Министерство путей сообщения Российской Федерации
Дальневосточный государственный университет путей сообщения

Кафедра «Высшая математика»

Н.С. Константинов

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА

Методические указания по выполнению контрольных работ № 3, 4
для студентов ИИФО всех специальностей, обучающихся
по ускоренной программе (на базе техникума)

Хабаровск
Издательство ДВГУПС
2002

УДК 51(075.8)
ББК В 1 я73
К 650

Рецензент:
Кандидат физико-математических наук, доцент
кафедры «Высшая математика» Дальневосточного
государственного университет путей сообщения
В.И. Жукова

Константинов Н.С.

К 650 Высшая математика: Методические указания по выполнению контрольных работ № 3, 4 для студентов ИИФО всех специальностей, обучающихся по ускоренной программе (на базе техникума). – Хабаровск: Изд-во ДВГУПС, 2002. – 34 с.: ил.

Методические указания содержат варианты заданий (индивидуальных) контрольных работ № 3, 4 по основным разделам курса. Каждое задание сопровождается решением подобного примера.

Предназначены для студентов ИИФО всех специальностей, обучающихся по ускоренной программе (на базе техникума).

УДК 51(075.8)
ББК В 1 я73

ВВЕДЕНИЕ

Методические указания по выполнению контрольных работ составлены для студентов всех специальностей Института интегрированных форм обучения (ИИФО), занимающихся по ускоренной программе (на базе техникума).

Задания контрольных работ № 3–4 включают основные разделы курса «Высшей математики»: неопределенный и определенный интегралы, вычисление площади плоской фигуры, однородные и неоднородные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами, числовые и степенные ряды, приложения степенных рядов. Студенту предлагается выполнить 12 заданий (8 – в контрольной работе № 3; 4 – в контрольной работе № 4) и ответить на теоретические вопросы.

Каждое задание сопровождается решением подобного примера, что позволит студенту самостоятельно выполнить индивидуальное задание.

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА № 3

Методические указания и задания

РАЗДЕЛ 1. Неопределенный интеграл

Рассмотрим правила интегрирования неопределенных простейших интегралов. Кратко смысл задания сводится к следующему.

При помощи преобразований привести интеграл к табличному, затем, используя таблицу интегралов, найти первообразную:

$$\int f(x)dx = F(x) + C,$$

где $f(x)$ – подынтегральная функция; $F(x)$ – первообразная; C – произвольная постоянная.

Таблица основных интегралов дана ниже, где «a» и «b» – постоянные коэффициенты, причем $a \neq 0$, а «b» – любое.

Таблица интегралов

$1.\int (ax+b)^n dx = \frac{1}{a}\frac{(ax+b)^{n+1}}{n+1} + C;$ $\qquad$ $1`.\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, n \neq 1;$

$2.\int \frac{dx}{ax+b} = \frac{1}{a} ln|ax+b| + C;$ $\qquad$ $2`.\int \frac{dx}{x} = ln + C;$

$3.\int sin(ax+b)dx = -\frac{1}{a} cos(ax+b) + C;$ $\qquad$ $3`.\int sinxdx = -cos(x) + C;$

$4.\int cos(ax+b)dx = \frac{1}{a} sin(ax+b) + C;$ $\qquad$ $4`.\int cosxdx = sinx + C;$

$5.\int tg(ax+b)dx = -\frac{1}{a} ln|cosax+b| + C;$ $\qquad$ $5`.\int tgxdx = -ln|cosx| + C;$

$6.\int ctg(ax+b)dx = \frac{1}{a} ln|sin(ax+b)| + C;$ $\qquad$ $6`.\int ctgxdx = ln|sinx| + C;$

$7.\int a^x dx = \frac{a^x}{lna} + C;$ $\qquad$ $7`.\int e^{\alpha x} dx = \frac{e^x}{\alpha} + C;$

$8.\int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a} arctg\frac{x}{a} + C;$ $\qquad$ $8`.\int \frac{dx}{x^2+1} = arctgx + C;$

$9.\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = arcsin\frac{x}{a} + C;$ $\qquad$ $9`.\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = arcsinx + C;$

$10.\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a} ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C;$ $\qquad$ $10`.\int \frac{dx}{x^2-1} = \frac{1}{2} ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right| + C;$

$$11.\int\frac{dx}{\cos^2(ax+b)}=\frac{1}{a}tg(ax+b)+C;\qquad 11`.\int\frac{dx}{\cos^2 x}=tgx+C;$$

$$12.\int\frac{dx}{\sin^2(ax+b)}=-\frac{1}{a}ctg(ax+b)+C.\quad 12`.\int\frac{dx}{\sin^2 x}=-ctgx+C.$$

1.1. Интегрирование степенных функций

Наиболее распространенным является интеграл от степенной функции (таблица интегралов, с. 4). Для вычисления этих интегралов необходимо знать следующие правила действий со степенями:

$$\frac{x^m}{x^n}=x^{m-n};\quad x^m x^n=x^{m+n};\quad \sqrt[n]{x^m}=x^{\frac{m}{n}},$$

где m,n – любое.

Учитывая эти правила, рассмотрим вычисление интеграла от степенной функции:

$$\int\left(\frac{3}{8}x^2-5x+\frac{1}{3\sqrt[4]{x}}+\frac{\sqrt[4]{x^3}-x\sqrt[3]{x}+2}{\sqrt{x}}\right)dx=$$

$$=\int\left(\frac{3}{8}x^2-5x+\frac{1}{3x^{\frac{1}{4}}}+\frac{x^{\frac{3}{4}}-xx^{\frac{3}{4}}+2}{x^{\frac{1}{2}}}\right)dx=$$

$$=\int\left(\frac{3}{8}x^2-5x+\frac{x^{-\frac{1}{4}}}{3}+x^{\frac{3}{4}-\frac{1}{2}}-x^{1+\frac{1}{3}-\frac{1}{2}}+2x^{-\frac{1}{2}}\right)dx=$$

$$=\frac{3}{8}\frac{x^3}{3}-5\frac{x^2}{2}+\frac{1}{3}\cdot\frac{x^{-\frac{1}{4}+1}}{-\frac{1}{4}+1}+\frac{x^{\frac{1}{4}+1}}{\frac{1}{4}+1}-\frac{x^{\frac{7}{6}+1}}{\frac{7}{6}+1}+2\frac{x^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1}+C=$$

$$=\frac{x^3}{8}-\frac{5}{2}x^2+\frac{4}{9}x^{\frac{3}{4}}+\frac{4}{5}x^{\frac{5}{4}}-\frac{6}{13}x^{\frac{13}{6}}+4x^{\frac{1}{2}}+C=$$

$$=\frac{1}{8}x^3-\frac{5}{2}x^2+\frac{4}{9}\sqrt[4]{x^3}-\frac{4}{5}x\sqrt[4]{x}-\frac{6}{13}x^2\sqrt[6]{x}+4\sqrt{x}+C.$$

Задание

1. $\int(\frac{2}{5}x^2-\frac{1}{3\sqrt[3]{x}}+2-\frac{x\sqrt[3]{x}-4\sqrt{x}}{\sqrt[4]{x^3}})dx;$

2. $\int(\frac{3}{4}x-\frac{6}{\sqrt{x}}+\frac{1}{2}+\frac{3-x^2\sqrt[5]{x}}{\sqrt[3]{x^2}})dx;$

3. $\int(6x^3-\frac{3}{\sqrt[3]{x^2}}+7-\frac{4x+3x^2\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x^2}})dx;$

4. $\int(\frac{5}{7}x^2-\frac{2}{\sqrt[4]{x}}+\frac{1}{3}+\frac{3x-2\sqrt[3]{x^2}}{4\sqrt[4]{x}})dx;$

5. $\int(\frac{2}{3}x^3-\frac{3}{\sqrt[4]{x}}+5-\frac{5x\sqrt[3]{x^2}-4x\sqrt[5]{x^2}}{\sqrt[3]{x}})dx;$

6. $\int(\frac{1}{6}x^4-\frac{4}{7\sqrt[3]{x^2}}+2-\frac{3\sqrt{x}+2x\sqrt[4]{x}}{\sqrt[3]{x^2}})dx;$

7. $\int(2x^2-\frac{7}{3\sqrt[3]{x}}-\frac{1}{2}+\frac{4\sqrt[3]{x}-3x\sqrt[4]{x^3}}{\sqrt[4]{x^3}})dx;$

8. $\int(5x^3-\frac{1}{4\sqrt[4]{x}}+2-\frac{3\sqrt[4]{x}+4\sqrt{x}}{\sqrt[4]{x^3}})dx;$

9. $\int(3x^2-\frac{1}{2\sqrt[3]{x^2}}-\frac{1}{4}+\frac{5x\sqrt[4]{x^3}-x\sqrt[3]{x}}{4\sqrt[4]{x^3}})dx;$

10. $\int(4x^2-\frac{3}{4\sqrt[4]{x^3}}+\frac{2}{3}-\frac{4\sqrt[3]{x^4}+x\sqrt{x}}{\sqrt[4]{x^3}})dx.$

Примечание. 1, 2, 3 и т.д. – номер варианта.

1.2. Интегрирование заменой переменной

Этот метод интегрирования основан на введении в подынтегральную функцию новой переменной величины и ее дифференциала, причем замену переменной необходимо подбирать таким образом, чтобы в исходном интеграле присутствовал дифференциал новой переменной в явном виде. Рассмотрим несколько примеров.

Пример 1

$$\int \sqrt[3]{cos(x+1)}\, sin\,xdx = \left| \begin{matrix} cos(x)+1=t \\ dt=-sin(x)dx \\ sin\,xdx=-dt \end{matrix} \right| = \int \sqrt[3]{t}(-dt) = -\int t^{\frac{1}{3}}\,dt = \frac{t^{\frac{4}{3}}}{\frac{4}{3}} + C =$$

$$= \frac{3}{4}\sqrt[3]{(cos\,x+1)^4} + C.$$

Пример 2

$$\int \frac{e^x}{1+e^{2x}}\,dx = \left| \begin{matrix} e^x = t \\ dt = e^x dx \end{matrix} \right| = \int \frac{dt}{1+t^2} = arctgt + C = arctge^x + C.$$

Пример 3

$$\int \frac{dx}{x\,ln\,x} = \left| \begin{matrix} ln\,x = t \\ dt = \dfrac{dx}{x} \end{matrix} \right| = \int \frac{dt}{t} = ln\,t + C = ln\,ln\,x + C.$$

Замечание. После введения новой переменной и вычисления интеграла необходимо вернуться к исходной переменной.

Задание

1. $a)\ \int \frac{cos\,x}{\sqrt[3]{1+sin\,x}}\,dx;$ $\quad$ $б)\ \int \sqrt[3]{x^2+2}\,xdx;$
2. $a)\ \int e^x\, sin\,e^x dx;$ $\quad$ $б)\ \int \frac{x^2}{\sqrt[4]{x^3+3}}\,dx;$
3. $a)\ \int \frac{ln\,x-3}{x}\,dx;$ $\quad$ $б)\ \int 2x^3\,cos\,x^4 dx;$
4. $a)\ \int \sqrt[3]{tgx}\,\frac{dx}{cos^2\,x};$ $\quad$ $б)\ \int xe^{1+x^2}\,dx;$

5. а) $\int \frac{arctg^3 x}{1+x^2}dx;$ б) $\int x^2 tgx^3 dx;$

6. а) $\int (1+\cos^2 x)\sin 2xdx;$ б) $\int \frac{e^x}{1+e^{2x}}dx;$

7. а) $\int \frac{\sqrt{\ln x-3}}{x}dx;$ б) $\int x^3\sqrt[5]{5x^4+1}dx;$

8. а) $\int \frac{e^x}{\cos^2 e^x}dx;$ б) $\int \frac{xdx}{\sqrt{x^2+1}}dx;$

9. а) $\int \frac{\arcsin^3 x}{\sqrt{1-x^2}}dx;$ б) $\int (x^3+4)^{10}x^2dx;$

10. а) $\int \frac{\ln^2 x-5\ln x}{x}dx;$ б) $\int \sqrt[4]{x^4+4x}(x^3+1)dx.$

1.3. Интегрирование по частям

Формула интегрирования по частям имеет вид $\int UdV = U\cdot V-\int VdU$, т.е. исходный интеграл $\int f(x)dx$ мы должны, введя новые функции U и V, представить в виде $\int UdV$, а затем построить правую часть формулы. По такой формуле вычисляются интегралы вида: $\int x^n \sin xdx;$ $\int x^n e^x dx;$ $\int x^n \cos xdx;$ причем вместо x может быть линейная подстановка $(ax+b)$.

В этом случае степенная функция x^n обозначается функцией U, а dV – все остальные множители. Причем формулу интегрирования по частям можно применять многократно, например, в вышеуказанных интегралах формулу необходимо применить «n» раз.

Пример 1

$$\int x\cos 2xdx = \left| \begin{array}{l} x=U;\, dx=dU \\ \cos 2xdx=dV \\ V=\frac{1}{2}\sin 2x \end{array} \right| = \frac{x}{2}\sin 2x-\frac{1}{2}\int \sin 2xdx = \frac{x}{2}\sin 2x+\frac{1}{4}\cos 2x+C.$$

Кроме указанных интегралов по этой же формуле вычисляются интегралы вида: $\int \ln xdx;$ $\int arctgxdx;$ $\int \arcsin xdx$ и т.п.

Пример 2

$$\int arctgxdx = \left| \begin{matrix} arctgx = U; \quad dU = \dfrac{dx}{1+x^2} \\ dV = dx; \quad V = x \end{matrix} \right| = xarctgx - \int \frac{xdx}{1+x^2} =$$

$$= xarctgx - \left| \begin{matrix} 1+x^2 = t; \\ dt = 2xdx; \\ xdx = \dfrac{1}{2}dt \end{matrix} \right| - \frac{1}{2}\int \frac{dt}{t} = xarctgx - \frac{1}{2} ln\, t + C = xarctgx - \frac{1}{2} ln\left|1+x^2\right| + C.$$

Пример 3

$$\int ln5xdx = \left| \begin{matrix} ln5x = U; \quad dU = \dfrac{dx}{x}; \\ dx = dV; \quad x = V \end{matrix} \right| = xln5x - \int \frac{xdx}{x} =$$

$$= xln5x - \int dx = xln5x - x + C.$$

Задание

1. $\int 2x\cos 3x + ln\, xdx;$
2. $\int (5x-1)\sin 2x + arctgxdx;$
3. $\int (1-x)e^{3x} + ln\,3xdx;$
4. $\int (x+3)\sin\dfrac{x}{2} + arcsin\, xdx;$
5. $\int (x-2)e^{-2x}dx + ln(x+1)dx;$
6. $\int (x+1)\cos 4x + arctg\dfrac{x}{2}dx;$
7. $\int (x-3)\sin 3xdx + ln(2+x)dx;$
8. $\int (4-x)e^{-x}dx + arctg(2x+1)dx;$
9. $\int (2x-3)\cos\dfrac{x}{2} + arcsin\,2xdx;$
10. $\int (1-3x)e^{4x} + ln(x+4)dx.$

1.4. Интегрирование рациональных дробей

Рациональной дробью называется выражение вида

$$\frac{Qm(x)}{Rn(x)},$$

где $Qm(x)$ и $Rn(x)$ – рациональные многочлены степени m и n.

Если $m \geq n$, то дробь называется неправильной, если $m < n$, то дробь – правильная.

Интегрируются только правильные дроби, поэтому, если под интегралом дробь неправильная, то ее необходимо представить в виде суммы целой части и правильной дроби, а затем выполнять интегрирование.

Пример 1

$$\int \frac{x^3+1}{x^2-3x+2}dx = \left| \begin{array}{l} \textit{Под интегралом неправильная дробь.} \\ \textit{Выделим целую часть:} \\ \begin{array}{rl} x^3+1 & \Big| \ \dfrac{x^2-3x+2}{x+3-\textit{целая часть}} \\ -\ \underline{x^3-3x^2+2x} & \\ 3x^2-2x & \\ -\ \underline{3x^2-9x+6} & \\ 7x+6-\textit{остаток} & \end{array} \end{array} \right| =$$

$$= \int \left(x+3+\frac{7x+6}{x^2-3x+2} \right)dx.$$

Рассмотрим теперь интегрирование правильной дроби. Для этого ее надо представить в виде суммы простейших дробей:

$$\frac{7x+6}{x^2-3x+2} = \frac{7x+6}{(x-1)(x-2)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-2} = \frac{Ax-2A+Bx-B}{(x-1)(x-2)},$$

где A и B – неопределенные коэффициенты, так как $\dfrac{7x+6}{(x-1)(x+2)} =$

$= \dfrac{(A+B)x+(-2A-B)}{(x-1)(x-2)}$, то для определения коэффициентов A и B получаем систему:

$$\begin{cases} A+B=7 \\ -2A-B=6 \end{cases} \Rightarrow -A=13; B=20.$$

Таким образом, правильная дробь представляется суммой двух простейших дробей:

$$\frac{7x+6}{(x-1)(x-2)} = \frac{-13}{x-1} + \frac{20}{x-2}.$$

Выполним теперь интегрирование исходного интеграла:

$$\int \frac{x^3+1}{x^2-3x+2}dx = \int (x+3+\frac{7x+6}{x^2-3x+2})dx = \int (x+3)dx + \int \frac{7x+6}{(x-1)(x-2)}dx =$$

$$= \frac{x^2}{2} + 3x + \int \frac{-13}{x-1}dx + \int \frac{20}{x-2}dx = \frac{x^2}{2} + 3x - 13\,ln|x-1| + 20\,ln|x-2| + C.$$

Интегрирование квадратного трехчлена выплним путем выделения полного квадрата и приведения исходного интеграла к табличному.

Пример 2

$$\int \frac{dx}{x^2+2x+5} = \int \frac{dx}{(x+1)^2+2^2} = arctg\frac{x+1}{2} + C.$$

Пример 3

$$\int \frac{dx}{x^2+4x+3} = \int \frac{dx}{(x+2)^2-1} = \frac{1}{2}\,ln\left|\frac{x+2-1}{x+2+1}\right| + C = \frac{1}{2}\,ln\left|\frac{x+1}{x+3}\right| + C.$$

Пример 4

$$\int \frac{dx}{\sqrt{3-x^2-2x}} = \int \frac{dx}{\sqrt{4-(x+1)^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{2^2-(x+1)^2}} = arcsin\frac{x+1}{2} + C$$

Задание

1. а) $\int \frac{2x^4-3x+1}{x^2-5x+6}dx;$ б) $\int \frac{dx}{x^2+4x+8};$

2. а) $\int \frac{3x^4+2x^2-1}{x^2-3x+2}dx;$ б) $\int \frac{dx}{x^2-2x};$

3. а) $\int \frac{4x^3-2x+3}{x^2-7x+12}dx;$ б) $\int \frac{dx}{\sqrt{-x^2-2x}};$

4. а) $\int \frac{5x^4-3x+4}{x^2-5x+6}dx;$ б) $\int \frac{dx}{x^2+6x+13};$

5. а) $\int \frac{3x^4+4x^3-1}{x^2-4x+3}dx;$ б) $\int \frac{dx}{\sqrt{3+2x-x^2}};$

6. а) $\int \frac{x^4+2x^2+3}{x^2-3x-4}dx;$ б) $\int \frac{dx}{x^2-4x-12};$

7. а) $\int \frac{5x^4+3x^2+1}{x^2-4x-5}dx;$ б) $\int \frac{dx}{x^2+4x};$

8. а) $\int \frac{x^4+6x^3+2}{x^2-5x-6}dx;$ б) $\int \frac{dx}{x^2+8x+17};$

9. а) $\int \frac{3x^4-x^3+2}{x^2-4x-5}dx;$ б) $\int \frac{dx}{\sqrt{8-x^2+2x}};$

10. а) $\int \frac{4x^4+3x^3+5}{x^2-7x+10}dx.$ б) $\int \frac{dx}{x^2-2x+3}.$

РАЗДЕЛ 2. Определенный интеграл

Определенный интеграл с постоянными пределами интегрирования имеет вид:

$$\int_a^b f(x)dx,$$

где a – нижний предел интегрирования; b – верхний предел интегрирования; $f(x)$ – подынтегральная функция.

Вычисляется определенный интеграл по формуле Ньютона–Лейбница:

$$\int\limits_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a),$$

т.е. для вычисления необходимо найти первообразную $F(x)$, подставив вместо x верхний предел "b" и вычесть значение первообразной при $x = a$.

Пример 1

$$\int\limits_1^2 (2x - \frac{4-\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}})dx = \int\limits_1^2 (2x - 4x^{\frac{-1}{3}} + x^{\frac{1}{6}})dx = (x^2 - \frac{4x^{\frac{2}{3}}}{\frac{2}{3}} + \frac{x^{\frac{7}{6}}}{\frac{7}{6}})\Bigg|_1^2 =$$

$$= (4 - 6\sqrt[3]{4} + \frac{6}{7}2\sqrt[6]{2}) - (1 - 6 + \frac{6}{7}) = 8\frac{1}{7} - 6\sqrt[3]{4} + \frac{6}{7}2\sqrt[6]{2}.$$

При вычислении определенного интеграла заменой переменных необходимо вводить новые пределы интегрирования, соответствующие новой переменной.

Пример 2

$$\int\limits_0^{\pi/2} \sqrt[3]{1+\sin x}\cos x dx = \left| \begin{matrix} \sin x + 1 = t \\ dt = \cos x dx \\ t_H = 1; t_B = 2 \end{matrix} \right| = \int\limits_1^2 \sqrt{t}dt = \frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}}\Bigg|_1^2 =$$

$$= \frac{2}{3}(2^{\frac{3}{2}} - 1^{\frac{3}{2}}) = \frac{2}{3}(2\sqrt{2} - 1).$$

Вычисление определенного интеграла по частям.

Пример 3

$$\int\limits_0^1 xe^{2x}dx = \left| \begin{matrix} x = U; \quad dx = dU \\ e^{2x}dx = dV; \quad V = \frac{1}{2}e^{2x} \end{matrix} \right| = \frac{x}{2}e^{2x}\Big|_0^1 - \frac{1}{2}\int\limits_0^1 e^{2x}dx =$$

$$= \frac{1}{2}e^2 - 0 - \frac{1}{4}e^{2x}\Big|_0^1 = \frac{1}{2}e^2 - 0 - \frac{1}{4}e^{2x}\Big|_0^1 = \frac{1}{2}e^2 - \frac{1}{4}e^2 = \frac{e^2}{4}$$

Задание

1. $a)\ \int_0^1 (3x - \frac{\sqrt[3]{x}}{3} + x\cos 2x)dx;$ $\quad б)\ \int_0^{\pi} \sqrt{2+\sin x}\cos x dx;$

2. $a)\ \int_0^1 (5x^2 - \frac{1}{4}\sqrt[5]{x^4} - xe^{3x})\int_0^1 dx;$ $\quad б)\ \int_0^{e} \frac{ln^3 x + \sqrt[3]{ln\, x} + 1}{x} dx;$

3. $a)\ \int_0^1 (4x^2 - \frac{\sqrt[3]{x^2}}{4} - (x+1)\sin 2x)dx;$ $\quad б)\ \int_0^1 \frac{e^x}{1+e^{2x}} dx;$

4. $a)\ \int_0^1 (3x^2 - 2\sqrt[4]{x^3} - (x-2)e^{2x})dx;$ $\quad б)\ \int_0^1 \frac{e^x}{\sqrt{1-e^{2x}}} dx;$

5. $a)\ \int_0^1 (\frac{x^3}{4} + 3\sqrt{x} + (5x+1)\cos 2x)dx;$ $\quad б)\ \int_0^{\pi/4} \frac{tg^3 x - \sqrt[3]{tgx}}{\cos^2 x} dx;$

6. $a)\ \int_0^1 (\frac{\sqrt[3]{x}}{3} + 6x - 2x\sin 3x)dx;$ $\quad б)\ \int_0^{\pi/6} \frac{\cos x}{\sin^2 x - 4} dx;$

7. $a)\ \int_0^1 (5x^4 - 3\sqrt[3]{x^2} + e^{3x}5x)dx;$ $\quad б)\ \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[4]{x^3}\sqrt[4]{\cos^2 x}} dx;$

8. $a)\ \int_0^1 (3x^2 - 2\sqrt[4]{x^3} - (x-2)e^{2x})dx;$ $\quad б)\ \int_0^1 \sqrt[5]{x}tg(x\sqrt[5]{x})dx;$

9. $a)\ \int_0^1 (6x^3 - 3\sqrt[3]{x} + (x+1)\cos 2x)dx;$ $\quad б)\ \int_0^{\pi/6} \frac{\cos x dx}{1+\sin^2 x} dx;$

10. $a)\ \int_0^1 (3x^2 - 2\sqrt[4]{x^3} - (x-2)\sin\frac{x}{2})dx;$ $\quad б)\ \int_1^{e} \frac{dx}{(1+\ell n^2 x)} dx.$

РАЗДЕЛ 3. Вычисление площади плоской фигуры

Последовательность вычисления площади плоской фигуры определенным интегралом следующая (рисунок):

1) находим точки пересечения заданных линий;
2) находим точки пересечения линий с координатными осями;
3) строим область, ограниченную линиями на плоскости XOY;
4) составим определенный интеграл и вычислим искомую площадь.

Пример 1

Найти площадь, ограниченную линиями $y = x^2 - 3x + 2; \quad y = x - 1$.

Находим точки пересечения линий. Для этого приравняем правые части уравнений:

$$x^2 - 3x + 2 = x - 1 \Rightarrow x^2 - 4x + 3 = 0; \; x_{1,2} = 2 \pm 1; \quad x_1 = 1; \quad x_2 = 3,$$

т.е. точки пересечения $A(1;0)$; $B(3;2)$ (рисунок)

Строим заданные линии на плоскости ХОУ:

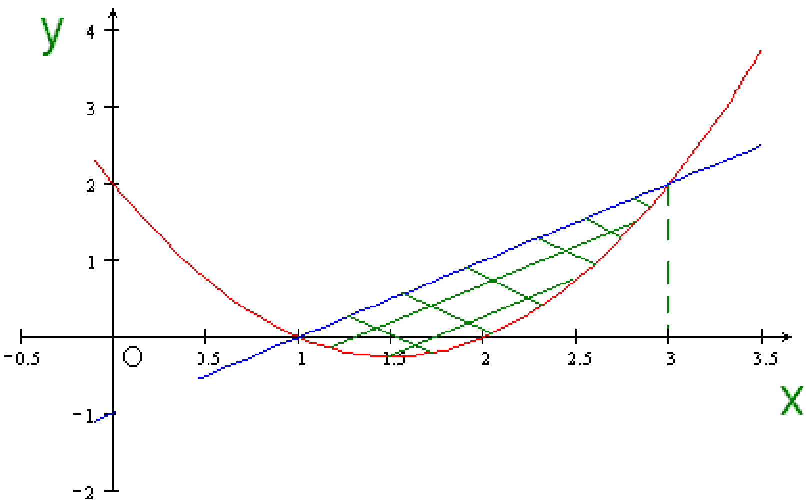
- точки пересечения параболы: $y = x^2 - 3x + 2$ с осью ОХ:

$$x^2 - 3x + 2 = 0; \qquad x_1 = 1 \qquad x_2 = 2;$$

- через точки А и В проводим прямую. Через точки $x_1 = 1;$ $x_2 = 2$ на оси ОХ и точки А и В проводим параболу. Получаем область, ограниченную линиями, площадь которой необходимо вычислить;
- составляем определенный интеграл:

$$S = \int_{X_a}^{X_b} (y_1 - y_2) dx,$$

где y_1 – линия, ограничивающая область сверху; y_2 – линия, ограничивающая область снизу; X_a – наименьшее значение переменной x в области; X_b – наибольшее значение переменной x в области.



Рисунок

В нашем случае:

$$S=\int_1^3((x-1)-(x^2-3x+2))dx=\int_1^3(-x^2+4x-3)=\int_1^3(-\frac{x^3}{3}+2x^2-3x)\Bigg|_1^3=$$

$$=(-9+18-9)-(\frac{-1}{3}+2-3)=1\frac{1}{3}\,(ед^2).$$

Задание

Вычислить площадь, ограниченную линиями:

1. а) $y=x^2-4x+3;\quad y=x-1.$ б) $y=x^2-4x;\quad y=-x^2.$
2. а) $y=x^2-5x+6;\quad y=x-2.$ б) $y=6x-x^2;\quad y=x^2-2x.$
3. а) $y=x^2-6x+8;\quad y=2-x.$ б) $y=x^2-2x;\quad y=4x-x^2.$
4. а) $y=x^2-5x+4;\quad y=2-2x.$ б) $y=x^2-7x;\quad y=3x-x^2.$
5. а) $y=x^2-7x+10;\quad y=2-x.$ б) $y=x^2-2x;\quad y=-x^2.$
6. а) $y=x^2-9x+14;\quad y=4-2x.$ б) $y=4x-2x^2;\quad y=x^2-2x.$
7. а) $y=x^2-9x+18;\quad y=8-2x.$ б) $y=6x-x^2;\quad y=-x^2.$
8. а) $y=x^2-7x+12;\quad y=6-2x.$ б) $y=x^2;\quad y=4x-x^2.$
9. а) $y=x^2-6x+5;\quad y=-x-1.$ б) $y=2x-x^2;\quad y=x^2-4x.$
10. а) $y=x^2-10x+16;\quad y=4-2x.$ б) $y=x^2+4x;\quad y=2x-x^2.$

Теоретические вопросы к разделам 1–3

1. Неопределенный интеграл, его свойства.
2. Интегрирование заменой переменной.
3. Формула интегрирования по частям, типы интегралов, которые вычисляются по этой формуле.
4. Определенный интеграл, его свойства. Формула Ньютона–Лейбница.
5. Интегрирование определенного интеграла заменой переменной и по частям.
6. Схема вычисления площади плоской фигуры определенным интегралом, нахождение пределов интегрирования, построение подынтегральной функции.

РАЗДЕЛ 4. Дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами

Дифференциальным уравнением называется соотношение, связывающее независимую переменную x, независимую функцию y, и ее производные y', y'' и т.д. Порядок уравнения равен порядку наивысшей производной.

Рассмотрим уравнение II-го порядка:

$$y''+ay'+by=f(x), \tag{1}$$

где a, b – постоянные действительные коэффициенты; $f(x)$ – неизвестная функция.

Уравнение (1) дополняется начальными условиями

$$y(0)=y_0;\; y'(0)=y'_0; \tag{2}$$

Решение уравнения (1) ищем в виде суммы:

$$y=\overline{y}+y^*,$$

где $\overline{y}$ – решение однородного уравнения

$$\overline{y}''+a\overline{y}'+b\overline{y}=0, \tag{3}$$

y^* – частное решение уравнения (1)

4.1. Однородное дифференциальное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами

Решение уравнения (2) – ищем в виде $y=e^{kx}$, тогда для определения числа k получаем характеристическое уравнение:

$$k^2+ak+b=0, \tag{4}$$

решение которого имеет вид:

$$k_{1,2}=-\frac{a}{2}\pm\sqrt{\frac{a^2}{4}-b}=-\frac{a}{2}\pm\sqrt{D}.$$

Рассмотрим три случая решения характеристического уравнения.

1-й случай:

$D > 0$, ***т.е. корни характеристического уравнения действительные и разные*** $k_1 \neq k_2$. Тогда обе функции $e^{k_1 x}$ и $e^{k_2 x}$ удовлетворяют уравнению (3), и общее решение имеет вид

$$y = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x}.$$

Для нахождения частного решения необходимо использовать условия (2).

Пример

Найти частное решение:

$$y'' - 5y' + 4y = 0.$$

Начальные условия $y(0) = 1$.

Решение

Соответствующее характеристическое уравнение имеет вид:

$$k^2 - 5k + 4 = 0,$$

корни $k_1 = 1$; $k_2 = 4$ – действительные и разные.

Решение дифференциального уравнения:

$$y = C_1 e^{x} + C_2 e^{4x}.$$

Найдем y':

$$y' = C_1 e^{x} + 4C_2 e^{4x}.$$

Подставляя найденные $y(x)$ и $y'(x)$ в начальные условия, получим систему для определения постоянных C_1 и C_2:

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 1; \\ C_1 + 4C_2 = 2. \end{cases}$$

Отсюда

$$C_2 = \frac{1}{3}; \qquad C_1 = \frac{2}{3}.$$

Тогда частное решение исходного уравнения примет вид:

$$y(x) = \frac{1}{3} e^{x} + \frac{2}{3} e^{4x}.$$

2-й случай:

$D = 0$***, корни характеристического уравнения действительные и равные:***

$$k_1 = k_2 = k,$$

и общее решение записывается в виде:

$$y = (C_1 + C_2 x)e^{kx}.$$

Пример

Найти частное решение уравнения:

$$y'' - 4y' + 4y = 0,$$

с начальными условиями:

$$y(0) = 2; \quad y'(0) = 1.$$

Решение

Составим характеристическое уравнение:

$$k^2 + 4k + 4 = 0,$$

его корни равны:

$$k_1 = k_2 = -2.$$

Следовательно, общее решение имеет вид:

$$y(x) = (C_1 + C_2 x)e^{-2x}.$$

Найдем $y'(x)$:

$$y'(x) = C_2 e^{-2x} - 2e^{-2x}(C_1 + C_2 x).$$

С учетом начальных условий получим систему:

$$\begin{cases} C_1 = 2; \\ C_2 - 2C_1 = 1, \end{cases}$$

т.е. $C_2 = 5$ и частное решение примет вид:

$$y(x) = (2 + 5x)e^{-2x}.$$

3-й случай:

$D < 0$***, в этом случае корни характеристического уравнения комплексные:***

$$K_{1,2} = \alpha \pm \beta i,$$

и общее решение однородного дифференциального уравнения имеет вид:

$$y(x) = e^{\alpha x}(C_1 \cos\beta x + C_2 \sin\beta x).$$

Пример

Найти общее решение уравнения:

$$y'' + 4y' + 13y = 0.$$

Решение

Соответствующее характеристическое уравнение

$$k^2 + 4k + 13 = 0.$$

и его корни комплексные:

$$k_{1,2} = -2 \pm 3i, \quad \alpha = -2; \quad \beta = 3.$$

Тогда общее решение запишется в виде:

$$y(x) = e^{-2x}(C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x).$$

Задание

1. а) $y'' - 5y' + 4y = 0;\ y(0) = 1;\ y'(0) = 2;$ б) $y'' - 2y' + y = 0;\ y(0) = y'(0) = 2;$
2. а) $y'' - 6y' = 0;\ y(0) = 3;\ y'(0) = 4;$ б) $y'' - 4y' + 4y = 0;\ y(0) = y'(0) = 3;$
3. а) $y'' - 4y = 0;\ y(0) = 1;\ y'(0) = 2;$ б) $y'' + 4y' + 4y = 0;\ y(0) = y'(0) = 2;$
4. а) $y'' - y' = 0;\ y(0) = 3;\ y'(0) = 4;$ б) $y'' - 6y' + 9y = 0;\ y(0) = y'(0) = 2;$
5. а) $y'' - 3y' + 2y = 0;\ y(0) = 1;\ y'(0) = 2;$ б) $y'' + 6y' - 9y = 0;\ y(0) = y'(0) = 4;$
6. а) $y'' - 4y' + 3y = 0;\ y(0) = 2;\ y'(0) = 1;$ б) $y'' + 2y' + y = 0;\ y(0) = y'(0) = 3;$
7. а) $y'' - 6y' + 5y = 0;\ y(0) = 3;\ y'(0) = 1;$ б) $y'' + 8y' + 16y = 0;\ y(0) = y'(0) = 2;$
8. а) $y'' - 7y' + 6y = 0;\ y(0) = 3;\ y'(0) = 4;$ б) $y'' - 10y' + 25y = 0;\ y(0) = y'(0) = 3;$
9. а) $y'' - 8y' + 12y = 0;\ y(0) = 2;\ y'(0) = 1;$ б) $y'' + 14y' + 49y = 0;\ y(0) = y'(0) = 4;$
10. а) $y'' + 8y' + 15y = 0;\ y(0) = 3;\ y'(0) = 2;$ б) $y'' - 12y' + 36y = 0;\ y(0) = y'(0) = 5.$

4.2. Неоднородное дифференциальное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами

Рассмотрим построение общего решения уравнения (1).

Решение этого уравнения имеет вид:

$$y(x)=\bar{y}(x)+y^*(x),$$

причем $\bar{y}$ – решение соответствующего однородного уравнения (см. подраздел 4.1).

Для нахождения функции $y^*(x)$ воспользуемся методом подбора.

Рассмотрим простейшие случаи, когда выбор функции $y^*(x)$ не зависит от решения однородного уравнения.

Предположим, что правая часть уравнения имеет вид:

$f_1(x)=ae^{\alpha x};(\alpha\neq k_{1,2})$, тогда $y^*(x)=Ae^{\alpha x}$ (A – неопределенные коэффициенты);

$f_2(x)=\sum\limits_{i=0}^{n}a_i x^i;(\alpha\neq 0)$, тогда $y^*(x)=\sum\limits_{i=1}^{n}A_i x^i$ (A_i – неопределенные коэффициенты);

$f_3(x)=a\,sin\beta x;(\beta\neq k_{1,2})$, тогда $y^*(x)=A_1\,sin\beta x+A_2\,cos\beta x$ (A_1, A_2 – неопределенные коэффициенты);

$k_{1,2}$ – корни характеристического уравнения.

Пример 1

Найти частное решение уравнения:

$$y''-2y'+y=3e^{2x};$$

с начальными условиями:

$$y(0)=1;\ y'(0)=3.$$

Искомое решение имеет вид:

$$y(x)=\bar{y}(x)+y^*(x);$$

$$\bar{y}(x)=e^x(C_1+C_2x)\text{ (см. подразд. 4.1)}$$

$y^*(x)$ выберем в виде:

$$y^*=Ae^{2x}.$$

Находим производные:

$$y'(x) = 2Ae^{2x}; \; y'' = 4Ae^{2x}$$

и подставляем в левую часть уравнения:

$$4Ae^{2x} - 4Ae^{2x} + Ae^{2x} = 3e^{2x},$$

отсюда $A = 3$ и $y^*(x) = 3e^{2x}$.

Следовательно, общее решение неоднородного уравнения:

$$y(x) = (C_1 + C_2 x)e^x + 3e^{2x}.$$

Найдем $y'(x)$:

$$y'(x) = C_2 e^x + (C_1 + C_2 x)e^x + 6e^{2x},$$

и подставим в начальные условия:

$$\begin{cases} C_1 + 3 = 1; \\ C_2 + C_1 + 6 = 3, \end{cases}$$

т.е. $C_1 = -2; C_2 = -1$.

Тогда частное решение окончательно примет вид:

$$y = 3e^{2x} - (1 + 2x)e^x.$$

Пример 2

Найти частное решение:

$$y'' - 2y' + 3y = 3x^2 + 4,$$

с начальными условиями:

$$y(0) = 3; \; y'(0) = 5.$$

Решение

Общее решение имеет вид:

$$y(x) = \bar{y} + y^*,$$

$\bar{y} = C_1 e^{-x} + C_2 e^{3x}$ (см. подраздел 4.1).

$y^*(x)$ выбираем в виде:

$$y^*(x) = Ax^2 + Bx + C.$$

где A, B, C – неопределенные коэффициенты.

Находим $y'(x)$ и $y''(x)$:

$$y'(x) = 2Ax + B;\ y'' = 2A.$$

Найденные значения подставляем в левую часть уравнения:

$$2A - 2(Ax + B) - 3(Ax^2 + Bx + C) = 3x^2 + 4;$$
$$-3Ax^2 + (-2A - 3B)x + (2A - 2B - 3C) = 3x^2 + 4.$$

Приравниваем коэффициенты при одинаковых степенях x:

$$\begin{array}{c|c|c} x^2 & -3A = 3 & \\ x^1 & -2A - 3B = 0 & \overset{\text{т.е}}{A = -1;\ B = -\dfrac{2}{3};\ C = -\dfrac{10}{9}.} \\ x^0 & 2A - 2B - 3C = 4 & \end{array}$$

Следовательно, общее решение имеет вид:

$$y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{3x} - x^2 - \frac{2}{3}x - \frac{10}{9}.$$

Находим производную:

$$y' = -C_1 e^{-x} + 3C_2 e^{3x} - 2x - \frac{2}{3}.$$

С учетом начальных условий, получим систему:

$$\left.\begin{cases} C_1 + C_2 - \dfrac{10}{9} = 3, \\ -C_1 + 3C_2 - \dfrac{2}{3} = 5, \end{cases}\right| \overset{\text{т.е.}}{C_1 = \frac{5}{3};\ C_2 = \frac{22}{9},}$$

следовательно, частное решение имеет вид:

$$y = \frac{5}{3}e^{-x} + \frac{22}{9}e^{3x} - x^2 - \frac{2}{3}x - \frac{10}{9}.$$

Задание

Найти частные решения, удовлетворяющие начальным условиям (начальные условия для обоих уравнений одинаковы):

1. а) $y''-3y'+2y=4e^{3x}$; $y(0)=y'(0)=2$ 1. б) $y''-2y'+y=3x^2+6$;

2. а) $y''-5y'=6e^{4x}$; $y(0)=y'(0)=3$ 2. б) $y''+4y'+3y=5-x+x^2$;

3. а) $y''+y=2e^{x}$; $y(0)=y'(0)=1$ 3. б) $y''-3y'+2y=4-2x-x^2$;

4. а) $y''-5y'+6y=3e^{x}$; $y(0)=y'(0)=3$ 4. б) $y''-6y'+9y=3x+2x^2+5$;

5. а) $y''+y'=5e^{4x}$; $y(0)=y'(0)=5$ 5. б) $y''-7y'+12y=x+4x^2-6$;

6. а) $y''-4y'+4y=e^{x}$; $y(0)=y'(0)=2$ 6. б) $y''-4y'+3y=3x^2+7x$;

7. а) $y''-6y'+8y=3e^{x}$; $y(0)=y'(0)=3$ 7. б) $y''-5y'+4y=3-4x^2$;

8. а) $y''-7y'+10y=2e^{3x}$; $y(0)=y'(0)=2$ 8. б) $y''-8y'+15y=6x^2-7x$;

9. а) $y''-3y'-4y=3e^{6x}$; $y(0)=y'(0)=4$ 9. б) $y''-7y'-8y=3-4x^2$;

10. а) $y''-7y'+6y=5e^{3x}$; $y(0)=y'(0)=2$ 10. б) $y''-9y'+14y=4x^2+4x+1$.

Теоретические вопросы к разделу 4

1. Определение дифференциального уравнения, начальные условия.
2. Структура общего решения дифференциального уравнения второго порядка, частное решение.
3. Однородное дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами, характеристическое уравнение.
4. Три случая решения характеристического уравнения и соответствующее общее решение однородного уравнения.
5. Структура общего решения дифференциального уравнения второго порядка.
6. Метод подбора частного решения неоднородного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами.

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА № 4

Методические указания и задания

РАЗДЕЛ 1. Числовые ряды

Числовым рядом называется бесконечная сумма членов последовательности:

$$u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots = \sum_{i=1}^{\infty} u_i .$$

Необходимый признак сходимости знакопостоянного числового ряда:

$$lim\, u_n = 0\,.$$

Если этот признак не выполняется, значит ряд расходится.

Достаточные признаки сходимости числового ряда.

1. Признак Даламбера: пусть имеется ряд $\sum\limits_{i=1}^{\infty} u_i$, тогда, если

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = q\,,$$

то при q<1 – ряд сходится, при q>1 – ряд расходится, при q=1 – неопределенность.

2. Радикальный признак Коши: если $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = q$, то при q<1 – ряд сходится, при q>1 – ряд расходится, при q=1 – неопределенность.

3. Интегральный признак Коши: если $\int\limits_1^{\infty} u_n dn$ существует, то ряд сходится, если интеграл не существует – ряд расходится.

4. Признак сравнения: если $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ сходится и $u_n \le v_n$, то $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ также сходится, если $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ расходится и $u_n \ge v_n$, то $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ также расходится.

Для признака сравнения часто используется $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\mathrm{A}}{n^{\alpha}}$, если q>1 – ряд сходится, q$\le$1 – ряд расходится.

Пример 1

Применим признак Даламбера:

$$u_{n+1} = \frac{2^{n+1}}{((n+1)+1)!}\,; \quad \lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2^{n+1}\cdot(n+1)!}{2^n\cdot(n+2)!} = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{n+2} = 0\,,$$

так как предел меньше единицы, то ряд сходится.

Пример 2

$\sum \frac{n}{2^n}$. Применим радикальный признак Коши:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{n}{2^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{n}}{2} = \frac{1}{2}$$ – ряд сходится.

Замечание. $$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n}} = 1.$$

Пример 3

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n - 1}{n}$. Применим интегральный признак Коши:

$$\int_1^{\infty} \frac{\ln x - 1}{x} dx = \left| \begin{array}{c} \ln x - 1 = t \\ dt = \dfrac{dx}{x} \\ t_0 = \infty \\ t_1 = -1 \end{array} \right| = \int_{-1}^{\infty} t dt = \left.\frac{t^2}{2}\right|_{-1}^{\infty} = \infty \ ,$$

так как интеграл не существует, то ряд расходится.

Пример 4

$\sum \frac{\sin n}{n^2}$. Сравним ряд с $\sum \frac{1}{n^2}$, который сходится, так как $\frac{\sin n}{n^2} < \frac{1}{n^2}$, то $\sum \frac{\sin n}{n^2}$ также сходится.

Теоретические вопросы к разделу 1

1. Необходимый признак сходимости числового ряда.
2. Достаточный признак Даламбера.
3. Радикальный признак Коши.
4. Интегральный признак Коши.
5. Признак сравнения.

Задание

Выписать три первых члена и исследовать сходимость числовых рядов:

1. а) $\sum\limits_{n=1}^{n=\infty} \frac{2^n}{n \cdot n!}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{n=\infty} \frac{\ln n}{n}$.

2. а) $\sum\limits_{n=1}^{n=\infty} \frac{5^{n-1}}{n^2 \cdot (n-1)!}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{n=\infty} \frac{4n^3}{(n^4+4)^2}$

3. а) $\sum\limits_{n=1}^{n=\infty} \frac{3^{n+2}}{(n-5)!}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{n=\infty} \frac{|\sin n|}{\sqrt{n^3}}$.

4. а) $\sum\limits_{n=1}^{n=\infty} \frac{2^{2n}}{n \cdot (n+1)!}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{n=\infty} \frac{\cos^2 n}{\sqrt[3]{n^5}}$.

5. а) $\sum\limits_{n=1}^{n=\infty} \frac{3^{n+1}}{n!(n+1)}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{n=\infty} \frac{n}{n^2+1}$.

6. а) $\sum\limits_{n=1}^{n=\infty} \frac{n^2+1}{\sqrt{n \cdot 3^n}}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{n=\infty} \frac{1}{n \cdot \ln n}$.

7. а) $\sum\limits_{n=1}^{n=\infty} \frac{2^{n+2} n^2}{3^{2n-1}}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{n=\infty} \frac{e^n}{1+e^{n2}}$.

8. а) $\sum\limits_{n=1}^{n=\infty} \frac{2^{3n} \cdot n!}{(2n)!}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{n=\infty} \frac{\sin^4 n}{2n\sqrt{n}}$.

9. а) $\sum\limits_{n=1}^{n=\infty} \frac{(2n)!}{(n!)^2}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{n=\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n^2} \cdot \cos n}$.

10. а) $\sum\limits_{n=1}^{n=\infty} \frac{n!(n+1)!}{(2n)!}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{n=\infty} \frac{1+\cos^2 n}{n}$.

РАЗДЕЛ 2. Степенные ряды

Степенные ряды имеют вид:

$\sum\limits_{n=0}^{n=\infty} a_n x^n$ – ряд по степеням x;

$\sum\limits_{n=0}^{n=\infty} a_n (x-x_0)^n$ – ряд по степеням ($x-x_0$).

Степенной ряд сходится на некотором интервале $(-R, R)$, который называется областью сходимости, то есть для любого значения x из интервала $(-R, R)$ мы получаем числовой сходящийся ряд. Половина этого интервала называется радиусом сходимости.

Для определения интервала (радиуса) сходимости применяются формулы:

$$R = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{a_{n+1}}; \qquad R = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{a_n}}.$$

Рассмотрим примеры.

Пример 1

Определить область сходимости степенного ряда и проверить сходимость на границах интервала:

$$\sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{5^{n-1} \cdot x^4}{3 \cdot n^2}, \text{ т.е. } \quad a_n = \frac{5^{n-1}}{3 \cdot n^2}; \quad a_{n+1} = \frac{5^n}{3 \cdot (n+1)^2}.$$

Находим R: $R = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{5^{n-1} \cdot 3 \cdot (n+1)^2}{3 \cdot n^2 \cdot 5^n} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{5}\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^2 = \dfrac{1}{5}$, т.е. область сходимости $\left(-\dfrac{1}{5}; \dfrac{1}{5}\right)$.

Проверим сходимость на границах интервала. На правой границе интервала $x = \dfrac{1}{5}$, соответствующий числовой ряд имеет вид:

$$\sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{5^{n-1} \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^4}{3 \cdot n^2} = \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{1}{15 \cdot n^2} \text{ – ряд сходится.}$$

Если на правой границе интервала ряд сходится, то на левой также сходится, так как соответствующий числовой ряд будет знакопеременным.

Если на правой границе интервала ряд расходится, то границы интервала не включаются в область сходимости.

В рассматриваемом примере интервал сходимости $-\dfrac{1}{5} \le x \le \dfrac{1}{5}$.

Пример 2

Условие то же, что в примере 1:
$\sum\limits_{n=1}^{n=\infty}\frac{2^n\cdot(x-2)^n}{n^2}$, т.е. $a_n=\frac{2^n}{n^2}$; $a_{n+1}=\frac{2^{n+1}}{(n+1)^2}$.

Находим R: $R=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2^n(n+1)^2}{n^2\cdot2^{n+1}}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right)^2=\frac{1}{2}$.

Значит область сходимости $-\frac{1}{2}<x-2<\frac{1}{2}$, или $\frac{3}{2}<x<\frac{5}{2}$.

Проверим сходимость на правой границе интервала:

$$x=\frac{5}{2};\qquad \sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{2^n\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^n}{n^2}=\sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{1}{n^2}\ \text{– ряд сходится.}$$

Значит, границы включаются в область сходимости $\frac{3}{2}\le x\le\frac{5}{2}$.

Теоретические вопросы к разделу 2

1. Степенной ряд по степеням x, ($x-x_0$).
2. Область сходимости степенного ряда, радиус сходимости.
3. Формулы вычисления радиуса сходимости степенного ряда.

Задание

Найти область сходимости и проверить сходимость на границах интервала:

1. а) $\sum\limits_{n=1}^{n=\infty}\frac{n}{2n-1}\cdot x^n$; б) $\sum\limits_{n=1}^{n=\infty}\frac{3^n(x-1)^n}{5^{n-1}(n+1)}$;

2. а) $\sum\limits_{n=1}^{n=\infty}\frac{3^{n-1}\cdot x^n}{5n^2\sqrt{5^n}}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{n=\infty}\frac{5^{2n}(x-3)^n}{(n^2+1)2^{3n-1}}$;

3. а) $\sum\limits_{n=1}^{n=\infty}\frac{2^n\cdot x^n}{\sqrt{3^n}(n^2+1)}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{n=\infty}\frac{2^{3n-1}n(x-2)^n}{(2n-1)4^{n+1}}$;

4. а) $\sum\limits_{n=1}^{n=\infty}\frac{\sqrt{5^n}\cdot x^n}{2^n\cdot(n^2+1)}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{n=\infty}\frac{(n^2+2)5^{2n-1}(x-1)^n}{(2n^2+3)2^{5n+1}}$;

5. а) $\sum\limits_{n=1}^{n=\infty}\frac{n!\cdot 2^n\cdot x^n}{(n+5)!}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{n=\infty}\frac{(5n^2+2)(x-2)^n}{(n^3+1)3^{2n}}$;

6. а) $\sum\limits_{n=1}^{n=\infty}\frac{3^{n+1}\cdot x^n}{5^{2n-1}\cdot n}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{n=\infty}\frac{2^{3n}(n^2+2)(x-1)^n}{5^{2n+1}(n^2-2)}$;

7. а) $\sum\limits_{n=1}^{n=\infty}\frac{5^{3n-1}\cdot x^n}{(n^2+n)\cdot 2^n}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{n=\infty}\frac{5^{2n+3}n^3(x-2)^n}{3^{2n+1}(n^3+5)}$;

8. а) $\sum\limits_{n=1}^{n=\infty}\frac{\sqrt[3]{2^{n+1}}x^n}{n\cdot(n^2+1)}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{n=\infty}\frac{2^{3n+1}n^2(x-1)^n}{3^{2n-1}(n^2+1)}$;

9. а) $\sum\limits_{n=1}^{n=\infty}\frac{2^{n-2}\cdot n\cdot x^n}{3^{n-3}(n-3)}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{n=\infty}\frac{2^{3n+1}(n^2+2)(x-1)^n}{(2n+1)5^{2n-2}}$;

10. а) $\sum\limits_{n=1}^{n=\infty}\frac{n!\cdot x^n}{3^n(n+2)!}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{n=\infty}\frac{3^{2n-1}(n^2+5)(x-2)^n}{(5n^2+1)4^{3n-1}}$.

РАЗДЕЛ 3. Приложение степенных рядов

3.1. Приближенное вычисление определенных интегралов

В курсе высшей математики доказывается, что функцию $f(x)$, которая бесконечное число раз дифференцируемая, в точке x = 0 можно записать в виде ряда:

$f(x)=f(0)+\frac{x}{1}f'(0)+\frac{x^2}{2!}f''(0)+...+\frac{x^n}{n!}f^{(n)}(0)+...$, который называется рядом Маклорена.

Примеры разложения функций в ряды

1. $sin\,x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+...+(-1)^{n+1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}+R_n(x)$;

2. $cos\,x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+...\frac{x^n}{n!}+R_n(x)$;

3. $e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+...+\frac{x^n}{n!}+R_n(x)$;

4. $e^{-x}=1-x+\dfrac{x^2}{2!}-\dfrac{x^3}{3!}+...+(-1)^n\dfrac{x^n}{n!}+R_n(x)$ $\qquad n\in 0...\infty$;

5. $ln(1+x)=x-\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^3}{3}-\dfrac{x^4}{4}+...+(-1)^{n+1}\dfrac{x^n}{n}+R_n(x)$;

6. $\dfrac{1}{1+x}=1-x+x^2-x^3+...+(-1)^n\cdot x^n+R_n(x)$ и т.д.

$R_n(x)$– называют остаточным членом ряда, причем для знакопеременных рядов его величина ограничена последним отбрасываемым членом.

Например: вычислим $sin10^\circ$ с точностью до 10^{-3}, так как $10^\circ=\dfrac{\pi}{18}\approx 0{,}174533$, то $sin10^\circ=\dfrac{\pi}{18}-\dfrac{1}{3!}\left(\dfrac{\pi}{18}\right)^3+\dfrac{1}{5!}\left(\dfrac{\pi}{18}\right)^5-\dfrac{1}{7!}\left(\dfrac{\pi}{18}\right)^7...$, причем, ограничиваясь первым двумя членами, получим $sin10^\circ\approx\dfrac{\pi}{18}-\dfrac{1}{3!}\left(\dfrac{\pi}{18}\right)^3=0{,}17364$, а точность приближения не превышает величины $\delta<\dfrac{1}{5!}\left(\dfrac{\pi}{18}\right)^5<1{,}35\cdot 10^{-6}$.

Пример

Вычислить определенный интеграл с точностью до 0,001:

$$\int_0^1\frac{sin\,x}{x}dx=\int_0^1\frac{1}{x}\left(x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+...\right)dx=\int_0^1\left(1-\frac{x^2}{3!}+\frac{x^4}{5!}-\frac{x^6}{7!}+...\right)dx=$$

$$\approx\left.\left(x-\frac{x^3}{3\cdot 3!}+\frac{x^5}{5\cdot 5!}-\frac{x^7}{7\cdot 7!}\right)\right|_0^1=1-\frac{1}{3\cdot 3!}+\frac{1}{5\cdot 5!}-\frac{1}{7\cdot 7!}=1-\frac{1}{18}+\frac{1}{600}-\frac{1}{35280}\approx$$

$\approx 0{,}945786.$

Причем точность вычисления $\delta<\dfrac{1}{9!}=2{,}7\cdot 10^{-6}$.

Задание

Вычислить определенный интеграл с точностью до 0.001.

1. $\int_0^1\sqrt{x}\cdot e^x dx$; $\qquad$ 2. $\int_0^1\dfrac{ln(1+x)}{x}dx$; $\qquad$ 3. $\int_0^1\sqrt{x}\cdot cos\,x\,dx$;

4. $\int_0^1 \frac{\sin x}{\sqrt{x}} dx$; 5. $\int_0^1 \sqrt{x} \cdot \sin x \, dx$; 6. $\int_0^1 x^{\frac{2}{3}} \cdot e^{-x} dx$;

7. $\int_0^1 \frac{\sin \sqrt{x}}{x} dx$; 8. $\int_0^1 e^{-\sqrt{x}} dx$; 9. $\int_0^1 \sqrt{x} \cos x^2 \, dx$;

10. $\int_0^1 \sqrt{x} \sin x^2 \, dx$.

3.2. Интегрирование дифференциальных уравнений с помощью рядов

Рассмотрим уравнение вида

$$y' = f(x; y),$$

с начальным условием $y(0) = y_0$.

Решение уравнения ищем в виде степенного ряда:

$$y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n + \ldots.$$

Задача заключается в нахождении коэффициентов a_i.

Найдем коэффициент a_0, подставив в начальное условие решение в виде ряда:

$$y_0 = a_0 + a_1 0 + a_2 0 \ldots, \text{ т.е. } a_0 = y_0.$$

Подставим теперь начальное условие в правую часть уравнения:

$$y' = f(0; y_0) = y'_0.$$

Продифференцируем решение

$$y' = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + 4a_4 x^3 + \ldots.$$

С учетом начального условия имеем $a_1 = y'_0$.

Последовательно дифференцируем решение и находим необходимое количество коэффициентов a_1.

Пример

$$y' = y^2 + x^2 + e^{-x}, \quad y(0) = 2.$$

Решение ищем в виде:

$$y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \ldots$$

Необходимо найти 3 члена ряда отличных от нуля.

Решение

Из начального условия следует $a_0 = 2$.
Подставляем начальное условие в правую часть исходного уравнения:

$$y'(0) = 2^2 + 0 + e^0 = 5.$$

Продифференцируем решение в виде ряда:

$$y' = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + 4a_4 x^3 + \ldots.$$

И так как $y'(0) = 5$, то $a_1 = 5$.
Продифференцируем левую и правую часть исходного уравнения:

$$y'' = 2y \cdot y' + 2x - e^{-x}, \quad \text{т.е.} \quad y''(0) = 2 \cdot 2 \cdot 5 + 0 - e^0 = 19.$$

С другой стороны, $y'' = 2a_2 + 6a_3 x + 12a_4 x^2 + \ldots.$

Сравнивая значения $y''(0)$, находим $a_2 = \dfrac{19}{2}$.

Таким образом искомое решение в виде ряда имеет вид:

$$y = 2 + 5x + \frac{19}{2}x^2.$$

Задание

Найти три первых значащих члена разложения в степенной ряд решения дифференциального уравнения с заданным начальным условием:

1. $y' = yx + x^2 + 2e^{2x}$, $\quad y(0) = 2$;
2. $y' = y^2 + 5x\ e^x$, $\quad y(0) = 1$;
3. $y' = x^2 y + y^2 - xe^{-x}$, $\quad y(0) = -1$;
4. $y' = ye^x + y^2 - x$, $\quad y(0) = -2$;
5. $y' = e^x + 2xy^2 - 1$, $\quad y(0) = 3$;
6. $y' = x^2 + y^2 + xe^{-2x}$, $\quad y(0) = 1$;
7. $y' = 2x^2 y^2 + ye^x$, $\quad y(0) = 2$;
8. $y' = x^2 - y^2 - xy + e^x$, $\quad y(0) = 4$;
9. $y' = xy + x^2 y^2 + e^{-x}$, $\quad y(0) = 1$;
10. $y' = x - y^3 + xe^{-x}$, $\quad y(0) = 3$.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Пискунов, Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисление для втузов. Т.1 и 2 / Н.С. Пискунов. – М.: Наука, 1970–1987.
2. Данко, П.Е. Высшая математика в упражнениях и задачах. Ч. 1 и 2 / П.Е. Данко, А.Г. Попов, Т.Я. Кожевникова. – М.: Высш. шк., 1986.
3. Шипачев, В.С. Высшая математика / В.С. Шипачев. – М.: Высш. шк., 1985.

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ 3
КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА № 3 4
Методические указания и задания 4
РАЗДЕЛ 1. Неопределенный интеграл 4
РАЗДЕЛ 2. Определенный интеграл 12
РАЗДЕЛ 3. Вычисление площади плоской фигуры 14
РАЗДЕЛ 4. Дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами 24
КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА № 4 24
Методические указания и задания 24
РАЗДЕЛ 1. Числовые ряды 24
РАЗДЕЛ 2. Степенные ряды 27
РАЗДЕЛ 3. Приложение степенных рядов 30
СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ 34

Никита Сергеевич ***КОНСТАНТИНОВ***

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА

Методические указания по выполнению контрольных работ № 3, 4
для студентов ИИФО всех специальностей, обучающихся
по ускоренной программе (на базе техникума)

План 2002 г. Поз. 3.1.
Редактор Э.Г. Долгавина.
Технический редактор Н.В. Мильштейн.
ИД № 05247 от 2.07.2001 г. ПЛД № 79-19 от 19.01.2000 г.
Подписано в печать 08.02.2002. Печать офсетная.
Бумага тип. № 2. Формат 60x84 $^1/_{16}$.
Усл. печ. л. 2. Зак. 27. Тираж 300 экз. Цена 14 р.

Издательство ДВГУПС
680021, г. Хабаровск, ул. Серышева, 47.

Министерство путей сообщения Российской Федерации

ДАЛЬНЕВОСТОЧНЫЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
УНИВЕРСИТЕТ ПУТЕЙ СООБЩЕНИЯ

Кафедра «Высшая математика»

Н.С. Константинов

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА

Методические указания
по выполнению контрольных работ № 3, 4
для студентов ИИФО всех специальностей,
обучающихся по ускоренной программе
(на базе техникума)

Хабаровск
Издательство ДВГУПС
2002