МИНИСТЕРСТВО ПУТЕЙ СООБЩЕНИЯ РФ
ИРКУТСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ПУТЕЙ СООБЩЕНИЯ



ВЕКТОРНАЯ АЛГЕБРА И АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ

Учебное пособие
для студентов заочного отделения
всех специальностей

ИРКУТСК
2003

КОМПЛЕКС МЕТОДИЧЕСКИХ ПОСОБИЙ ПО МАТЕМАТИКЕ ДЛЯ ЗАОЧНОГО ОБУЧЕНИЯ

Под редакцией доктора технических наук,
профессора А. П. Хоменко

- Комплексные числа. Основы линейной алгебры. Системы линейных уравнений
- **Векторная алгебра и аналитическая геометрия**
- Введение в анализ
- Дифференциальное исчисление функций одной переменной
- Дифферинциальное исчисление функций нескольких переменных
- Линейное программирование. Динамическое программирование
- Интегральное исчисление функций одной переменной
- Кратные, криволинейные и поверхностные интегралы. Элементы теории поля
- Обыкновенные дифференциальные уравнения
- Ряды
- Теория функций комплексной переменной. Операционное исчисление
- Вариационное исчисление. Уравнения математической физики
- Теория вероятностей
- Математическая статистика
- Марковские случайные процессы и теория игр
- Дискретная математика

МИНИСТЕРСТВО ПУТЕЙ СООБЩЕНИЯ РФ

ИРКУТСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ПУТЕЙ СООБЩЕНИЯ

ВЕКТОРНАЯ АЛГЕБРА И АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ

Учебное пособие
для студентов заочного отделения
всех специальностей

Под редакцией
доктора технических наук, профессора А. П. Хоменко

ИРКУТСК
2003

ББК 22.151.5
УДК 514.1, 514.742.2
П 30
Петрякова Е. А., Алексеева Т. Л. Векторная алгебра и аналитическая геометрия: Учебное пособие. Иркутск, 2003. 75 с.

Пособие содержит достаточно полное изложение основных вопросов курса векторной алгебры и аналитической геометрии, соответствующих требованиям к минимуму основной обязательной программы по подготовке дипломированных специалистов. Пособие снабжено большим количеством подробно разобранных примеров и геометрических иллюстраций. В пособие включены вопросы для самоконтроля и десять вариантов контрольной работы.

Пособие предназначено для студентов всех специальностей первого курса заочной формы обучения, но может быть полезно при изучении соответствующих разделов математики на дневном отделении.

Ил. 77. Табл. 3. Библиогр.: 7 назв.

Рецензенты: канд. физ.-мат. наук, доц. Р. З. Абдуллин (БГУЭП);
д.-р. техн. наук, проф. Ю.Ф. Мухопад (ИрГУПС)

© Иркутский государственный университет путей сообщения, 2003

1. МЕТОД КООРДИНАТ

1.1. Координаты на прямой. Положение точки на прямой можно определить следующим образом. Выберем на прямой произвольную начальную точку O и условимся одно из двух направлений, идущих по прямой от точки O, считать положительным.

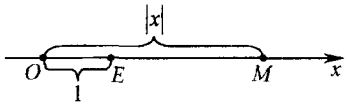


Рис. 1.1

Прямая, на которой выбраны начальная точка и направление, называется *осью*. На рис. 1.1 *положительное направление оси* Ox обозначено стрелкой. Выберем на оси единицу масштаба: произвольный отрезок OE примем за единицу.

Положение любой точки M на оси Ox определяется числом x, абсолютная величина которого равна расстоянию OM от начальной точки O до точки M в выбранных единицах длины. Это число x будем считать положительным, если отрезок OM направлен в положительную сторону вдоль оси Ox и отрицательным – в противоположном случае. Назовем такое число x *координатой точки* M.

Каждой точке оси Ox соответствует теперь единственное вещественное число x - ее координата – и обратно, каждому вещественному числу x соответствует единственная точка оси. Таким образом, между точками оси и вещественными числами – координатами этих точек – установлено взаимно однозначное соответствие.

1.2. Перенос начальной точки. Часто за начальную точку оси приходится вместо ранее выбранной точки O принять другую точку O', совершая тем самым так называемый *перенос начала координат*.

Будем обозначать координаты точек относительно нового начала O' через x'. Координату точки O' по отношению к старому началу O обозначим через x_0. Пользуясь рис. 1.2, на котором все три точки - x, x', x_0 - положительны, находим связь между старой x и новой x' координатами произвольной точки M:

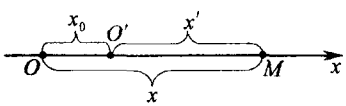


Рис. 1.2

$$x = x' + x_0 \text{ или } x' = x - x_0. \qquad (1.1)$$

Эти формулы (первая выражает старую координату x через новую x', а вторая – новую координату x' через старую x) будут справедливы при любом взаимном расположении точек O, O', M на оси Ox.

1.3. Расстояние между двумя точками оси. Будем обозначать точку M с координатой x символом $M(x)$. Согласно определению координаты точки, расстояние OM от начала координат до точки $M(x)$ равно абсолютной величине координаты x:

$$OM = |x|. \tag{1.2}$$

Найдем расстояние $M_1M_2 = d$ между двумя произвольными точками оси Ox: $M_1(x_1)$ и $M_2(x_2)$. Для этого перенесем начало координат в точку M_1. Применяя вторую из формул (1.1), находим новую координату точки M_2: $x_2 = x_2 - x_1$. Но длина отрезка M_1M_2 есть расстояние от нового начала координат до точки M_2. Поэтому по формуле (1.2) находим

$$d = |x_2 - x_1|. \tag{1.3}$$

Итак, *расстояние между двумя произвольными точками оси Ox равно абсолютной величине разности их координат.*

1.4. Координаты на плоскости. Для определения положения точки на плоскости проведем в плоскости две взаимно перпендикулярные прямые, пересекающиеся в точке O. На каждой прямой одно из двух направлений, идущих от точки O, условимся считать положительным (рис. 1.3). Таким образом, получим две координатные оси с общей начальной точкой O(начало координат) – ось абсцисс Ox и ось ординат Oy. Зададим масштаб: пусть единицей длины на обеих осях будет служить отрезок OE.

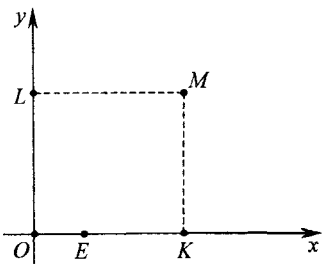


Рис. 1.3

На плоскости произвольно возьмем точку M и построим ее проекции: K на ось Ox и L на ось Oy. Положение точки M на плоскости определяется положением точек K и L на осях Ox и Oy соответственно. Точка K определяется ее координатой x, а точка L - ее координатой y, тем самым определяется и положение точки M на плоскости при помощи чисел x и y, которые называются *координатами точки M на плоскости.*

Координата x называется *абсциссой*, координата y называется *ординатой* точки M. Построенная система координат называется *прямоугольной декартовой системой координат.* Заметим, что *все точки оси абсцисс имеют нулевую ординату, а все точки оси ординат имеют нулевую абсциссу; начало координат имеет обе нулевые координаты.*

Для обозначения точки M, имеющей координаты x и y, пользуются записью $M(x, y)$; в скобках на первом месте стоит абсцисса точки, а на втором – ордината точки.

Таким образом, между точками координатной плоскости и упорядоченными парами (x, y) вещественных чисел – координатами этих точек - установлено взаимно однозначное соответствие.

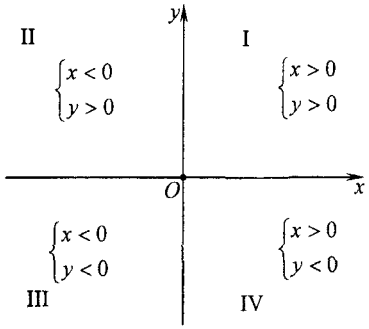


Рис. 1.4

Координатные оси разбивают плоскость на четыре четверти, которые нумеруют в порядке обхода против часовой стрелки: I, II, III, IV (рис. 1.4).

1.5. Перенос начала координат. Часто в задачах совершается перенос начала координат в новую точку при сохранении прежнего направления координатных осей, то есть от координатной системы Oxy переходим к координатной системе $O'x'y'$, координатные оси которой параллельны координатным осям исходной системы (рис. 1.5).

Пусть новым началом координат служит точка $O'(x_0, y_0)$. Построим проекцию произвольной точки M как на старые, так и на новые оси координат: K на ось Ox; K' на ось $O'x'$; L на ось Oy; L' на ось $O'y'$. А также построим проекции точки O' на оси Ox и Oy - точки A и B (рис.1.5).

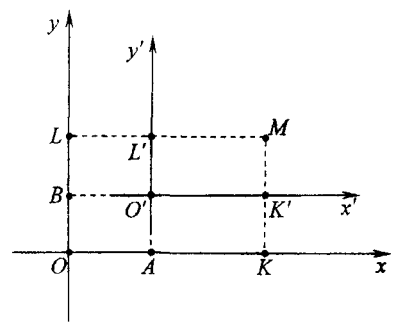


Рис 1.5

Координата x' точки K' на оси $O'x'$ равна координате точки K на оси Ox по отношению к новому началу отсчета – точке A; поэтому по второй формуле (1.1)

$$x' = x - x_0.$$

Аналогично, координата y' точки L' на оси $O'y'$ равна координате точки L на оси Oy по отношению к новому началу отсчета – точке B; поэтому по той же формуле (1.1)

$$y' = y - y_0.$$

Итак, при всяком взаимном расположении нового и старого начала координат мы будем иметь следующие формулы:

$$\begin{aligned} x &= x' + x_0 \quad \textit{или} \quad x' = x - x_0, \\ y &= y' + y_0 \quad \textit{или} \quad y' = y - y_0. \end{aligned} \tag{1.4}$$

Пример 1.1. Начало координат перенесено в точку $O'(2, -3)$. Написать формулы перехода от старых координат к новым и найти новые координаты точки $M(-4, 2)$.

Решение: По формулам (1.4) имеем

$$x' = x - 2,\ y' = y + 3.$$

Отсюда определяются новые координаты точки M:

$$x' = -4 - 2 = -6,\ y' = 2 + 3 = 5.$$

Ответ: $x' = x - 2,\ y' = y + 3,\ M(-6, 5)$.

Пример 1.2. Начало координат перенесено в точку $O'(-1, 3.5)$. В новой системе координат дана точка $M(4, -7)$. Найти ее старые координаты.

Решение: По формулам (1.4) имеем

$$x = x' - 1,\ y = y' + 3.5.$$

Отсюда находим старые координаты точки M:

$$x = 4 - 1 = 3,\ y = -7 + 3.5 = -3.5.$$

Ответ: $M(3, -3.5)$.

1.6. Полярные координаты. Часто оказывается более удобным определять положение точки на плоскости не прямоугольными декартовыми координатами, а так называемыми *полярными координатами*. В этом случае на плоскости задается точка O, которую называют полюсом, и исходящая из полюса O полупрямая (луч) OP - полярная ось, на полярной оси задан масштаб – единица длины (рис. 1.6).

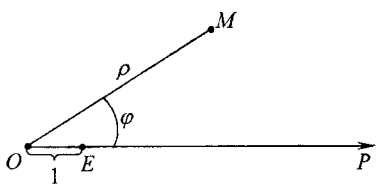


Рис. 1.6

Положение точки M на плоскости (рис. 1.6) определяется расстоянием $OM = \rho$ от полюса O до этой точки и углом φ, который отрезок OM образует с полярной осью OP; ρ называется *полярным радиусом* точки M, а φ - *полярным углом* точки M. Полюс O имеет нулевой радиус, но не имеет определенного полярного угла.

В полярных координатах ρ и φ точку M обозначают записью $M(\rho, \varphi)$, ставя в скобках на первое место ρ.

Полярный радиус ρ есть величина неотрицательная $(\rho \geq 0)$, полярный угол φ считается положительным при отсчете от полярной оси против часовой стрелки и отрицательным в противоположном направлении.

Так как угол φ может принимать любые вещественные значения, то каждой точке плоскости будет соответствовать не одна единственная пара координат ρ и φ, а бесконечное множество таких пар, для которых ρ

одно и то же, а полярные углы φ отличаются друг от друга на целое кратное 2π, то есть $\varphi_0 + 2\pi k$, где k - целое число.

Замечание 1.1. Иногда ограничивают изменение полярного угла φ промежутком $-\pi < \varphi \le \pi$. Значения φ, удовлетворяющие этому условию, называют *главными значениями*. Полярные координаты ρ, φ называются *основными*, если $\rho \ge 0$, а φ есть главное значение полярного угла, то есть если $-\pi < \varphi \le \pi$. ▲

Выведем формулы перехода от полярных координат к декартовым и от декартовых к полярным. Пусть полюс полярной системы координат совпадает с началом декартовой системы координат, а полярная ось совпадает с положительной полуосью Ox (рис. 1. 7).

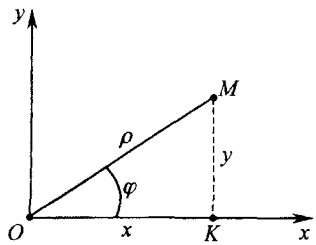


Рис. 1.7

Пусть точка M лежит в первой четверти (рис. 1.7). Из вспомогательного треугольника OKM, в котором $OK = x$, $MK = y$, $OM = \rho$, $\angle MOK = \varphi$, находим

$$x = \rho\cos\varphi,\ y = \rho\sin\varphi. \qquad (1.5)$$

Эти формулы будут справедливы при любом расположении точки M на плоскости.

Из того же треугольника OKM следует, что

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2} \qquad (1.6)$$

и

$$\cos\varphi = \frac{x}{\rho} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}},\ \sin\varphi = \frac{y}{\rho} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}. \qquad (1.7)$$

Пример 1.3. Определить декартовы координаты точки $M\left(3, \frac{3\pi}{4}\right)$.

Решение: По формулам (1.5) находим

$$x = \rho\cos\varphi = 3\cos\frac{3\pi}{4} = -\frac{3\sqrt{2}}{2},\ y = \rho\sin\varphi = 3\sin\frac{3\pi}{4} = \frac{3\sqrt{2}}{2}.$$

Ответ: $M\left(-\frac{3\sqrt{2}}{2}, \frac{3\sqrt{2}}{2}\right)$.

Пример 1.4. Определить полярные координаты точки $M\left(2\sqrt{3}, -2\right)$.

Решение: По формуле (1.6) находим

$$\rho = \sqrt{(2\sqrt{3})^2 + (-2)^2} = 4.$$

Затем используем формулы (1.7):

$$\cos\varphi = \frac{x}{\rho} = \frac{2\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2},\ \sin\varphi = \frac{y}{\rho} = -\frac{1}{2},$$

откуда $\varphi = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi,\ k$ - целое; возьмем главное значение полярного угла $\varphi = -\frac{\pi}{6}$.

Ответ: $M\left(4, -\frac{\pi}{6}\right)$.

1.7. Координаты в пространстве. Выберем произвольную точку O и примем ее за *начало координат*. Проведем через нее три взаимно перпендикулярные прямые – *оси координат* (рис. 1.8). Эту общую точку O будем считать для каждой из координатных осей за начало отсчета, зададим масштаб, один и тот же для всех осей, и выберем на каждой из них положительное направление; введем для осей координат обозначения: Ox - ось абсцисс, Oy - ось ординат, Oz - ось аппликат. В зависимости от взаимной ориентации осей Ox, Oy, Oz различают две системы прямоугольных декартовых координат в пространстве – правую и левую. В правой системе (рис. 1.8), если смотреть со стороны положительного направления оси Oz, поворот по кратчайшему пути от положительного направления оси Ox к положительному направлению оси Oy происходит против часовой стрелки; в левой системе – по часовой. В дальнейшем будем пользоваться только правой системой координат.

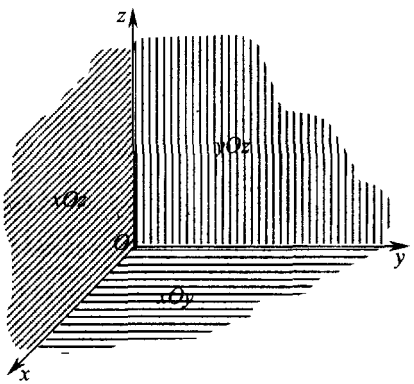


Рис. 1.8

Три координатные оси попарно определяют три *координатные плоскости*, через них проходящие: плоскости xOy, xOz, yOz (рис. 1.8).

Положение произвольной точки M в пространстве определяется следующим образом: через точку M проводят три плоскости, параллельные координатным плоскостям, которые пересекают оси координат в точках A(на оси Ox), B(на оси Oy) и C(на оси Oz) (рис. 1.9), координаты этих точек на соответствующих осях Ox, Oy и Oz и принимают за координаты точки M в пространстве, что обозначают записью $M(x, y, z)$.

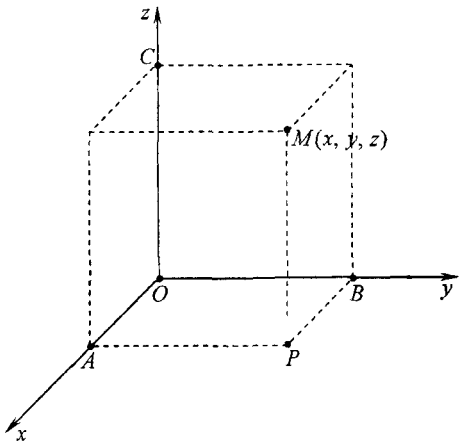


Рис. 1.9

Три координатные плоскости делят пространство на восемь октантов, которые нумеруют следующим образом: октант, лежащий над первой четвертью плоскости xOy - первый, лежащий под ней – пятый, соответственно октанты, лежащие над и под второй четвертью плоскости xOy, - второй и шестой; над и под третьей четвертью – третий и седьмой; над и под четвертой четвертью – четвертый и восьмой.

Каждому октанту соответствует определенная комбинация знаков координат (таблица 1.1)

Таблица 1.1

октанты / координаты	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII
x	+	-	-	+	+	-	-	+
y	+	+	-	-	+	+	-	-
z	+	+	+	+	-	-	-	-

2. ЭЛЕМЕНТЫ ВЕКТОРНОЙ АЛГЕБРЫ

2.1. Основные понятия векторной алгебры. Величины, с которыми встречаемся в физике, механике, технике и т. д., можно разделить на два типа: *скалярные*, полностью определяемые своим числовым значением (объем, масса, гемпература, коэффициент трения и т. д.), и *векторные*, характеризуемые как числовым значением, так и направлением (сила, скорость, ускорение и т. д.). Для описания векторных величин введено понятие вектора.

Вектор – это направленный отрезок, то есть отрезок, имеющий определенную длину и направление. Обозначать вектор будем или одной буквой $\bar{a}, \bar{b}, \ldots$ или символом $\overline{AB}$, где A - начало вектора, B - конец вектора. Вектор $\overline{BA}$ называется *противоположным* вектору $\overline{AB}$. Вектор противоположный вектору $\bar{a}$, обозначается $-\bar{a}$.

Длиной или *модулем* вектора называется расстояние между началом и концом вектора и обозначается $|\bar{a}|, |\overline{AB}|$. Вектор, длина которого равна

нулю, называется *нулевым вектором* и обозначается $\overline{0}$. Нулевой вектор не имеет направления.

Вектор, длина которого равна единице, называется *единичным вектором* и обозначается $\overline{e}$. Единичный вектор, направление которого совпадает с направлением вектора $\overline{a}$, называется *ортом* вектора $\overline{a}$ и обозначается $\overline{a}^0$.

Векторы $\overline{a}$ и $\overline{b}$ называются *коллинеарными*, если они лежат на параллельных прямых, в частности, на одной и той же прямой, обозначается это так: $\overline{a} \parallel \overline{b}$. Нулевой вектор считается коллинеарным любому вектору.

Два вектора $\overline{a}$ и $\overline{b}$ называются *равными*, если они коллинеарны, одинаково направлены и имеют одинаковые длины, обозначается это так: $\overline{a} = \overline{b}$.

Векторы называются *компланарными*, если они лежат в параллельных плоскостях, в частности, в одной плоскости.

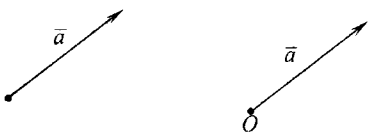


Рис. 2.1

В векторной алгебре часто употребляется *операция параллельного переноса*, или, что тоже самое, *операция приведения вектора к данной точке (полюсу)*. Под этой операцией понимается такой параллельный перенос вектора, при котором его начало будет совпадать с выбранной точкой (полюсом) (рис. 2.1).

2.2. Линейные операции над векторами в геометрической форме, их свойства. *Линейными операциями* над векторами называются операции сложения и вычитания векторов и умножение вектора на число.

Суммой двух произвольных векторов $\overline{a}$ *и* $\overline{b}$ называется вектор, обозначаемый $\overline{a} + \overline{b}$, идущий из начала вектора $\overline{a}$ (первого слагаемого) в конец вектора $\overline{b}$ (второго слагаемого) при условии, что вектор $\overline{b}$ приложен к концу вектора $\overline{a}$ (рис. 2.2). Это правило сложения двух векторов называется *правилом треугольника*.

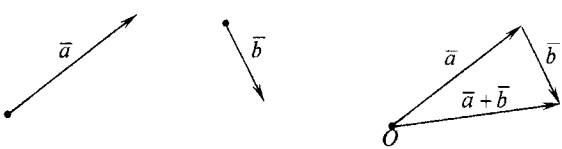


Рис. 2.2

Сумму двух векторов можно найти по *правилу параллелограмма* (рис. 2.3).

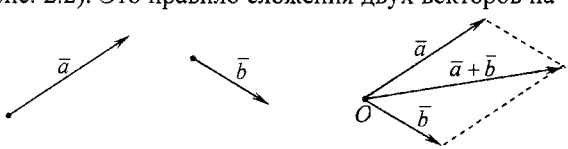


Рис. 2.3

Для сложения нескольких векторов, например, $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}, \bar{d}$, поступим следующим образом: выберем полюс O, перенесем вектор $\bar{a}$ в точку

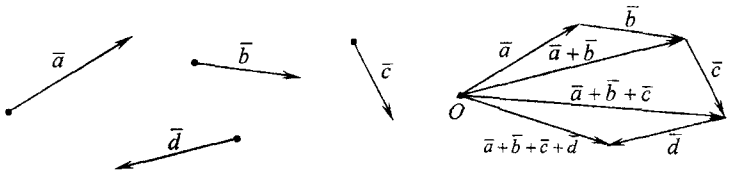


Рис. 2.4

O, из конца вектора $\bar{a}$ отложим вектор $\bar{b}$, из конца вектора $\bar{b}$ отложим вектор $\bar{c}$, из конца вектора $\bar{c}$ отложим вектор $\bar{d}$. Замыкающий вектор пространственной ломаной, идущий из начала первого слагаемого $\bar{a}$, в конец последнего слагаемого $\bar{d}$, называется суммой данных векторов (рис. 2.4). Это правило сложения векторов называется *правилом многоугольника.*

Разностью двух произвольных векторов $\bar{a}$ *и* $\bar{b}$ называется вектор $\bar{c} = \bar{a} - \bar{b}$ такой, что $\bar{b} + \bar{c} = \bar{a}$ (рис. 2.5).

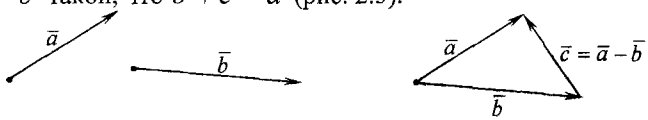


Рис. 2.5

Замечание 2.1. Разность векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$ является второй направленной диагональю в параллелограмме, построенном на векторах $\bar{a}$ и $\bar{b}$ (рис. 2.6). ▲



Рис. 2.6

Произведением вектора $\bar{a}$ *на число* λ называется вектор $\bar{b} = \lambda \bar{a}$, коллинеарный вектору $\bar{a}$, длина которого равна длине вектора $\bar{a}$, умноженной на абсолютную величину числа λ, $|\bar{b}| = |\lambda \bar{a}| = |\lambda| \cdot |\bar{a}|$.

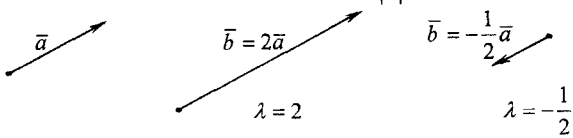


Рис. 2.7

При $\lambda > 0$ вектор $\bar{b}$ направлен в ту же сторону, что и вектор $\bar{a}$, при $\lambda < 0$ - в противоположную вектору $\bar{a}$ сторону (рис. 2.7).

Замечание 2.2. Если $\bar{b} \parallel \bar{a}$, то найдется такое число λ $(\lambda \neq 0)$, что $\bar{b} = \lambda \bar{a}$. ▲

Замечание 2.3. Всегда $\bar{a} = |\bar{a}| \cdot \bar{a}^0$, то есть любой вектор равен произведению его модуля на соответствующий орт. ▲

Замечание 2.4. Векторы можно вычитать по правилу (рис. 2.8)

$$\bar{a} - \bar{b} = \bar{a} + (-\bar{b}).$$ ▲



Рис. 2.8

Свойства линейных операций над векторами:

1. $\bar{a} + \bar{b} = \bar{b} + \bar{a}$ - переместительное свойство.

2. $(\bar{a} + \bar{b}) + \bar{c} = \bar{a} + (\bar{b} + \bar{c})$ - сочетательное свойство.

3. $\lambda(\mu\bar{a}) = (\lambda\mu)\bar{a}$ - сочетательное свойство произведения вектора на число.

4. $(\lambda + \mu)\bar{a} = \lambda\bar{a} + \mu\bar{a}$ - распределительное свойство по отношению к числовому множителю.

5. $\lambda(\bar{a} + \bar{b}) = \lambda\bar{a} + \lambda\bar{b}$ - распределительное свойство по отношению к векторному множителю.

Свойства линейных операций позволяют производить над векторами обычные *алгебраические действия* (перестановка и группировка слагаемых, перенос членов из одной части равенства в другую, приведение подобных, сокращение).

Пример 2.1. Построить векторы $\bar{a} - 2\bar{b}$ и $\bar{b} - \dfrac{\bar{a}}{2}$ по векторам $\bar{a}$ и $\bar{b}$.

Решение: Смотри рисунок 2.9.

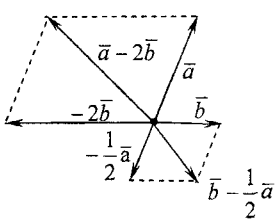


Рис. 2.9

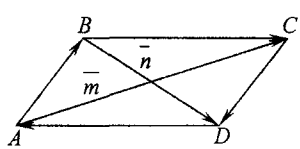


Рис. 2.10

Пример 2.2. Векторы $\overline{AC} = \overline{m}$ и $\overline{BD} = \overline{n}$ служат диагоналями параллелограмма $ABCD$. Выразить векторы $\overline{AB}, \overline{BC}, \overline{CD}, \overline{DA}$ через векторы $\overline{m}$ и $\overline{n}$.

Решение: Построим параллелограмм $ABCD$ (рис. 2.10). Выразим диагонали параллелограмма $\overline{AC} = \overline{m}$ и $\overline{BD} = \overline{n}$ через его стороны, используя определение суммы и разности двух векторов соответственно,

$$\overline{n} = \overline{AB} + \overline{AD}, \overline{m} = \overline{AB} - \overline{AD}. \qquad (*)$$

Найдем из этих равенств $\overline{AB}$, для чего сложим равенства и результат поделим на 2: $\overline{AB} = \frac{1}{2}(\overline{m} + \overline{n})$, но $\overline{CD} = -\overline{AB}$, значит $\overline{CD} = -\frac{1}{2}(\overline{m} + \overline{n})$.

Для определения $\overline{AD}$ из первого равенства $(*)$ вычтем второе и поделим результат на 2: $\overline{AD} = \frac{1}{2}(\overline{m} - \overline{n})$, но $\overline{AD} = \overline{BC} = \frac{1}{2}(\overline{m} - \overline{n})$, а $\overline{DA} = -\overline{\mathrm{AD}} = \frac{1}{2}(\overline{n} - \overline{m})$.

Ответ: $\overline{AB} = \frac{1}{2}(\overline{m} + \overline{n})$, $\overline{BC} = \frac{1}{2}(\overline{m} - \overline{n})$, $\overline{CD} = -\frac{1}{2}(\overline{n} + \overline{m})$, $\overline{DA} = \frac{1}{2}(\overline{n} - \overline{m})$.

Пример 2.3. В треугольнике OAB даны векторы $\overline{a} = \overline{OA}$ и $\overline{b} = \overline{OB}$. Найти векторы $\overline{MA}$ и $\overline{MB}$, где M - середина стороны AB.

Решение: Построим треугольник OAB (рис. 2.11). Согласно определению разности двух векторов, имеем

$$\overline{AB} = \overline{OB} - \overline{OA} = \overline{b} - \overline{a}.$$

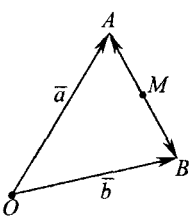


Рис. 2.11

Вектор $\overline{MB}$ направлен в ту же сторону и по той же прямой, что и $\overline{AB}$, но длина его в два раза меньше длины вектора $\overline{AB}$, поэтому

$$\overline{MB} = \frac{1}{2}\overline{AB} = \frac{1}{2}(\overline{b} - \overline{a}).$$

Вектор $\overline{MA}$ имеет ту же длину, что и $\overline{MB}$, но направлен в противоположную сторону. Следовательно,

$$\overline{MA} = -\overline{MB} = -\frac{1}{2}(\overline{b} - \overline{a}) = \frac{1}{2}(\overline{a} - \overline{b}).$$

Ответ: $\overline{MA} = \frac{1}{2}(\overline{a} - \overline{b})$, $\overline{MB} = \frac{1}{2}(\overline{b} - \overline{a})$.

2.3. Проекция вектора на ось. Пусть в пространстве дана ось l и вектор $\overline{AB}$. Проведем через точки A и B плоскости, перпендикулярные оси l (рис. 2.12). Через A' и B' обозначим точки пересечения этих плоскостей с осью l соответственно. Точки A' и B' называются *проекциями точек A и B на ось l*. На оси l рассмотрим вектор $\overline{A'B'}$.

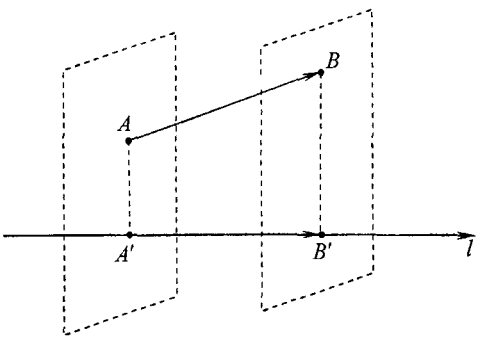


Рис. 2.12

Проекцией вектора $\overline{AB}$ на ось l называется число, равное длине вектора $\overline{A'B'}$, если направления вектора $\overline{AB}$ и оси l совпадают, и равное $-\left|\overline{A'B'}\right|$, если направление вектора $\overline{AB}$ противоположно направлению оси l.

Проекция вектора $\overline{AB}$ на ось l обозначается следующим образом: $np_l\overline{AB}$. Если $\overline{AB}=\overline{0}$ или $\overline{AB}\perp l$, то $np_l\overline{AB}=0$.

Основные свойства проекции:

Свойство 1. Проекция вектора $\overline{a}$ на ось l равна произведению модуля вектора $\overline{a}$ на косинус угла φ между вектором и осью (рис. 2.13):

$$np_l\overline{a}=\left|\overline{a}\right|\cos\varphi. \qquad (2.1)$$

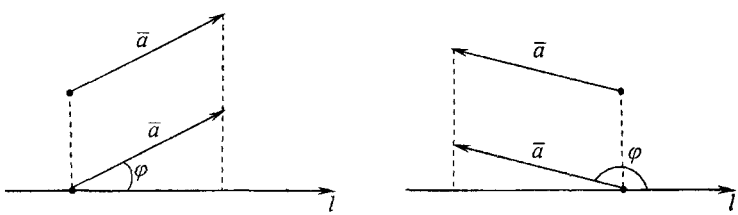


Рис. 2.13

Свойство 2. Проекция суммы нескольких векторов на одну и ту же ось l равна сумме проекций векторов на эту ось:

$$np_l(\overline{a}+\overline{b}+\overline{c})=np_l\overline{a}+np_l\overline{b}+np_l\overline{c}.$$

Свойство 3. Проекция на ось l произведения вектора $\overline{a}$ на число λ равна произведению проекции вектора $\overline{a}$ на это число:

$$np_l(\lambda\,\overline{a})=\lambda\,np_l\overline{a}.$$

Пример 2.4. Пусть $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ - единичные векторы, составляющие с осью l соответственно углы $\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}, \pi$. Найти проекцию на ось l вектора $3\bar{a} + 2\bar{b} + \bar{c}$.

Решение: Согласно свойствам 2 и 3, имеем

$$np_l(3\bar{a} + 2\bar{b} + \bar{c}) = 3np_l\bar{a} + 2np_l\bar{b} + np_l\bar{c}.$$

По свойству 1:

$$np_l\bar{a} = |\bar{a}|\cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2},\ np_l\bar{b} = |\bar{a}|\cos\frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2},\ np_l\bar{c} = |\bar{a}|\cos\pi = -1,$$

так как $|\bar{a}| = |\bar{b}| = |\bar{c}| = 1$.

Следовательно, $np_l(3\bar{a} + 2\bar{b} + \bar{c}) = 3\cdot\frac{1}{2} + 2\cdot(-\frac{1}{2}) - 1 = -\frac{1}{2}$.

Ответ: $np_l(3\bar{a} + 2\bar{b} + \bar{c}) = -\frac{1}{2}$.

2.4. Разложение вектора по ортам координатных осей. Модуль вектора. Направляющие косинусы. Рассмотрим в пространстве прямоугольную декартовую систему координат $Oxyz$. Отметим на координатных осях Ox, Oy, Oz единичные векторы (орты), обозначаемые $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$ соответственно (рис. 2.14). Тройка векторов $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$ называется *декартовым базисом*. Возьмем произвольный вектор $\bar{a}$ и совместим его начало с точкой начала координат, $\bar{a} = \overline{OM}$. Проекциями вектора $\bar{a} = \overline{OM}$ на координатные оси будут:

$$np_x\bar{a} = |\overline{OM_1}| = a_x,$$

$$np_y\bar{a} = |\overline{OM_2}| = a_y,$$

$$np_z\bar{a} = |\overline{OM_3}| = a_z,$$

а сам вектор $\bar{a} = \overline{OM}$ является одной из диагоналей прямоугольного параллелепипеда, построенного на векторах $\overline{OM_1}, \overline{OM_2}, \overline{OM_3}$.

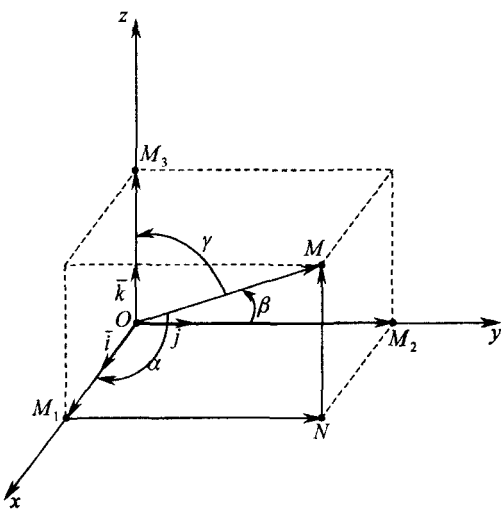


Рис. 2.14

По определению суммы нескольких векторов находим $\bar{a} = \overline{OM_1} + \overline{M_1N} + \overline{NM}$. Но $M_1N = \overline{OM_2}$ и $\overline{NM} = \overline{OM_3}$, тогда

$$\bar{a} = \overline{OM_1} + \overline{OM_2} + \overline{OM_3}.$$

Но, согласно замечанию 2.3,

$$\overline{OM_1} = |\overline{OM_1}|\bar{i}, \overline{OM_2} = |\overline{OM_2}|\bar{j}, \overline{OM_3} = |\overline{OM_3}|\bar{k}$$

и с учетом обозначений проекций вектора $\bar{a} = \overline{OM}$ на оси Ox, Oy, Oz:

$$\bar{a} = a_x\bar{i} + a_y\bar{j} + a_z\bar{k}. \qquad (2.2)$$

Формула (2.2) называется *разложением вектора по декартовому базису* $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$. Это разложение единственно. Числа a_x, a_y, a_z называются *координатами вектора* $\bar{a}$ в декартовом базисе. Таким образом, координаты вектора есть его проекции на соответствующие координатные оси. Векторное равенство (2.2) можно записать в символической форме:

$$\bar{a} = (a_x, a_y, a_z).$$

Зная проекции вектора $\bar{a}$ на координатные оси, можно найти *выражение для модуля вектора* $\bar{a}$, используя теорему о квадрате длины диагонали прямоугольного параллелепипеда:

$$|\overline{OM}|^2 = |\overline{OM_1}|^2 + |\overline{OM_2}|^2 + |\overline{OM_3}|^2,$$

то есть

$$|\bar{a}| = \sqrt{a_x{}^2 + a_y{}^2 + a_z{}^2}\ - \qquad (2.3)$$

модуль вектора равен корню квадратному из суммы квадратов его проекций на оси координат (из суммы квадратов координат).

Обозначим через α, β, γ углы, образованные вектором $\bar{a} = \overline{OM}$ с положительными направлениями осей координат Ox, Oy, Oz соответственно (рис. 2.14). По свойству 1 проекции вектора на ось имеем

$$a_x = |\bar{a}|\cos\alpha, \quad a_y = |\bar{a}|\cos\beta, \quad a_z = |\bar{a}|\cos\gamma. \qquad (2.4)$$

Числа $\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$ называются *направляющими косинусами вектора* $\bar{a}$ и определяются по формулам:

$$\cos\alpha = \frac{a_x}{|\bar{a}|}, \quad \cos\beta = \frac{a_y}{|\bar{a}|}, \quad \cos\gamma = \frac{a_z}{|\bar{a}|}. \qquad (2.5)$$

Подставляя выражение (2.4) в (2.3) и возводя полученное выражение в квадрат, получим соотношение

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1, \qquad (2.6)$$

таким образом, *сумма квадратов направляющих косинусов ненулевого вектора равна единице.*

Замечание 2.5. Координатами единичного вектора $\bar{e}$ являются его направляющие косинусы, то есть

$$\bar{e} = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma). \qquad (2.7)\blacktriangle$$

Замечание 2.6. Вектор $\overline{OM}$, соединяющий произвольную точку $M(x, y, z)$ с началом координат, называется *радиус-вектором* точки M и обозначается через $\bar{r}$, то есть $\overline{OM} = \bar{r}$. Координаты радиус-вектора совпадают с координатами точки M (рис. 2.14), поэтому

$$\bar{r} = x\cdot\bar{i} + y\cdot\bar{j} + z\cdot\bar{k} \text{ или } \bar{r} = (x, y, z). \qquad (2.8)\blacktriangle$$

Замечание 2.7. Пусть $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ - любые три отличные от нуля некомпланарные вектора, такая тройка векторов называется *базисом*. Любой вектор $\bar{d}$ допускает, и при том единственное, представление вида

$$\bar{d} = \lambda_1\bar{a} + \lambda_2\bar{b} + \lambda_3\bar{c}.$$

Числа λ_1, λ_2, λ_3 называются *координатами вектора* $\bar{d}$ *относительно базиса* $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$.▲

Пример 2.5. Найти направляющие косинусы вектора $\bar{a} = 3\bar{i} + 4\bar{j} - 12\bar{k}$ и его орт.

Решение: Найдем длину вектора $\bar{a}$ по формуле (2.3)

$$|\bar{a}| = \sqrt{3^2 + 4^2 + (-12)^2} = \sqrt{9+16+144} = \sqrt{169} = 13.$$

По формулам (2.5) определим направляющие косинусы:

$$\cos\alpha = \frac{a_x}{|\bar{a}|} = \frac{3}{13}, \quad \cos\beta = \frac{a_y}{|\bar{a}|} = \frac{4}{13}, \quad \cos\gamma = \frac{a_z}{|\bar{a}|} = -\frac{12}{13}.$$

А так как направляющие косинусы вектора $\bar{a}$ являются координатами единичного вектора $\bar{a}^0$, то $\bar{a}^0 = \left(\frac{3}{13}, \frac{4}{13}, -\frac{12}{13}\right)$.

Ответ: $\cos\alpha = \frac{3}{13}, \cos\beta = \frac{4}{13}, \cos\gamma = -\frac{12}{13}, \bar{a}^0 = \left(\frac{3}{13}, \frac{4}{13}, -\frac{12}{13}\right)$.

Пример 2.6. Вектор $\bar{a}$ составляет с осями координат острые углы, причем $\alpha = 45°$, $\beta = 60°$. Найти координаты вектора $\bar{a}$, если $|\bar{a}| = 3$.

Решение: Сначала из соотношения (2.6) найдем угол γ.

$$\cos^2\gamma = 1 - \cos^2\alpha - \cos^2\beta = 1 - (\cos 45°)^2 - (\cos 60°)^2 =$$

$$= 1 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}.$$

Так как γ - угол острый, то $\cos\gamma = \frac{1}{2}$ и $\gamma = 60°$. Теперь, согласно формулам (2.4), найдем координаты вектора $\bar{a}$:

$$a_x = 3\cos 45° = \frac{3\sqrt{2}}{2},\ a_y = 3\cos 60° = \frac{3}{2},\ a_z = 3\cos 60° = \frac{3}{2}.$$

Ответ: $\bar{a} = \left(\frac{3\sqrt{2}}{2}, \frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right)$.

2.5. Действия над векторами в координатной форме. Пусть векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$ заданы в координатной форме:

$$\bar{a} = (a_x, a_y, a_z) \text{ и } \bar{b} = (b_x, b_y, b_z)$$

или, что то же самое,

$$\bar{a} = a_x\bar{i} + a_y\bar{j} + a_z\bar{k} \text{ и } \bar{b} = b_x\bar{i} + b_y\bar{j} + b_z\bar{k}.$$

Если *векторы* $\bar{a}$ *и* $\bar{b}$ *равны, то равны и их одноименные координаты* (справедливо и обратное). Поэтому из векторного равенства $\bar{a} = \bar{b}$ следуют три скалярных:

$$a_x = b_x, a_y = b_y, a_z = b_z. \tag{2.9}$$

Если *векторы* $\bar{a}$ *и* $\bar{b}$ *коллинеарны, то существует* λ, *такое что* $\bar{b} = \lambda\bar{a}$, то есть

$$b_x\bar{i} + b_y\bar{j} + b_z\bar{k} = \lambda a_x\bar{i} + \lambda a_y\bar{j} + \lambda a_z\bar{k}.$$

Из этого равенства получаем

$$\frac{b_x}{a_x} = \frac{b_y}{a_y} = \frac{b_z}{a_z} = \lambda, \tag{2.10}$$

то есть *координаты коллинеарных векторов пропорциональны* (справедливо и обратное).

Используя свойства проекций векторов и координатную форму записи векторов, можно получить формулы для вычисления координат суммы и разности двух векторов и координат произведения вектора на число:

$$\bar{a} \pm \bar{b} = (a_x \pm b_x)\bar{i} + (a_y \pm b_y)\bar{j} + (a_z \pm b_z)\bar{k} \quad \textit{или}$$
$$\bar{a} \pm \bar{b} = (a_x \pm b_x, a_y \pm b_y, a_z \pm b_z), \tag{2.11}$$

то есть *при сложении (вычитании) векторов их одноименные координаты складываются (вычитаются);*

$$\lambda\bar{a} = \lambda a_x\bar{i} + \lambda a_y\bar{j} + \lambda a_z\bar{k} \quad \textit{или}$$
$$\lambda\bar{a} = (\lambda a_x, \lambda a_y, \lambda a_z), \tag{2.12}$$

то есть *при умножении вектора на число координаты вектора умножаются на это число.*

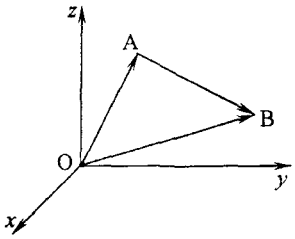


Рис. 2.15

Найдем координаты вектора $\overline{AB}$, заданного координатами начала $A(x_1, y_1, z_1)$ и координатами конца $B(x_2, y_2, z_2)$ (рис. 2.15). Согласно определению разности векторов $\overline{AB} = \overline{OB} - \overline{OA}$. Далее по формуле (2.11), находим

$$\overline{AB} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1), \quad (2.13)$$

то есть координаты вектора равны *разностям одноименных координат его конца и начала.*

Длина вектора $\overline{AB}$, а также расстояние между точками A и B, определяется по формуле (что следует из (2.3) и (2.13))

$$\left|\overline{AB}\right| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}. \quad (2.14)$$

Пример 2.7. При каких значениях α и β векторы $\bar{a} = 2\bar{i} + \alpha\bar{j} + \bar{k}$ и $\bar{b} = 3\bar{i} - 6\bar{j} + \beta\bar{k}$ коллинеарны?

Решение: Векторы $\bar{a} = (2, \alpha, 1)$ и $\bar{b} = (3, -6, \beta)$ коллинеарны, если их координаты пропорциональны, то есть выполнено условие (2.10): $\frac{3}{2} = \frac{-6}{\alpha} = \frac{\beta}{1}$. Отсюда: $\frac{3}{2} = \frac{-6}{\alpha} \Rightarrow \alpha = -4$; $\frac{3}{2} = \frac{\beta}{1} \Rightarrow \beta = \frac{3}{2}$.

Ответ: $\alpha = -4, \beta = \frac{3}{2}$.

Пример 2.8. Доказать, что четырехугольник с вершинами $A(2, 1, -4), B(1, 3, 5), C(7, 2, 3), D(8, 0, -6)$ есть параллелограмм. Найти длины его сторон.

Решение: Для доказательства достаточно установить, что векторы, *совпадающие с противоположными сторонами* четырехугольника $ABCD$, равны. Найдем векторы $\overline{AB}$ и $\overline{DC}$ по формуле (2.13):

$$\overline{AB} = (1-2)\bar{i} + (3-1)\bar{j} + (5+4)\bar{k} = -\bar{i} + 2\bar{j} + 9\bar{k},$$

$$\overline{DC} = (7-8)\bar{i} + (2-0)\bar{j} + (3+6)\bar{k} = -\bar{i} + 2\bar{j} + 9\bar{k}.$$

Таким образом, $\overline{AB} = \overline{DC}$, значит $ABCD$ - параллелограмм. По формуле (2.3) (можно и по (2.14)) найдем длину стороны AB как длину вектора $\overline{AB} \Rightarrow \left|\overline{AB}\right| = \sqrt{(-1)^2 + 2^2 + 9^2} = \sqrt{1+4+81} = \sqrt{86}$.

По формуле (2.14) найдем длину стороны AD параллелограмма $ABCD$

$$\left|\overline{AD}\right| = \sqrt{(8-2)^2 + (0-1)^2 + (-6+4)^2} = \sqrt{36+1+4} = \sqrt{41}.$$

Ответ: $\left|\overline{AB}\right| = \sqrt{86}, \left|\overline{AD}\right| = \sqrt{41}$.

2.6. Деление отрезка в данном отношении. Пусть даны точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$ и $M_2(x_2, y_2, z_2)$. Требуется найти координаты точки $M(x, y, z)$, делящей отрезок M_1M_2 в отношении $k:1$, то есть $\frac{M_1M}{MM_2} = \frac{k}{1}$ (рис. 2.16). Через $\bar{r}_1, \bar{r}_2, \bar{r}$ обозначим радиус-векторы точек M_1, M_2, M соответственно.

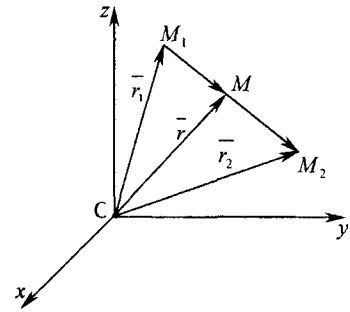


Рис. 2.16

Так как векторы $\overline{M_1M} = \bar{r} - \bar{r}_1$ и $\overline{MM_2} = \bar{r}_2 - \bar{r}$ коллинеарны, то

$$\overline{M_1M} = k\overline{MM_2}$$

или

$$\bar{r} - \bar{r}_1 = k(\bar{r}_2 - \bar{r}),$$

откуда получаем

$$\bar{r} = \frac{\bar{r}_1 + k\bar{r}_2}{1+k}. \qquad (2.15)$$

Из векторной формулы (2.15) получаем формулы для определения координат точки $M(x, y, z)$:

$$x = \frac{x_1 + kx_2}{1+k},\ y = \frac{y_1 + ky_2}{1+k},\ z = \frac{z_1 + kz_2}{1+k}. \qquad (2.16)$$

В частном случае, если точка M делит отрезок пополам, то $k = 1$ и

$$\bar{r} = \frac{\bar{r}_1 + \bar{r}_2}{2}, \qquad (2.15а)$$

или в координатной форме

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2},\ y = \frac{y_1 + y_2}{2},\ z = \frac{z_1 + z_2}{2}. \qquad (2.16а)$$

Пример 2.9. Даны точки $M_1(-1, 0, 3)$, $M_2(1, 4, 5)$. Найти координаты точки $M(x, y, z)$, делящей отрезок M_1M_2: а) пополам; б) в отношении 2:1.

Решение: а) Так как $k = 1$, то воспользуемся формулами (2.16а):

$$x = \frac{-1+1}{2} = 0,\quad y = \frac{0+4}{2} = 2,\quad z = \frac{3+5}{2} = 4.$$

б) Так как $k = 2$, то по формулам (2.16) получим:

$$x = \frac{(-1)+2\cdot 1}{3} = \frac{1}{3},\ y = \frac{0+2\cdot 4}{3} = \frac{8}{3},\ z = \frac{3+2\cdot 5}{3} = \frac{13}{3}.$$

Ответ: а) $M(0, 2, 4)$; б) $M\left(\frac{1}{3}, \frac{8}{3}, \frac{13}{3}\right)$.

2.7. Скалярное произведение векторов. *Углом между двумя векторами* $\bar{a}$ и $\bar{b}$ называется наименьший угол между этими векторами, приведенными к общему началу; обозначается $\varphi = (\bar{a}\hat{}\bar{b}), \varphi \in [0, \pi]$. Векторы называются *ортогональными*, если угол между ними равен $\frac{\pi}{2}$.

Скалярным произведением двух ненулевых векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$ называется *число,* равное произведению длин этих векторов на косинус угла между ними; обозначается $\bar{a} \cdot \bar{b}$ или $(\bar{a}, \bar{b})$. Таким образом,

$$\bar{a} \cdot \bar{b} = |\bar{a}| \cdot |\bar{b}| \cdot \cos\varphi. \qquad (2.17)$$

Спроектируем вектор $\bar{b}$ на направление вектора $\bar{a}$ (рис. 2.17). Тогда $np_{\bar{a}}\bar{b} = |\bar{b}| \cdot \cos\varphi$ и формула (2.17) приобретает вид $\bar{a} \cdot \bar{b} = |\bar{a}| \cdot np_{\bar{a}}\bar{b}$. Аналогично, спроектировав вектор $\bar{a}$ на направление вектора $\bar{b}$, получим $np_{\bar{b}}\bar{a} = |\bar{a}| \cdot \cos\varphi$. Значит можно записать

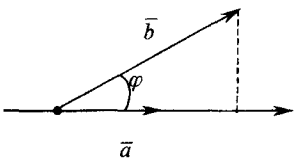


Рис. 2.17

$$\bar{a} \cdot \bar{b} = |\bar{a}| \cdot np_{\bar{a}}\bar{b} = |\bar{b}| \cdot np_{\bar{b}}\bar{a}. \qquad (2.18)$$

Свойства скалярного произведения:

1. $\bar{a} \cdot \bar{b} = \bar{b} \cdot \bar{a}$ - переместительное свойство.

2. $(\lambda\bar{a}) \cdot \bar{b} = \lambda(\bar{a} \cdot \bar{b})$ - сочетательное свойство относительно числового множителя.

3. $\bar{a} \cdot (\bar{b} + \bar{c}) = \bar{a} \cdot \bar{b} + \bar{a} \cdot \bar{c}$ - распределительное свойство.

4. $\bar{a} \cdot \bar{a} = \bar{a}^2 = |\bar{a}|^2$ - *скалярный квадрат вектора равен квадрату его длины,* в частности $\bar{i}^2 = \bar{j}^2 = \bar{k}^2 = 1$.

5. Если ненулевые векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$ ортогональны, то $\bar{a} \cdot \bar{b} = 0$.

6. Если векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$ ненулевые и $\bar{a} \cdot \bar{b} = 0$, то векторы ортогональны.

Теорема. *Необходимым и достаточным условием ортогональности ненулевых векторов* $\bar{a}$ *и* $\bar{b}$ *является равенство нулю их скалярного произведения.*

Теорема следует из свойств 5 и 6.

7. Скалярное произведения ортов $\bar{i}$, $\bar{j}$, $\bar{k}$ сведем в таблицу 2.1.

Таблица 2.1

	$\bar{i}$	$\bar{j}$	$\bar{k}$
$\bar{i}$	1	0	0
$\bar{j}$	0	1	0
$\bar{k}$	0	0	1

Скалярное произведение векторов, заданных координатами. Пусть заданы два вектора

$$\bar{a} = a_x\bar{i} + a_y\bar{j} + a_z\bar{k} \text{ и } \bar{b} = b_x\bar{i} + b_y\bar{j} + b_z\bar{k}.$$

Найдем скалярное произведение векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$, перемножая их как многочлены и используя свойства 1-7 скалярного произведения:

$$\bar{a}\cdot\bar{b} = (a_x\bar{i} + a_y\bar{j} + a_z\bar{k})(b_x\bar{i} + b_y\bar{j} + b_z\bar{k}) = a_xb_x\bar{i}^2 + a_xb_y\bar{i}\bar{j} + a_xb_z\bar{i}\bar{k} +$$

$$+ a_yb_x\bar{j}\bar{i} + a_yb_y\bar{j}^2 + a_yb_z\bar{j}\bar{k} + a_zb_x\bar{k}\bar{i} + a_zb_y\bar{k}\bar{j} + a_zb_z\bar{k}^2 = a_xb_x + 0 + 0 +$$

$$+ 0 + a_yb_y + 0 + 0 + 0 + a_zb_z.$$

Таким образом,

$$\bar{a}\cdot\bar{b} = a_xb_x + a_yb_y + a_zb_z \text{ -} \qquad (2.19)$$

скалярное произведение векторов равно сумме произведений их одноименных координат

Приложения скалярного произведения:

1. Проекция вектора на заданное направление. Из формул (2.18) найдем проекцию вектора $\bar{a}$ $(\bar{b})$ на направление вектора $\bar{b}$ $(\bar{a})$:

$$np_{\bar{b}}\bar{a} = \frac{\bar{a}\cdot\bar{b}}{|\bar{b}|} = \frac{a_xb_x + a_yb_y + a_zb_z}{\sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2}} \qquad (2.20)$$

$$\left(np_{\bar{a}}\bar{b} = \frac{\bar{a}\cdot\bar{b}}{|\bar{a}|} = \frac{a_xb_x + a_yb_y + a_zb_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}} \right). \qquad (2.20а)$$

2. Угол между векторами. Из формулы (2.17) найдем угол между двумя ненулевыми векторами $\bar{a}$ и $\bar{b}$:

$$\cos\varphi = \frac{\bar{a}\cdot\bar{b}}{|\bar{a}|\cdot|\bar{b}|} = \frac{a_xb_x + a_yb_y + a_zb_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}\cdot\sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2}}. \qquad (2.21)$$

3. Работа постоянной силы. Пусть материальная точка перемещается прямолинейно из положения A в положение B под действием постоянной силы $\bar{F}$, образующей угол φ с направлением перемещения $\overline{AB} = \bar{S}$ (рис. 2.18). Из механики известно, что работа A силы $\bar{F}$ при перемещении $\bar{S}$ равна

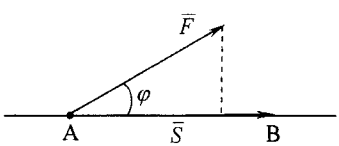


Рис. 2.18

$$A = |\bar{F}|\cdot|\bar{S}|\cos\varphi = \bar{F}\cdot\bar{S}. \qquad (2.22)$$

Таким образом, *работа постоянной силы при прямолинейном перемещении ее точки приложения равна скалярному произведению вектора силы на вектор перемещения*

Пример 2.10. При каких значениях α векторы $\bar{a}=(\alpha,2,1)$ и $\bar{b}=(4,\alpha,-3)$ будут ортогональны?

Решение: Необходимым и достаточным условием ортогональности двух ненулевых векторов является равенство нулю их скалярного произведения, то есть

$$\bar{a}\cdot\bar{b}=\alpha\cdot 4+2\cdot\alpha+1\cdot(-3)=6\alpha-3=0.$$

Следовательно, при $\alpha=\dfrac{1}{2}$ данные векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$ ортогональны.

Ответ: $\alpha=\dfrac{1}{2}$.

Пример 2.11. На материальную точку действуют силы: $\overline{f_1}=2\bar{i}-\bar{j}+\bar{k}$, $\overline{f_2}=-\bar{i}+2\bar{j}+2\bar{k}$, $\overline{f_3}=\bar{i}+\bar{j}-2\bar{k}$. Найти работу равнодействующей $\bar{R}$ этих сил при перемещении из положения $A(2,-1,0)$ в положение $B(4,1,-1)$.

Решение: Найдем равнодействующую $\bar{R}$ по формуле (2.11)

$$\bar{R}=\overline{f_1}+\overline{f_2}+\overline{f_3}=(2-1+1)\bar{i}+(-1+2+1)\bar{j}+(1+2-2)\bar{k}=2\bar{i}+2\bar{j}+\bar{k}.$$

Найдем вектор перемещения $\bar{S}=\overline{AB}$ по формуле (2.13)

$$\bar{S}=\overline{AB}=(4-2)\bar{i}+(1+1)\bar{j}+(-1+0)\bar{k}=2\bar{i}+2\bar{j}-\bar{k}.$$

Найдем искомую работу по формулам (2.22):

$$A=\bar{R}\cdot\bar{S}=2\cdot 2+2\cdot 2+1\cdot(-1)=4+4-1=7.$$

Ответ: $A=7$.

Пример 2.12. Даны вершины треугольника $A(3,2)$, $B(5,1)$, $C(1,-2)$. Сделать чертеж и найти: 1) длину стороны AC; 2) проекцию стороны AB на сторону AC, 3) внутренний угол при вершине A.

Решение: Чертеж треугольника приведен на рисунке 2.19.

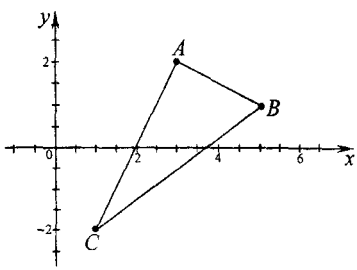


Рис. 2.19

1) Длина стороны AC равна длине вектора $\overline{AC}$ (формула (2.14)):

$$\left|\overline{AC}\right|=\sqrt{(1-3)^2+(-2-2)^2}=\sqrt{20}.$$

2) Проекция стороны AB на сторону AC равна прекции вектора $\overline{AB}$ на направление вектора $\overline{AC}$. Найдем координаты векторов $\overline{AB}$ и $\overline{AC}$ по формуле (2.11):

$$\overline{AB}=(5-3)\bar{i}+(1-2)\bar{j}=2\bar{i}-\bar{j},$$

$$\overline{AC} = (1-3)\bar{i} + (-2-2)\bar{j} = -2\bar{i} - 4\bar{j}.$$

Искомую проекцию определим по формуле (2.20)

$$np_{\overline{AC}}\overline{AB} = \frac{\overline{AB}\cdot\overline{AC}}{\left|\overline{AC}\right|} = \frac{2\cdot(-2)+(-1)\cdot(-4)}{\sqrt{20}} = \frac{0}{\sqrt{20}} = 0.$$

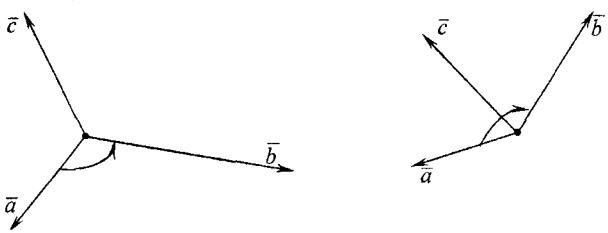
3) Внутренний угол при вершине A есть угол между векторами $\overline{AB}$ и $\overline{AC}$, косинус которого найдем по формуле (2.21)

$$\cos\varphi = \frac{\overline{AB}\cdot\overline{AC}}{\left|\overline{AB}\right|\cdot\left|\overline{AC}\right|} = \frac{0}{\sqrt{2^2+(-1)^2}\cdot\sqrt{20}} = \frac{0}{10} = 0.$$

Значит $\varphi = \dfrac{\pi}{2}$.

Ответ: 1) $\sqrt{20}$, 2) 0, 3) $\varphi = \dfrac{\pi}{2}$.

2.8. Векторное произведение векторов. Три некомпланарных вектора $\bar{a}, \bar{b}$ и $\bar{c}$, взятые в указанном порядке, образуют *правую тройку векторов*, если с конца третьего вектора $\bar{c}$ кратчайший поворот от первого вектора $\bar{a}$ ко второму вектору $\bar{b}$ виден совершающимся против часовой стрелки, и *левую*, если по часовой (рис. 2.20).



Правая тройка векторов Левая тройка векторов

Рис. 2.20

Векторным произведением вектора $\bar{a}$ на вектор $\bar{b}$ называется *вектор* $\bar{c}$ (рис. 2.21), который

1) перпендикулярен векторам $\bar{a}$ и $\bar{b}$;

2) имеет длину, численно равную площади параллелограмма, построенного на векторах $\bar{a}$ и $\bar{b}$ как на сторонах, то есть $\left|\bar{c}\right| = \left|\bar{a}\right|\cdot\left|\bar{b}\right|\sin\varphi$;

3) векторы $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ образуют правую тройку векторов.

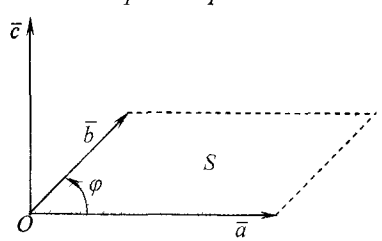


Рис. 2.21

Векторное произведение обозначается $\bar{a}\times\bar{b}$ или $\left[\bar{a},\bar{b}\right]$.

Свойства векторного произведения:

1. $\bar{a}\times\bar{b}=-(\bar{b}\times\bar{a})$.

2. $\lambda(\bar{a}\times\bar{b})=(\lambda\bar{a})\times\bar{b}=\bar{a}\times(\lambda\bar{b})$ - сочетательное свойство относительно числового множества.

3. $(\bar{a}+\bar{b})\times\bar{c}=\bar{a}\times\bar{c}+\bar{b}\times\bar{c}$ - распределительное свойство.

4. Если ненулевые векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$ коллинеарны, то $\bar{a}\times\bar{b}=\bar{0}$ (так как $\sin\varphi=0$).

5. Если векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$ ненулевые и $\bar{a}\times\bar{b}=\bar{0}$, то векторы коллинеарны (так как $\sin\varphi=0$).

Теорема. *Необходимым и достаточным условием коллинеарности ненулевых векторов* $\bar{a}$ *и* $\bar{b}$ *является равенство нулю их векторного произведения.*

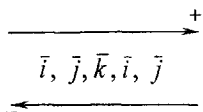
Теорема следует из свойств 4 и 5.

6. Векторное произведение ортов $\bar{i}$, $\bar{j}$, $\bar{k}$ сведем в таблицу 2.2.

Таблица 2.2

	$\bar{i}$	$\bar{j}$	$\bar{k}$
$\bar{i}$	$\bar{0}$	$\bar{k}$	$-\bar{j}$
$\bar{j}$	$-\bar{k}$	$\bar{0}$	$\bar{i}$
$\bar{k}$	$\bar{j}$	$-\bar{i}$	$\bar{0}$

Для вычисления векторного произведения ортов удобно пользоваться следующей схемой:



Произведение двух соседних дает следующий за ними вектор со знаком плюс, если движемся слева направо, и со знаком минус, если движемся справа налево.

Векторное произведение векторов, заданных координатами. Пусть заданы два вектора

$$\bar{a}=a_x\bar{i}+a_y\bar{j}+a_z\bar{k} \text{ и } \bar{b}=b_x\bar{i}+b_y\bar{j}+b_z\bar{k}.$$

Найдем векторное произведение этих векторов, перемножая их разложения как многочлены и используя свойства 1-6 векторного произведения:

$$\bar{a}\times\bar{b}=(a_x\bar{i}+a_y\bar{j}+a_z\bar{k})\times(b_x\bar{i}+b_y\bar{j}+b_z\bar{k})=a_xb_x(\bar{i}\times\bar{i})+a_xb_y(\bar{i}\times\bar{j})+$$
$$+a_xb_z(\bar{i}\times\bar{k})+a_yb_x(\bar{j}\times\bar{i})+a_yb_y(\bar{j}\times\bar{j})+a_yb_z(\bar{j}\times\bar{k})+a_zb_x(\bar{k}\times\bar{i})+$$
$$+a_zb_y(\bar{k}\times\bar{j})+a_zb_z(\bar{k}\times\bar{k})=\bar{0}+a_xb_y\bar{k}-a_xb_z\bar{j}-a_yb_x\bar{k}+\bar{0}+a_yb_z\bar{i}+$$

$$+a_z b_x \bar{j} - a_z b_y \bar{i} + \bar{0} = (a_y b_z - a_z b_y)\bar{i} - (a_x b_z - a_z b_x)\bar{j} + (a_x b_y - a_y b_x)\bar{k} =$$

$$= \begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix} \bar{i} - \begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix} \bar{j} + \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix} \bar{k} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}.$$

Таким образом,

$$\bar{a} \times \bar{b} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}. \qquad (2.23)$$

Раскрывая этот определитель по первой строке, получим координаты вектора векторного произведения.

Приложения векторного произведения:

1. Площадь параллелограмма, построенного на векторах $\bar{a}$ и $\bar{b}$ как на сторонах, равна модулю их векторного произведения, то есть

$$S_{парал.} = |\bar{a} \times \bar{b}|. \qquad (2.24)$$

2. Площадь треугольника, построенного на векторах $\bar{a}$ и $\bar{b}$ как на сторонах, равна половине модуля их векторного произведения, то есть

$$S_{\Delta} = \frac{1}{2}|\bar{a} \times \bar{b}|. \qquad (2.25)$$

3. Момент силы относительно точки. Пусть точка O абсолютно твердого тела неподвижно закреплена (рис. 2.22) и в точке A приложена сила $\bar{F}$, создающая вращающий момент, численно равный $|\overline{OA}| \cdot |\bar{F}| \sin\varphi$ - площади параллелограмма, построенного на векторах $\overline{OA}$ и $\bar{F}$. В механике вращающий момент называется моментом силы $\bar{F}$ относительно точки O и обозначается $\overline{m_0}(\bar{F})$. Таким образом,

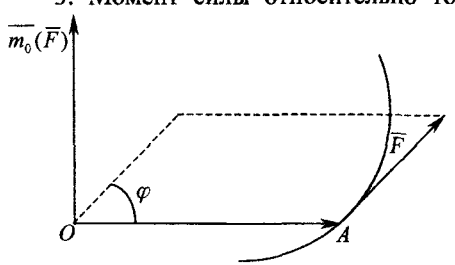


Рис. 2.22

$$\overline{m_0}(\bar{F}) = \overline{OA} \times \bar{F}. \qquad (2.26)$$

Пример 2.13. Даны три силы, приложенные в точке $A(2,1,2)$: $\overline{f_1} = \bar{i} + \bar{j} + \bar{k}$, $\overline{f_2} = -2\bar{i} - 3\bar{j} + \bar{k}$, $\overline{f_3} = \bar{i} - 2\bar{j} + \bar{k}$. Найти момент их равнодействующей $\bar{R}$ относительно точки $O(0,-1,-1)$.

Решение: Найдем равнодействующую $\overline{R}$ по формуле (2.11)

$$\overline{R} = \overline{f_1} + \overline{f_2} + \overline{f_3} = (1-2+1)\bar{i} + (1-3-2)\bar{j} + (1+1+1)\bar{k} = -4\bar{j} + 3\bar{k}.$$

Найдем вектор $\overline{OA}$ по формуле (2.13)

$$\overline{OA} = (2-0)\bar{i} + (1+1)\bar{j} + (2+1)\bar{k} = 2\bar{i} + 2\bar{j} + 3\bar{k}.$$

По формулам (2.26) и (2.23) имеем

$$\overline{m_0(\overline{R})} = \overline{OA} \times \overline{R} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 2 & 2 & 3 \\ 0 & -4 & 3 \end{vmatrix}.$$

Раскрывая определитель по первой строке, получим

$$\overline{m_0(\overline{R})} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -4 & 3 \end{vmatrix}\bar{i} - \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 3 \end{vmatrix}\bar{j} + \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 0 & -4 \end{vmatrix}\bar{k} = 18\bar{i} - 6\bar{j} - 8\bar{k}.$$

Ответ: $\overline{m_0(\overline{R})} = 18\bar{i} - 6\bar{j} - 8\bar{k}$.

Пример 2.14. Дан треугольник с вершинами: 1) $A(1, 2, 0)$, $B(3, 0, -3)$, $C(5, 2, 6)$; 2) $A(3, 2)$, $B(5, 1)$, $C(1, -2)$. Найти площадь треугольника.

Решение: Площадь треугольника найдем по формуле (2.25)

$$S_\Delta = \frac{1}{2}\left|\overline{AB} \times \overline{AC}\right|,$$

предварительно определив координаты векторов $\overline{AB}$ и $\overline{AC}$ (2.13):

1) $\overline{AB} = (3-1)\bar{i} + (0-2)\bar{j} + (-3-0)\bar{k} = 2\bar{i} - 2\bar{j} - 3\bar{k}$,

$\overline{AC} = (5-1)\bar{i} + (2-2)\bar{j} + (6-0)\bar{k} = 4\bar{i} + 6\bar{k}$.

Найдем их векторное произведение (формула (2.23))

$$\overline{AB} \times \overline{AC} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 2 & -2 & -3 \\ 4 & 0 & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & -3 \\ 0 & 6 \end{vmatrix}\bar{i} - \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 6 \end{vmatrix}\bar{j} + \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 4 & 0 \end{vmatrix}\bar{k} =$$

$$= -12\bar{i} - 24\bar{j} + 8\bar{k}.$$

Найдем модуль векторного произведения (формула (2.3))

$$\left|\overline{AB} \times \overline{AC}\right| = \left|-12\bar{i} - 24\bar{j} + 8\bar{k}\right| = \sqrt{(-12)^2 + (-24)^2 + 8^2} = 28,$$

следовательно, $S_\Delta = 14$ (кв. ед.).

2) $\overline{AB} = (5-3)\bar{i} + (1-2)\bar{j} = 2\bar{i} - \bar{j}$,

$\overline{AC} = (1-3)\bar{i} + (-2-2)\bar{j} = -2\bar{i} - 4\bar{k}$.

Найдем их векторное произведение (формула (2.23))

$$\overline{AB}\times\overline{AC}=\begin{vmatrix}\bar{i} & \bar{j} & \bar{k}\\ 2 & -1 & 0\\ -2 & -4 & 0\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}2 & -1\\ -2 & -4\end{vmatrix}\bar{k}=-10\bar{k}.$$

Тогда, $S_{\Delta}=\frac{1}{2}\left|\overline{AB}\times\overline{AC}\right|=\frac{1}{2}\sqrt{(-10)^2}=5$ (кв. ед.).

Ответ: 1) $S_{\Delta}=14$ (кв. ед.), 2) $S_{\Delta}=5$ (кв. ед.).

2. 9. Смешанное произведение векторов. Произведение трех векторов $\bar{a},\bar{b},\bar{c}$, составленное следующим образом $(\bar{a}\times\bar{b})\cdot\bar{c}$, называется *векторно-скалярным или смешанным произведением векторов.* Смешанное произведение векторов есть некоторое число.

Смешанное произведение векторов, заданных координатами. Пусть заданы три вектора

$$\bar{a}=a_x\bar{i}+a_y\bar{j}+a_z\bar{k},\quad \bar{b}=b_x\bar{i}+b_y\bar{j}+b_z\bar{k},\quad \bar{c}=c_x\bar{i}+c_y\bar{j}+c_z\bar{k}.$$

Найдем смешанное произведение этих векторов, используя координатную форму записи для векторного и скалярного произведений:

$$(\bar{a}\times\bar{b})\cdot\bar{c}=\begin{vmatrix}\bar{i} & \bar{j} & \bar{k}\\ a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\end{vmatrix}\cdot(c_x\bar{i}+c_y\bar{j}+c_z\bar{k})=$$

$$=\left(\begin{vmatrix}a_y & a_z\\ b_y & b_z\end{vmatrix}\bar{i}-\begin{vmatrix}a_x & a_z\\ b_x & b_z\end{vmatrix}\bar{j}+\begin{vmatrix}a_x & a_y\\ b_x & b_y\end{vmatrix}\bar{k}\right)\cdot(c_x\bar{i}+c_y\bar{j}+c_z\bar{k})=$$

$$=\begin{vmatrix}a_y & a_z\\ b_y & b_z\end{vmatrix}c_x-\begin{vmatrix}a_x & a_z\\ b_x & b_z\end{vmatrix}c_y+\begin{vmatrix}a_x & a_y\\ b_x & b_y\end{vmatrix}c_z=\begin{vmatrix}a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\\ c_x & c_y & c_z\end{vmatrix}.$$

Таким образом,

$$(\bar{a}\times\bar{b})\cdot\bar{c}=\begin{vmatrix}a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\\ c_x & c_y & c_z\end{vmatrix}. \qquad (2.27)$$

Свойства смешанного произведения:

1. Смешанное произведение не меняется при круговой перестановке его сомножителей, то есть $(\bar{a}\times\bar{b})\cdot\bar{c}=(\bar{b}\times\bar{c})\cdot\bar{a}=(\bar{c}\times\bar{a})\cdot\bar{b}$.

2. Смешанное произведение не изменится, если поменять местами знаки векторного и скалярного произведений, то есть $(\bar{a}\times\bar{b})\cdot\bar{c}=\bar{a}\cdot(\bar{b}\times\bar{c})$.

Поэтому смешанное произведение записывается так: $\bar{a}\bar{b}\bar{c}$, опуская знаки произведений.

3. Смешанное произведение меняет знак при перестановке местами любых двух векторов – сомножителей, то есть

$$\bar{a}\bar{b}\bar{c} = -\bar{a}\bar{c}\bar{b}, \quad \bar{a}\bar{b}\bar{c} = -\bar{b}\bar{a}\bar{c}, \quad \bar{a}\bar{b}\bar{c} = -\bar{c}\bar{b}\bar{a}.$$

4. Смешанное произведение ненулевых векторов равно нулю тогда и только тогда, когда они компланарны.

Геометрический смысл смешанного произведения. Пусть векторы $\overline{OA} = \bar{a}, \overline{OB} = \bar{b}, \overline{OC} = \bar{c}$ некомпланарны и составляют правую тройку. Тогда вектор $\bar{a} \times \bar{b} = \bar{u}$ будет направлен в ту же сторону от плоскости $BOAD$, что и вектор $\bar{c}$. Построим параллелепипед на векторах $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ (рис. 2.23). Объем параллелепипеда равен произведению площади основания на высоту H, но

$$S_{OADB} = |\bar{a} \times \bar{b}| = |\bar{u}|, \; H = OE = np_{\bar{u}}\bar{c},$$

$$V = S_{OADB} \cdot H = |\bar{u}| np_{\bar{u}}\bar{c} = \bar{u} \cdot \bar{c} = (\bar{a} \times \bar{b}) \cdot \bar{c}.$$

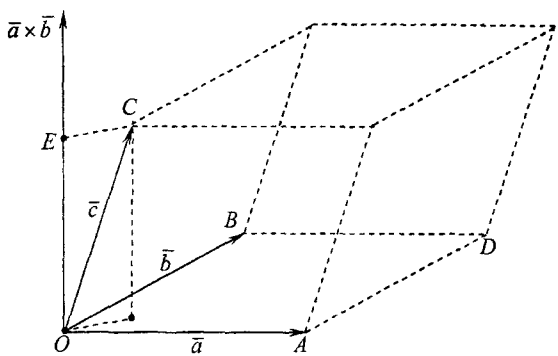


Рис. 2.23

Если векторы $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ образуют левую тройку, то $np_{\bar{u}}\bar{c} < 0$ и $V = |(\bar{a} \times \bar{b}) \cdot \bar{c}|$. Таким образом, *объем параллелепипеда, построенного на трех некомпланарных векторах, равен абсолютной величине их смешанного произведения*

$$V = |\bar{a}\bar{b}\bar{c}|. \qquad (2.28)$$

Заметим, что объем треугольной пирамиды (тетраэдра), построенной на трех некомпланарных векторах, равен

$$V = \frac{1}{6}|\bar{a}\bar{b}\bar{c}|. \qquad (2.29)$$

Пример 2.15. При каких значениях α векторы $\bar{a}=(\alpha, 2, 1)$, $\bar{b}=(-1, 2, 4)$, $\bar{c}=(\alpha, 2, 0)$ компланарны?

Решение: Векторы $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ компланарны тогда и только тогда, когда их смешанное произведение равно нулю, то есть

$$\bar{a}\bar{b}\bar{c}=\begin{vmatrix}\alpha & 2 & 1\\ -1 & 2 & 4\\ \alpha & 2 & 0\end{vmatrix}=0.$$

Вычислим определитель третьего порядка: $8\alpha-2-2\alpha-8\alpha=0$.
Откуда $\alpha=-1$.

Ответ: $\alpha=-1$.

Пример 2.16. Даны вектора $\bar{a}=(1, 2, -1)$, $\bar{b}=(-1, 0, 3)$, $\bar{c}=(2, -1, 2)$, $\bar{d}=(1, -1, 2)$. Показать, что векторы $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ образуют базис и найти координаты вектора $\bar{d}$ относительно базиса $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$.

Решение: Векторы $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ образуют базис, если они некомпланарны (замечание 2.7), то есть, если их смешанное произведение не равно нулю

$$\bar{a}\cdot\bar{b}\cdot\bar{c}=\begin{vmatrix}1 & 2 & -1\\ -1 & 0 & 3\\ 2 & -1 & 2\end{vmatrix}=20.$$

Значит, векторы $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ образуют базис. Найдем координаты вектора $\bar{d}$ относительно этого базиса, для чего решим векторное уравнение

$$\bar{d}=\lambda_1\bar{a}+\lambda_2\bar{b}+\lambda_3\bar{c},$$

или в координатной форме

$$\begin{cases}1=\lambda_1-\lambda_2+2\lambda_3,\\ -1=2\lambda_1-\lambda_3,\\ 2=\lambda_1+3\lambda_2+2\lambda_3,\end{cases}$$

то есть получили систему трех уравнений с тремя неизвестными, определитель которой

$$\Delta=\begin{vmatrix}1 & -1 & 2\\ 2 & 0 & -1\\ 1 & 3 & 2\end{vmatrix}=20.$$

Решим систему методом Крамера, вычислив сначала вспомогательные определители

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & 2 \end{vmatrix} = -5,\ \Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 5,\ \Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \\ 1 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 0.$$

Значит,

$$\lambda_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{-5}{20} = -\frac{1}{4}, \qquad \lambda_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{5}{20} = \frac{1}{4}, \qquad \lambda_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{0}{20} = 0.$$

Ответ: $\bar{d} = (-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, 0)$.

Пример 2.17. Даны вершины тетраэдра $A_1(1, 1, 2)$, $A_2(2, 3, -1)$, $A_3(2, -2, 4)$, $A_4(-1, 1, 3)$. Найти объем тетраэдра и длину высоты H, опущенной из вершины A_4 на грань $A_1A_2A_3$. Сделать чертеж.

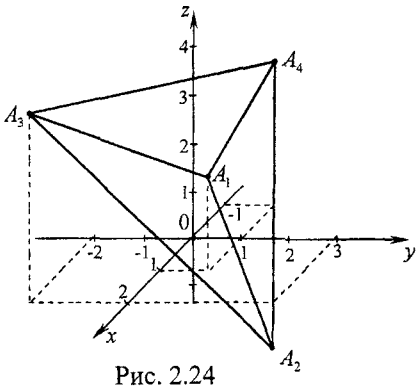


Рис. 2.24

Решение: Объем тетраэдра (рис. 2.24) найдем по формуле (2.29)

$$V = \frac{1}{6}\left|\overline{A_1A_2} \cdot \overline{A_1A_3} \cdot \overline{A_1A_4}\right|.$$

Найдем координаты векторов:

$$\overline{A_1A_2} = (1, 2, -3),$$

$$\overline{A_1A_3} = (1, -3, 2),$$

$\overline{A_1A_4} = (-2, 0, 1)$. Тогда $\overline{A_1A_2} \cdot \overline{A_1A_3} \cdot \overline{A_1A_4} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 1 & -3 & 2 \\ -2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 5.$

Значит, $V_{тетр} = \frac{5}{6}$ *куб. ед.*

Для нахождения высоты H воспользуемся формулой $V_{тетр} = \frac{1}{3}S_{осн} \cdot H$, а так как $S_{осн.} = S_{\Delta A_1A_2A_3}$, то $H = \frac{3V}{S_{\Delta A_1A_2A_3}}$.

Площадь треугольника $A_1A_2A_3$ найдем по формуле (2.25)

$$S_{\Delta A_1A_2A_3} = \frac{1}{2}\left|\overline{A_1A_2} \times \overline{A_1A_3}\right|.$$

Последовательно находим (формула (2.23))

$$\overline{A_1A_2} \times \overline{A_1A_3} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 1 & 2 & -3 \\ 1 & -3 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 2 \end{vmatrix} \bar{i} - \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \bar{j} + \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} \bar{k} =$$

$$= -5\bar{i} - 5\bar{j} - 5\bar{k} = -5(\bar{i} + \bar{j} + \bar{k}).$$

Далее (формула (2.3))

$$\left|\overline{A_1A_2} \times \overline{A_1A_3}\right| = 5\sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2} = 5\sqrt{3}.$$

Таким образом,

$$S_{\Delta A_1A_2A_3} = \frac{5\sqrt{3}}{2} \text{ и } H = \frac{3 \cdot 5 \cdot 2}{6 \cdot 5\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Ответ: $V_{пир.} = \frac{5}{6}$ *куб. ед.*, $H = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

3. АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ НА ПЛОСКОСТИ

3.1. Основные понятия. *Линия на плоскости* определяются как *геометрическое место точек плоскости,* обладающих некоторым свойством. Введя на плоскости систему координат, позволяющую положение точки определить с помощью двух чисел - ее координат, линию на плоскости можно определить с помощью уравнения.

Уравнением линии на плоскости xOy называется такое уравнение $F(x, y) = 0$ с двумя переменными, которому удовлетворяют координаты x и y каждой точки линии и не удовлетворяют координаты любой точки, не лежащей на этой линии.

Переменные x и y в уравнении линии называются *текущими координатами точек линии.*

Уравнением линии в полярной системе координат называется уравнение $F(\rho, \varphi) = 0$, которому удовлетворяют координаты любой точки, лежащей на этой линии, и не удовлетворяют координаты любой точки, не лежащей на этой линии.

Линию на плоскости можно задать при помощи двух уравнений:

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \end{cases}$$

где x и y – координаты произвольной точки $M(x, y)$, лежащей на данной линии, а t – переменная, называемая *параметром;* параметр t определяет положение точки (x, y) на плоскости.

3.2. Уравнение прямой на плоскости. Простейшей из линий является прямая. Разным способам задания прямой соответствуют в прямоугольной декартовой системе координат разные виды уравнений.

А. Уравнение прямой, проходящей через данную точку параллельно данному вектору

Любой ненулевой вектор параллельный данной прямой называют *направляющим вектором* данной прямой.

Найдем уравнение прямой, проходящей через заданную точку $M_0(x_0, y_0)$ параллельно данному вектору $\bar{a} = (a_x, a_y)$ (рис 3.1). Возьмем произвольную точку $M(x, y)$, лежащую на этой прямой и рассмотрим вектор $\overline{M_0M} = (x - x_0, y - y_0)$. Поскольку векторы $\bar{a}$ и $\overline{M_0M}$ коллинеарные, то существует такое $t \neq 0$, что $\overline{M_0M} = t\bar{a}$ или в координатной форме

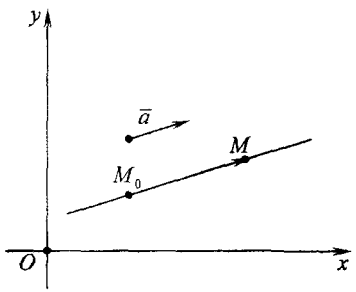


Рис. 3.1

$$\begin{cases} x = x_0 + ta_x, \\ y = y_0 + ta_y. \end{cases} \tag{3.1}$$

Уравнения (3.1) называются *параметрическими уравнениями прямой*, t – параметр.

Если $a_x \neq 0, a_y \neq 0$, то из (3.1) можно исключить параметр t, в результате получим уравнение

$$\frac{x - x_0}{a_x} = \frac{y - y_0}{a_y}, \tag{3.2}$$

называемое *каноническим уравнением прямой* с направляющим вектором $\bar{a} = (a_x, a_y)$.

Если $a_x = 0$, то направляющий вектор лежит на оси Oy или параллелен ей, а каноническое уравнение имеет вид

$$x = x_o. \tag{3.3}$$

Если $a_y = 0$, то направляющий вектор лежит на оси Ox или параллелен ей, а каноническое уравнение имеет вид

$$y = y_o. \tag{3.4}$$

Пример 3.1. Составить каноническое уравнение прямой проходящей: 1) через точку $M_0(-1, 1)$ параллельно вектору $\bar{a} = (2, 3)$; 2) через точку $M_0(3, -4)$ параллельно вектору $\bar{a} = (0, 5)$.

Решение: 1) По формуле (3.2) находим уравнение $\frac{x+1}{2}=\frac{y-1}{3}$.

2) По формуле (3.3) находим уравнение $x=3$.

Ответ: 1) $\frac{x+1}{2}=\frac{y-1}{3}$; 2) $x=3$.

Б. Уравнение прямой, проходящей через две данные точки

Найдем уравнение прямой, проходящей через две данные точки $M_1(x_1, y_1)$ и $M_2(x_2, y_2)$.

Примем вектор $\overline{M_1M_2}=(x_2-x_1, y_2-y_1)$ за направляющий, тогда, воспользовавшись уравнением (3.2), получим

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1} \qquad (3.5)$$

Уравнение (3.5) называется *уравнением прямой, проходящей через две данные точки*

Если эти точки лежат на координатных осях Ox, Oy и имеют координаты $M_1(a, 0), M_2(0, b)$ соответственно (рис 3.2), то из (3.5) получим

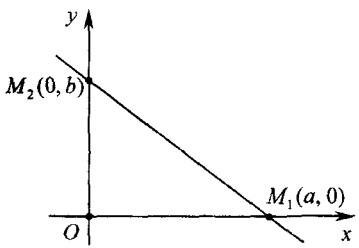


Рис 3.2

$$\frac{x-a}{0-a}=\frac{y-0}{b-0},$$

или

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1. \qquad (3.6)$$

Уравнение (3.6) называется *уравнением прямой в отрезках*, так как числа a и b указывают, какие отрезки отсекает прямая на осях координат.

Пример 3.2. Составить уравнение прямой, проходящей через точки $M_1(6, -2)$ и $M_2(-3, 4)$, а затем записать его в отрезках.

Решение: По формуле (3.5) имеем

$$\frac{x-6}{-3-6}=\frac{y+2}{4+2} \text{ или } \frac{x-6}{-9}=\frac{y+2}{6}.$$

Чтобы получить уравнение в отрезках, воспользуемся сначала свойством пропорции и запишем результат в виде

$$6x+9y=18,$$

а затем поделим полученное уравнение на свободный член

$$\frac{x}{3}+\frac{y}{2}=1.$$

Значит, эта прямая отсекает на оси Ox отрезок 3, на оси Oy отрезок 2.

Ответ: $\dfrac{x-6}{-9}=\dfrac{y+2}{6}, \dfrac{x}{3}+\dfrac{y}{2}=1.$

В. Уравнение прямой, проходящей через данную точку перпендикулярно данному вектору

Любой ненулевой вектор, перпендикулярный данной прямой, называется *нормальным вектором* данной прямой

Найдем уравнение прямой, проходящей через данную точку $M_0(x_0, y_0)$ перпендикулярно данному вектору $\bar{n}=(A, B)$.

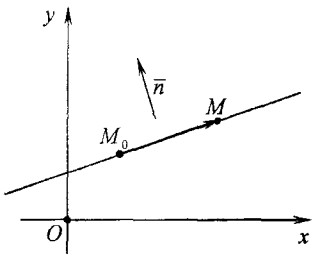


Рис. 3.3

Возьмем на прямой произвольную точку $M(x, y)$ и рассмотрим вектор $\overline{M_0M}=(x-x_0, y-y_0)$ (рис. 3.3). Поскольку векторы $\bar{n}$ и $\overline{M_0M}$ ортогональны, то их скалярное произведение равно нулю

$$\bar{n}\cdot\overline{M_0M}=0,$$

или в координатной форме

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)=0. \qquad (3.7)$$

Уравнение (3.7) называют *уравнением прямой, проходящей через данную точку перпендикулярно данному вектору*

Пример 3.3. Составить уравнение прямой, проходящей через точку $M(2,-3)$ перпендикулярно вектору $\bar{n}=(-1, 5)$.

Решение: По формуле (3 7) получим $-(x-2)+5(y+3)=0$ или $x-5y-17=0$.

Ответ: $x-5y-17=0$.

Г. Общее уравнение прямой

В уравнении (3.7) раскроем скобки и положим $-Ax_0-By_0=C$, тогда получим

$$Ax+By+C=0. \qquad (3.8)$$

Уравнение (3.8) называется *общим уравнением прямой*

Рассмотрим частные случаи общего уравнения:

1) если $A=0, B\neq 0$, то $By+C=0$ и прямая параллельна оси Ox;

2) если $B=0, A\neq 0$, то $Ax+C=0$ и прямая параллельна оси Oy;

3) если $C=0, A\neq 0, B\neq 0$, то $Ax+By=0$ и прямая проходит через начало координат.

Д. Уравнение прямой с угловым коэффициентом

Углом наклона прямой к оси Ox называется угол α $(\alpha \le \pi)$, на который надо повернуть ось Ox вокруг точки пересечения прямой с осью Ox, чтобы ось Ox совпала с прямой (рис. 3.4). Причем угол будем считать *положительным,* если поворот совершается против часовой стрелки, и *отрицательным* – если по часовой стрелке. Чаще в качестве α берут *наименьшее положительное* значение угла α $(0 \le \alpha \le \pi)$. Если прямая параллельна оси Ox, то $\alpha = 0$.

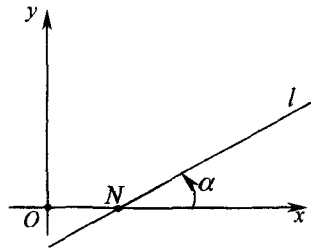


Рис 3.4

Тангенс угла наклона прямой к оси Ox называется *угловым коэффициентом прямой* и обозначается через k, то есть $k = tg\alpha$.

Угловой коэффициент прямой можно вычислить, если известны координаты двух точек прямой $M_1(x_1, y_1), M_2(x_2, y_2)$ (рис. 3.5). Из треугольника M_1M_2P найдем

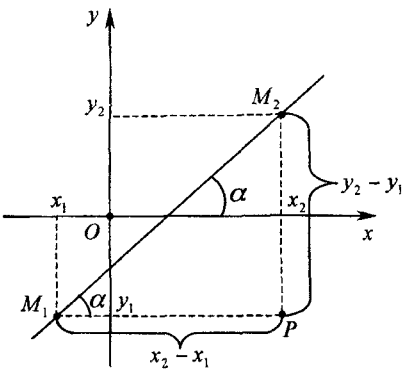


Рис 3.5

$$k = tg\alpha = \frac{M_2P}{M_1P} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}. \quad (3.9)$$

Формула (3.9) теряет смысл, если $x_2 = x_1$.

Найдем уравнение прямой с угловым коэффициентом k, проходящей через точку $M_1(x_1, y_1)$.

Возьмем на прямой произвольную точку $M(x, y)$. Поскольку прямая имеет угловой коэффициент k, то, в силу выведенной формулы (3.9), имеем

$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = k$$

или

$$y - y_1 = k(x - x_1) \quad (3.10)$$

Уравнение (3.10) называется *уравнением прямой с угловым коэффициентом* k, *проходящей через точку* $M_1(x_1, y_1)$.

Если прямая пересекает ось Oy в точке $M_1(0, b)$, то уравнение (3.10) принимает вид

$$y = kx + b. \quad (3.11)$$

Уравнение (3.11) называется *уравнением прямой с угловым коэффициентом* k.

Е. Полярное уравнение прямой

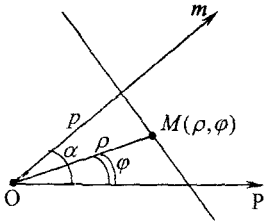


Рис 3.6.

Найдем уравнение прямой в полярных координатах. Положение прямой можно определить, указав расстояние p от полюса O до данной прямой и угол α между полярной осью OP и осью m, проходящей через полюс O перпендикулярно данной прямой (рис 3.6).

Для любой точки $M(\rho, \varphi)$ данной прямой имеем

$$np_m\overline{OM} = p.$$

С другой стороны,

$$np_m\overline{OM} = |\overline{OM}|\cos(\alpha - \varphi) = \rho\cos(\varphi - \alpha).$$

Следовательно,

$$\rho\cos(\varphi - \alpha) = p. \qquad (3.12)$$

Уравнение (3.12) называется *уравнением прямой в полярных координатах.*

Ж. Нормальное уравнение прямой

Пусть прямая определяется расстоянием p от начала координат до данной прямой и углом α между положительным направлением оси Ox и осью m, проходящей через полюс O перпендикулярно данной прямой (рис. 3.7). Введем полярную систему координат, взяв O за полюс и Ox за полярную ось. Уравнение прямой можно записать в виде

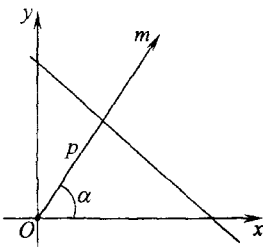


Рис 3.7.

$$\rho\cos(\varphi - \alpha) - p = 0$$

или

$$\rho\cos\varphi\cdot\cos\alpha + \rho\sin\varphi\sin\alpha - p = 0.$$

Согласно (1.5)

$$\rho\cos\varphi = x,\ \rho\sin\varphi = y.$$

Следовательно, уравнение прямой (3.12) в прямоугольной системе координат имеет вид

$$x\cos\alpha + \rho\sin\varphi - p = 0. \qquad (3.13)$$

Уравнение (3.13) называется *нормальным уравнением прямой.*

Покажем, как общее уравнение прямой (3.8) привести к нормальному виду (3.13).

Умножим уравнение (3.8) на ненулевой множитель λ. Получим

$$\lambda Ax + \lambda By + \lambda C = 0.$$

Следовательно, должны выполняться равенства

$$\lambda A = \cos\alpha,\ \lambda B = \sin\alpha,\ \lambda C = -p.$$

Из первых двух равенств находим

$$\lambda^2A^2 + \lambda^2B^2 = \cos^2\alpha + \sin^2\alpha,$$

откуда

$$\lambda = \pm \frac{1}{\sqrt{A^2 + B^2}}. \qquad (3.14)$$

Множитель λ называется *нормирующим множителем*. Согласно третьему равенству $(\lambda C = -p)$, знак нормирующего множителя λ противоположен знаку свободного члена C общего уравнения прямой.

Пример 3.4. Привести уравнение $3x + 4y - 15 = 0$ к нормальному виду.

Решение: Находим нормирующий множитель по формуле (3.14)

$$\lambda = \frac{1}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{1}{5}.$$

Умножив данное уравнение на вычисленное значение λ, получим искомое нормальное уравнение прямой

$$\frac{3}{5}x + \frac{4}{5}y - 3 = 0.$$

Ответ: $\frac{3}{5}x + \frac{4}{5}y - 3 = 0.$

3. Угол между двумя прямыми. Условия параллельности и перпендикулярности двух прямых

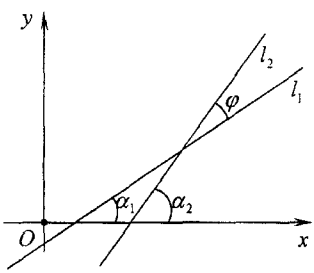


Рис 3.8

Углом между двумя прямыми называется любой из двух смежных углов, образованных этими прямыми.

Пусть прямые l_1 и l_2 заданы уравнениями с угловыми коэффициентами (рис. 3.8):

$$y = k_1 x + b_1 \text{ и } y = k_2 x + b_2.$$

Будем искать угол φ, на который надо повернуть в положительном направлении прямую l_1 вокруг точки пересечения прямых до совпадения с прямой l_2. Значит $\varphi = \alpha_2 - \alpha_1$ и, если $\varphi \neq \frac{\pi}{2}$, то

$tg\varphi = tg(\alpha_2 - \alpha_1) = \frac{tg\alpha_2 - tg\alpha_1}{1 + tg\alpha_1 \cdot tg\alpha_2}$. Но $tg\alpha_1 = k_1, tg\alpha_2 = k_2$, поэтому

$$tg\varphi = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2}, \qquad (3.15)$$

откуда легко найти величину угла φ.

Если прямые l_1 и l_2 параллельны, то $\varphi = 0$ и $tg\varphi = 0$ и из формулы (3.15) следует, что $k_1 = k_2$. И обратно, если прямые таковы, что $k_1 = k_2$, то $tg\varphi = 0$, то есть прямые параллельны. Следовательно, *условием параллельности двух прямых является равенство их угловых коэффициентов:*

$$k_1 = k_2.$$

Если прямые l_1 и l_2 перпендикулярны, то $\varphi = \frac{\pi}{2}$ и $ctg\varphi = \frac{1 + k_1 k_2}{k_2 - k_1} = 0$. Отсюда $1 + k_1 k_2 = 0$, то есть $k_1 k_2 = -1$. Справедливо и обратное утверждение. Таким образом, *условием перпендикулярности двух прямых является равенство*

$$k_1 k_2 = -1.$$

Если прямые l_1 и l_2 заданы:

1) общими уравнениями: $A_1 x + B_1 y + C_1 = 0$ и $A_2 x + B_2 y + C_2 = 0$, $\overline{n_1} = (A_1, B_1)$ и $\overline{n_2} = (A_2, B_2)$ нормальные векторы прямых, то

$$\cos\varphi = \frac{\overline{n_1} \cdot \overline{n_2}}{|\overline{n_1}| \cdot |\overline{n_2}|} = \frac{A_1 A_2 + B_1 B_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2}}. \qquad (3.16)$$

Условие параллельности прямых: $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2}$.

Условие перпендикулярности прямых: $A_1 A_2 + B_1 B_2 = 0$.

2) каноническими уравнениями: $\frac{x - x_1}{a_x} = \frac{y - y_1}{a_y}$ и $\frac{x - x_2}{b_x} = \frac{y - y_2}{b_y}$, $\overline{a} = (a_x, a_y)$ и $\overline{b} = (b_x, b_y)$ направляющие векторы прямых, то

$$\cos\varphi = \frac{\overline{a} \cdot \overline{b}}{|\overline{a}| \cdot |\overline{b}|} = \frac{a_x b_x + a_y b_y}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2} \cdot \sqrt{b_x^2 + b_y^2}}. \qquad (3.17)$$

Условие параллельности прямых: $\frac{a_x}{b_x} = \frac{a_y}{b_y}$.

Условие перпендикулярности прямых: $a_x b_x + a_y b_y = 0$.

Заметим, что если требуется вычислить острый угол между прямыми, то выражения в формулах (3.15), (3.16), (3.17) берем по абсолютной величине.

И. Расстояние от точки до прямой

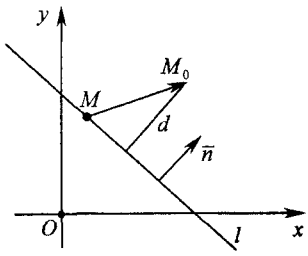


Рис. 3.9

Пусть заданы прямая l общим уравнением $Ax + By + C = 0$ и точка $M_0(x_0, y_0)$. Требуется найти расстояние от точки M_0 до прямой l (рис. 3.9). Пусть $M(x, y)$ - произвольная точка прямой l. Расстояние d от точки M_0 до прямой l равно модулю проекции вектора $\overline{MM_0}$ на направление нормального вектора $\overline{n} = (A, B)$ этой прямой. Следовательно,

$$d = \left|np_{\overline{n}}\overline{MM_0}\right| = \frac{\left|\overline{MM_0}\cdot\overline{n}\right|}{\left|\overline{n}\right|} = \frac{\left|(x_0 - x)A + (y_0 - y)B\right|}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

Так как точка $M(x, y)$ принадлежит прямой l, то $Ax + By + C = 0$, то есть $C = -Ax - By$, поэтому

$$d = \frac{\left|Ax_0 + By_0 + C\right|}{\sqrt{A^2 + B^2}}. \qquad (3.18)$$

Пример 3.5. Найти расстояние от точки $M_0(2, -1)$ до прямой $3x + 4y - 22 = 0$.

Решение: По формуле (3.18) находим

$$d = \frac{\left|3\cdot 2 + 4\cdot(-1) - 22\right|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{20}{5} = 4.$$

Ответ: $d = 4$.

Пример 3.6. Дан треугольник с вершинами $A(3, 2)$, $B(5, 1)$, $C(1, -2)$ (рис. 2.19). Найти: 1) уравнение стороны BC; 2) уравнение высоты, опущенной из вершины A; 3) уравнение медианы, проведенной из вершины B; 4) точку пересечения медианы и высоты.

Решение: 1) Уравнение стороны BC найдем как уравнение прямой, проходящей через две точки B и C по формуле (3.5):

$$\frac{x - 5}{1 - 5} = \frac{y - 1}{-2 - 1} \text{ или } 3x - 4y - 11 = 0.$$

2) Уравнение высоты, опущенной из вершины A на сторону BC, найдем как уравнение прямой, проходящей через точку A перпендикулярно прямой BC. Из уравнения прямой BC найдем ее угловой коэффициент: $k_{BC} = \frac{3}{4}$, тогда угловой коэффициент k_h высоты определим из ус-

ловия $k_{BC} \cdot k_h = -1$, так как эти прямые перпендикулярны. Таким образом, $k_h \cdot \frac{3}{4} = -1$ и $k_h = \frac{-4}{3}$. Искомое уравнение получим как уравнение прямой с угловым коэффициентом k_h, проходящей через данную точку A (формула (3.10)):

$$y - 2 = \frac{-4}{3}(x - 3) \text{ или } y = 6 - \frac{4}{3}x.$$

3) Так как медиана делит сторону пополам, то координаты точки пересечения медианы со стороной AC найдем по формулам (2.16а):

$$x = \frac{3+1}{2} = 2,\ y = \frac{2-2}{2} = \frac{0}{2} = 0.$$

Составим уравнение медианы как уравнение прямой, проходящей через две данные точки: B и середину AC, по формуле (3.5):

$$\frac{x-2}{5-2} = \frac{y-0}{1-0} \text{ или } x - 3y - 2 = 0.$$

4) Найдем точку пересечения медианы и высоты, решив систему составленную из уравнений медианы и высоты:

$$\begin{cases} x = 2 + 3y \\ 4(2+3y) + 3y - 18 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2 + 3y \\ 15y = 10 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2 + 3y \\ y = \frac{2}{3} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x = 2 + 3 \cdot \frac{2}{3} = 4 \\ y = \frac{2}{3} \end{cases}$$

Ответ: 1) $3x - 4y - 11 = 0$; 2) $4x + 3y - 18 = 0$; 3) $x - 3y - 2 = 0$; 4) $(4, \frac{2}{3})$.

3.3. Линии второго порядка. Рассмотрим линии, определяемые уравнением второй степени относительно текущих координат,

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0. \qquad (3.19)$$

Коэффициенты уравнения – действительные числа и, по крайней мере, одно из чисел A, B или C отлично от нуля. Такие линии называются *линиями второго порядка*. К линиям второго порядка относятся: окружность, эллипс, гипербола и парабола.

Окружность. *Окружностью называется геометрическое место точек плоскости, равноудаленных от данной точки, называемой центром.*

Пусть $C(a,b)$ центр окружности, R - расстояние от центра окружности до точек окружности, $M(x,y)$ - произвольная точка окружности. Тогда, используя формулу (2.14) для вычисления расстояния между двумя точками, получим искомое уравнение окружности

$$\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}=R,$$

или после возведения в квадрат

$$(x-a)^2+(y-b)^2=R^2. \qquad (3.20)$$

Уравнение (3.20) называется *каноническим уравнением окружности с центром в точке* $C(a,b)$ *и радиусом* R.

Эллипс. *Эллипсом называется геометрическое место точек плоскости, сумма расстояний от каждой из которых до двух данных точек, называемых фокусами эллипса, постоянна.*

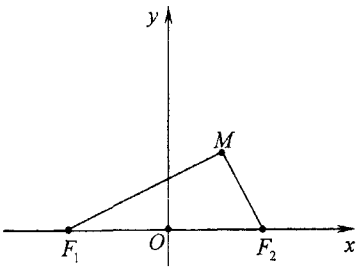


Рис. 3.10

Примем за ось абсцисс прямую, соединяющую фокусы F_1 и F_2, начало координат расположим в точке, делящей отрезок F_1F_2 пополам (рис. 3.10). Обозначим расстояние между двумя фокусами через $2c$, тогда фокусы имеют координаты $F_1(-c,0), F_2(c,0)$. Пусть $M(x,y)$ - произвольная точка эллипса. По определению эллипса для любой его точки M выполняется условие

$$\left|\overline{F_1M}\right|+\left|\overline{F_2M}\right|=2a, \qquad (3.21)$$

$2a$ - упомянутое в определении эллипса расстояние, причем $2a>2c$, то есть $a>c$. По формуле (2.14) имеем:

$$\left|\overline{F_1M}\right|=\sqrt{(x+c)^2+y^2},$$

$$\left|\overline{F_2M}\right|=\sqrt{(x-c)^2+y^2}.$$

Подставим эти выражения в (3.21)

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2}+\sqrt{(x-c)^2+y^2}=2a$$

и выполним необходимые преобразования. В результате этих действий придем к уравнению

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2-c^2}=1.$$

Так как $a>c$, то положим $b^2=a^2-c^2$. Тогда окончательно имеем

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1. \qquad (3.22)$$

Уравнение (3.22) называется *каноническим уравнением эллипса.*

Исследуем форму эллипса по его каноническому уравнению:

1) так как уравнение эллипса содержит только квадраты текущих координат, то, если точка (x, y) принадлежит эллипсу, то и точки $(-x, y), (-x, -y), (x, -y)$ тоже принадлежат эллипсу. Значит *оси координат* являются *осями симметрии эллипса.* Точка пересечения осей симметрии называется *центром эллипса.* Для эллипса, определяемого уравнением (3.22), центром является начало координат;

2) точки пересечения эллипса с осями симметрии называются *вершинами эллипса.* Для эллипса, определяемого уравнением (3.22), вершинами будут точки (рис. 3.11): $A_1(-a, o)$, $A_2(a, o)$, $B_1(0, -b)$, $B_2(0, b)$. Отрезок

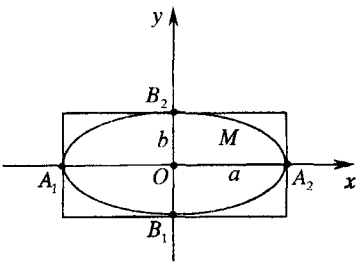


Рис. 3.11

A_1A_2 называется *большой осью эллипса,* $a=\frac{A_1A_2}{2}=OA_2=OA_1$ - *большой полуосью эллипса,* отрезок B_1B_2 называется *малой осью эллипса,* $b=\frac{B_1B_2}{2}=OB_2=OB_1$ - *малой полуосью эллипса,* $c=OF_1=OF_2$ - *полуфокусным расстоянием,* причем $c^2=a^2-b^2$ или $c=\sqrt{a^2-b^2}$;

3) из уравнения (3.22) следует, что каждое слагаемое левой части не превосходит единицы, то есть $\frac{x^2}{a^2}\le 1$ и $\frac{x^2}{b^2}\le 1$ или $-a\le x\le a$ и $-b\le x\le b$. Следовательно, все точки эллипса лежат внутри прямоугольника, образованного прямыми $x=\pm a$, $y=\pm b$ (рис. 3.11). Причем при возрастании одного слагаемого в левой части уравнения (3.22) другое слагаемое будет уменьшаться, то есть, если $|x|$ возрастает, то $|y|$ уменьшается и наоборот. Таким образом, эллипс имеет вид, приведенный на рис. 3.11;

4) форма эллипса зависит от величины отношения $\frac{b}{a}$. При $b=a$ эллипс превращается в окружность. Но в качестве характеристики формы эллипса используют отношение полуфокусного расстояния c к большой полуоси a, которое называется *эксцентриситетом эллипса* $\varepsilon=\frac{c}{a}$. Причем $0<\varepsilon<1$, а при $\varepsilon=0$ получаем окружность.

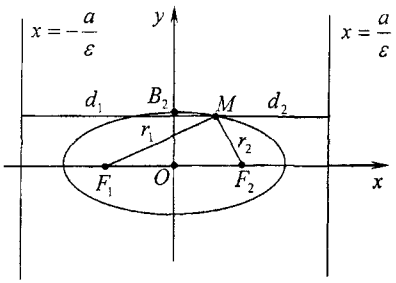


Рис. 3.12

Пусть $M(x, y)$ - произвольная точка эллипса (рис. 3.12). Длины отрезков $F_1M = r_1$, $F_2M = r_2$ называются *фокальными радиусами* точки M и по определению эллипса $r_1 + r_2 = 2a$.

Две прямые, перпендикулярные большой оси эллипса и расположенные симметрично относительно центра эллипса на расстоянии $\frac{a}{\varepsilon}$ от него, называются *директрисами эллипса*, уравнения директрис $x = \pm\frac{a}{\varepsilon}$ (рис. 3.12). Директрисы обладают следующим свойством: *отношение расстояний от любой точки эллипса до фокуса и соответствующей директрисы есть величина постоянная, равная эсцентриситету эллипса*: $\frac{r_1}{d_1} = \frac{r_2}{d_2} = \varepsilon$.

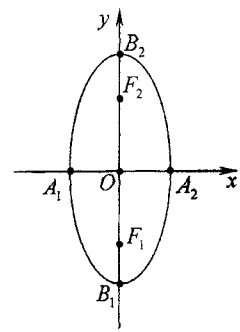


Рис. 3.13

Если $a < b$, то уравнение (3.22) определяет эллипс, большая ось которого $2b$ лежит на оси Oy, а малая ось $2a$ - на оси Ox (рис. 3.13). Фокусы такого эллипса находятся в точках $F_1(0, c), F_2(0, -c)$, где $c = \sqrt{b^2 - a^2}$.

Гипербола. *Гиперболой называется геометрическое место точек плоскости, разность расстояний от каждой из которых до двух данных точек, называемых фокусами гиперболы, постоянна.*

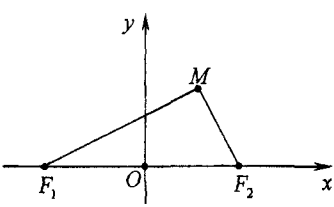


Рис. 3.14

Оси координат выберем так же, как при выводе уравнения эллипса (рис. 3.14). Обозначим расстояние между двумя фокусами через $2c$, тогда координаты фокусов $F_1(-c, 0), F_2(c, 0)$, обозначим через $2a$ постоянную величину, упоминаемую в определении гиперболы, тогда $a < c$.

Пусть $M(x, y)$ произвольная точка гиперболы. По определению гиперболы для любой точки выполняется условие

$$|\overline{F_1M}| - |\overline{F_2M}| = \pm 2a.$$

Поступая, как при выводе уравнения эллипса, получим

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2-c^2}=1.$$

Так как $a>c$, то положим $b^2=c^2-a^2$, тогда окончательно имеем

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1. \qquad (3.23)$$

Уравнение (3.23) называется *каноническим уравнением гиперболы.*

Исследуем форму гиперболы по ее каноническому уравнению:

1) так как уравнение гиперболы содержит только квадраты текущих координат, то, если точка (x, y) принадлежит гиперболе, то и точки $(-x, y), (-x, -y), (x, -y)$ тоже принадлежат гиперболе. Значит *оси координат* являются *осями симметрии гиперболы.* Точка пересечения осей симметрии называется *центром гиперболы.* Для гиперболы, определяемой, уравнением (3.23), центром является начало координат;

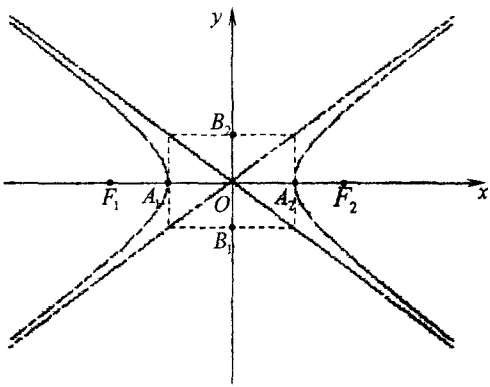


Рис. 3.15.

2) точки пересечения гиперболы с осями симметрии называются *вершинами гиперболы.* Для гиперболы, определяемой уравнением (3.23), вершинами будут точки (рис.3.15): $A_1(-a, 0)$, $A_2(a, 0)$. С осью Oy гипербола, определяемая уравнением (3.23), точек пересечения не имеет. Ось симметрии, имеющая точки пересечения с гиперболой, называется *действительной осью симметрии* (для гиперболы (3.23) – это ось Ox), а ось симметрии, не имеющая точки пересечения с гиперболой, называется *мнимой осью симметрии* (для гиперболы – это ось Oy). Отрезок $A_1A_2=2a$ называется *действительной осью гиперболы,* $a=\frac{A_1A_2}{2}=OA_1=OA_2$ - *действительной полуосью гиперболы,* отрезок $B_1B_2=2b$, соединяющий точки $B_1(0,-b), B_2(0,b)$, называется *мнимой осью гиперболы,* $b=OB_1=OB_2$ называется *мнимой полуосью гиперболы,* $c=OF_1=OF_2$ называется *полуфокусным расстоянием,* причем $c^2=a^2+b^2$ или $c=\sqrt{a^2+b^2}$;

3) из уравнения (3.23) следует, что с ростом $|x|$ возрастает и $|y|$. Таким образом, гипербола имеет вид, приведенный на рис. 3.15. Ветви гиперболы

неограниченно приближаются к прямым $y = \pm\frac{b}{a}x$, называемым *асимптотами гиперболы* (эти прямые являются диагоналями прямоугольника, заданного прямыми $x = \pm a$, $y = \pm b$ (рис. 3.15)).

Эксцентриситетом гиперболы (3.23) называется отношение полуфокусного расстояния к величине действительной полуоси гиперболы, то есть $\varepsilon = \frac{c}{a}$. Так как для гиперболы $c > a$, то $\varepsilon > 1$.

Директрисами гиперболы называются прямые, параллельные мнимой оси гиперболы и отстоящие от этой оси на расстоянии $\frac{a}{\varepsilon}$. Уравнения директрис гиперболы: $x = \pm\frac{a}{\varepsilon}$. Так как $\varepsilon > 1$, то директрисы лежат между вершинами гиперболы. Директрисы гиперболы обладают теми же свойством, что и директрисы эллипса.

Гипербола называется *равносторонней,* если $a = b$. Уравнение равносторонней гиперболы: $x^2 - y^2 = 1$, асимптоты равносторонней гиперболы - прямые $y = \pm x$.

Линия, определяемая уравнением

$$\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1, \qquad (3.24)$$

есть гипербола, действительная ось $2b$ которой расположена на оси Oy, а мнимая ось $2a$ - на оси Ox (рис. 3.16).

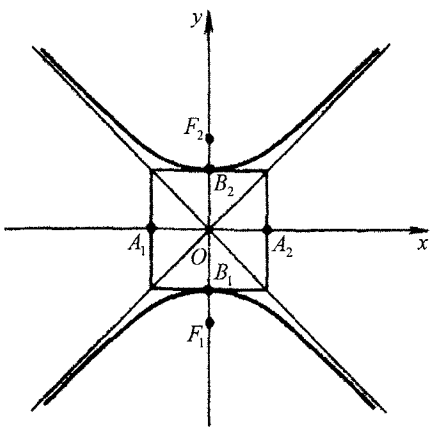


Рис. 3.16

Гиперболы

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \text{и} \quad \frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1$$

имеют общие асимптоты. Такие гиперболы называются *сопряженными.*

Парабола. *Параболой называется геометрическое место точек плоскости, расстояния от каждой из которых до заданных на той же плоскости точки (фокуса параболы) и прямой (директрисы параболы) равны.*

Расстояние от фокуса F до директрисы называется *параметром* параболы и обозначается через p $(p > 0)$.

Для вывода уравнения параболы прямоугольную систему координат расположим так, чтобы ось Ox проходила через фокус F перпендикулярно директрисе в направлении от директрисы, а начало координат расположим посередине между фокусом и директрисой (рис. 3.17). В выбранной системе фокус F имеет координаты $\left(\frac{p}{2}, 0\right)$, а уравнение директрисы имеет вид $x = -\frac{p}{2}$.

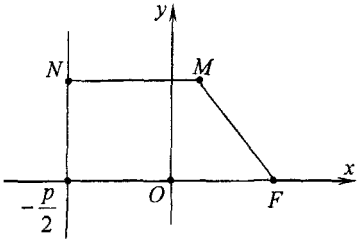


Рис. 3.17

Пусть $M(x, y)$ - произвольная точка параболы. Соединим точку M с точкой F. Проведем отрезок MN перпендикулярно директрисе. Согласно определению параболы, $FM = NM$ или

$$\sqrt{(x-\frac{p}{2})^2 + y^2} = \sqrt{(x+\frac{p}{2})^2}.$$

Возводя обе части уравнения в квадрат и приводя подобные, получим

$$y^2 = 2px. \qquad (3.25)$$

Уравнения (3.25) называются *каноническим уравнением параболы*.

Исследуем форму параболы по ее каноническому уравнению:

1) так как уравнение (3.25) содержит y в квадрате, то парабола симметрична относительно оси Ox, то есть ось Ox является *осью симметрии параболы*;

2) точка пересечения параболы с осью симметрии называется *вершиной параболы*. Для параболы, определяемой уравнением (3.25), точка $(0, 0)$ является вершиной;

3) при неограниченном возрастании x также неограниченно возрастает $|y|$. Парабола, определяемая уравнением (3.25), изображена на рисунке 3.18.

Эксцентриситет параболы принято считать равным единице.

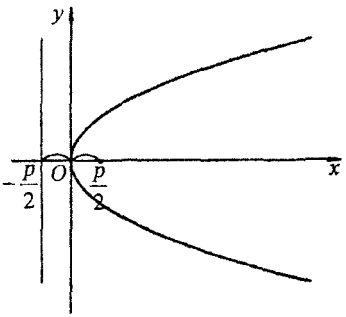


Рис. 3.18

Уравнения $y^2 = -2px$, $x^2 = 2py$, $x^2 = -2py$ $(p > 0)$ также определяют параболы, они изображены на рис. 3.19.

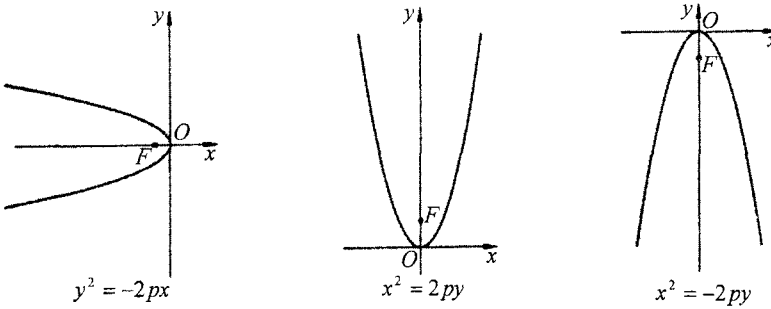


Рис. 3.19

3. 4. Общее уравнение линии второго порядка. Рассмотрим кривые второго порядка с осями симметрии $x = x_0$, $y = y_0$. Тогда для эллипса и гиперболы точка $O'(x_0, y_0)$ будет являться центром, а для параболы вершиной. Через точку $O'(x_0, y_0)$ проведем оси $O'x'$ и $O'y'$, параллельные координатным осям Ox и Oy соответственно. В новой системе координат $O'x'y'$ уравнения эллипса и гиперболы имеют вид:

$$\frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} = 1,$$

$$\frac{x'^2}{a^2} - \frac{y'^2}{b^2} = 1.$$

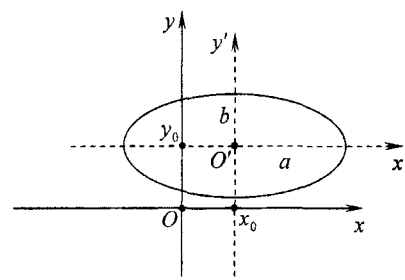


Рис. 3.20

Согласно (1.4) $x' = x - x_0$, $y' = y - y_0$, тогда в старой системе координат Oxy уравнения эллипса и гиперболы записываются соответственно в виде:

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2} + \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1, \qquad (3.26)$$

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2} - \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1. \qquad (3.27)$$

Графики кривых (3.26) и (3.27) приведены на рис. 3.20 и 3.21.

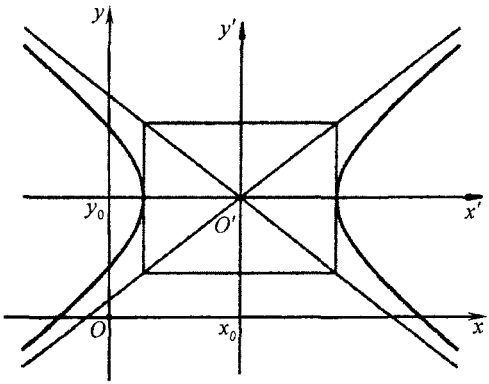


Рис. 3.21

Параболы, вершины которых находятся в точке $O'(x_0, y_0)$, имеют уравнения:

$$(y-y_0)^2 = 2p(x-x_0),$$

$$(y-y_0)^2 = -2p(x-x_0),$$

$$(x-x_0)^2 = 2p(y-y_0),$$

$$(x-x_0)^2 = -2p(y-y_0)$$

и их графики приведены на рисунке 3.22.

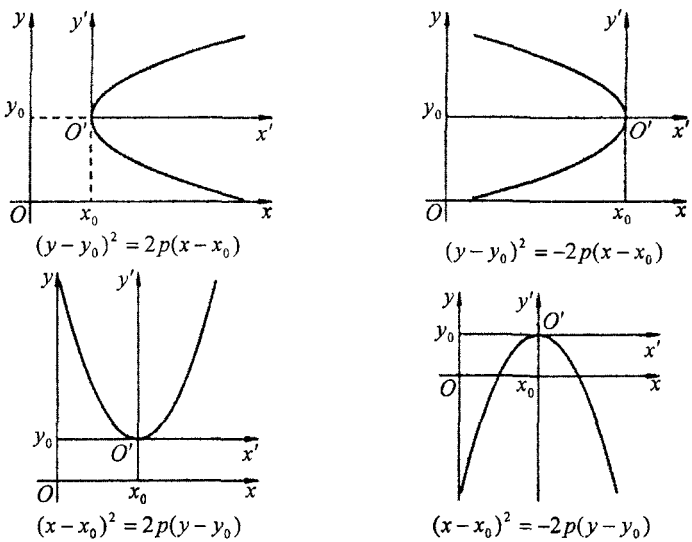


Рис. 3.22

Уравнения эллипса, гиперболы, параболы и окружности, рассмотренные в этом пункте, после преобразования (раскрытия скобок, приведения подобных и введения новых обозначений для коэффициентов) можно записать с помощью единого уравнения вида

$$Ax^2 + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0, \qquad (3.28)$$

где коэффициенты A и C не равны нулю одновременно. Уравнение (3.28) определяет:

окружность, если $A = C$;
эллипс, если $A \cdot C > 0$;
гиперболу, если $A \cdot C < 0$;
параболу, если $A \cdot C = 0$.

Замечание 3.1. Уравнение (3.28) получается из уравнения (3.19) при $B = 0$. Если $B = 0$, то оси симметрии линии второго порядка параллельны осям координат, если $B \neq 0$, то оси симметрии линии второго порядка расположены под некоторым углом α относительно исходной системы координат. Случай $B \neq 0$ нами не рассматривается.▲

Пример 3.6. Установить вид линии второго порядка, привести уравнение к каноническому виду и построить эту линию:

1) $5x^2 + 9y^2 - 30x + 18y + 9 = 0$,

2) $2x^2 + 4x - y - 2 = 0$,

3) $x^2 + y^2 + 4x + 2y + 1 = 0$,

4) $5x^2 - 4y^2 + 16y - 36 = 0$.

Решение: 1) Уравнение $5x^2 + 9y^2 - 30x + 18y + 9 = 0$ определяет эллипс, так как $A \cdot C = 5 \cdot 9 > 0$. Чтобы получить каноническое уравнение эллипса, выделим полные квадраты по переменным x и y и поделим полученное уравнение на свободный член:

$$5(x^2 - 6x + 9) + 9(y^2 + 2y + 1) + 9 - 5 \cdot 9 - 9 = 0,$$

$$5(x-3)^2 + 9(y+1)^2 = 45,$$

$$\frac{(x-3)^2}{9} + \frac{(y+1)^2}{5} = 1.$$

Итак, получено каноническое уравнение эллипса с центром в точке $(3, -1)$ и полуосями $a = 3$ (большая) и $b = \sqrt{5}$ (малая) (рис. 3.23).

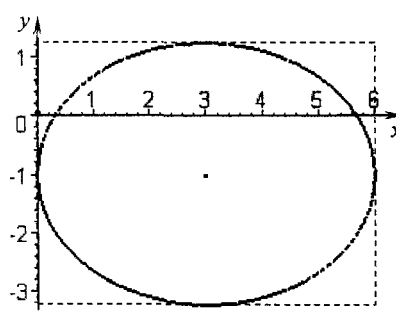


Рис. 3.23

2) Уравнение $2x^2 + 4x - y - 2 = 0$ определяет параболу, так как $A \cdot C = 2 \cdot 0 = 0$. Чтобы получить каноническое уравнение параболы, выделим полный квадрат по

переменной x и поделим полученное уравнение на коэффициент перед полным квадратом:

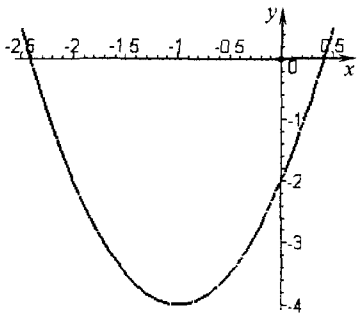


Рис. 3.24

$$2(x^2+2x+1)-y-2-2=0,$$

$$2(x+1)^2-y-4=0,$$

$$(x+1)^2=2\cdot\frac{1}{4}(y+4).$$

Итак, получено каноническое уравнение параболы с вершиной в точке $(-1,-4)$ и параметром $p=\frac{1}{4}$ (рис. 3.24).

3) Уравнение $x^2+y^2+4x+2y+1=0$ определяет окружность, так как $A=C=1$. Для получения канонического уравнения окружности выделим полные квадраты по переменным x и y:

$$(x^2+4x+4)+(y^2+2y+1)-4=0,$$

$$(x+2)^2+(y+1)^2=4.$$

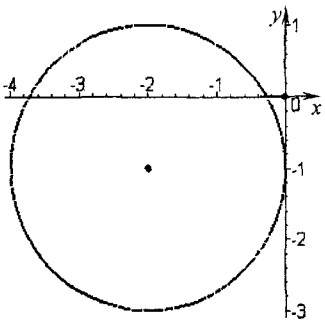


Рис. 3.25

Итак, получено каноническое уравнение окружности с центром в точке $(-2,-1)$ и радиусом $R=2$ (рис. 3.25).

4)Уравнение $5x^2-4y^2+16y-36=0$ определяет гиперболу, так как $A\cdot C=5\cdot(-4)<0$. Для получения канонического уравнения гиперболы выделим полный квадрат по переменной y и поделим полученное уравнение на свободный член:

$$5x^2-4(y^2-4y+4)-36+16=0,$$

$$5x^2-4(y-2)^2=20,$$

$$\frac{x^2}{4}-\frac{(y-2)^2}{5}=1.$$

Итак, получено каноническое уравнение гиперболы с центром в точке $(0,2)$, $a=2$ (действительная полуось) и $b=\sqrt{5}$ (мнимая полуось) (рис. 3.26).

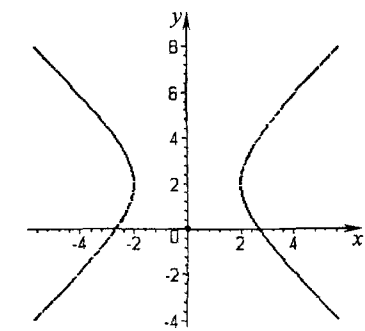


Рис. 3.26

4. АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ В ПРОСТРАНСТВЕ

4.1. Основные понятия. Объектами изучения этого раздела являются поверхности и линии в пространстве.

Поверхность в пространстве можно рассматривать как *геометрическое место точек пространства*, обладающих некоторым свойством. Это свойство точек поверхности можно записать в виде уравнения, связывающего координаты точек поверхности.

Уравнением поверхности в прямоугольной системе координат $Oxyz$ называется такое уравнение $F(x, y, z) = 0$ с тремя переменными x, y и z, которому удовлетворяют координаты каждой точки, лежащей на поверхности. Переменные x, y, z в уравнении поверхности называются *текущими координатами* точек поверхности.

Линию в пространстве можно рассматривать как линию пересечения двух поверхностей. Если $F_1(x, y, z) = 0$ и $F_2(x, y, z) = 0$ - уравнения двух поверхностей, определяющих линию L, то координаты точек этой линии удовлетворяют системе двух уравнений с тремя неизвестными:

$$\begin{cases} F_1(x, y, z) = 0, \\ F_2(x, y, z) = 0. \end{cases} \tag{4.1}$$

Уравнения системы (4.1) называются *уравнениями линии в пространстве*.

Линию в пространстве можно задать и параметрически:

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \\ z = z(t). \end{cases} \tag{4.2}$$

4.2. Уравнения плоскости в пространстве. Простейшей поверхностью является плоскость. Плоскость в пространстве можно задать разными способами. Каждому из них соответствует определенный вид ее уравнения.

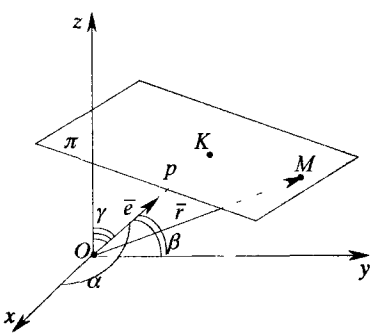


Рис. 4.1

A. Нормальное уравнение плоскости

Положение плоскости π однозначно определяется заданием единичного вектора $\bar{e}$, имеющего направление перпендикуляра OK, опущенного на плоскость π из начала координат, и длиной p этого перпендикуляра, то есть $OK = p$ (рис. 4.1). Углы, образованные единичным вектором $\bar{e}$ с положительными направлениями осей координат Ox, Oy, Oz, обозначим через α, β, γ соответст-

венно, тогда $\bar{e} = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$. Возьмем на плоскости π произвольную точку $M(x, y, z)$, тогда $\overline{OM} = \bar{r}$ и $\overline{OM} = (x, y, z)$.

При любом положении точки M на плоскости π неизменной остается проекция радиус – вектора $\bar{r}$ на направление вектора $\bar{e}$, она равна p, то есть $np_{\bar{e}}\bar{r} = p$ или

$$\bar{r} \cdot \bar{e} - p = 0. \tag{4.3}$$

Уравнение (4.3) называется *нормальным уравнением плоскости в векторной форме*. Запишем скалярное произведение в (4.3) через координаты

$$x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma - p = 0. \tag{4.4}$$

Уравнение (4.4) называется *нормальным уравнением плоскости в координатной форме*.

Б. Уравнение плоскости, проходящей через данную точку перпендикулярно данному вектору

Найдем уравнение плоскости, проходящей через данную точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ перпендикулярно данному вектору $\bar{n} = (A, B, C)$ (рис. 4.2). Возьмем на этой плоскости произвольную точку $M(x, y, z)$, тогда вектор $\overline{M_0M} = (x - x_0, y - y_0, z - z_0)$. При любом расположении точки M на плоскости векторы $\bar{n}$ и $\overline{M_0M}$ ортогональны, следовательно, $\bar{n} \cdot \overline{M_0M} = 0$ или

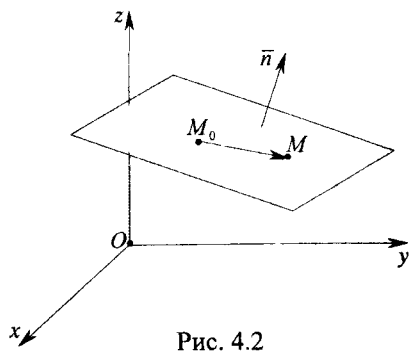


Рис. 4.2

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0. \tag{4.5}$$

Уравнение (4.5) называется *уравнением плоскости, проходящей через данную точку* $M_0(x_0, y_0, z_0)$ *перпендикулярно вектору* $\bar{n} = (A, B, C)$. Вектор $\bar{n} = (A, B, C)$ называется *нормальным вектором плоскости.*

В. Общее уравнение плоскости

Раскроем в (4.5) скобки, обозначим через $D = -Ax_0 - By_0 - Cz_0$ и в результате получим уравнение

$$Ax + By + Cz + D = 0, \tag{4.6}$$

называемое *общим уравнением плоскости.* Переход от общего уравнения плоскости к нормальному уравнению плоскости аналогичен случаю прямой на плоскости и совершается с помощью нормирующего множителя $\mu = \pm\dfrac{1}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$, причем знак μ противоположен знаку D.

Частные случаи общего уравнения:

1⁰. Пусть $D = 0$, тогда уравнение (4.6) примет вид

$$Ax + By + Cz = 0$$

и соответствующая *плоскость проходит через начало координат.*

2⁰. Пусть $C = 0$, тогда уравнение (4.6) имеет вид

$$Ax + By + D = 0$$

и соответствующая *плоскость параллельна оси* Oz (так как ее нормальный вектор $\overline{n} = (A, B, 0)$ перпендикулярен оси Oz). Пусть $B = 0$ - плоскость $Ax + Cz + D = 0$ параллельна оси Oy. Пусть $A = 0$ - плоскость $By + Cz + D = 0$ параллельна оси Ox.

3⁰. Пусть $C = D = 0$, тогда уравнение (4.6) имеет вид

$$Ax + By = 0$$

и соответствующая плоскость проходит через начало координат и параллельна оси Oz, то есть *плоскость проходит через ось* Oz. Уравнения $By + Cz = 0$ $(A = D = 0)$ и $Ax + Cz = 0$ $(B = D = 0)$ определяют *плоскости, проходящие* соответственно *через ось* Ox *и ось* Oy.

4⁰. Пусть $A = B = 0$, тогда уравнение (4.6) примет вид

$$Cz + D = 0,$$

то есть $z = -\dfrac{D}{C}$ и *плоскость параллельна координатной плоскости* xOy.

Уравнения $Ax + D = 0$ $(B = C = 0)$ и $By + D = 0$ $(A = C = 0)$ *определяют плоскости соответственно параллельные координатным плоскостям* yOz *и* xOz.

5⁰. Пусть $A = B = D = 0$, тогда уравнение (4.6) примет вид $Cz = 0$, то есть $z = 0$ - это уравнение координатной плоскости xOy. Уравнение $y = 0$ $(A = C = D = 0)$ - уравнение координатной плоскости xOz, уравнение $x = 0$ $(B = C = D = 0)$ - уравнение координатной плоскости yOz.

Г. Уравнение плоскости, проходящей через три данные точки

Найдем уравнение плоскости, проходящей через три данные точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$, $M_3(x_3, y_3, z_3)$, не лежащие на одной прямой. Возьмем на этой плоскости произвольную точку $M(x, y, z)$ и рассмотрим три вектора: $\overline{M_1M} = (x - x_1, y - y_1, z - z_1)$, $\overline{M_1M_2} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$, $\overline{M_1M_3} = (x_3 - x_1, y_3 - y_1, z_3 - z_1)$. Так как эти векторы лежат в одной плоскости, то есть компланарны, то их смешанное произведение равно нулю:

$$\overline{M_1M} \cdot \overline{M_1M_2} \cdot \overline{M_1M_3} = 0.$$

Согласно формуле (2.27), имеем

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix} = 0. \qquad (4.7)$$

Уравнение (4.7) есть *уравнение плоскости, проходящей через три данные точки.*

Д. *Уравнение плоскости в отрезках*

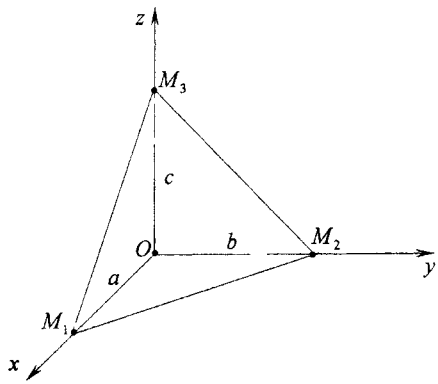


Рис. 4.3

Пусть плоскость отсекает на осях Ox, Oy, Oz соответственно отрезки a, b, c (рис. 4.3), то есть проходит через точки $M_1(a, 0, 0)$, $M_2(0, b, 0)$, $M_3(0, 0, c)$. Подставив координаты этих точек в уравнение (4.7), получим

$$\begin{vmatrix} x-a & y & z \\ -a & b & 0 \\ -a & 0 & c \end{vmatrix} = 0,$$

затем раскроем определитель и приведем полученное уравнение к виду

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1. \qquad (4.8)$$

Уравнение (4.8) называется *уравнением плоскости в отрезках.* Этим уравнением удобно пользоваться при построении плоскости в случае, когда все коэффициенты уравнения (4.6) отличны от нуля.

Пример 4.1. Составить уравнение плоскости, проходящей через точки $M_1(1, 2, 3)$, $M_2(3, 1, -1)$, $M_3(2, 3, 2)$. Найти нормальный вектор плоскости и построить плоскость.

Решение: Для получения уравнения плоскости воспользуемся формулой (4.7)

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-2 & z-3 \\ 3-1 & 1-2 & -1-3 \\ 2-1 & 3-2 & 2-3 \end{vmatrix} = 0.$$

Раскроем определитель и приведем подобные, в результате получим искомое уравнение плоскости

$$5x-2y+3z-10=0. \qquad (*)$$

Коэффициенты уравнения, стоящие перед x, y, z, являются координатами нормального вектора данной плоскости, то есть $\bar{n} = (5, -2, 3)$.

Для построения плоскости приведем уравнение (*) к уравнению в отрезках, для чего в уравнении (*) свободный член перенесем в правую часть и поделим на него уравнение:

$$\frac{5x}{10} - \frac{2y}{10} + \frac{3z}{10} = 1.$$

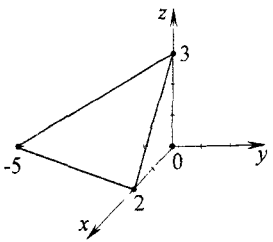


Рис. 4.4

Далее преобразуем последнее уравнение к следующему виду:

$$\frac{x}{2} + \frac{y}{-5} + \frac{z}{10/3} = 1.$$

Значит, эта плоскость проходит через точки $M_1(2, 0, 0)$, $M_2(0, -5, 0)$, $M_3\left(0, 0, \frac{10}{3}\right)$, лежащие на координатных осях Ox, Oy, Oz соответственно (рис.4.4).

Ж. Угол между плоскостями. Условия параллельности и перпендикулярности двух плоскостей

Углом между двумя плоскостями называется любой из двух смежных двугранных углов, образованных этими плоскостями. Один из этих углов равен углу между нормальными векторами этих плоскостей.

Пусть плоскости заданы общими уравнениями:

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0,$$
$$A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0.$$

Выпишем их нормальные векторы:

$$\bar{n_1} = (A_1, B_1, C_1) \text{ и } \bar{n_2} = (A_2, B_2, C_2)$$

и по формуле (2.21) найдем косинус угла φ между векторами $\bar{n_1}$ и $\bar{n_2}$:

$$\cos\varphi = \frac{\bar{n_1} \cdot \bar{n_2}}{|\bar{n_1}| \cdot |\bar{n_2}|} = \frac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}. \qquad (4.9)$$

Если плоскости параллельны, то будут коллинеарны их нормальные векторы $\bar{n_1}$ и $\bar{n_2}$ (и наоборот), то есть

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}. \qquad (4.10)$$

это *условие параллельности двух плоскостей.*

Если плоскости перпендикулярны, то будут ортогональны их нормальные векторы $\overline{n_1}$ и $\overline{n_2}$ (и наоборот), то есть $\overline{n_1} \cdot \overline{n_2} = 0$ или

$$A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0 \text{ -} \qquad (4.11)$$

это *условие перпендикулярности двух плоскостей.*

3. Расстояние от точки до плоскости

Дана плоскость $Ax + By + Cz + D = 0$ и точка $M_0(x_0, y_0, z_0)$. Расстояние d от точки M_0 до данной плоскости определяется по формуле

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}. \qquad (4.12)$$

Вывод этой формулы аналогичен выводу формулы для определения расстояния на плоскости от данной точки $M_0(x_0, y_0)$ до данной прямой $Ax + By + C = 0$ (см. пункт 3.2).

4.3. Уравнения прямой в пространстве. Прямая в пространстве может быть поучена в результате пересечения двух непараллельных плоскостей. Поэтому прямая в пространстве может быть задана уравнениями двух плоскостей:

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0. \end{cases} \qquad (4.13)$$

Уравнения (4.13) называют *общими уравнениями прямой.* Уравнения (4.13) определяют прямую только тогда, когда коэффициенты уравнений не пропорциональны.

А. Уравнение прямой, проходящей через данную точку параллельно данному вектору

Найдем уравнение прямой, проходящей через данную точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ параллельно данному вектору $\overline{a} = (a_x, a_y, a_z)$ - *направляющий вектор прямой.* Возьмем на прямой произвольную точку $M(x, y, z)$. Через $\overline{r_0}$ и $\overline{r}$ обозначим радиус-векторы точек M_0 и M соответственно. Тогда вектор

$$\overline{M_0M} = (x - x_0, y - y_0, z - z_0)$$

связан с векторами $\overline{r}$ и $\overline{r_0}$ следующим соотношением:

$$\overline{r} = \overline{r_0} + \overline{M_0M}. \qquad (4.14)$$

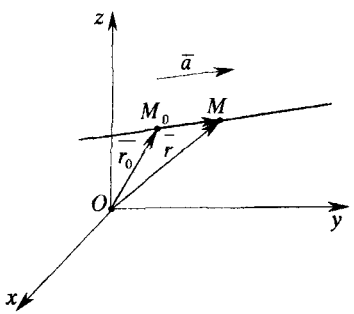


Рис. 4.5

Но вектор $\overline{M_0M}$ лежит на прямой и, следовательно, коллинеарен направляющему вектору $\bar{a}$, то есть $\overline{M_0M} = t\bar{a}$, где t - скалярный множитель, называемый *параметром*. Уравнение (4.14) можно записать и так:

$$\bar{r} = \overline{r_0} + t\bar{a}. \tag{4.15}$$

Уравнение (4.15) называется *векторно-параметрическим уравнением прямой.*

Векторное равенство (4.15) запишем в координатной форме

$$\begin{cases} x = x_0 + a_x t, \\ y = y_0 + a_y t, \\ z = z_0 + a_z t. \end{cases} \tag{4.16}$$

Уравнения (4.16) называются *параметрическими уравнениями прямой в пространстве.*

Исключая в (4.16) параметр t, получим уравнение

$$\frac{x - x_0}{a_x} = \frac{y - y_0}{a_y} = \frac{z - z_0}{a_z}. \tag{4.17}$$

Уравнение (4.17) называется *каноническим уравнением прямой в пространстве.*

Если один из знаменателей в уравнении (4.17) равен нулю, то и соответствующий числитель будет равен нулю, так как прямая будет перпендикулярна соответствующей оси координат.

Б. Уравнение прямой, проходящей через две данные точки

Найдем уравнение прямой, проходящей через данные точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$ и $M_2(x_2, y_2, z_2)$. Возьмем на прямой произвольную точку $M(x, y, z)$, а в качестве направляющего вектора выберем вектор $\overline{M_1M_2} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$ и воспользуемся каноническим уравнением (4.17). В результате получим уравнение

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}. \tag{4.18}$$

Уравнение (4.18) называется *уравнением прямой в пространстве, проходящей через две данные точки.*

Пример 4.2. Найти уравнение прямой, проходящей через две точки $A_1(1, 1, 2)$ и $A_2(2, 3, -1)$.

Решение: Воспользуемся формулой (4.18), согласно которой, имеем

$$\frac{x-1}{2-1} = \frac{y-1}{3-1} = \frac{z-2}{-1-2} \text{ или } \frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-2}{-3}.$$

Ответ: $\dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y-1}{2} = \dfrac{z-2}{-3}$.

В. Угол между двумя прямыми. Условия параллельности и перпендикулярности прямых

Углом между двумя прямыми в пространстве называется любой из углов, образованных прямыми, проведенными через произвольную точку пространства, параллельно данным прямым. Один из этих углов равен углу между направляющими векторами этих прямых.

Пусть прямые заданы каноническими уравнениями:

$$\frac{x-x_1}{a_x}=\frac{y-y_1}{a_y}=\frac{z-z_1}{a_z} \text{ и } \frac{x-x_2}{b_x}=\frac{y-y_2}{b_y}=\frac{z-z_2}{b_z}.$$

Выпишем их направляющие векторы $\bar{a}=(a_x, a_y, a_z)$ и $\bar{b}=(b_x, b_y, b_z)$ и по формуле (2.21), определим косинус угла φ между векторами $\bar{a}$ и $\bar{b}$:

$$\cos\varphi=\frac{\bar{a}\cdot\bar{b}}{|\bar{a}|\cdot|\bar{b}|}=\frac{a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}\cdot\sqrt{b_x^2+b_y^2+b_z^2}}. \qquad (4.19)$$

Если прямые параллельны, то их направляющие векторы коллинеарны (и наоборот), то есть удовлетворяют соотношению

$$\frac{a_x}{b_x}=\frac{a_y}{b_y}=\frac{a_z}{b_z}. \qquad (4.20)$$

Условие (4.20) - *условие параллельности прямых.*

Если прямые перпендикулярны, то их направляющие векторы ортогональны (и наоборот), значит $\bar{a}\cdot\bar{b}=0$, то есть

$$a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z=0. \qquad (4.21)$$

Условие (4.21) - *условие перпендикулярности прямых.*

Г. Угол между прямой и плоскостью. Условия параллельности и перпендикулярности прямой и плоскости

Углом между прямой и плоскостью называется любой из двух смежных углов, образованных прямой и её проекцией на плоскость.

Пусть плоскость задана общим уравнением $Ax+By+Cz+D=0$, а прямая - каноническим уравнением $\frac{x-x_0}{a_x}=\frac{y-y_0}{a_y}=\frac{z-z_0}{a_z}$. Обозначим через φ угол между прямой и плоскостью, через $\beta=\frac{\pi}{2}-\varphi$ - угол между нормальным вектором плоскости $\bar{n}=(A, B, C)$ и направляющим вектором прямой $\bar{a}=(a_x, a_y, a_z)$ (рис.4.6).

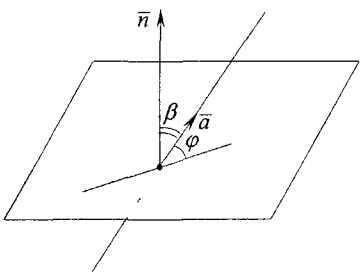


Рис. 4.6

Так как $\sin\varphi = \left|\cos\left(\frac{\pi}{2}-\varphi\right)\right|$, а $\cos\left(\frac{\pi}{2}-\varphi\right) = \frac{\bar{n}\cdot\bar{a}}{|\bar{n}|\cdot|\bar{a}|}$, то

$$\sin\varphi = \frac{\left|Aa_x + Ba_y + Ca_z\right|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\cdot\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}}. \qquad (4.22)$$

Если прямая параллельна плоскости, то нормальный вектор плоскости $\bar{n}$ ортогонален направляющему вектору прямой $\bar{a}$, то есть

$$Aa_x + Ba_y + Ca_z = 0. \qquad (4.23)$$

Условие (4.23) - *условие параллельности прямой и плоскости.*

Если прямая перпендикулярна плоскости, то нормальный вектор $\bar{n}$ плоскости коллинеарен направляющему вектору $\bar{a}$ прямой, то есть

$$\frac{A}{a_x} = \frac{B}{a_y} = \frac{C}{a_z}. \qquad (4.24)$$

Условие (4.24) - *условие перпендикулярности прямой и плоскости.*

Пример 4.3. Даны координаты вершины тетраэдра $A_1(1, 1, 2)$, $A_2(2, 3, -1)$, $A_3(2, -2, 4)$, $A_4(-1, 1, 3)$ (см. рис. 2.24). Найти: 1) угол между ребром A_1A_4 и гранью $A_1A_2A_3$; 2) уравнение высоты, опущенной из вершины A_4 на грань $A_1A_2A_3$.

Решение: 1) Угол между ребром A_1A_4 и гранью $A_1A_2A_3$ найдем как угол между прямой, проходящей через две точки A_1 и A_4, и плоскостью, проходящей через три точки A_1, A_2 и A_3.

Составим уравнение прямой A_1A_4 по формуле (4.18)

$$\frac{x-1}{-1-1} = \frac{y-1}{1-1} = \frac{z-2}{3-2}$$

и выпишем направляющий вектор $\bar{a} = (-2, 0, 1)$ этой прямой.

Составим уравнение плоскости $A_1A_2A_3$ по формуле (4.7)

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z-2 \\ 2-1 & 3-1 & -1-2 \\ 2-1 & -2-1 & 4-2 \end{vmatrix} = 0.$$

Раскроем определитель и в результате получим

$$x + y + z - 4 = 0.$$

Выпишем нормальный вектор этой плоскости $\bar{n} = (1, 1, 1)$.

Теперь по формуле (4.22) найдем угол между прямой A_1A_4 и плоскостью $A_1A_2A_3$:

$$\sin\varphi = \frac{|\bar{a}\cdot\bar{n}|}{|\bar{a}|\cdot|\bar{n}|} = \frac{|-2\cdot 1+0\cdot 1+1\cdot 1|}{\sqrt{(-2)^2+0^2+1^2}\cdot\sqrt{1^2+1^2+1^2}} = \frac{1}{\sqrt{5}\cdot\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{15}},$$

$$\varphi = \arcsin\frac{1}{\sqrt{15}} \approx 15^0.$$

2) Высота, опущенная из вершины A_4 на грань $A_1A_2A_3$, есть прямая, проходящая через точку A_4 перпендикулярно плоскости $A_1A_2A_3$, значит нормальный вектор плоскости $\bar{n} = (1,1,1)$ будет являться одновременно и направляющим вектором искомой прямой. Теперь воспользуемся формулой (4.17) уравнения прямой, проходящей через данную точку параллельно данному вектору:

$$\frac{x+1}{1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-3}{1}.$$

Ответ: 1) $\varphi \approx 15^0$, 2) $\dfrac{x+1}{1} = \dfrac{y-1}{1} = \dfrac{z-3}{1}$.

4.4. Цилиндрические поверхности. *Цилиндрической поверхностью называется поверхность, образованная прямыми (образующими цилиндра), параллельными некоторой данной прямой и пересекающими данную линию L (направляющую цилиндра).*

Будем рассматривать цилиндрические поверхности, образующие которых параллельны одной из координатных осей, а направляющей является плоская кривая, лежащая в одной из координатных плоскостей. Уравнения таких цилиндрических поверхностей содержат только две координаты. В уравнении будет отсутствовать координата, одноименная с координатной осью, которой параллельны образующие цилиндрической поверхности. Так уравнение вида $F(x,y)=0$ определяет цилиндрическую поверхность, у которой образующие параллельны оси Oz, а направляющая лежит в плоскости xOy, причем уравнение направляющей есть $F(x,y)=0$.

Эллиптический цилиндр. Уравнение

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \qquad (4.25)$$

определяет цилиндрическую поверхность, у которой направляющая есть эллипс, лежащий в плоскости xOy, а образующие параллельны оси Oz (рис.4.7). Частным случаем эллиптического цилиндра является круговой цилиндр, уравнение которого $x^2+y^2=R^2$.

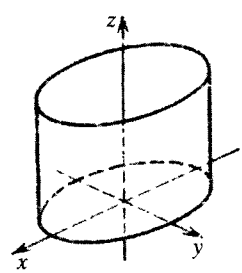


Рис. 4.7

Гиперболический цилиндр. Уравнение

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad (4.26)$$

определяет цилиндрическую поверхность, у которой направляющая есть гипербола, лежащая в плоскости xOy, а образующие параллельны оси Oz (рис.4.8).

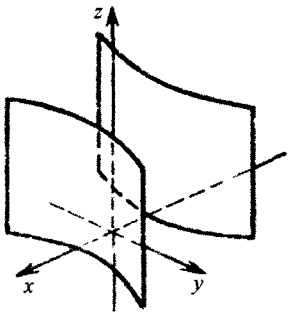


Рис. 4.8

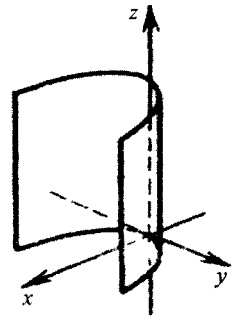


Рис. 4.9

Параболический цилиндр. Уравнение

$$y^2 = 2px \qquad (4.27)$$

определяет цилиндрическую поверхность, у которой направляющая есть парабола, лежащая в плоскости xOy, а образующие параллельны оси Oz (рис.4.9).

Эллиптический, гиперболический, параболический цилиндры – это цилиндры второго порядка.

4.5. Конические поверхности. *Конической поверхностью называется поверхность образованная прямыми (образующими конуса), проходящими через данную точку (вершину конуса) и пересекающими данную линию (направляющую конуса).*

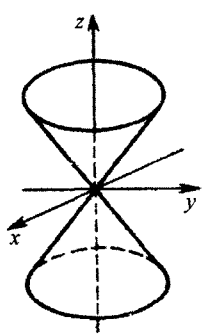


Рис. 4.10

Уравнение

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0 \qquad (4.28)$$

определяет конус второго порядка (рис.4.10). Вершина его расположена в начале координат, а направляющей является линия

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,\ z = C.$$

4.6. Поверхности второго порядка. Существуют только девять типов поверхностей второго порядка, с четырьмя из которых мы познакомились (эллиптический, гиперболический, параболический цилиндры и конус второго порядка). В этом пункте познакомимся с остальными пятью типами поверхностей второго порядка. Уравнения поверхностей, которые рассматриваются в пунктах 4.5 - 4.6, называются *каноническими уравнениями поверхностей второго порядка*. Изучение и построение всех рассмотренных в этих пунктах поверхностей ведется *методом сечений*, при котором последовательно рассматриваются линии пересечения данной поверхности с координатными плоскостями или плоскостями, параллельными координатным.

Эллипсоид. Поверхность второго порядка, определяемая уравнением

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1, \qquad (4.29)$$

называется *эллипсоидом*, а величины a, b, c – *полуосями эллипсоида* (рис. 4.11). Если все полуоси различны, то эллипсоид называется *трехосным*, если какие-либо две полуоси равны, то – *эллипсоидом вращения*, если все три полуоси равны, то - *сферой*.

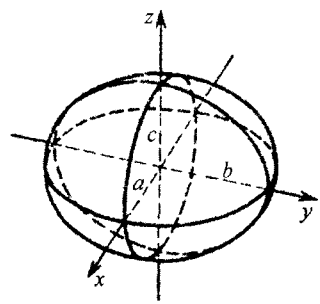


Рис. 4.11

Однополостный гиперболоид. Поверхность второго порядка, определяемая уравнением

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1, \qquad (4.30)$$

называется *однополостным гиперболоидом* (рис. 4.12), а величины a, b, c – полуосями.

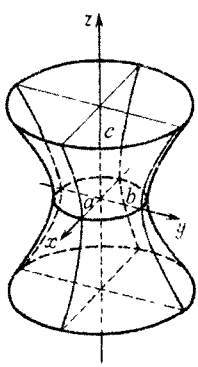


Рис. 4.12

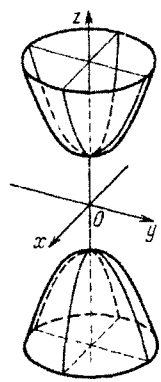


Рис. 4.13

Двуполостный гиперболоид. Поверхность второго порядка, определяемая уравнением

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{в^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1, \tag{4.31}$$

называется *двуполостным гиперболоидом* (рис. 4.13), а величины a, b, c – полуосями.

Эллиптический параболоид. Поверхность второго порядка, определяемая уравнением

$$z=\frac{x^2}{2p}+\frac{y^2}{2q},(p>0,q>0), \tag{4.32}$$

называется *эллиптическим параболоидом* (рис. 4.14).

Гиперболический параболоид. Поверхность второго порядка, определяемая уравнением

$$z=\frac{x^2}{2p}-\frac{y^2}{2q},(p>0,q>0), \tag{4.33}$$

называется *гиперболическим параболоидом* (рис. 4.15).

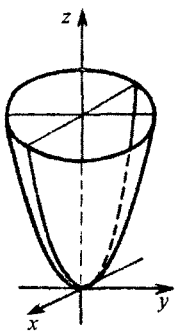


Рис. 4.14

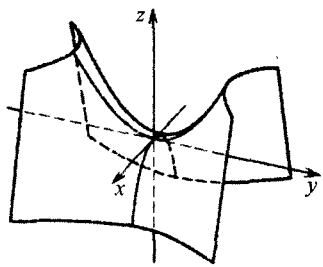


Рис. 4.15

Пример 4.4. Построить тело, ограниченное поверхностями:

1) $x+y+z-2=0, x=0, y=0, z=0$;

2) $y=x^2, y=1, z=0, z=2$;

3) $z^2=x^2+y^2$, $z=6-x^2-y^2$, $z\geq 0$.

Решение: 1) Каждое из уравнений определяет плоскость. Первая плоскость пересекает все координатные оси, поэтому для построения воспользуемся уравнением в отрезках

$$\frac{x}{2}+\frac{y}{2}+\frac{z}{2}=1.$$

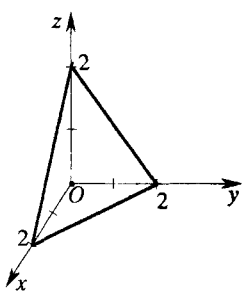


Рис. 4.16

Значит, эта плоскость пересекает оси координат в точках $(2, 0, 0), (0, 2, 0), (0, 0, 2)$ (рис.4.16). Остальные уравнения определяют координатные плоскости. Тело, ограниченное этими плоскостями, есть тетраэдр, расположенный в I октанте (рис.4.16).

2) Уравнение $y = x^2$ определяет в пространстве параболический цилиндр с образующей, параллельной оси Oz (рис. 4.17). Этот цилиндр ограничен *тремя плоскостями:* координатной xOy $(z = 0)$, плоскостью $z = 2$, параллельной плоскости $z = 0$, и плоскостью $y = 1$, параллельной координатной плоскости xOz. Тело, ограниченное данными поверхностями, изображено на рисунке 4.17.

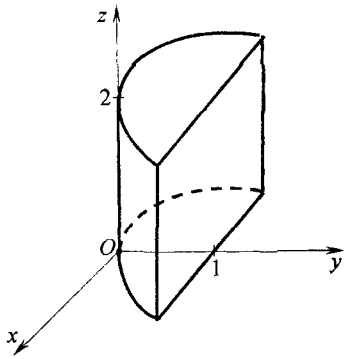


Рис. 4.17

3) Уравнение $z^2 = x^2 + y^2$ определяет круговой конус и так как $z \geq 0$, то строим ту его часть, которая лежит выше плоскости $z = 0$. Уравнение $z = 6 - x^2 - y^2$ определяет круговой параболоид, вершина которого находится в точке $(0, 0, 6)$ и $z = 6$ наибольшее значение аппликаты. Найдем уравнение линии пересечения поверхностей:

$$\begin{cases} z^2 = x^2 + y^2, \\ z = 6 - (x^2 + y^2), \\ z \geq 0, \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} z = 6 - z^2, \\ z \geq 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z_1 = -3, z_2 = 2, \\ z \geq 0, \end{cases}$$

$$\Rightarrow z = 2.$$

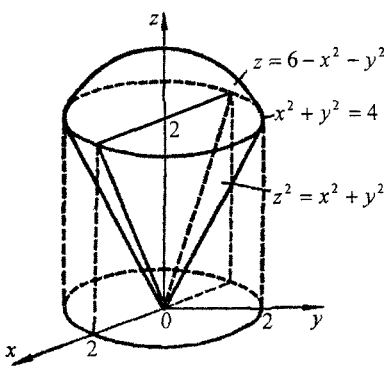


Рис. 4.18

Значит поверхности пересекаются по линии $x^2 + y^2 = 4$, лежащей в плоскости $z = 2$. На рис. 4.18 изображено тело, ограниченное данными поверхностями.

ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЯ

1. Что называется вектором?
2. Что называется модулем вектора?
3. Какие векторы называются коллинеарными, компланарными, равными?
4. Какие операции над векторами называются линейными и каковы свойства этих операций?
5. Как определяется декартовая система координат?
6. Что называется проекцией вектора на ось, каковы ее свойства?
7. Как выражаются координаты вектора через координаты его начальной и конечной точек?
8. Выведите формулу деления отрезка в данном отношении.
9. Что называется скалярным произведением двух векторов и каковы его свойства?
10. Как выражается скалярное произведение через координаты векторов-сомножителей?
11. Выведите формулы для длины вектора, угла между двумя векторами и расстояния между двумя точками в декартовой прямоугольной системе координат.
12. Что называется векторным произведением двух векторов и каковы его свойства?
13. Как выражается векторное произведение через координаты векторов - сомножителей?
14. Что называется смешанным произведением трех векторов и каковы его свойства?
15. Как выражается смешанное произведение через координаты векторов – сомножителей?
16. Условия ортогональности, коллинеарности, компланарности векторов.
17. Полярная система координат.
18. Как в аналитической геометрии определяются линии и поверхности?
19. Что называется направляющим и нормальным вектором прямой?
20. Как записывается уравнение прямой, проходящей через данную точку параллельно данному вектору в пространстве и на плоскости?
21. Как записывается уравнение прямой, проходящей через две данные точки в пространстве и на плоскости?
22. Уравнение прямой в отрезках.
23. Общее уравнение прямой на плоскости и в пространстве.
24. Полярное уравнение прямой.
25. Нормальное уравнение прямой на плоскости и в пространстве.
26. Что называется угловым коэффициентов прямой на плоскости и каков его геометрический смысл?
27. Как записывается уравнение прямой с угловым коэффициентом?

28. Как вычисляются углы между двумя прямыми на плоскости и в пространстве?
29. Каковы условия параллельности и перпендикулярности двух прямых на плоскости и в пространстве?
30. Параметрический способ задания линий.
31. Как записывается общее уравнение плоскости, частные случаи?
32. Как записывается уравнение плоскости, проходящей через три данные точки?
33. Уравнение плоскости в отрезках.
34. Угол между плоскостями. Условия параллельности и перпендикулярности двух плоскостей.
35. Угол между прямой и плоскостью. Условия параллельности и перпендикулярности прямой и плоскости.
36. Расстояние от точки до прямой и до плоскости.
37. Определение эллипса, его каноническое уравнение и свойства.
38. Определение гиперболы, ее каноническое уравнение и свойства.
39. Определение параболы, ее каноническое уравнение и свойства.
40. Что называется фокусами, директрисами и эксцентриситетом эллипса, гиперболы и параболы?
41. Что называется асимптотами гиперболы?
42. Что называется цилиндрической поверхностью? Цилиндрические поверхности второго порядка.
43. Что называется конической поверхностью? Конические поверхности второго порядка.
44. Назовите поверхности второго порядка и напишите их канонические уравнения.
45. Метод сечений построения поверхностей.

ЗАДАЧИ КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ
(10 вариантов)

Задача №1.

Вариант 1. Векторы $\overline{BC}=\bar{a},\overline{CA}=\bar{b},\overline{AB}=\bar{c}$ служат сторонами треугольника. Выразить через $\bar{a}$ и $\bar{b}$ векторы, совпадающие с медианами $\overline{AM},\overline{BN},\overline{CP}$.

Вариант 2. В параллелограмме $ABCD$: $\overline{AB}=\bar{b}$, $\overline{AN}=\bar{a}$, где N - середина стороны CD. Выразить через $\bar{a},\bar{b}$ векторы: $\overline{AD}$, $\overline{CB}$, $\overline{AC}$, $\overline{BD}$.

Вариант 3. В прямоугольнике $ABCD$: $\overline{AC}=\bar{c}$, $\overline{AN}=\bar{n}$, где N - середина стороны CD. Через векторы $\bar{c},\bar{n}$ выразить векторы: $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$, $\overline{AD}$, $\overline{BD}$.

Вариант 4. В параллелограмме $ABCD$: $\overline{AM}=\bar{a}$, $\overline{BM}=\bar{b}$, где M - середина стороны CD. Через векторы $\bar{a},\bar{b}$ выразить векторы: $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$, $\overline{DA}$, $\overline{AC}$, $\overline{BD}$.

Вариант 5. В параллелограмме $ABCD$: $\overline{AD}=\bar{a}$, $\overline{AN}=\bar{n}$, где N - точка, делящая сторону BC в соотношении $1:2$. Через векторы $\bar{a}$, $\bar{n}$ выразить: $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$, $\overline{DN}$, $\overline{AC}$, $\overline{BD}$.

Вариант 6. В ромбе $ABCD$: $\overline{AB}=\bar{b}$, $\overline{OA}=\bar{a}$, где O - точка пересечения диагоналей. Через векторы $\bar{a}$, $\bar{b}$ выразить: $\overline{BC}$, $\overline{CD}$, $\overline{DA}$, $\overline{AC}$, $\overline{BD}$.

Вариант 7. В прямоугольнике $ABCD$: $\overline{AC}=\bar{c}$, $\overline{AM}=\bar{m}$, где AC - диагональ, а точка M делит сторону DC в отношении $1:2$. Через векторы $\bar{c}$, $\bar{m}$ выразить: $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$, $\overline{AD}$, $\overline{BD}$.

Вариант 8. В четырехугольнике $ABCD$: $\overline{AB}=\bar{a}$, $\overline{BC}=\bar{b}$, $\overline{CD}=\bar{c}$. Точка E делит сторону AD в отношении $1:2$. Через векторы $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ выразить: $\overline{BE}$, $\overline{AD}$, $\overline{AC}$, $\overline{BD}$.

Вариант 9. В параллелограмме $ABCD$: $\overline{AB}=\bar{a}$, $\overline{AD}=\bar{b}$. Через векторы $\bar{a}$, $\bar{b}$ выразить: $\overline{MA}$, $\overline{MB}$, $\overline{MC}$, $\overline{MD}$, где M - точка пересечения диагоналей.

Вариант 10. В правильном шестиугольнике $ABCDEF$: $\overline{AB}=\bar{p}$, $\overline{BC}=\bar{q}$. Выразить через $\bar{p}$, $\bar{q}$ векторы $\overline{CD}$, $\overline{DE}$, $\overline{EF}$, $\overline{FA}$, $\overline{AC}$, $\overline{AD}$, $\overline{AE}$.

Задача №2. Даны векторы $\bar{a}=(a_x,a_y,a_z)$, $\bar{b}=(b_x,b_y,b_z)$, $\bar{c}=(c_x,c_y,c_z)$, $\bar{d}=(d_x,d_y,d_z)$. Показать, что $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ образуют базис и найти координаты вектора $\bar{d}$ в этом базисе.

Вариант 1. $\bar{a}=(4,5,2)$, $\bar{b}=(3,0,1)$, $\bar{c}=(-1,4,2)$, $\bar{d}=(5,7,8)$.

Вариант 2. $\bar{a}=(4,7,8)$, $\bar{b}=(9,1,3)$, $\bar{c}=(2,-4,1)$, $\bar{d}=(1,-13,-13)$.

Вариант 3. $\bar{a}=(8,2,3)$, $\bar{b}=(4,6,10)$, $\bar{c}=(3,-2,1)$, $\bar{d}=(7,4,11)$.

Вариант 4. $\bar{a}=(10,3,1)$, $\bar{b}=(1,4,2)$, $\bar{c}=(3,9,2)$, $\bar{d}=(19,30,7)$.

Вариант 5. $\bar{a}=(2,4,1)$, $\bar{b}=(1,3,6)$, $\bar{c}=(5,3,1)$, $\bar{d}=(24,20,6)$.

Вариант 6. $\bar{a}=(1,7,3)$, $\bar{b}=(3,4,2)$, $\bar{c}=(4,8,5)$, $\bar{d}=(7,32,14)$.

Вариант 7. $\bar{a}=(1,-2,3)$, $\bar{b}=(4,7,2)$, $\bar{c}=(6,4,2)$, $\bar{d}=(14,18,6)$.

Вариант 8. $\bar{a}=(1,4,3)$, $\bar{b}=(6,8,5)$, $\bar{c}=(3,1,4)$, $\bar{d}=(21,18,33)$.

Вариант 9. $\bar{a}=(2,7,3)$, $\bar{b}=(3,1,8)$, $\bar{c}=(2,-7,4)$, $\bar{d}=(16,14,27)$.

Вариант 10. $\bar{a}=(7,2,1)$, $\bar{b}=(4,3,5)$, $\bar{c}=(3,4,-2)$, $\bar{d}=(2,-5,-13)$.

Задача №3. На материальную точку действуют силы: $\overline{f_1}, \overline{f_2}, \overline{f_3}$. Найти работу равнодействующей $\overline{R}$ этих сил, при перемещении из положения A в положение B и момент равнодействующей силы $\overline{R}$ относительно точки B.

Вариант 1. $\overline{f_1}=2\bar{i}-\bar{j}+\bar{k}$, $\overline{f_2}=-\bar{i}+2\bar{j}+2\bar{k}$, $\overline{f_3}=\bar{i}+\bar{j}-2\bar{k}$, $A(2,-1,0)$, $B(4,1,-1)$.

Вариант 2. $\overline{f_1}=-6\bar{i}+\bar{j}$, $\overline{f_2}=4\bar{i}+2\bar{j}+\bar{k}$, $\overline{f_3}=3\bar{i}-5\bar{j}+3\bar{k}$, $A(1,2,3)$, $B(3,2,-1)$.

Вариант 3. $\overline{f_1}=\bar{i}+\bar{j}+\bar{k}$, $\overline{f_2}=-2\bar{i}-3\bar{j}+\bar{k}$, $\overline{f_3}=\bar{i}-2\bar{j}+\bar{k}$, $A(2,1,2)$, $B(0,-1,-1)$.

Вариант 4. $\overline{f_1}=\bar{j}-4\bar{k}$, $\overline{f_2}=-\bar{i}+\bar{j}+2\bar{k}$, $\overline{f_3}=3\bar{i}+\bar{j}+\bar{k}$, $A(0,0,0)$, $B(-1,-1,3)$.

Вариант 5. $\overline{f_1}=-2\bar{i}-2\bar{j}+3\bar{k}$, $\overline{f_2}=3\bar{i}+\bar{j}-4\bar{k}$, $\overline{f_3}=-3\bar{i}-2\bar{j}+3\bar{k}$, $A(0,0,0)$, $B(-1,3,-1)$.

Вариант 6. $\overline{f_1}=3\bar{i}-\bar{j}+\bar{k}$, $\overline{f_2}=\bar{i}-\bar{j}-2\bar{k}$, $\overline{f_3}=-2\bar{i}+5\bar{j}-3\bar{k}$, $A(5,-1,0)$, $B(4,0,3)$.

Вариант 7. $\overline{f_1}=5\bar{i}+3\bar{j}-5\bar{k}$, $\overline{f_2}=-\bar{i}+2\bar{j}+2\bar{k}$, $\overline{f_3}=-2\bar{i}-4\bar{j}+5\bar{k}$, $A(-2,1,1)$, $B(5,1,1)$.

Вариант 8. $\overline{f_1}=2\bar{i}+4\bar{k}$, $\overline{f_2}=-\bar{i}+5\bar{j}$, $\overline{f_3}=2\bar{i}-7\bar{j}+\bar{k}$, $A(-4,3,-2)$, $B(6,4,5)$.

Вариант 9. $\overline{f_1}=\bar{i}-\bar{j}+\bar{k}$, $\overline{f_2}=\bar{i}+2\bar{j}-\bar{k}$, $\overline{f_3}=3\bar{j}+3\bar{k}$, $A(2,-3,-1)$, $B(-1,-4,-3)$.

Вариант10. $\overline{f_1} = 7\bar{i} + 2\bar{j} - \bar{k}$, $\overline{f_2} = -3\bar{i} + \bar{j} + 2\bar{k}$, $\overline{f_3} = -\bar{i} + 2\bar{j} + 3\bar{k}$,
$A(3, -1, 5)$, $B(2, -3, 2)$.

Задача №4. При каких значениях параметра α векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$ ортогональны, векторы $\bar{a}$ и $\bar{c}$ коллинеарны, векторы $\bar{a}$, $\bar{b}$ и $\bar{c}$ компланарны?

Вариант 1. $\bar{a} = (3, -2, \alpha)$, $\bar{b} = (-1, 5, 2)$, $\bar{c} = (\alpha, 7, -4)$.

Вариант 2. $\bar{a} = (\alpha, 2, 1)$, $\bar{b} = (-1, 2, 4)$, $\bar{c} = (3, 2, \alpha)$.

Вариант 3. $\bar{a} = (\alpha, 2, 1)$, $\bar{b} = (-1, 2, 4)$, $\bar{c} = (3, 2, \alpha)$.

Вариант 4. $\bar{a} = (1, \alpha, -1)$, $\bar{b} = (\alpha, 4, 0)$, $\bar{c} = (2, -1, \alpha)$.

Вариант 5. $\bar{a} = (1, 2, \alpha)$, $\bar{b} = (\alpha, 3, -1)$, $\bar{c} = (2, 4, 2)$.

Вариант 6. $\bar{a} = (3, 4, \alpha)$, $\bar{b} = (2, -1, 0)$, $\bar{c} = (6, 2, -1)$.

Вариант 7. $\bar{a} = (\alpha, 2, 3)$, $\bar{b} = (2, -1, 5)$, $\bar{c} = (5, 10, 15)$.

Вариант 8. $\bar{a} = (2, -1, 4)$, $\bar{b} = (\alpha, 4, -1)$, $\bar{c} = (\alpha, -4, 16)$.

Вариант 9. $\bar{a} = (6, 1, -2)$, $\bar{b} = (2, \alpha, 1)$, $\bar{c} = (\alpha, 5, -10)$.

Вариант 10. $\bar{a} = (3, -4, 2)$, $\bar{b} = (-4, 3, \alpha)$, $\bar{c} = (6, \alpha, 4)$.

Задача №5. Даны координаты вершин треугольника ABC. Сделать чертеж и найти:

1) длину стороны AB;
2) проекцию стороны AB на сторону BC;
3) внутренний угол при вершине A;
4) площадь треугольника ABC;
5) уравнение стороны BC;
6) уравнение высоты, опущенной из вершины A;
7) уравнение медианы, проведенной из вершины B;
8) точку пересечения медианы и высоты.

Вариант 1. $A(4, 5)$, $B(3, 0)$, $C(-1, 4)$.

Вариант 2. $A(-5, -2)$, $B(7, 6)$, $C(5, -4)$.

Вариант 3. $A(-7, 3)$, $B(2, -1)$, $C(-1, -5)$.

Вариант 4. $A(-8, -2)$, $B(2, 10)$, $C(4, 4)$.

Вариант 5. $A(-4, 2)$, $B(6, 5)$, $C(1, -4)$.

Вариант 6. $A(2, -3)$, $B(7, 2)$, $C(-8, -2)$.

Вариант 7. $A(4, 2)$, $B(6, -5)$, $C(-5, 4)$.

Вариант 8. $A(-6, -2)$, $B(4, 8)$, $C(2, -10)$.

Вариант 9. $A(6, 8)$, $B(2, -4)$, $C(-6, 4)$.

Вариант 10. $A(-6, -3)$, $B(6, 7)$, $C(2, -1)$.

Задача №6. Привести уравнения кривых второго порядка к каноническому виду и построить эти кривые.

Вариант 1. а) $x^2+y^2-4x+6y-3=0$, б) $x^2+4y^2-6x+8y=3$,
в) $y^2-4y+x-2=0$, г) $x^2-4y^2-6x+8y-11=0$.

Вариант 2. а) $x^2+y^2-8x=0$, б) $x^2+2y^2-2x-4y+2=0$,
в) $4x^2+y+16x-1=0$, г) $x^2-2y^2+4x-8y-20=0$.

Вариант 3. а) $x^2+y^2+6x-4y+9=0$, б) $y-8x^2+32x+16=0$,
в) $x^2+4y^2+6x+24y=19$, г) $3y^2-2x^2-4x+6y-12=0$.

Вариант 4. а) $x^2+y^2-8x=0$, б) $x^2+2y^2+4x-8y-7=0$,
в) $y^2+16y-2x+4=0$, г) $x^2-2y^2-2x-4y+2=0$.

Вариант 5. а) $x^2+y^2-8x-4y+16=0$, б) $x^2+4y^2+8x-24y=12$,
в) $x^2-3y^2-8x+18y+16=0$, г) $y+2x^2-4x+7=0$.

Вариант 6. а) $x^2+y^2+4x-6y-3=0$, б) $x^2+4y^2-10x+16y=23$,
в) $y-4x^2+8x+16=0$, г) $x^2-4y^2+8x-2y=36$.

Вариант 7. а) $x^2+y^2-4x+2y+1=0$, б) $x^2+4y^2-6x+16y=11$,
в) $y^2+8y-x+3=0$, г) $4y^2-x^2-2x+8y+4=0$.

Вариант 8. а) $x^2+y^2-6x+4y-23=0$, б) $2x^2+3y^2-4x+6y=7$,
в) $y^2+6y+x-5=0$, г) $x^2-4y^2-10x+16y=27$.

Вариант 9. а) $x^2+y^2+6x=0$, б) $x^2+4y^2-2x+8y+4=0$,
в) $y^2+x-8y-12=0$, г) $4y^2-x^2+6x+24y=9$.

Вариант 10. а) $x^2+y^2+4y=0$, б) $x^2+3y^2-8x+18y+16=0$,
в) $y-2x^2+8x+4=0$, г) $4y^2-x^2-6x+16y-9=0$.

Задача №7. Даны координаты вершин пирамиды $A_1A_2A_3A_4$. Сделать чертеж и найти:

1) угол между ребром A_1A_4 и гранью $A_1A_2A_3$;

2) объем пирамиды;

3) уравнение прямой A_1A_2;

4) уравнение плоскости $A_1A_2A_3$;

5) уравнение и длину высоты, опущенной из вершины A_4 на грань $A_1A_2A_3$.

Вариант 1. $A_1(1,-1,6)$, $A_2(4,5,-2)$, $A_3(-1,3,0)$, $A_4(6,1,5)$.

Вариант 2. $A_1(1,-3,1)$, $A_2(-3,2,-3)$, $A_3(-3,-3,3)$, $A_4(-2,0,-4)$.

Вариант 3. $A_1(1,1,1)$, $A_2(3,4,0)$, $A_3(-1,5,6)$, $A_4(4,0,5)$.

Вариант 4. $A_1(0,0,0)$, $A_2(5,2,0)$, $A_3(2,5,0)$, $A_4(1,2,4)$.

Вариант 5. $A_1(7,1,2)$, $A_2(-5,3,-2)$, $A_3(3,3,5)$, $A_4(4,5,-1)$.

Вариант 6. $A_1(-2,3,-2)$, $A_2(2,-3,2)$, $A_3(2,2,0)$, $A_4(1,5,5)$.

Вариант 7. $A_1(3,1,1)$, $A_2(1,4,1)$, $A_3(1,1,7)$, $A_4(3,4,-1)$.

Вариант 8. $A_1(4,-3,-2)$, $A_2(2,2,3)$, $A_3(2,-2,-3)$, $A_4(-1,-2,3)$.

Вариант 9. $A_1(5,1,0)$, $A_2(7,0,1)$, $A_3(2,1,4)$, $A_4(5,5,3)$.

Вариант 10. $A_1(4,2,-1)$, $A_2(3,0,4)$, $A_3(0,0,4)$, $A_4(5,-1,-3)$.

Задача №8. Построить тело, ограниченное поверхностями.

Вариант 1. $y=x^2$, $y=2$, $z=2$, $y=0$.

Вариант 2. $x=y^2$, $z=0$, $z=3$, $x=2$.

Вариант 3. $z^2=x^2+y^2$, $z=2$, $z\geq 0$.

Вариант 4. $x+z=3$, $y=2$, $x=0$, $y=0$, $z=0$.

Вариант 5. $z=-x^2-y^2$, $z=x^2+y^2-8$.

Вариант 6. $x^2+y^2=2z$, $z=2$.

Вариант 7. $y=x^2$, $z=0$, $z+y=2$.

Вариант 8. $z=2-x^2-y^2$, $z^2=x^2+y^2$, $z\geq 0$.

Вариант 9. $z=4-x^2-y^2$, $z=0$.

Вариант 10. $z=12-x^2-y^2$, $x^2+y^2-z^2=0$, $z\geq 0$.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Беклемишев Д. В. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры. – М.: Наука, 1984. – 320 с.

2. Бугров Я. С., Никольский С. М. Элементы линейной алгебры и аналитической геометрии. – М.: Наука, 1997. – 288 с.

3. Данко П. Е., Попов А. Г., Кожевникова Т. Я. Высшая математика в упражнениях и задачах. – М.: Высшая школа, 1999. Ч. 1. – 304 с.; Ч. 2. – 416 с.

4. Ильин В. А., Позняк Э. Г. Аналитическая геометрия. – М.: Наука, 1981. – 232 с.

5. Клетеник Д. В. Сборник задач по аналитической геометрии. – М.: Наука, 1998. – 224 с.

6. Минорский В. П. Сборник задач по высшей математике. – М.: Наука, 1987. – 352 с.

7. Шипачев В. С. Курс высшей математики. – М.: Наука, 1991. – 479 с.

ОГЛАВЛЕНИЕ

	с.
1. Метод координат	3
1.1. Координаты на прямой	3
1.2. Перенос начальной точки	3
1.3. Расстояние между двумя точками оси	3
1.4. Координаты на плоскости	4
1.5. Перенос начала координат	5
1.6. Полярные координаты	6
1.7. Координаты в пространстве	8
2. Элементы векторной алгебры	9
2.1. Основные понятия векторной алгебры	9
2.2. Линейные операции над векторами в геометрической форме, их свойства	10
2.3. Проекция вектора на ось	14
2.4. Разложение вектора по ортам координатных осей. Модуль вектора. Направляющие косинусы	15
2.5. Действия над векторами в координатной форме	18
2.6. Деление отрезка в данном отношении	20
2.7. Скалярное произведение векторов	21
2.8. Векторное произведение векторов	24
2.9. Смешанное произведение векторов	28
3. Аналитическая геометрия на плоскости	32
3.1. Основные понятия	32
3.2. Уравнения прямой на плоскости	33
3.3. Линии второго порядка	41
3.4. Общее уравнение линии второго порядка	48
4. Аналитическая геометрия в пространстве	52
4.1. Основные понятия	52
4.2. Уравнения плоскости в пространстве	52
4.3. Уравнения прямой в пространстве	57
4.4. Цилиндрические поверхности	61
4.5. Конические поверхности	62
4.6. Поверхности второго порядка	63
Вопросы для самоконтроля	66
Задачи контрольной работы	68
Библиографический список	73

Петрякова Елена Алексеевна

Алексеева Татьяна Леонидовна

Векторная алгебра и аналитическая геометрия

Учебное пособие
для студентов заочного отделения
всех специальностей

Редактор Л. И. Рубанова
Компьютерная верстка Т. Л. Алексеевой, Е. А. Петряковой

Лицензия №021231 от 23.07.97 г.
Подписано в печать 04.09.03
Формат 60×84/16. Печать офсетная.
Усл. печ. л. – 4,7. Уч. – изд. л. – 4,9.
План 2003 г.
Заказ 800 экз.

Глазковская типография, г. Иркутск, ул. Гоголя, 53