 2$ (нечетные варианты) и пересекающую данную прямую a. Через точку S провести прямую l // a.

4. Построить линию пересечения двух плоскостей.

5. Построить точку пересечения прямой l с плоскостью и показать ее видимость.

6. Определить расстояние от точки S до плоскости.

7. Через прямую l провести плоскость перпендикулярную данной (1...12вар.).

Через точку S провести плоскость параллельно данной (13...18 варианты).

Через точку А, лежащую на прямой h или f, провести прямую так, чтобы она пересекала прямую a и была перпендикулярна прямой h или f (19...26 вар.).

8. Методом замены плоскостей проекций определить:

Расстояние между двумя параллельными прямыми (1– 6 вариант);

Расстояние между двумя скрещивающимися прямыми (7–12 вар

Натуральную величину двугранного угла (13 – 18 варианты);

Расстояние между прямой и точкой (19 – 26 варианты).

9. Вращением вокруг проецирующих прямых или плоско параллельным перемещением определить расстояние от точки S до плоскости.

10. Вращением вокруг горизонтали (четные варианты) или фронтали (нечетные варианты) определить натуральную величину треугольника.

11. Построить проекции и натуральную величину сечения плоскостью Σ данной поверхности.

12. Построить проекции точек пересечения прямой l с поверхностью.

Вариант 1 расчетно-графической работы

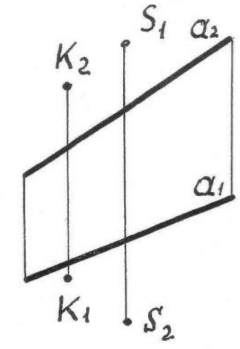
1

	X	Y	Z
A	30	-75	45
B	20	-40	65
C	25	-60	-35
D	-40	0	-40
E	-35	-50	0
F	-70	40	30

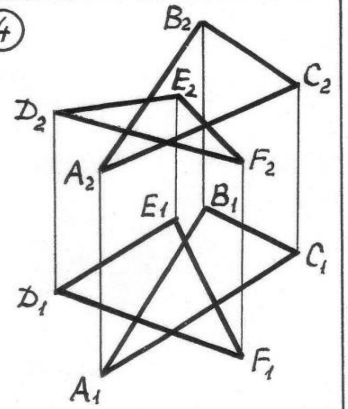
2

	X	Y	Z
A	30	-75	45
B	20	-40	65

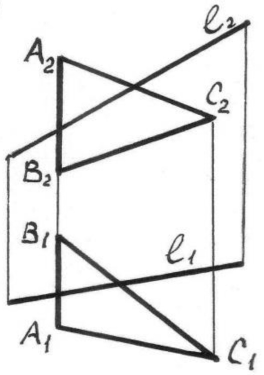
3



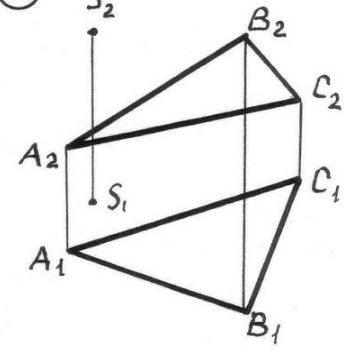
4



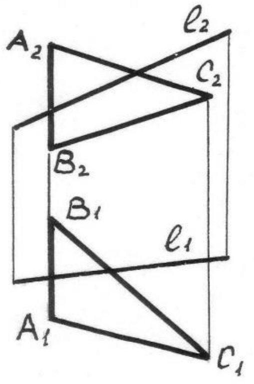
5



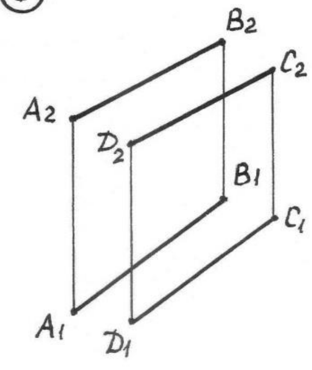
6



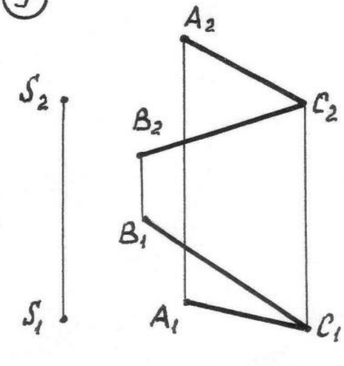
7



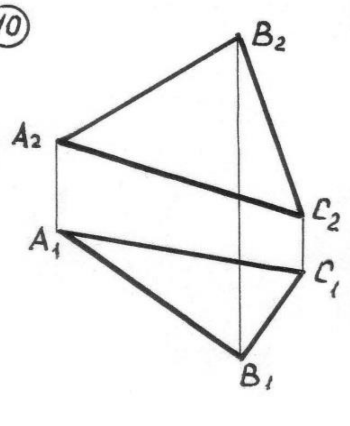
8



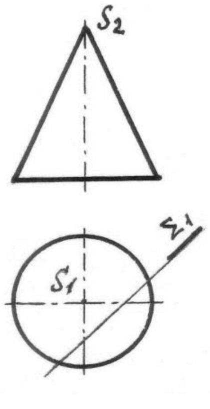
9



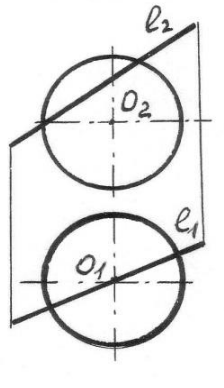
10



11



12



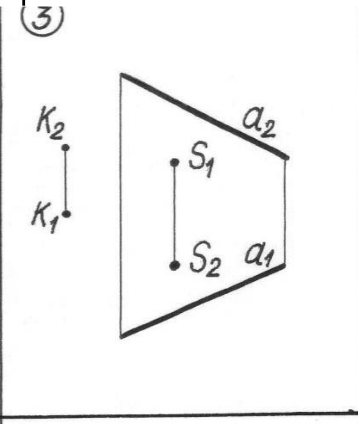
Вариант 2 расчетно-графической работы

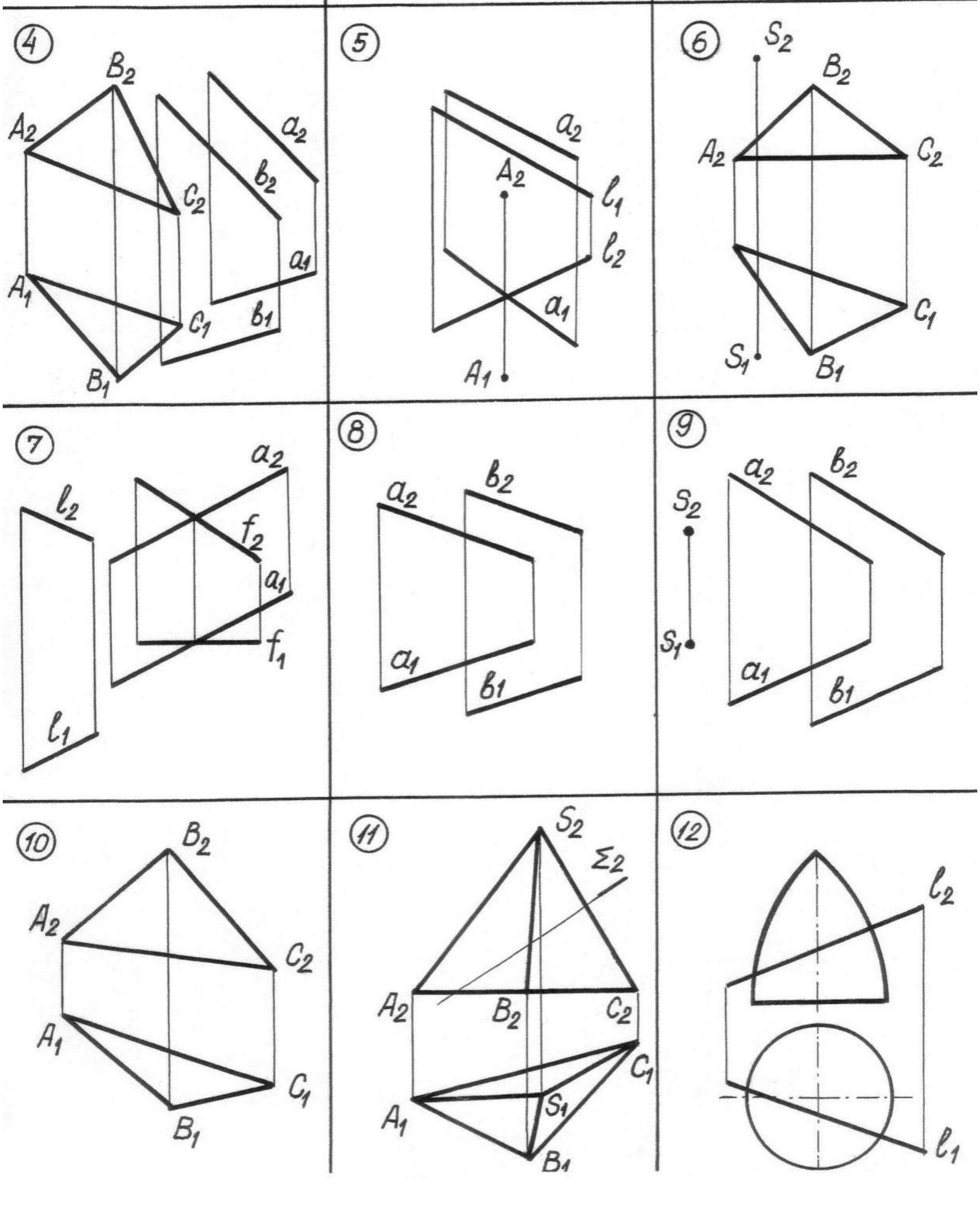
1

	X	Y	Z
A	70	0	60
B	60	-10	-50
C	40	-20	-65
D	-40	45	0
E	-45	15	-35
F	-50	40	30

2

	X	Y	Z
A	70	0	60
B	60	-10	-50





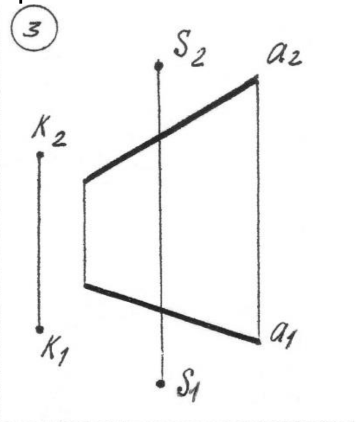
Вариант 3 расчетно-графической работы

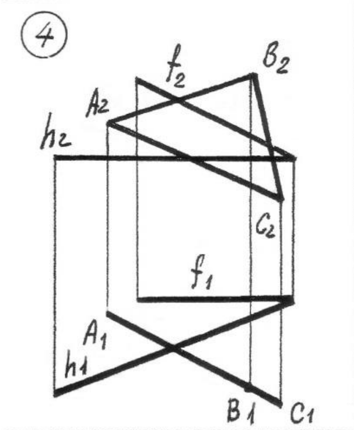
1

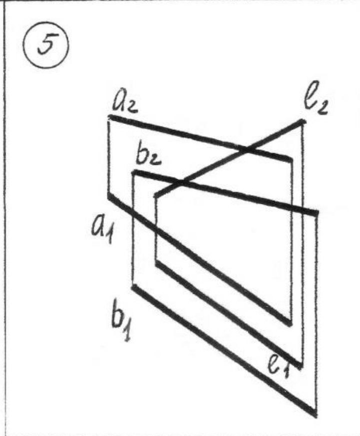
	X	Y	Z
A	50	60	0
B	40	0	70
C	60	50	30
D	-40	-30	55
E	60	40	-20
F	55	-40	-30

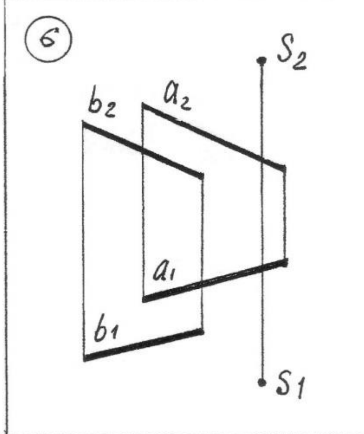
2

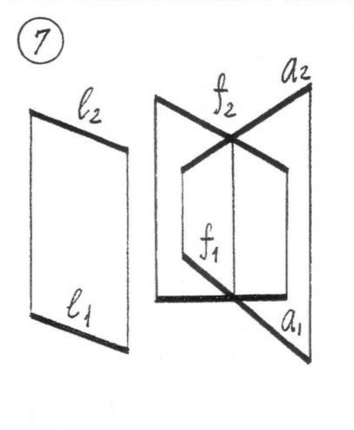
	X	Y	Z
A	50	60	0
B	40	0	70

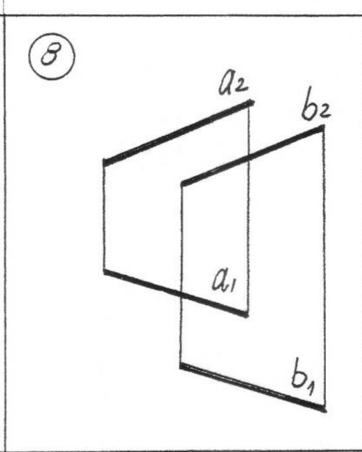


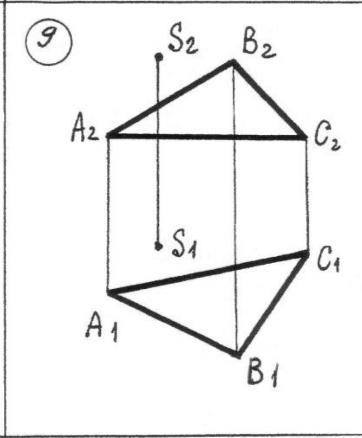


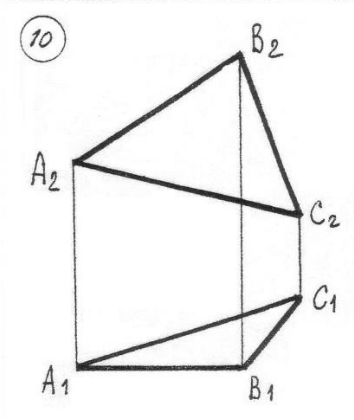


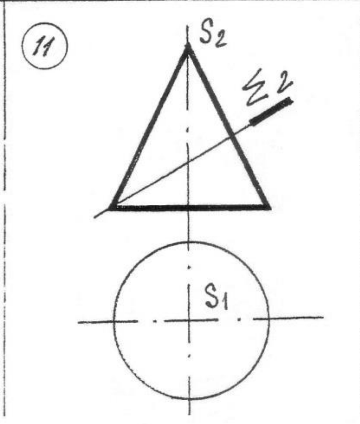


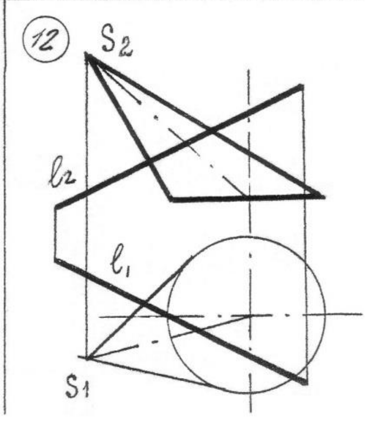












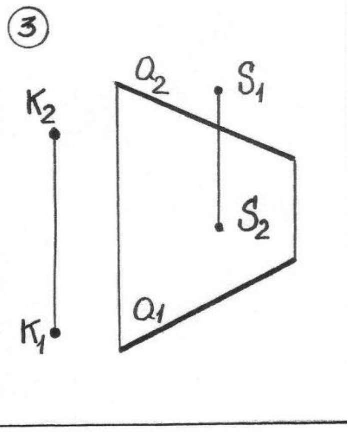
Вариант 4 расчетно-графической работы

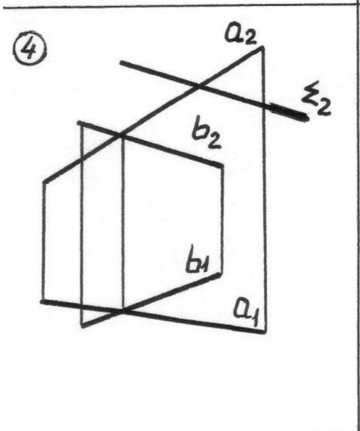
1

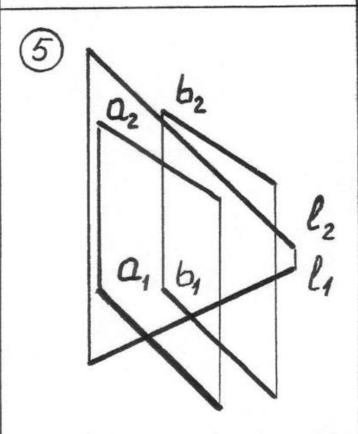
	X	Y	Z
A	35	0	-30
B	35	35	0
C	50	30	60
D	-40	-30	-50
E	-30	40	-20
F	-35	0	30

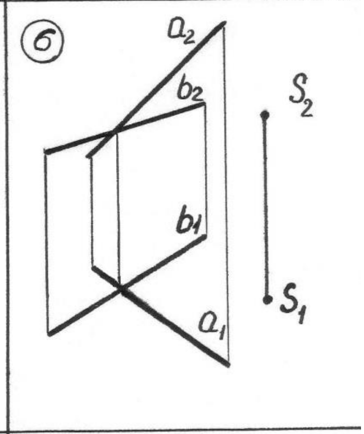
2

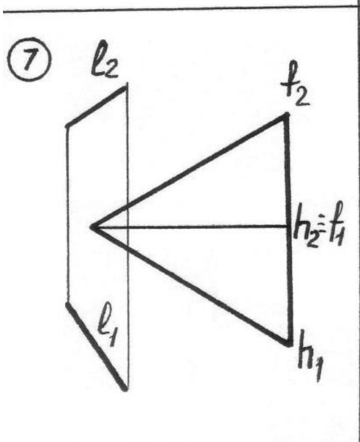
	X	Y	Z
A	35	0	-30
B	35	35	0

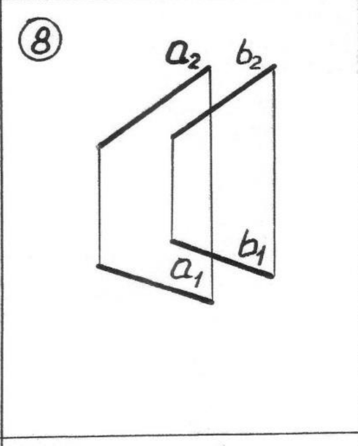


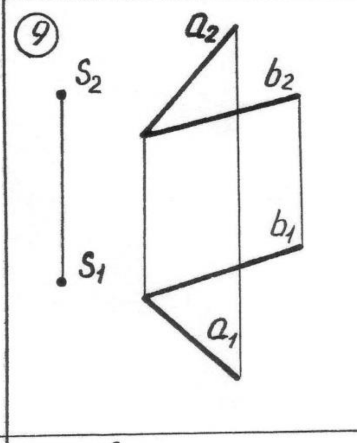


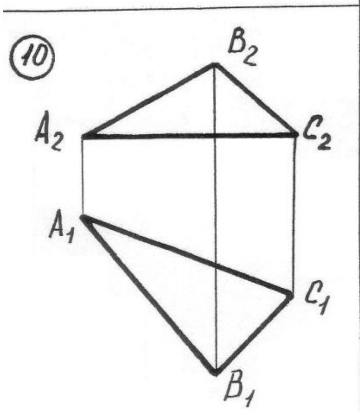


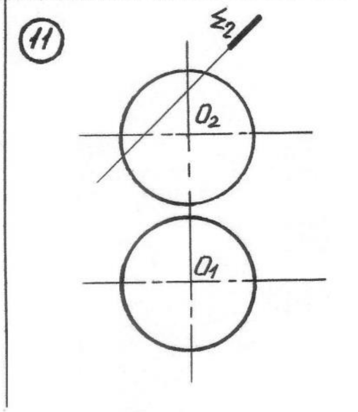


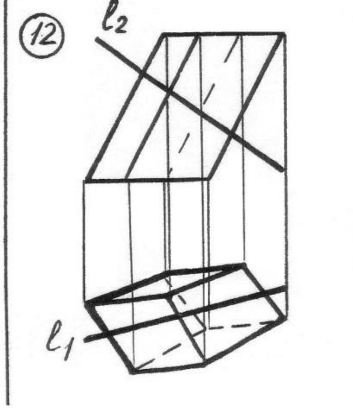












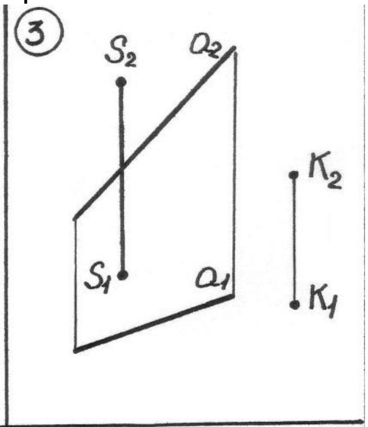
Вариант 5 расчетно-графической работы

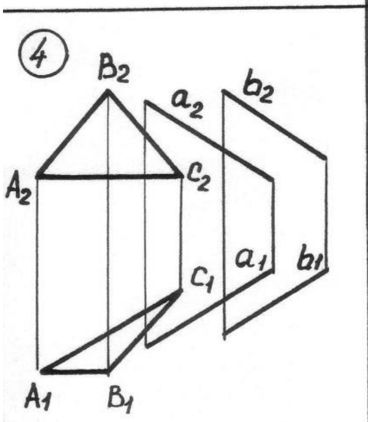
1

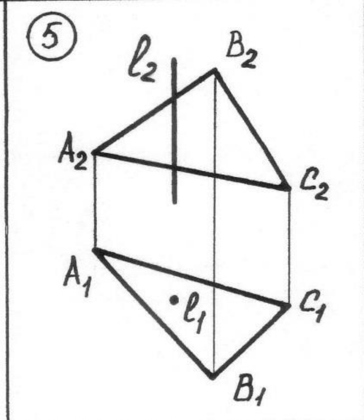
	X	Y	Z
A	70	35	-10
B	50	-60	-30
C	60	0	65
D	-40	-55	0
E	-25	0	-50
F	-55	-10	25

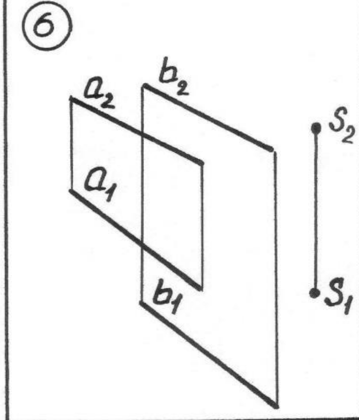
2

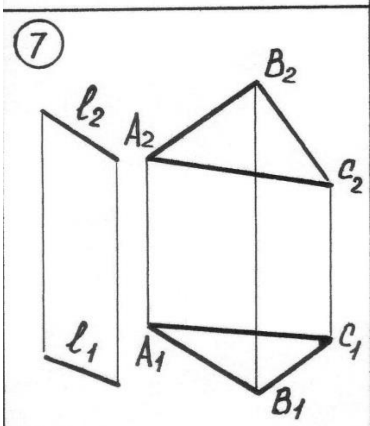
	X	Y	Z
A	70	35	-10
B	50	-60	-30

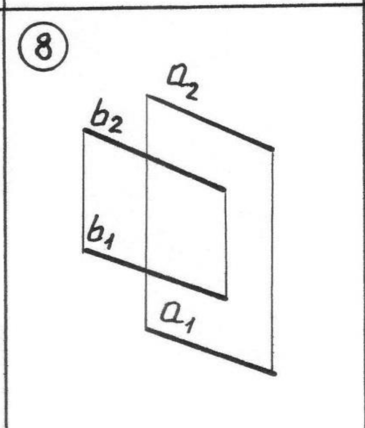


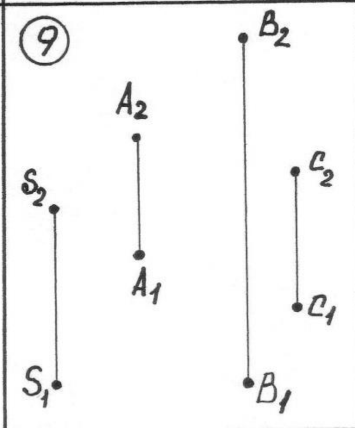


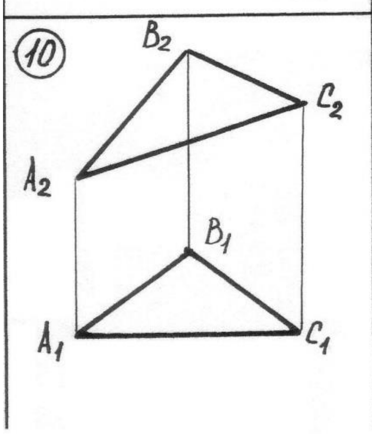


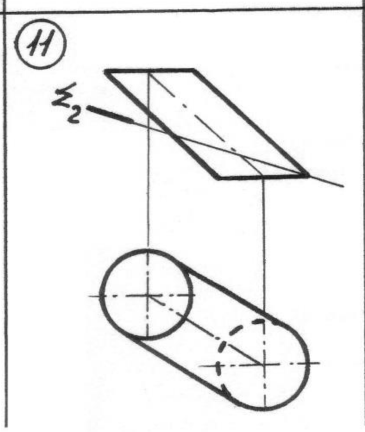


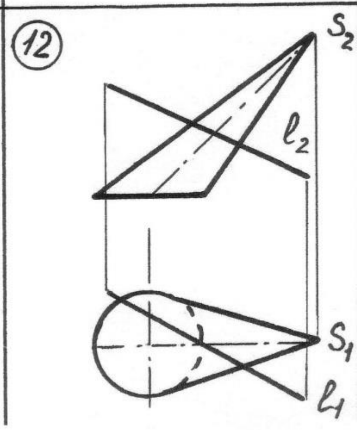












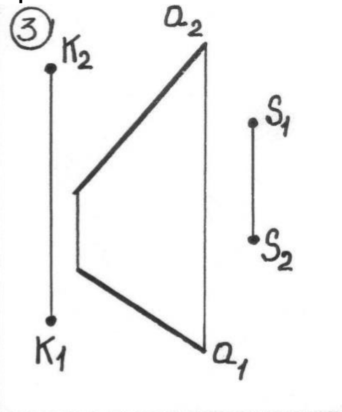
Вариант 6 расчетно-графической работы

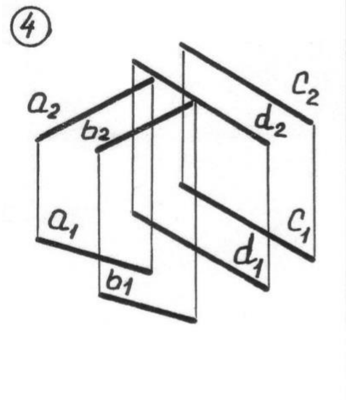
1

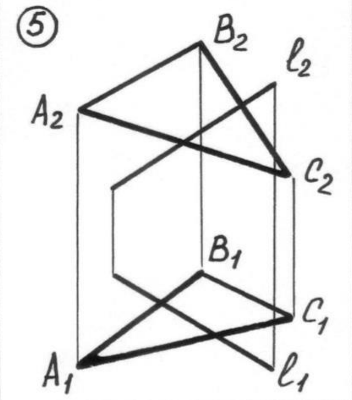
	X	Y	Z
A	40	50	0
B	20	-28	65
C	30	-75	-55
D	20	0	-50
E	40	45	40
F	50	10	-25

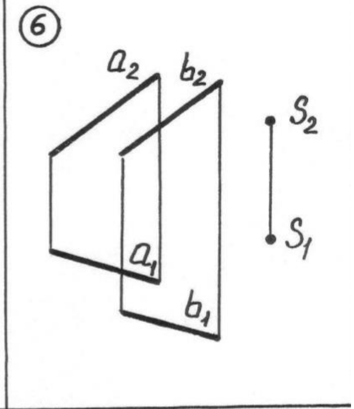
2

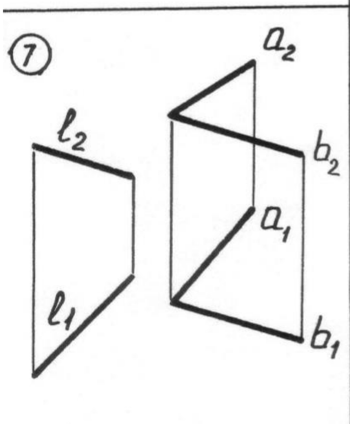
	X	Y	Z
A	45	50	0
B	15	-20	60

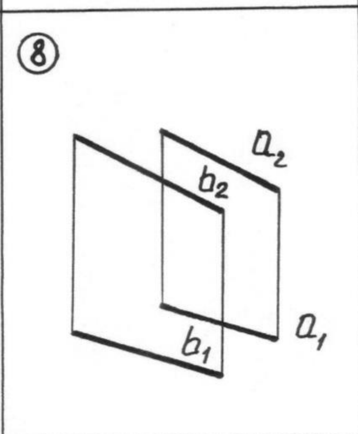


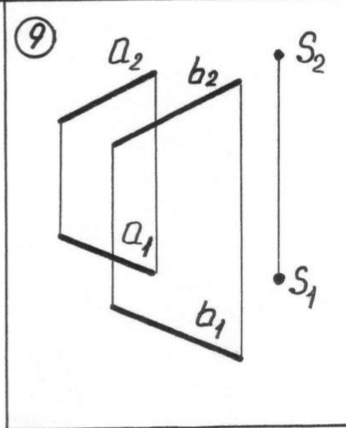


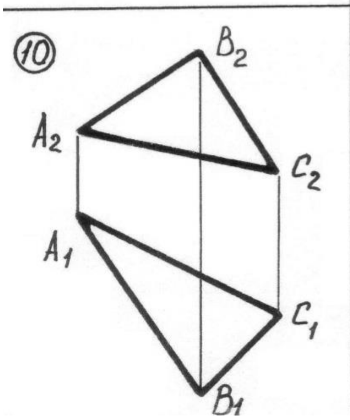


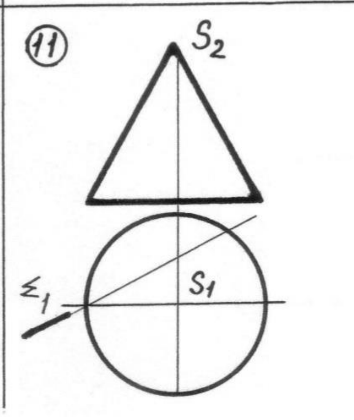


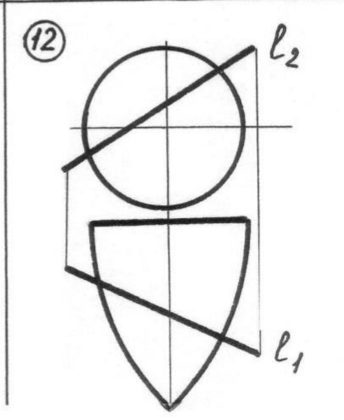












Вариант 7 расчетно-графической работы

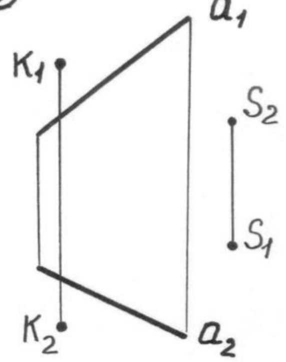
1

	X	Y	Z
A	30	50	0
B	40	0	40
C	65	-70	30
D	-40	-45	-45
E	-25	60	-20
F	50	60	20

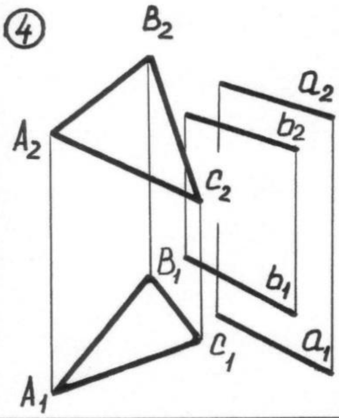
2

	X	Y	Z
A	30	40	0
B	30	0	40

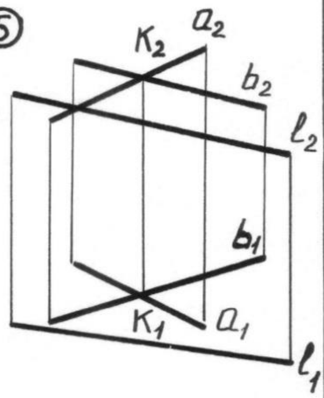
3



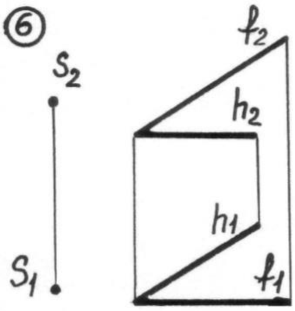
4



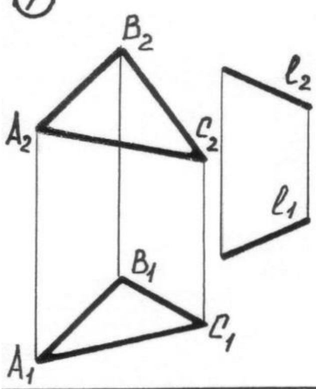
5



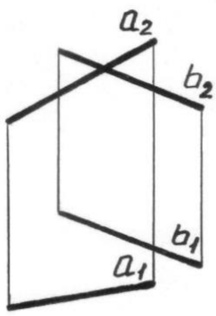
6



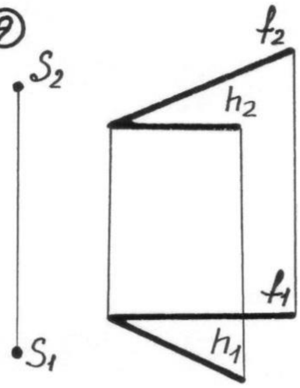
7



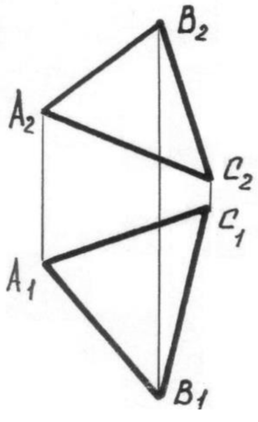
8



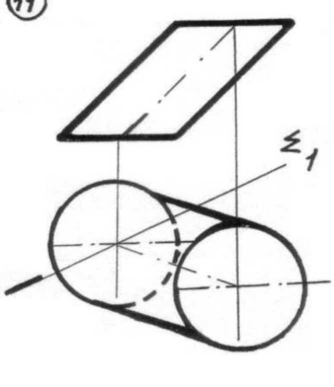
9



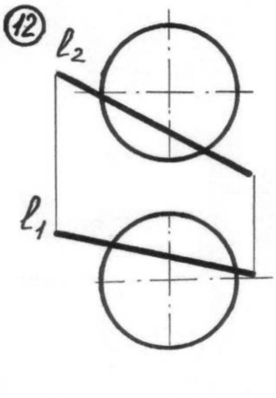
10



11



12



Вариант 8 расчетно-графической работы

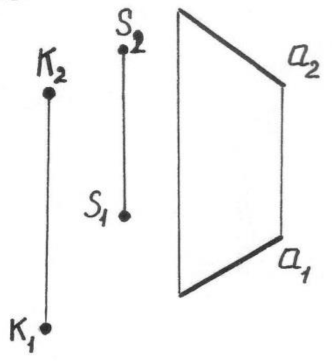
1

	X	Y	Z
A	70	60	0
B	50	0	-50
C	40	-70	-45
D	-35	-60	25
E	55	20	-70
F	60	40	20

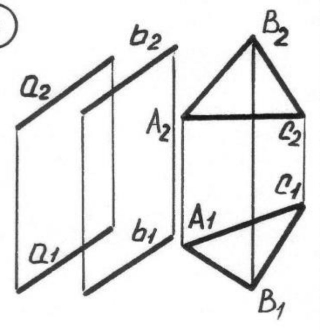
2

	X	Y	Z
A	70	60	0
B	50	0	-50

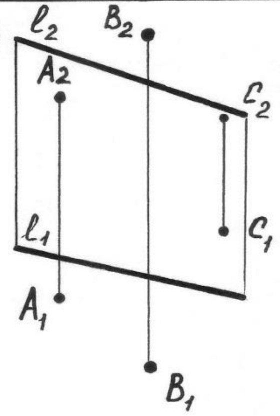
3



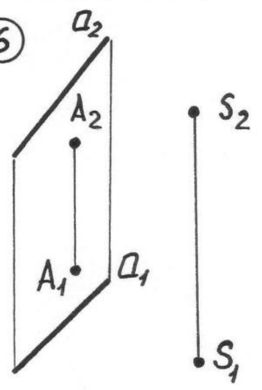
4



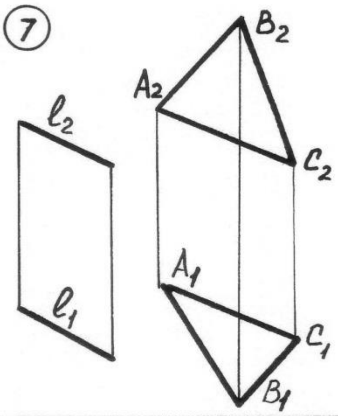
5



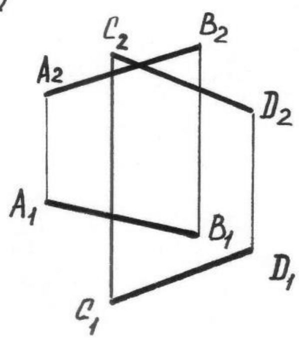
6



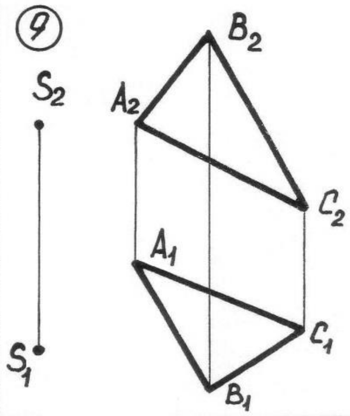
7



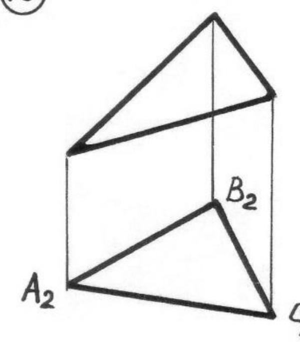
8



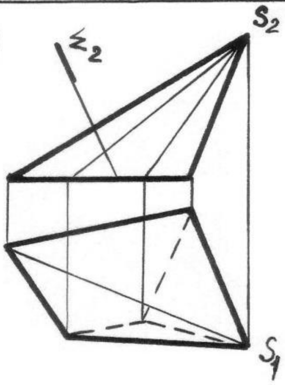
9



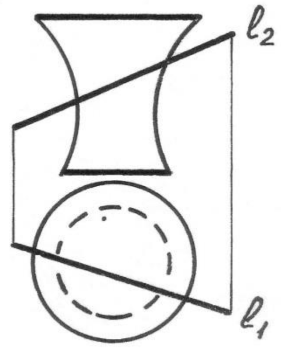
10



11



12



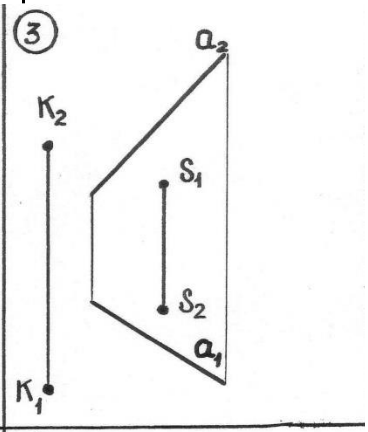
Вариант 9 расчетно-графической работы

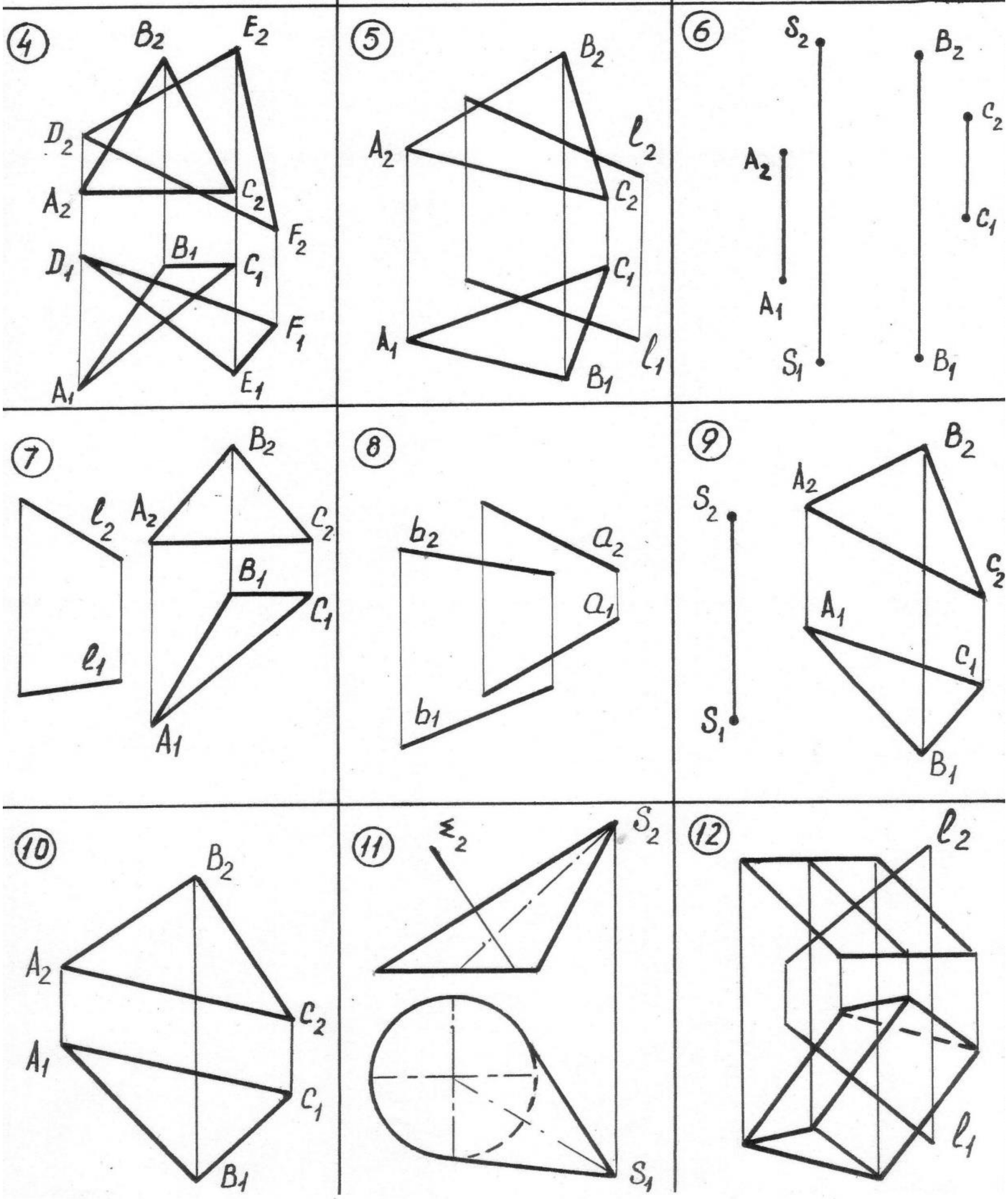
1

	X	Y	Z
A	30	15	60
B	45	-30	10
C	25	-60	0
D	-30	50	0
E	40	0	60
F	50	-60	-20

2

	X	Y	Z
A	30	15	60
B	45	-30	10





Вариант 10 расчетно-графической работы

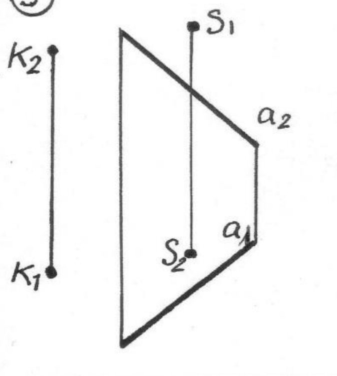
1

	X	Y	Z
A	45	-70	45
B	30	25	60
C	25	-65	0
D	-50	20	-65
E	20	20	0
F	60	40	-20

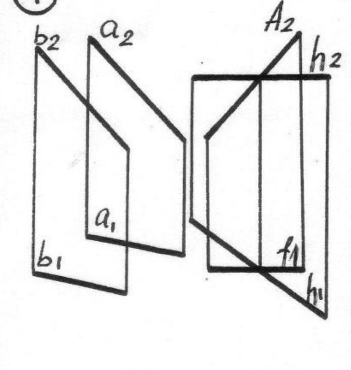
2

	X	Y	Z
A	45	-70	45
B	30	25	60

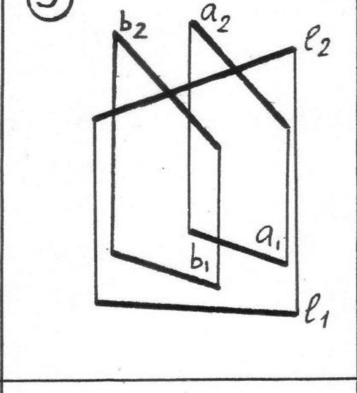
3



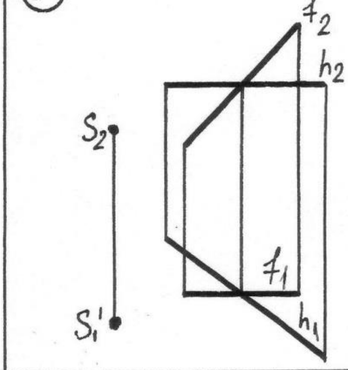
4



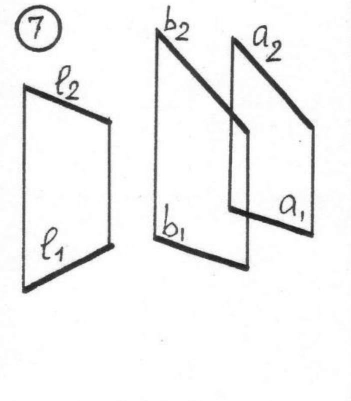
5



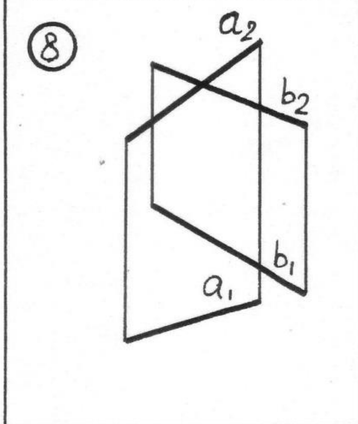
6



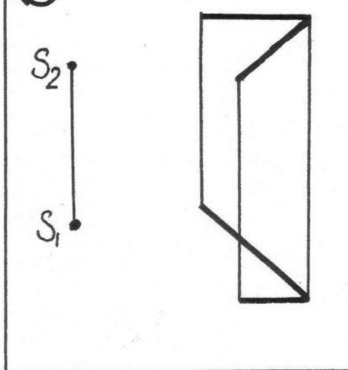
7



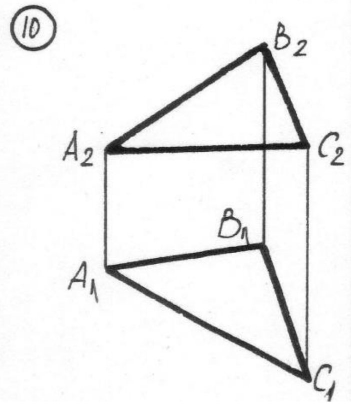
8



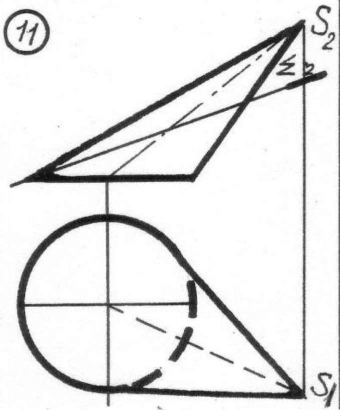
9



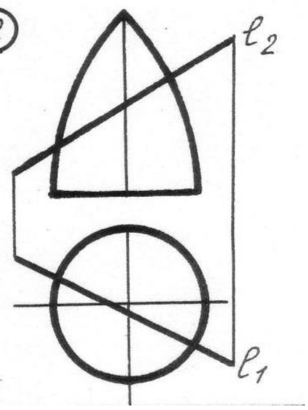
10



11



12



Вариант 11 расчетно-графической работы

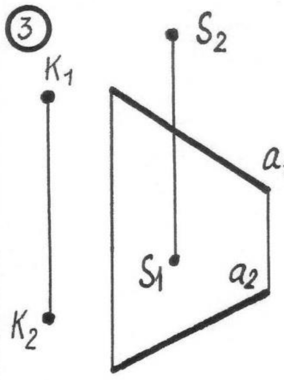
1

	X	Y	Z
A	40	25	-35
B	20	45	70
C	30	55	30
D	-45	0	50
E	55	-15	45
F	50	0	20

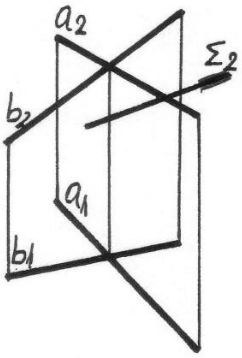
2

	X	Y	Z
A	15	45	20
B	70	-50	50

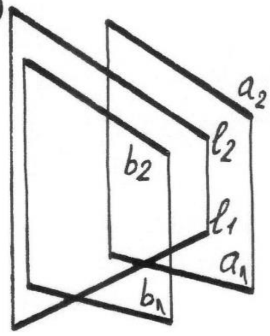
3



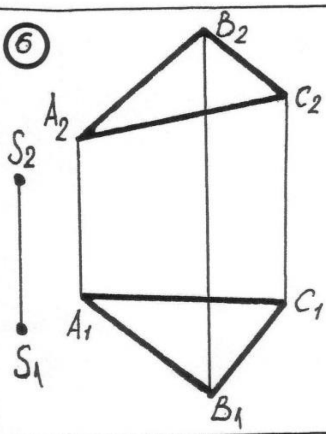
4



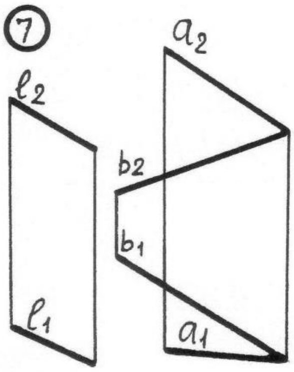
5



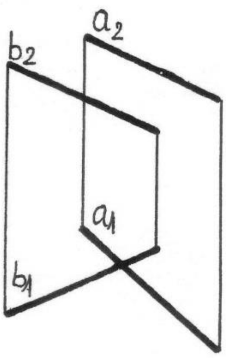
6



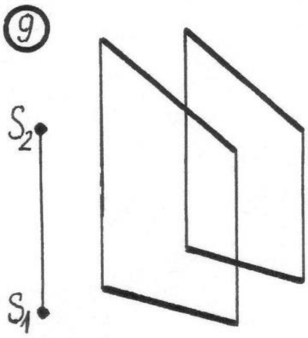
7



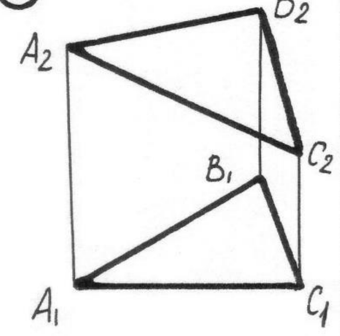
8



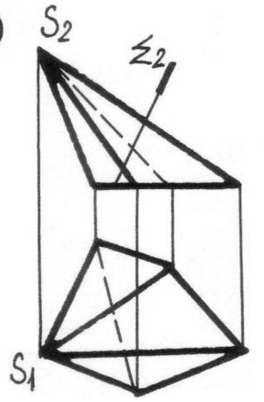
9



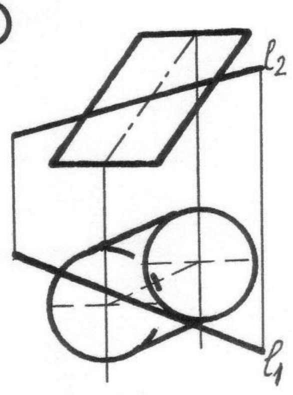
10



11



12



Вариант 12 расчетно-графической работы

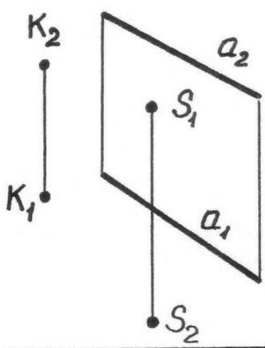
1

	X	Y	Z
A	65	50	0
B	35	-20	45
C	40	-45	0
D	-50	30	-20
E	-45	-60	-15
F	55	-35	20

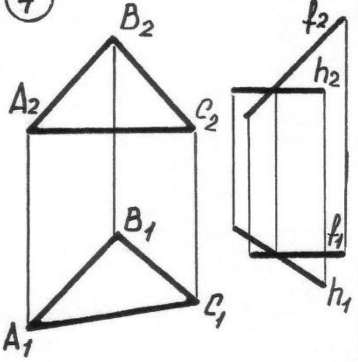
2

	X	Y	Z
A	60	-15	50
B	20	40	30

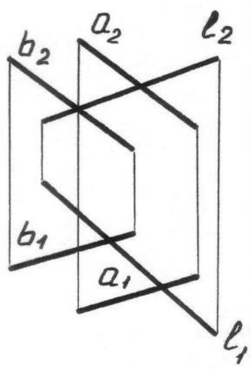
3



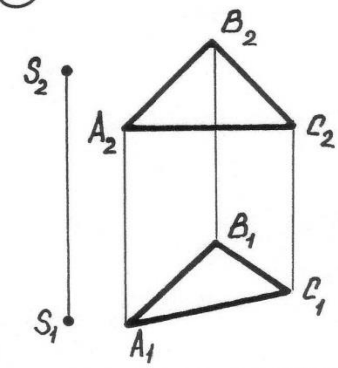
4



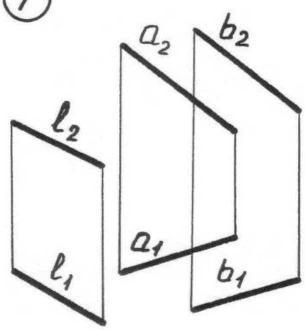
5



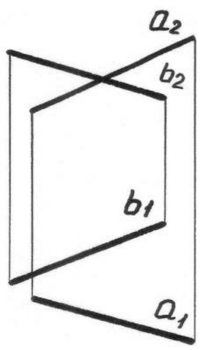
6



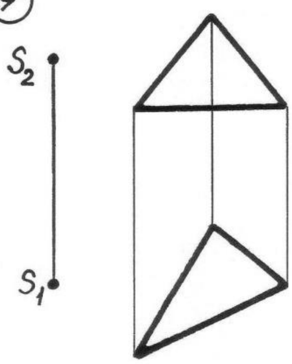
7



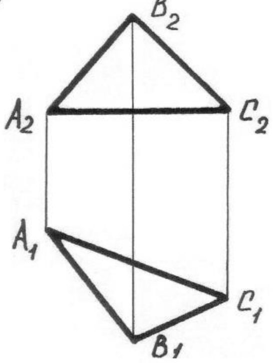
8



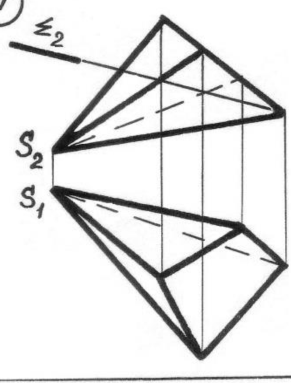
9



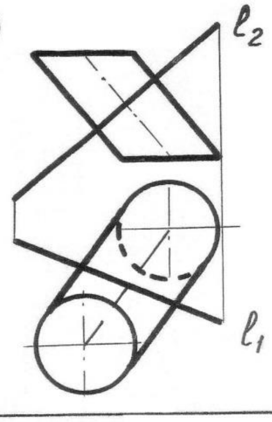
10



11



12



Вариант 13 расчетно-графической работы

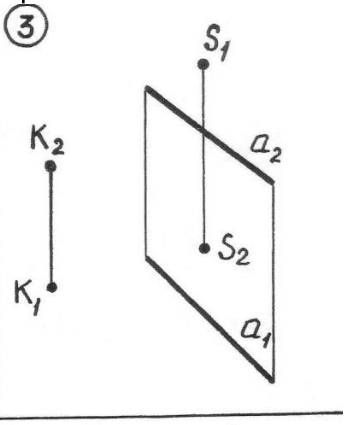
1

	X	Y	Z
A	25	10	-40
B	30	-50	-30
C	20	30	40
D	-30	0	45
E	45	45	0
F	60	30	-15

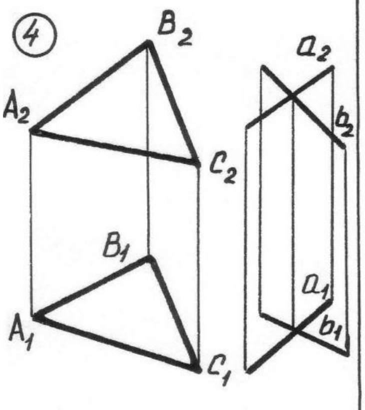
2

	X	Y	Z
A	30	50	40
B	40	-10	50

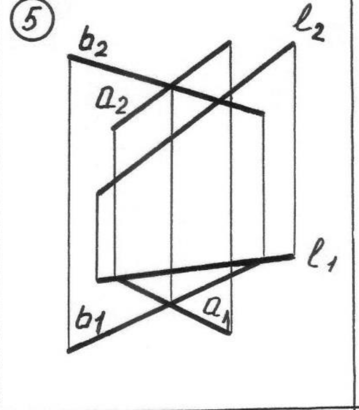
3



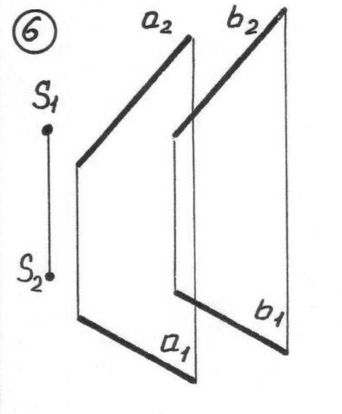
4



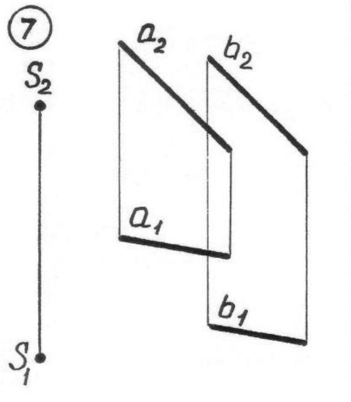
5



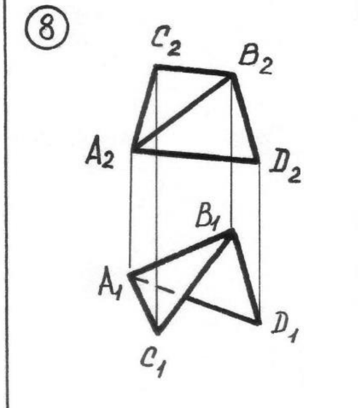
6



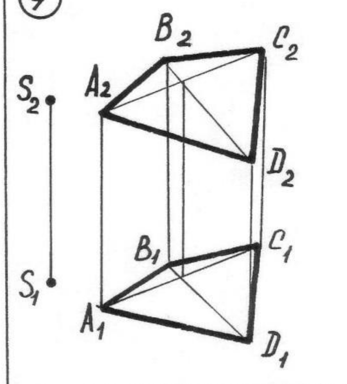
7



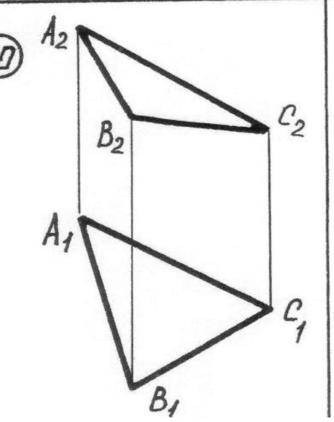
8



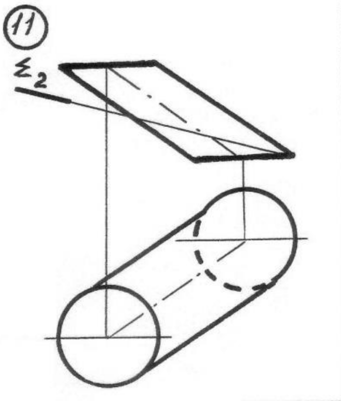
9



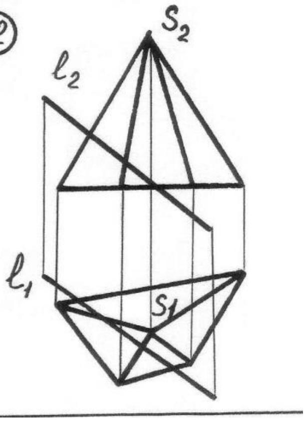
10



11



12



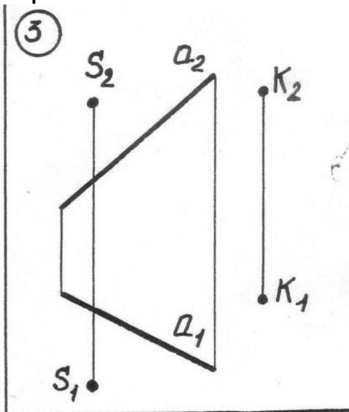
Вариант 14 расчетно-графической работы

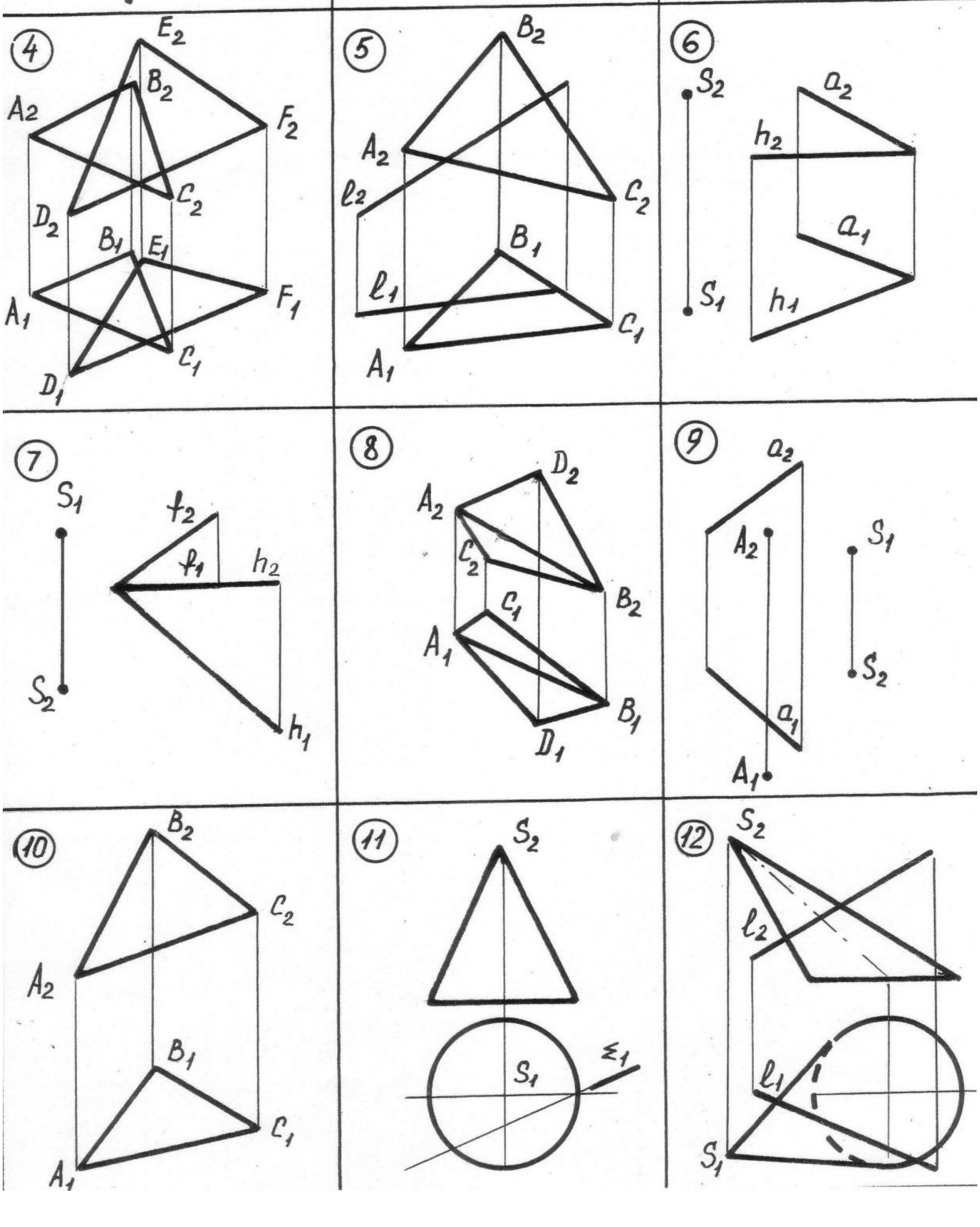
1

	X	Y	Z
A	30	50	30
B	40	40	0
C	40	-30	-45
D	+25	0	-55
E	+20	-20	40
F	-45	35	20

2

	X	Y	Z
A	20	5	25
B	10	30	-15





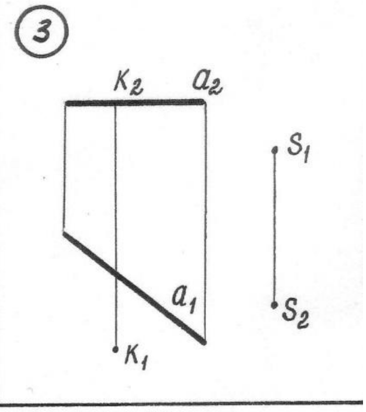
Вариант 15 расчетно-графической работы

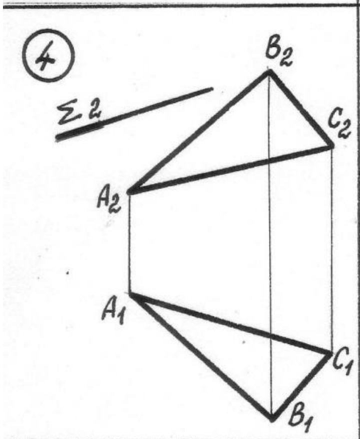
1

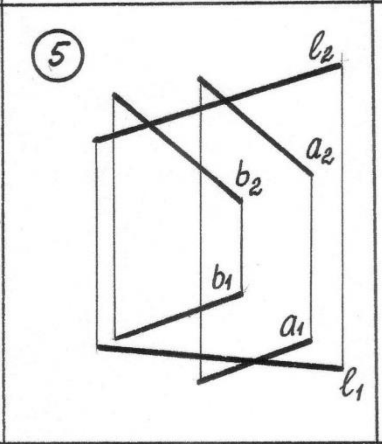
	X	Y	Z
A	10	20	-45
B	25	20	0
C	20	-25	-30
D	-30	-25	50
E	45	0	45
F	40	30	15

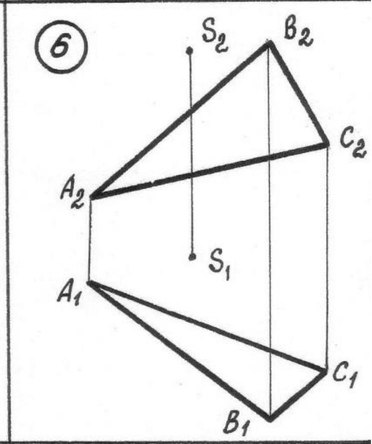
2

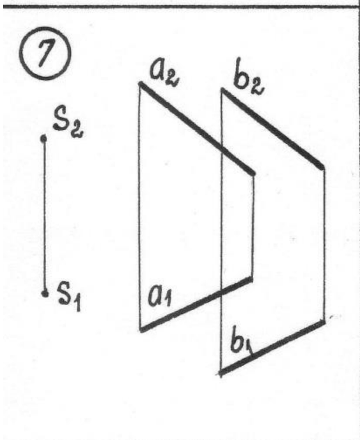
	X	Y	Z
A	20	60	20
B	60	50	40

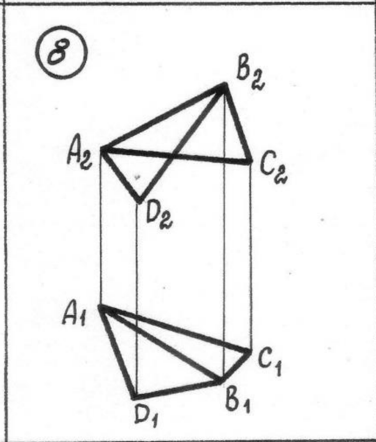


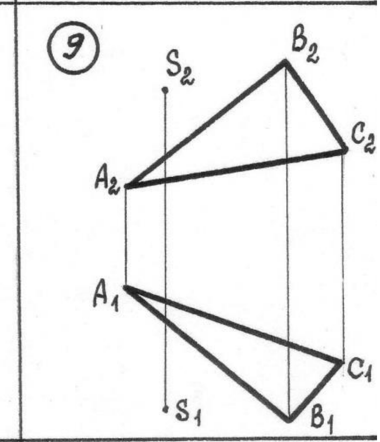


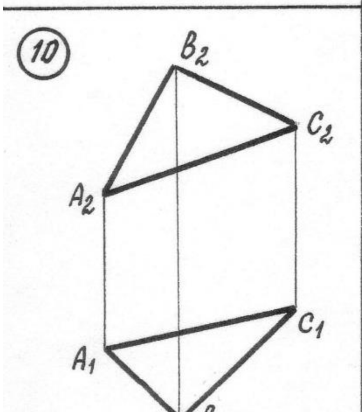


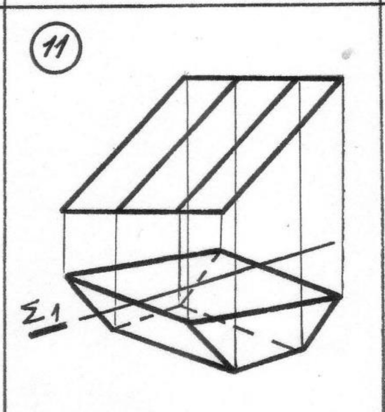


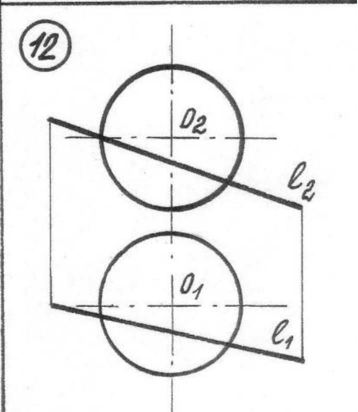












Вариант 16 расчетно-графической работы

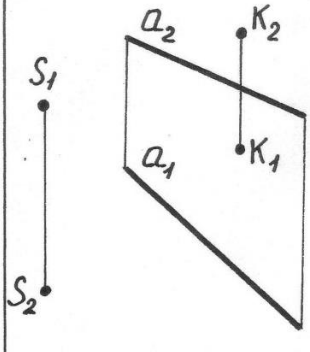
1

	X	Y	Z
A	-50	50	0
B	45	15	-35
C	60	50	20
D	-70	40	30
E	-60	0	35
F	35	25	-15

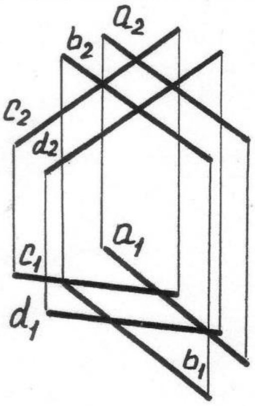
2

	X	Y	Z
A	15	-40	-50
B	55	-30	30

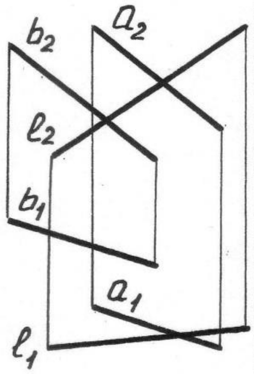
3



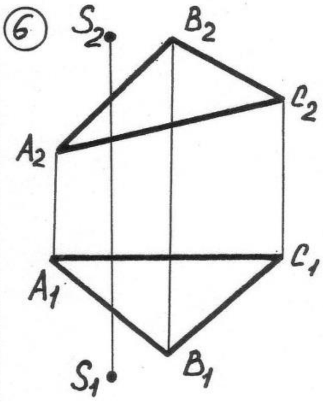
4



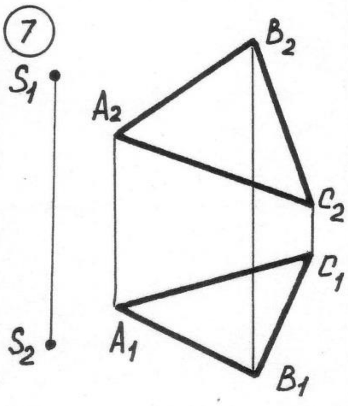
5



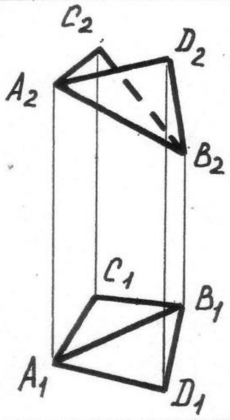
6



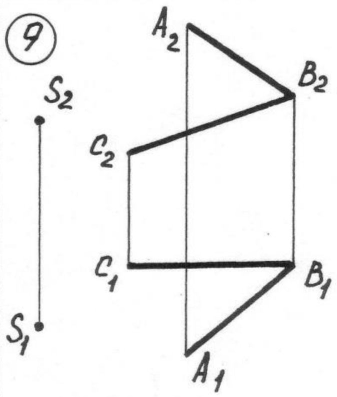
7



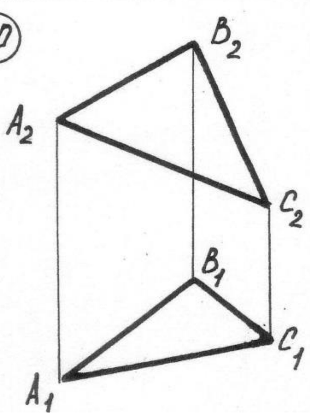
8



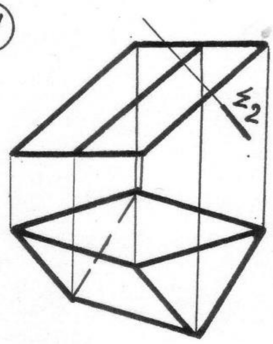
9



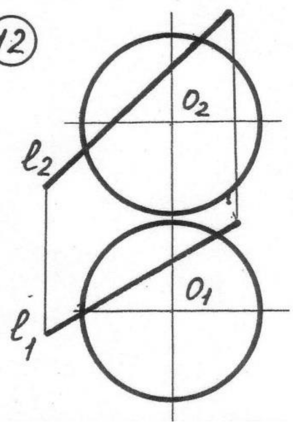
10



11



12



Вариант 17 расчетно-графической работы

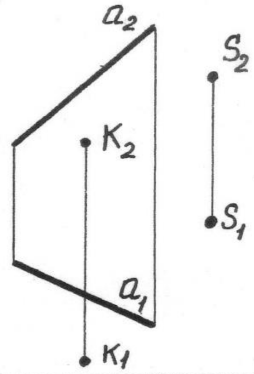
1

	X	Y	Z
A	40	40	0
B	45	-30	40
C	50	25	60
D	-45	-10	50
E	-50	30	-60
F	-35	0	15

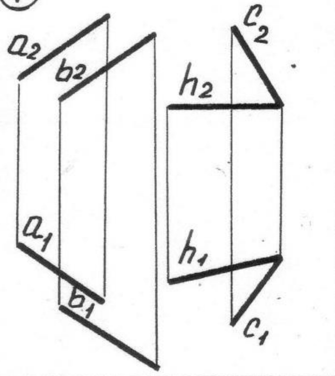
2

	X	Y	Z
A	15	30	60
B	65	0	20

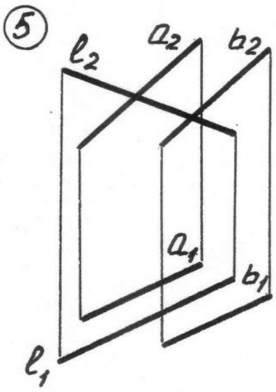
3



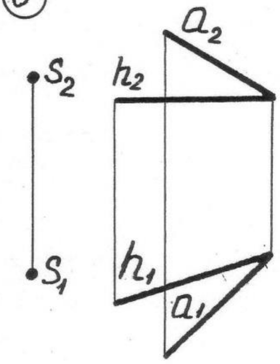
4



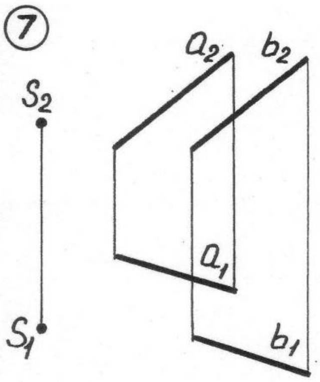
5



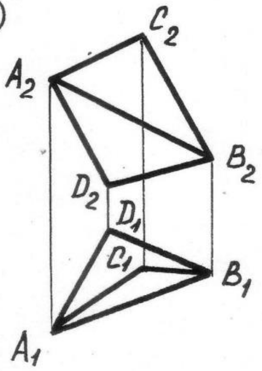
6



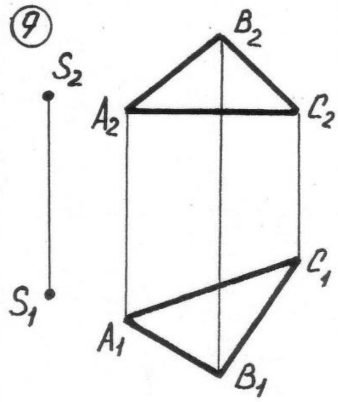
7



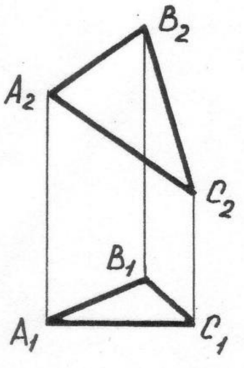
8



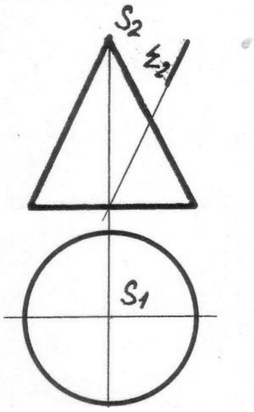
9



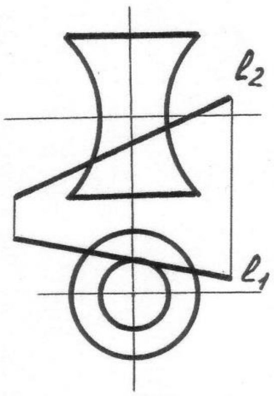
10



11



12



Вариант 18 расчетно-графической работы

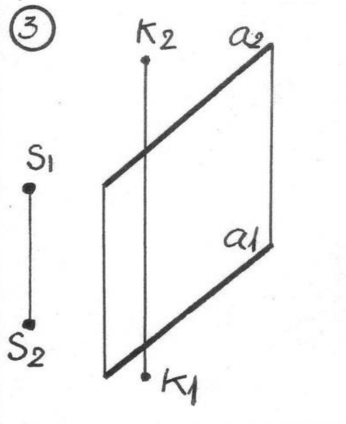
1

	X	Y	Z
A	60	-50	-35
B	40	-10	45
C	30	55	35
D	-40	-50	0
E	-30	35	0
F	45	30	-10

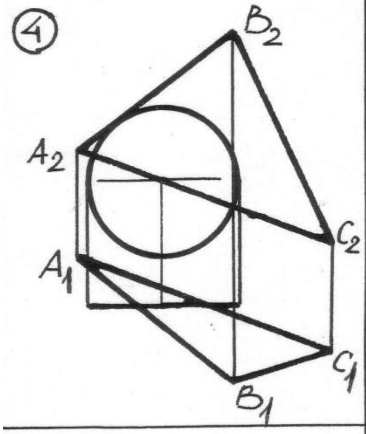
2

	X	Y	Z
A	60	-15	50
B	20	40	30

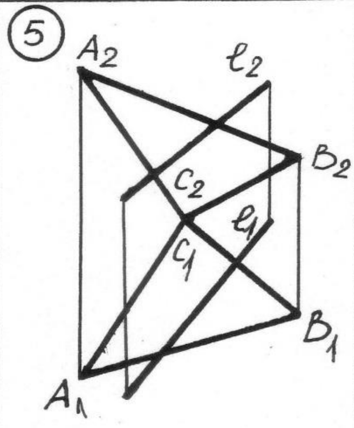
3



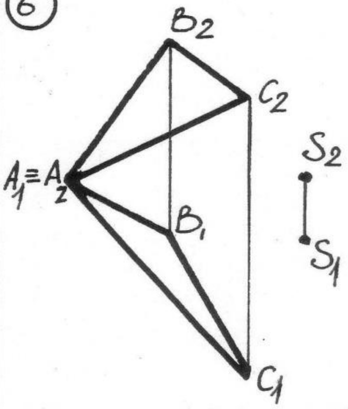
4



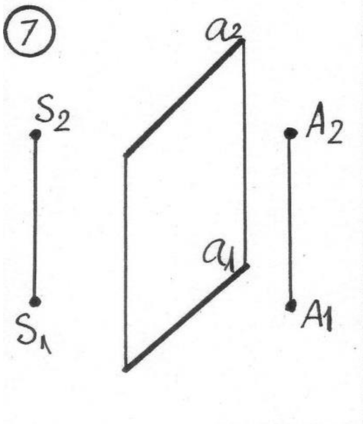
5



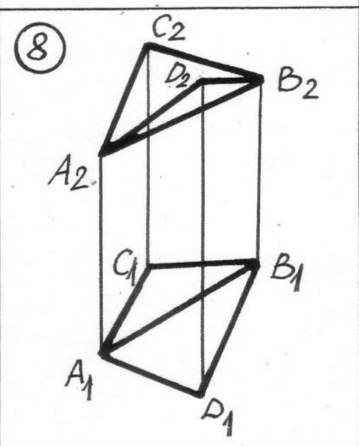
6



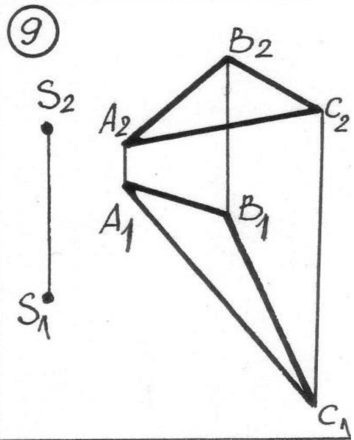
7



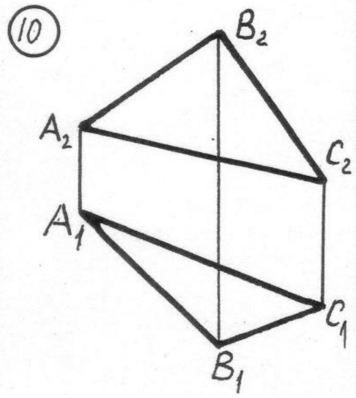
8



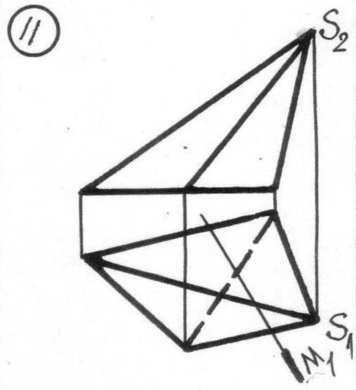
9



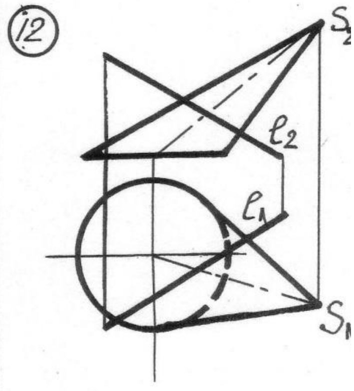
10



11



12



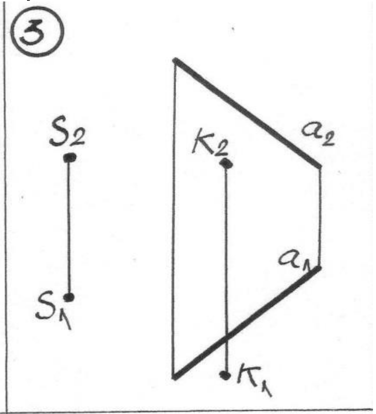
Вариант 19 расчетно-графической работы

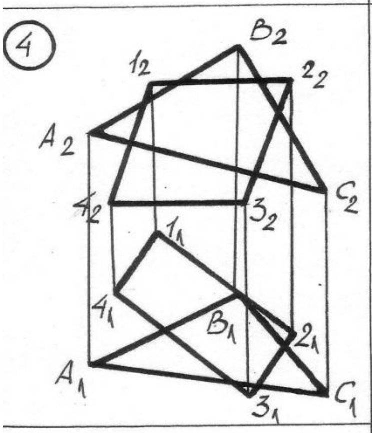
1

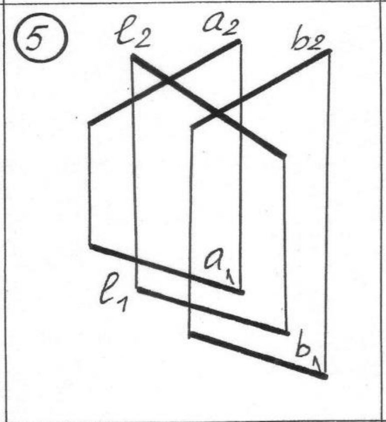
	X	Y	Z
A	25	-10	40
B	30	45	0
C	40	30	60
D	-40	45	-65
E	-50	0	-50
F	-35	0	10

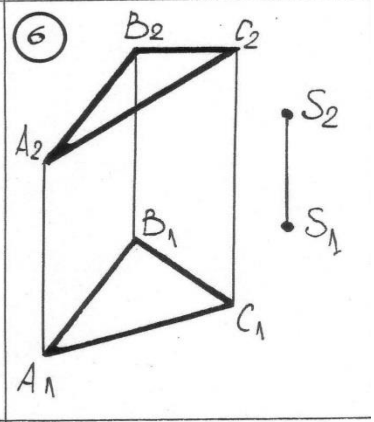
2

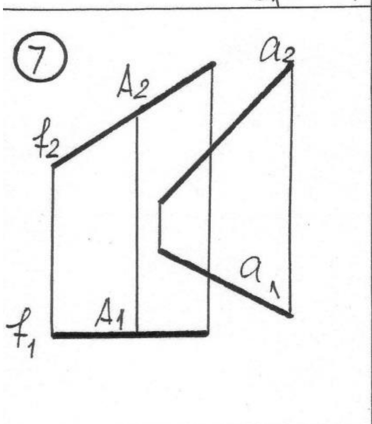
	X	Y	Z
A	20	-40	10
B	25	-30	40

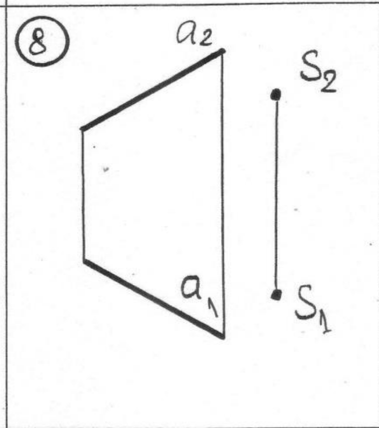


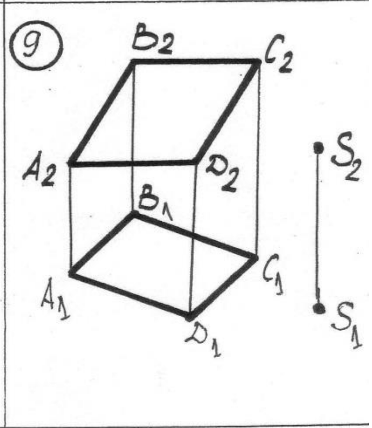


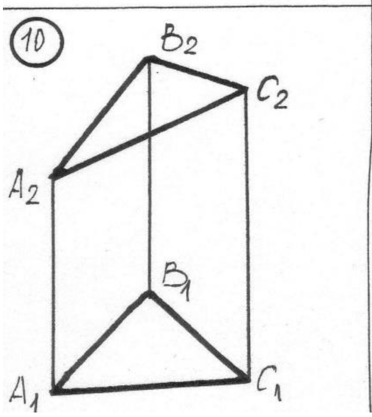


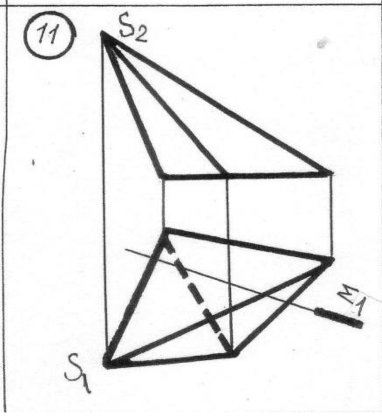


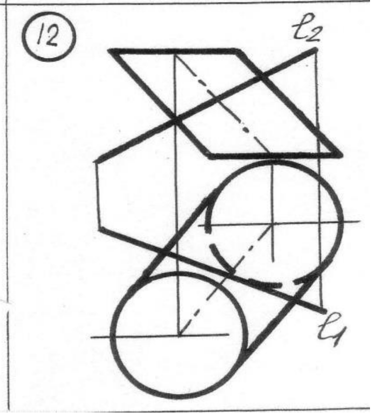












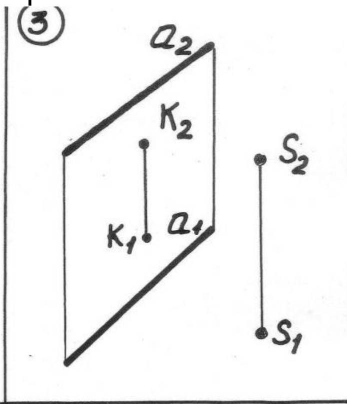
Вариант 20 расчетно-графической работы

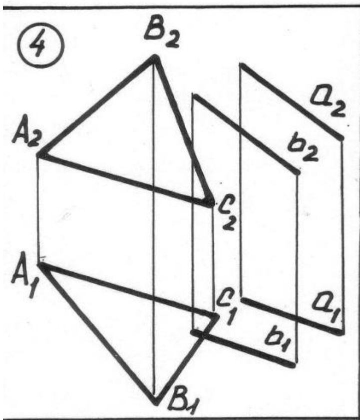
1

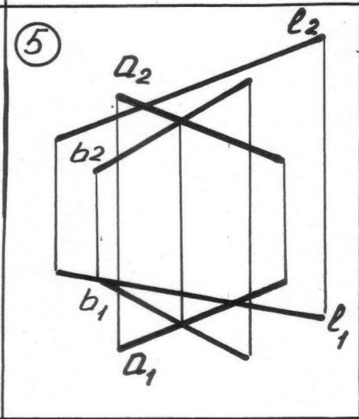
	X	Y	Z
A	40	50	0
B	15	-60	0
C	30	55	30
D	-45	0	40
E	-50	60	30
F	25	50	-10

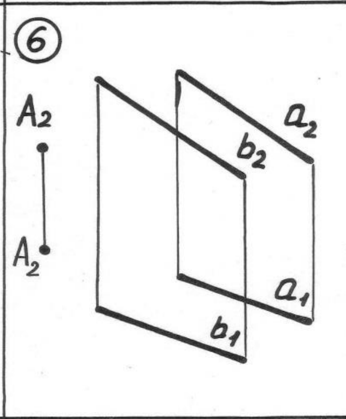
2

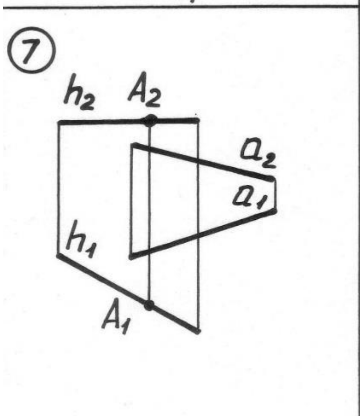
	X	Y	Z
A	35	30	0
B	45	-30	40

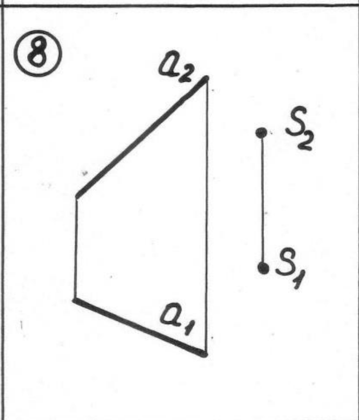


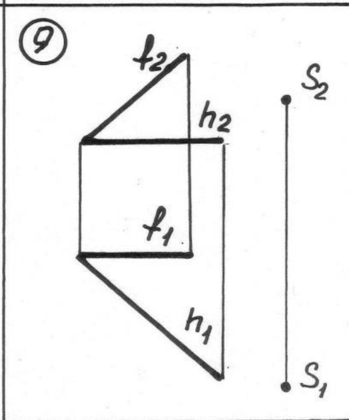


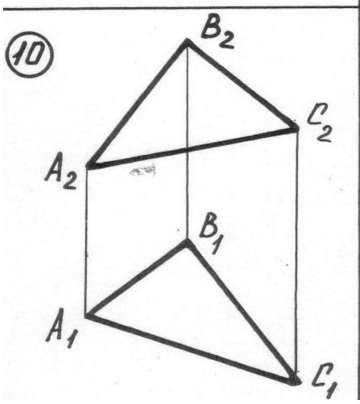


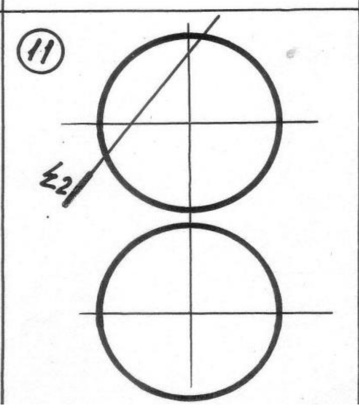


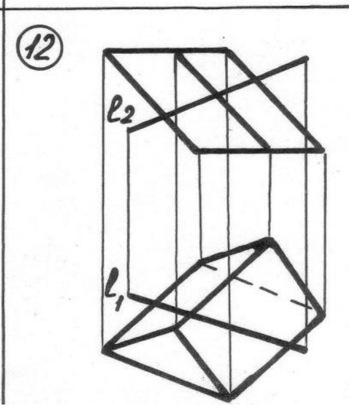












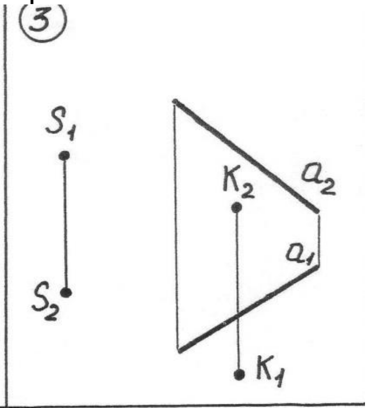
Вариант 21 расчетно-графической работы

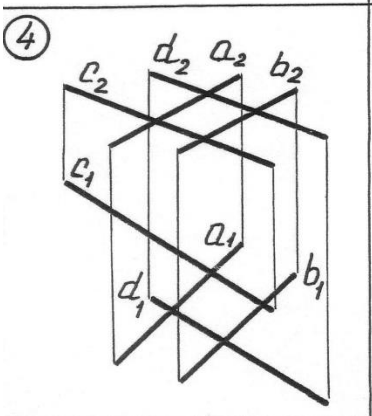
1

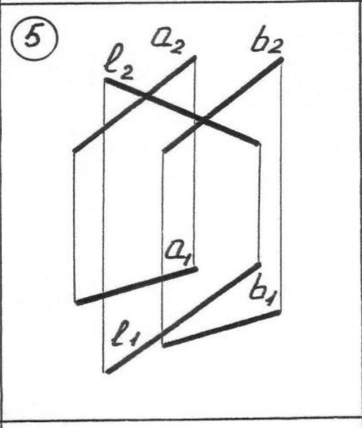
	X	Y	Z
A	40	50	0
B	20	-60	0
C	40	30	20
D	45	0	60
E	40	50	25
F	35	-45	10

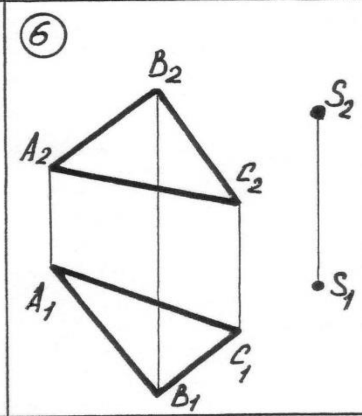
2

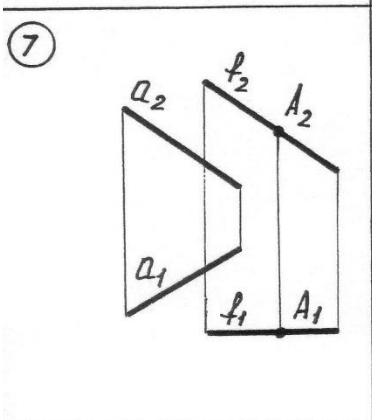
	X	Y	Z
A	40	30	20
B	45	0	60

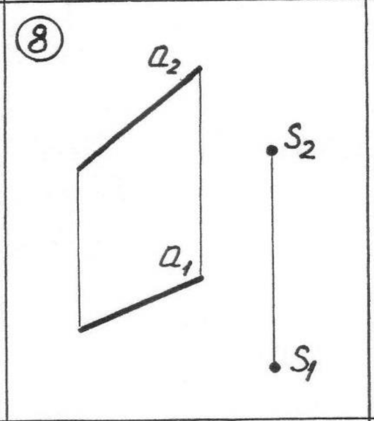


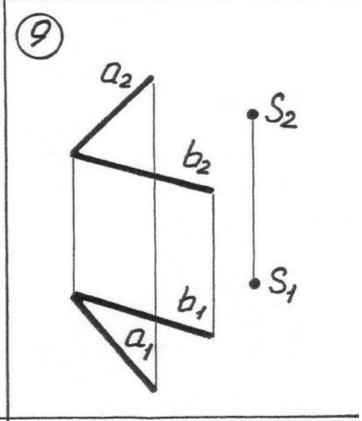


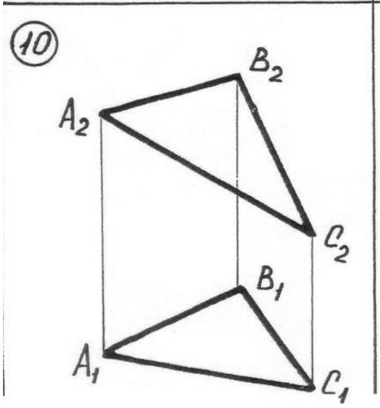


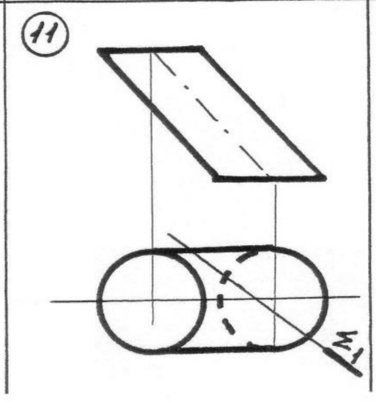


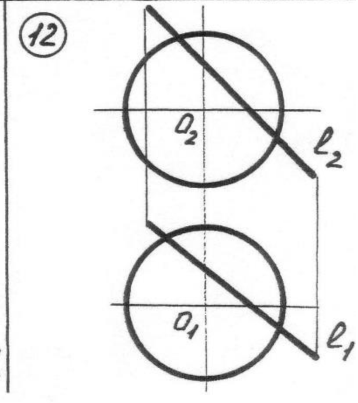












Вариант 22 расчетно-графической работы

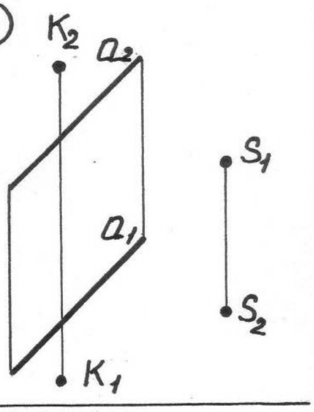
1

	X	Y	Z
A	25	45	0
B	40	60	-20
C	20	-25	60
D	-35	40	0
E	50	40	30
F	20	0	10

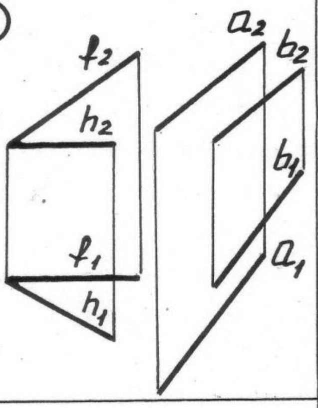
2

	X	Y	Z
A	60	20	-60
B	10	20	45

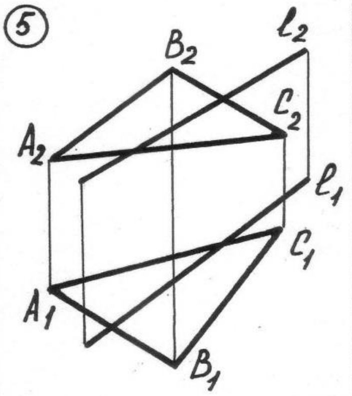
3



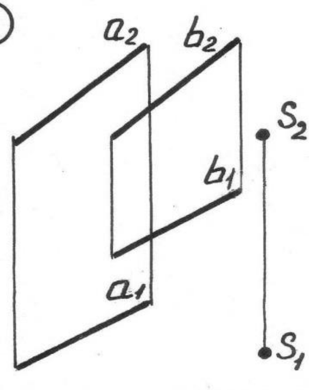
4



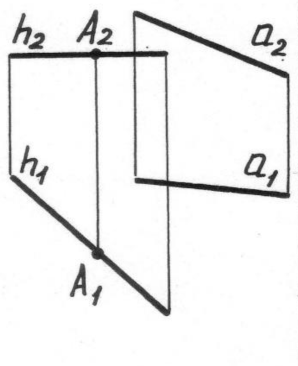
5



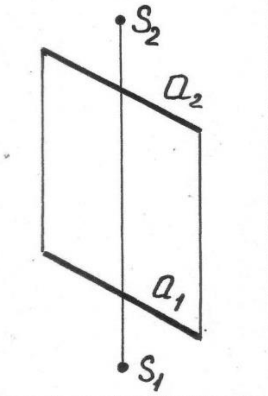
6



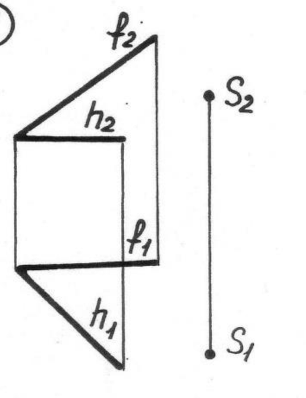
7



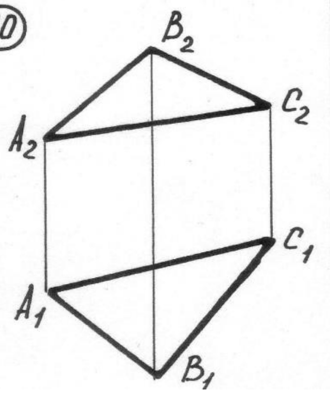
8



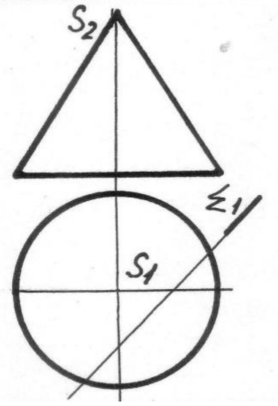
9



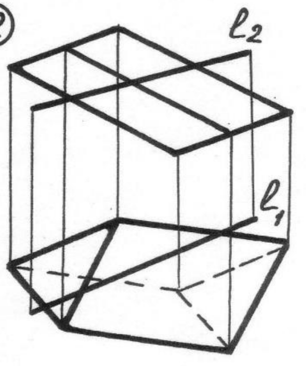
10



11



12



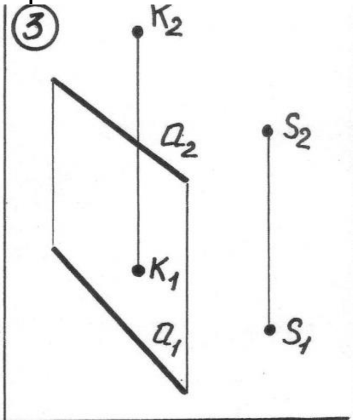
Вариант 23 расчетно-графической работы

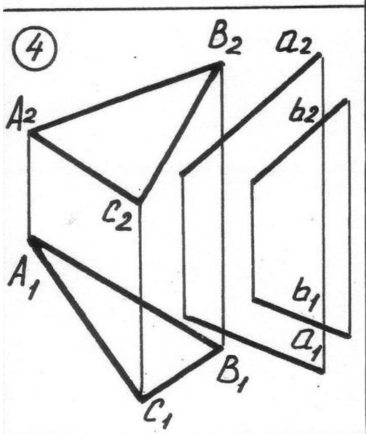
1

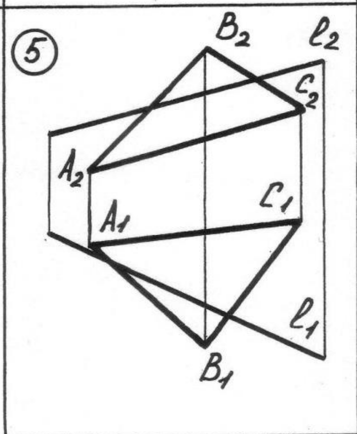
	X	Y	Z
A	30	60	30
B	70	-25	-70
C	40	50	70
D	-50	60	0
E	-40	0	-50
F	-30	10	10

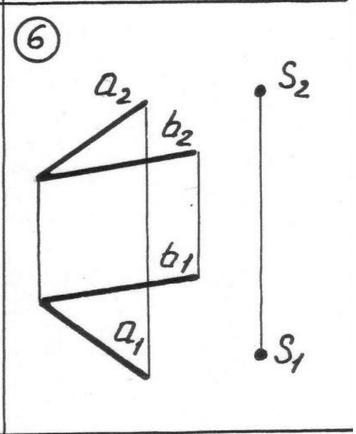
2

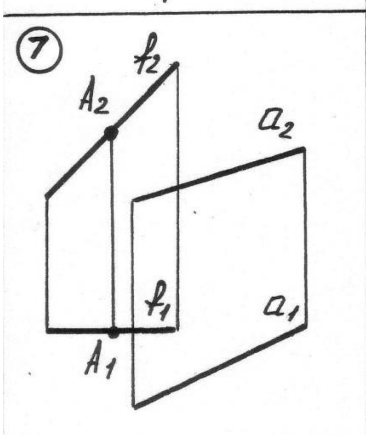
	X	Y	Z
A	20	50	0
B	60	-30	25

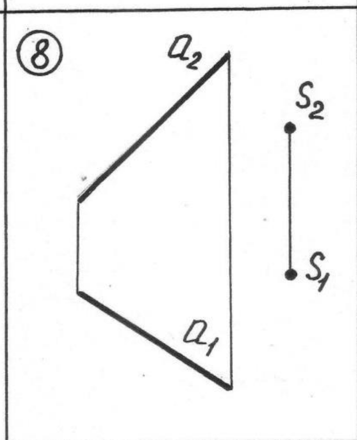


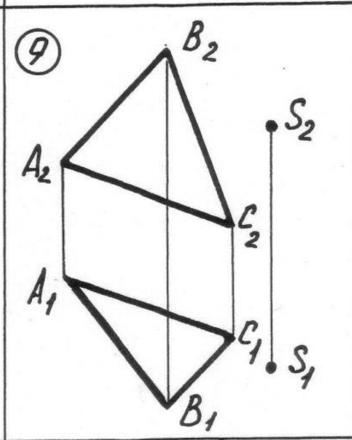


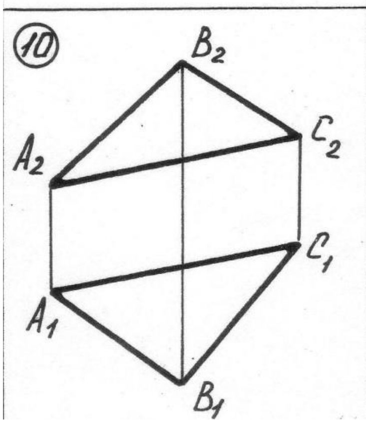


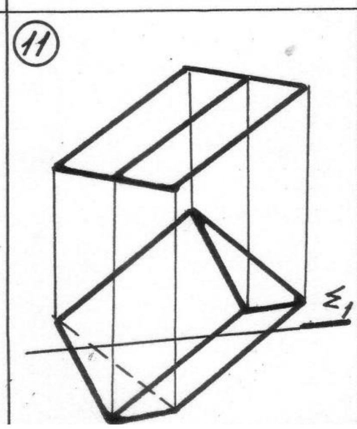


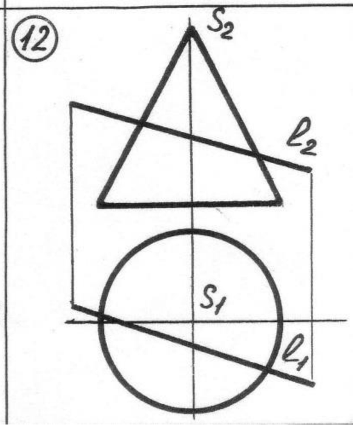












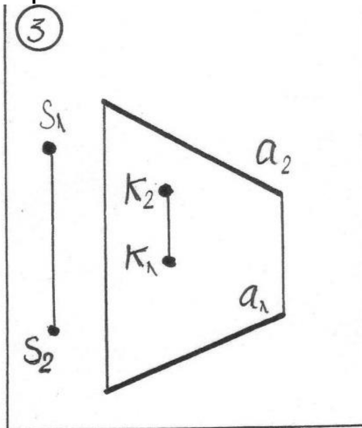
Вариант 24 расчетно-графической работы

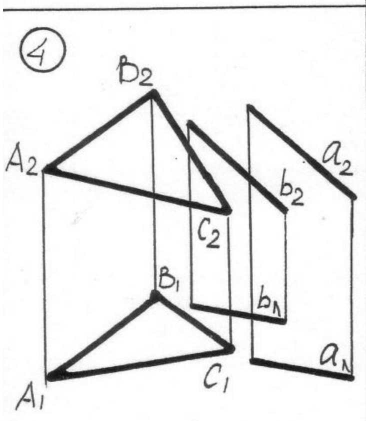
1

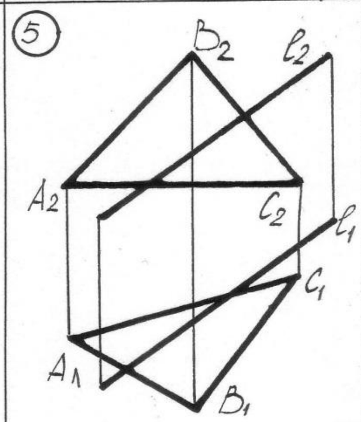
	X	Y	Z
A	50	40	0
B	45	-20	-30
C	30	-50	20
D	-40	15	-45
E	-20	60	0
F	35	40	10

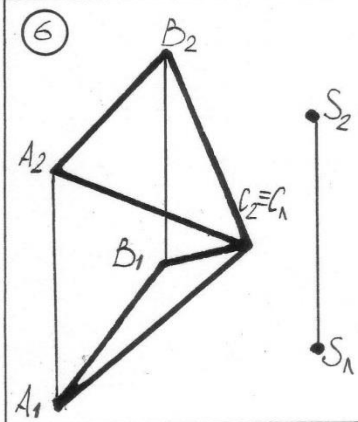
2

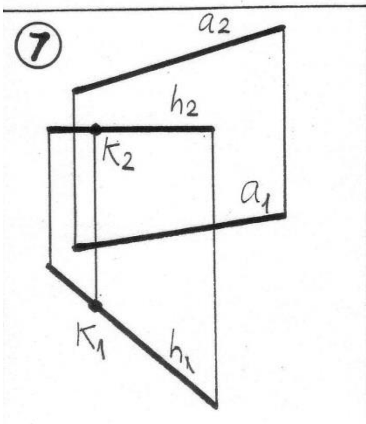
	X	Y	Z
A	10	45	20
B	70	-50	50

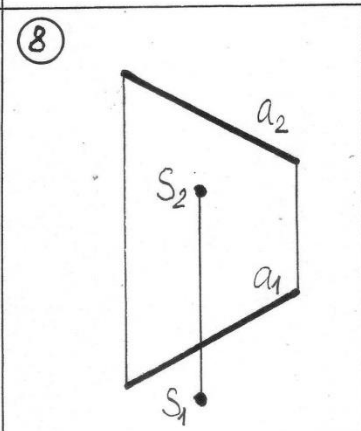


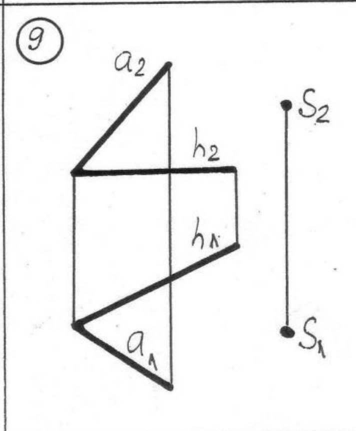


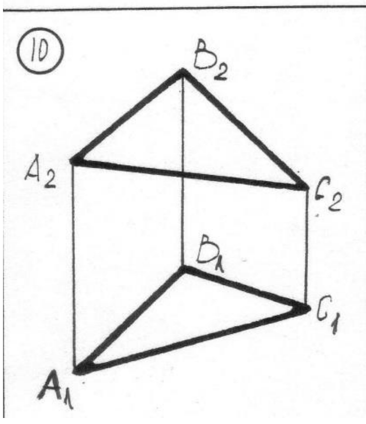


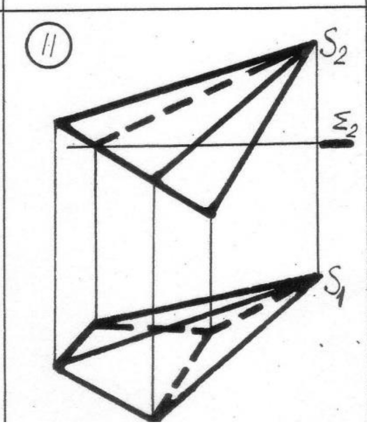


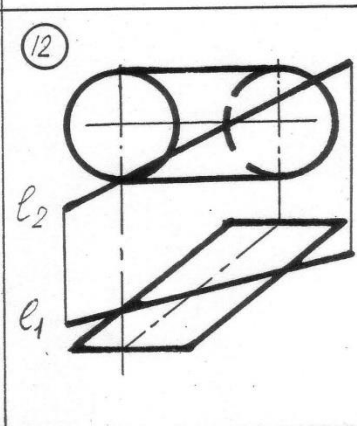












Вариант 25 расчетно-графической работы

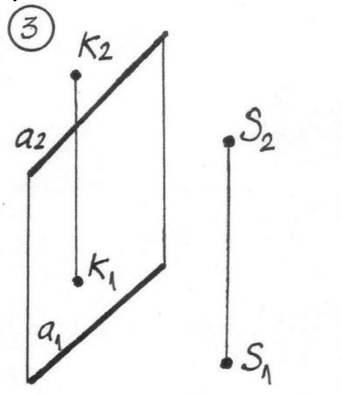
1

	X	Y	Z
A	50	50	0
B	60	-60	0
C	40	-45	-65
D	-50	50	35
E	-60	0	40
F	-45	40	5

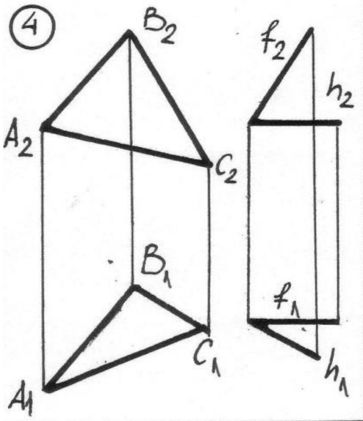
2

	X	Y	Z
A	10	20	30
B	50	50	-40

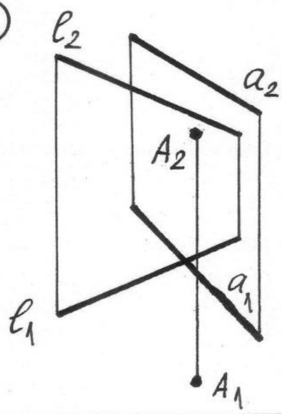
3



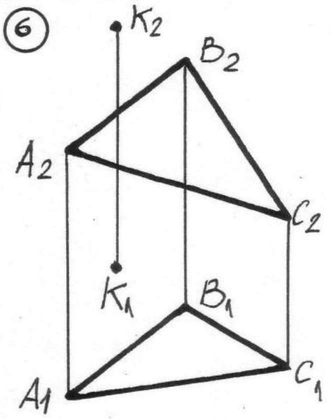
4



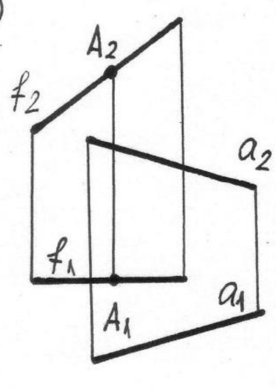
5



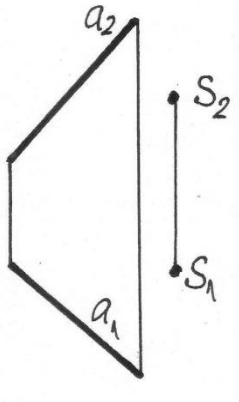
6



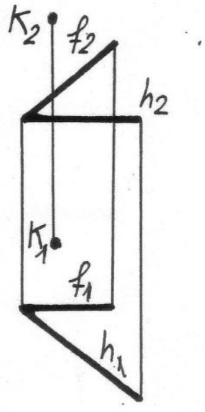
7



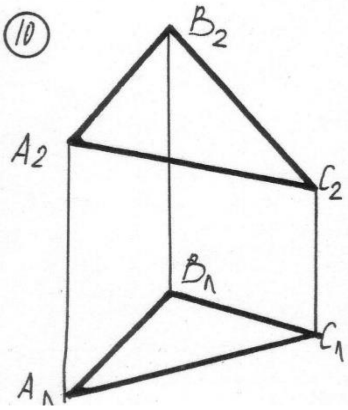
8



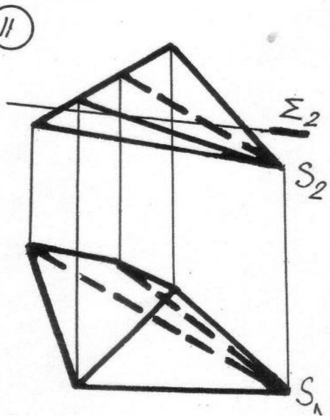
9



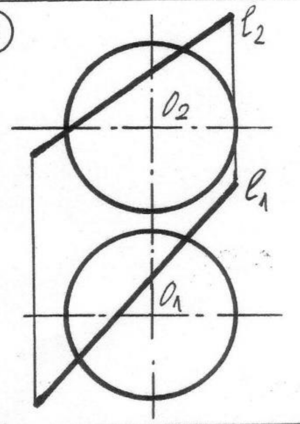
10



11



12



БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. ГОСТ 2.303-68. Линии // В сб.: Единая система конструкторской документации. Общие правила выполнения чертежей. – М. : Изд-во стандартов, 1991. – С. 6–8.

2. Сорокин, Н.П. Инженерная графика: учебник – 3-е изд., стер./ Н.П. Сорокин, Е.Д. Ольшевский, А.Н. Заикина, Е.И. Шибанова.– С-Петербург: Лань, 2008. – 400 с.

3. Гордон, В.О. Курс начертательной геометрии: учеб. пособ. для втузов / В.О. Гордон, М.А. Семенцов-Огиевский; под ред. В.О. Гордона (24-е издание - ред. Ю.Б. Иванов). - 29-е издание, стереотипное - М. : Высшая школа, 2009.

4. Булатова, И.С. Основы теории моделирования геометрических образов на плоскости : учеб. пособ. / И.С. Булатова, В.Ю. Ельцова. – Хабаровск: ДВГУПС, 2011-120 с.

5. Короев, Ю.И. Строительное черчение и рисование: учебник - 3-е издание, стер./ Ю.И. Короев - М.: Кнорус, 2015.

6. Королев, Ю.И. Начертательная геометрия: учеб. для вузов - 2-е изд. / Ю.И. Королев. - С-Петербург: Питер, 2010. – 256 с.

7. Фролов, С.А. Начертательная геометрия : учеб. для вузов / С. А. Фролов. - 3-е изд., перераб. и доп. – М. : Инфра-М, 2011. - 285 с.

8. Чекмарев, А. А. Начертательная геометрия и черчение : учеб. для бакалавров / А. А. Чекмарев. - 4-е изд., испр. и доп. – М. : Юрайт, 2013. - 471 с.