Министерство транспорта Российской Федерации
Федеральное агентство железнодорожного транспорта
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Дальневосточный государственный университет путей сообщения»

Кафедра «Физика и теоретическая механика»

МЕХАНИКА.
МОЛЕКУЛЯРНАЯ ФИЗИКА И ТЕРМОДИНАМИКА

Практикум

Под редакцией Т.Н. Корнеенко

Рекомендовано
Методическим советом по качеству
образовательной деятельности ДВГУПС
в качестве учебного пособия

Хабаровск
Издательство ДВГУПС
2015

УДК 531+539.19(075.8)
ББК В2я73+В36я73
М 550

Рецензенты:

Кафедра общей физики КнАГТУ
(заведующий кафедрой кандидат технических наук,
доцент *М.С. Гринкруг*)

Кандидат физико-математических наук, доцент кафедры физики ДВГГУ
А.А. Жуков

М 550 Механика. Молекулярная физика и термодинамика : практикум / под ред. Т.Н. Корнеенко. – Хабаровск : Изд-во ДВГУПС, 2015. – 124 с. : ил.

Практикум разработан в соответствии с рабочей программой курса физики.

В практикуме рассмотрены примеры решения задач, а также представлены задачи для самостоятельного решения с ответами. Подборка задач осуществлена с учетом уровневых знаний по физике.

Предназначен для студентов 1-го курса строительных специальностей, изучающих дисциплину «Физика».

Практикум составлен коллективом авторов: И.В. Повх (1-й раздел); Л.В. Алексеева (2-й раздел); Е.А. Антонычева (3-й раздел); Т.Н. Корнеенко (4-й, 7-й разделы); К.Н. Окишев (5-й раздел); И.А. Коростелева (6–7-й разделы).

УДК 531+539.19(075.8)
ББК В2я73+В36я73

ВВЕДЕНИЕ

В настоящее время при подготовке инженеров для различных отраслей экономики большую роль играют фундаментальные науки и, в частности, физика. Поэтому курс физики за последние годы претерпел значительные изменения. Так, большое внимание уделяется тому, чтобы студент знал не просто теоретические основы физики, а умел практически применить полученные знания. Поэтому возникает острая потребность в составлении такого сборника, где показаны конкретные примеры для освоения теоретических вопросов и даны задания для их закрепления.

В пособии представлено два важнейших раздела физики: «Механика» и «Молекулярная физика и термодинамика». Каждый раздел разбит на отдельные темы с кратким курсом теоретического материала и примерами решения задач (4 задачи) с подробным объяснением. Фактически в примерах решения приведен метод решения подобной физической задачи. Так, решение задачи начинается с того, что студент должен проанализировать задачу (четко представить, *что* нужно найти, *что* известно и сделать рисунок). Для развития у студента способности к решению задач в конце каждого раздела приведены задачи для самостоятельной работы. Они представлены по мере усложнения. В конце каждого раздела приведены по пять задач, соответствующих повышенному уровню сложности (*). В конце каждой задачи даны ответы.

С целью развития интереса к предмету и профессиональной деятельности в завершении всех разделов представлен набор качественных задач по каждой теме. Помимо этого, для удобства решения задач предложено приложение, состоящее из таблиц свойств твердых тел, жидкостей и газов.

При написании данной работы авторами использовался материал из источников [9, 10].

Пособие будет полезно как для студентов, начинающих изучать физику на 1-м курсе, так и в процессе ее изучения. Более того, пособие необходимо и для самостоятельной, и для аудиторной работы.

1. КИНЕМАТИКА ПРЯМОЛИНЕЙНОГО И КРИВОЛИНЕЙНОГО ДВИЖЕНИЯ

1.1. Основные понятия и формулы

◊ Простейшей физической моделью является **материальная точка** – тело, размерами которого в данной задаче можно пренебречь.

◊ Поступательное движение – это движение, при котором любая прямая, жестко связанная с движущимся телом, остается параллельной своему первоначальному положению.

◊ Равнопеременное прямолинейное движение описывается кинематическими уравнениями (законы движения):

$$\vec{s} = \vec{s}_0 + \vec{v}_0 t + \frac{\vec{a}t^2}{2}; \quad (1)$$

$$\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{a}t, \quad (2)$$

где $\vec{a}$ – ускорение; t – время, протекающее с начала отсчета, т.е. с момента, когда тело имело начальную координату s_0 и начальную скорость v_0.

◊ Если тело движется без ускорения, т.е. $|\vec{a}| = 0$, то уравнения принимают вид:

$$\vec{s} = \vec{s}_0 + \vec{v}_0 t; \quad (3)$$

$$|\vec{v}| = \mathrm{const}. \quad (4)$$

◊ Связь между скоростью тела и перемещением, которое оно проходит, можно установить как

$$s = (v^2 - v_0^2)/2a. \quad (5)$$

◊ Если тело движется по криволинейной траектории, его скорость в любой точке направлена по касательной. Скорость может по модулю не меняться, но по направлению изменяется. Значит, криволинейное движение всегда является ускоренным.

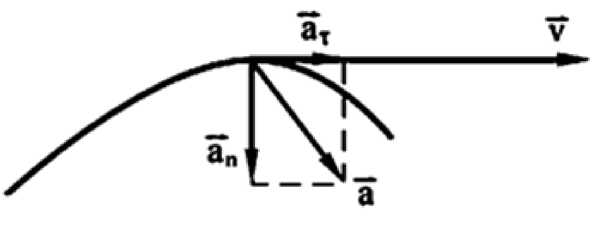


Рис. 1.1

◊ При криволинейном движении с постоянной скоростью тангенциальная составляющая ускорения равна нулю, а нормальная составляющая не равна нулю: $a_\tau = 0, a_n \neq 0$. Если …, то $a_\tau = const, a_n \neq 0$ (рис. 1.1).

◊ Тангенциальная составляющая ускорения характеризует изменение скорости по модулю:

$$\vec{a}_t = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{v}_\tau}{\Delta \text{t}} = \frac{d\vec{v}_\tau}{dt}. \qquad (6)$$

◊ Нормальная составляющая ускорения характеризует изменение скорости по направлению. При движении по окружности нормальное ускорение можно найти:

$$a_n = \frac{v^2}{r},$$

где r – радиус окружности.

◊ Результирующее ускорение в векторном виде:

$$\vec{a} = \vec{a}_t + \vec{a}_n.$$

◊ Неравномерным называется такое движение, при котором скорость тела за равные промежутки времени изменяется произвольно как по модулю, так и направлению. В этом случае пользуются понятиями мгновенной скорости и мгновенного ускорения. **Мгновенная скорость** v – векторная величина, равная первой производной вектора перемещения по времени:

$$|\vec{v}| = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{s}}{\Delta t} = \frac{d\vec{s}}{dt}.$$

◊ Мгновенным ускорением a материальной точки в момент времени t будет предел среднего ускорения:

$$\langle \vec{a} \rangle = \lim_{\Delta t \to 0} \langle \vec{a}\, \rangle = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt}. \qquad (7)$$

1.2. Примеры решения задач

Пример 1. Автобус от пункта A до пункта B двигался со скоростью $v_1 = 60$ км/ч, а от пункта B до пункта C со скоростью $v_2 = 50$ км/ч, расстояние $AB = BC$. Найти среднюю скорость движения автобуса на всём пути.

Решить задачу для случая, когда $AB \neq BC$, считая что первую половину времени t_1 автобус двигался со скоростью $v_1 = 60$км/ч, а вторую половину времени t_2 со скоростью $v_2 = 50$ км/ч. Найти среднюю скорость автобуса за всё время движения.

Случай 1. Дано: $v_1 = 60$км/ч, $v_2 = 50$ км/ч, $AB = BC = {}^{s}/_{2}$.

Найти: $\langle v \rangle - ?$

Решение. Средняя скорость определяется соотношением

$$\langle v\rangle = \frac{\sum s}{\sum t},$$

где s – путь велосипедиста; t — общее время движения. Время движения автобуса из пункта A в пункт B обозначим t_1, а время движения из пункта B в пункт C обозначим t_2. Полное время движения на всем пути:

$$t = t_1 + t_2,$$

где $t_1 = {}^{s_1}/_{v_1} = {}^{s}/_{2v_1}$, а $t_2 = {}^{s_2}/_{v_2} = {}^{s}/_{2v_2}$. Подставляя найденные выражения для времени движения в исходное соотношение, получим

$$\langle v\rangle = \frac{s}{s(\frac{1}{2v_1}+\frac{1}{2v_2})} = \frac{2v_1 \cdot v_2}{v_1+v_2} \approx 54{,}5 \text{ км/ч}.$$

Случай 2. Дано: $v_1 = 60\text{км/ч}$, $v_2 = 50$ км/ч, $AB \neq BC$.

Найти: $\langle v\rangle - ?$

Средняя скорость определяется соотношением

$$\langle v\rangle = \frac{s}{t},$$

где t – полное время движения от A до C.

Расстояние от пункта A в пункт B обозначим s_1, а из пункта B в пункт C – s_2. Весь путь $s = s_1 + s_2$, где $s_1 = \frac{tv_1}{2}$, $s_2 = \frac{tv_2}{2}$. Подставим полученные соотношения в формулу средней скорости:

$$\langle v\rangle = \frac{t\cdot(v_1+v_2)}{2\cdot t} = \frac{(v_1+v_2)}{2} = 55 \text{ км/ч}.$$

Пример 2. Тело брошено вертикально вверх с начальной скоростью $v_0 = 6$ м/с. Когда оно достигло высшей точки траектории, из той же начальной точки с той же начальной скоростью было брошено вверх другое тело. На какой высоте h они встретятся?

Дано: $v_0 = 6$ м/c.

Найти: $h - ?$

Решение. Воспользуемся формулой для равноускоренного движения $s = (v^2 - v_o^2)/2a$ и, учитывая, что в верхней точке $v = 0$, получаем $h_{max} = \frac{v_0^2}{2g}$. Запишем уравнения движения двух тел в следующем виде (отсчет времени будем вести с момента бросания второго тела):

$$y_1 = h_{max} - \frac{gt^2}{2}; \quad y_2 = v_0 t - \frac{gt^2}{2}.$$

где y_1 и y_2 – координаты движения тел по оси OY.

Так как в момент встречи тела находятся на одной высоте, приравняем $y_1 = y_2$. В итоге получаем выражения для времени полета:

$$t = \frac{h_{max}}{v_0} = \frac{v_0}{2g}.$$

Зная время полета, найдем высоту, в которой встретятся два тела. Для этого подставим выражение для времени второе уравнение:

$$y_2 = h = \frac{{v_0}^2}{2g} - \frac{v_0^2}{8g} = \frac{3v_0^2}{8g}.$$

Подставив численные значения в найденное выражение для высоты, найдем высоту, на которой встретятся тела:

$$h \approx 1{,}4 \text{ м}.$$

Пример 3. Теннисный мяч брошен с начальной скоростью v_0 под углом α к горизонту. При каком значении угла α дальность его полета будет наибольшей? Определить дальность полета $L = OC$ при данном значении угла. Написать уравнение траектории полёта мяча.

Решение. В отсутствие сопротивления воздуха мяч движется с постоянным ускорением g (рис. 1.2). Для решения данной задачи необходимо выбрать систему координат. Воспользуемся прямоугольной системой координат со взаимно-перпендикулярными осями OX и OY, пересекающимися в точке O, которая является началом отсчета. Поскольку проекция ускорения на ось OX равна нулю, вдоль данного направления мяч движется равномерно. Он как бы участвует одновременно в двух движениях – в равномерном вдоль оси OX и в равноускоренном вдоль оси OY. Разложим вектор скорости на две составляющие $v_{0x} = v_0 \, cos\alpha$ и $v_{0y} = v_0 sin\alpha$. Координаты тела изменяются по закону

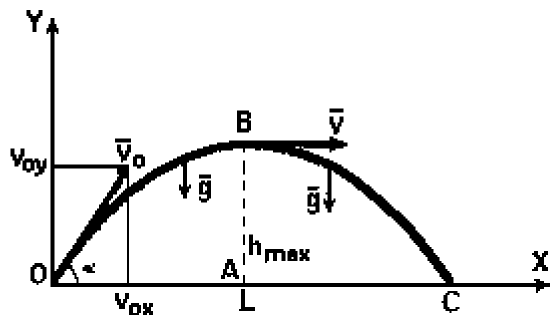


Рис. 1.2

$$x = v_{0x} t; \; y = v_{0y} t - \frac{gt^2}{2}.$$

Время полета мяча складывается из времени подъема и времени падения. Время полёта определим из условия $y = 0$, откуда

$$t = \frac{2v_{0y}}{g} = \frac{2v_0}{g} sin\alpha .$$

Дальность полёта $L = OC -$ это координата x в момент падения:

$$L = v_{0x} \, t = \frac{2v_0^2}{g} sin\alpha \, cos\alpha = \frac{v_0^2}{g} \cdot sin2\alpha,$$

где $sin\alpha\, cos\alpha = sin2\alpha/2$. Максимальная дальность полета достигается при $sin2\alpha = 1$, т.е. $\alpha = 45^0$.Чтобы найти уравнение траектории теннисного мяча, необходимо связать координаты x и y, исключив из уравнения время t. Выразив t через x с помощью соотношения $t = \frac{x}{v_{0x}}$ и подставив значение t в формулу для y, получим уравнение траектории

$$y = \frac{v_{0y}}{v_{0x}}\, x - \frac{gx^2}{2v_{0x}^2} = x \cdot tg\alpha - \frac{g}{2v_0^2}\frac{x^2}{cos^2\alpha} \ .$$

Это уравнение параболы.

Пример 4. Кинематическое уравнение движения материальной точки по прямой (ось y) имеет вид: $y = 8At\ + 3Ct^2$, где $A = 1$ м/с,$C = 2$ м/c^2. Для момента времени $t_1 = 2$ с определить: 1) координату y_1 точки; 2) мгновенную скорость v_1; 3) мгновенное ускорение a_1.

Дано: $y = 8At\ + 3Ct^2$, $A = 1$м/с, $C = 2$м/c^2.

Решение. Координату точки, для которой известно кинематическое уравнение движения, найдём, подставив в уравнение движения заданное значение времени t_1: $y_1 = 8At_1\ + 3Ct_1^2$. Подставив в это выражение численные значения A,C,t, вычислим

$$y_1 = (8 \cdot 1 \cdot 2 + 3 \cdot 2 \cdot 4) = 40 \text{ м}.$$

Мгновенную скорость в произвольный момент времени найдём, продифференцировав координату y по времени: $v = \frac{\partial y}{\partial t} = 8A + 6Ct$. Тогда в заданный момент мгновенная скорость $v = 8A + 6Ct_1$. Подставим в найденное выражение A,C,t и вычислим:

$$v_1 = (8 \cdot 1 + 6 \cdot 2 \cdot 2) = 32 \text{ м/с}.$$

Мгновенное ускорение в произвольный момент времени найдём, взяв вторую производную от координаты y по времени

$$a = \frac{\partial y^2}{\partial t^2} = \frac{\partial v}{\partial t} = 6C.$$

Мгновенное ускорение в заданный момент времени t_1 равно $a = 6C = $ $= 6 \cdot 2 = 12$ м/с^2. Положительный знак ускорения указывает на то, что направление вектора ускорения совпадает с положительным направлением координатной оси, причем в условиях данной задачи это имеет место для любого момента времени.

1.3. Задачи для самостоятельного решения

1. Патрульный катер проходит расстояние между двумя пунктами A и $Б$ по течению реки за время $t_1 = 3$ ч, а плот – за время $t = 12$ ч. Сколько времени затратит патрульный катер на обратный путь? (Ответ: $t_2 = 6$ ч.)

2. Тележка движется вдоль длинной линейки с постоянным ускорением. В момент, когда секундомер показывает 7 с, тележка находится против отметки 70 см, в момент 9 с – против отметки 80 см, в момент 15 с – против отметки 230 см. С каким ускорением двигалась тележка? Постройте график зависимости $v(t)$ и $s(t)$. (Ответ: 5 см/с^2).

3. Три четверти своего пути автомобиль прошёл со скоростью $v_1 = 60\text{ км/ч}$, остальную часть пути – со скоростью $v_2 = 80\text{ км/ч}$. Какова средняя путевая скорость $\langle v \rangle$ автомобиля? (Ответ: 64 км/ч).

4. Тело прошло первую половину пути за время $t_1 = 2\text{ с}$, вторую за время $t_2 = 8\text{ с}$. Определить среднюю путевую скорость $\langle v \rangle$. (Ответ: 2 м/с).

5. Товарный поезд идет со скоростью v_1 = 36 км/ч. Спустя время t = 30 мин с той же станции по тому же направлению вышел экспресс со скоростью $v_2 = 72$ км/ч. Через какое время t после выхода товарного поезда и на каком расстоянии s от станции экспресс нагонит товарный поезд? Задачу решить аналитически и графически. (Ответ: $t = 1\text{ ч}, s = 36\text{ км}$).

6. Из городов A и B, расстояние между которыми L = 120 км, одновременно выехали навстречу друг другу две автомашины со скоростями v_1 = 20 км/ч и v_2 = 60 км/ч. Каждая автомашина, пройдя 120 км, остановилась. Через какое время t и на каком расстоянии s от города C, находящегося на полпути между $A\,u\,B$, встретятся автомашины? Задачу решить аналитически и графически. Построить график зависимости расстояния L между автомашинами от времени t. (Ответ: $t = 1{,}5\text{ ч}$, $s = 30\text{ км}$).

7. На упругую плиту свободно падают стальные шарики. Первый – с высоты 44 см, второй, спустя 11 с, – с высоты 11 см. Через некоторое время скорости шариков совпадают по модулю и направлению. Найдите этот момент времени, а также промежуток времени, в течение которого скорости шариков будут равны. (Ответ: 0,3 с; 0,6 с).

8. Один поезд шел половину пути s со скоростью v_1 = 80 км/ч, а половину пути – со скоростью u_1 = 40 км/ч. Другой поезд шел половину времени t со скоростью v_2 = 80 км/ч, а половину времени – со скоростью u_2 = 40 км/ч. Какова средняя скорость каждого поезда? (Ответ: $v_{\text{ср1}} = 53{,}3\frac{\text{км}}{\text{ч}}, v_{\text{ср2}} = 60\text{ км/ч}$).

9. Тело, имея начальную скорость $v_0 = 1$ м/с, двигалось равноускоренно и приобрело, пройдя некоторое расстояние, скорость v_k = 7 м/с. Какова была скорость тела на половине этого расстояния? (Ответ: $v = 5\text{ м/с}$).

10. Движение точки по прямой задано уравнением $x = At + Bt^2$, где $A = 2\text{ м/с}, B = -0{,}5\text{ м/с}$. Определить среднюю скорость $\langle v \rangle$ движения точки в интервале времени от $t_1 = 1\text{ с}$ до $t_2 = 3\text{ с}$. (Ответ: $0{,}5\text{ м/с}$).

11. Поезд прошел путь s = 60 км за время t = 52 мин. Сначала он шел с ускорением $+a$, в конце с ускорением $-a$, остальное время с максимальной скоростью v = 72 км/ч. Найти модуль ускорения, если начальная и конечная скорости равны нулю. (Ответ: $a = 0{,}17\ \text{м/с}^2$).

12. Тело, брошенное вертикально вверх, дважды проходит через точку на высоте h. Промежуток времени между этими прохождениями равен Δt. Найти начальную скорость тела v_0 и время Δt_0 от начала движения тела до возврата в начальное положение. (Ответ: $v_0 = \sqrt{2gh + g^2(\Delta t^2)/4}$, $\Delta t_0 = 2\sqrt{\frac{2h}{g} + (\Delta t)^2/4}$).

13. Мяч свободно падает с высоты $h = 120$ м на горизонтальную плоскость. При каждом отскоке скорость его уменьшается в $n = 2$ раза. Построить график скорости и найти пройденный мячом путь от начала движения до остановки. (Ответ: $s = 200$ м.)

14. Две материальные точки движутся согласно уравнениям: $x_1 = A_1 t + B_1 t^2 + C_1 t^3$, $x_2 = A_2 t + B_2 t^2 + C_2 t^3$, где $A_1 = 4\ \text{м/с}$, $B_1 = 8\ \text{м/с}^2$, $C_1 = -16\ \text{м/с}^3$, $A_2 = 2\ \text{м/с}$, $B_2 = -4\ \text{м/с}^2$, $C_2 = 1\ \text{м/с}^3$.В какой момент времени t ускорения этих точек будут одинаковы? Найти скорости v_1 и v_2 точек в этот момент. (Ответ: $0{,}235$ с; $v_1 = 5{,}1\ \text{м/с}$; $v_2 = 0{,}286\ \text{м/с}$).

15. Тело брошено с высоты h горизонтально с начальной скоростью v_0. Как зависят от времени координаты тела и его полная скорость? Вывести уравнение траектории. (Ответ: ($x = v_0 t$, $y = h - \frac{gt^2}{2}$, $y = h - gx^2/2v_0^2$).

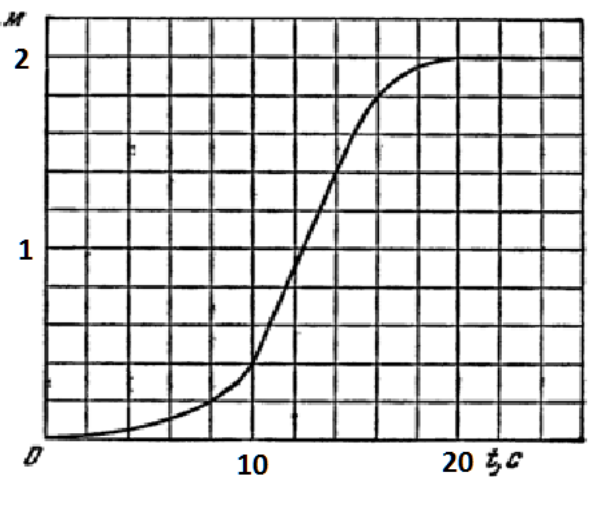


Рис. 1.3

16. Точка движется по прямой в одну сторону. Найти с помощью графика, представленного на рис. 1.3:

1) среднюю скорость точки за время движения;

2) максимальную скорость;

3) момент времени t_0, когда мгновенная скорость равна средней скорости за первые t_0 с;

4) среднее ускорение за первые 10 и 16 с.

(Ответ: 10 см/с; 25 см/с; 16 с; 2,5 см/с^2 и 0,7 см/с^2).

17. Два тела бросили одновременно из одной точки. Одно – вертикально вверх, другое под углом 60° к горизонту. Найти расстояние между телами через 1,7 с, пренебрегая сопротивлением воздуха. Начальная скорость каждого тела 25 м/с. (Ответ: 22 м).

18. Рядом с поездом на одной линии с передними буферами паровоза стоит человек. В тот момент, когда поезд начал двигаться с ускорением $a = 0{,}1\ \text{м/с}^2$, человек начал идти в том же направлении со скоростью $v = 1{,}5\ \text{м/с}$. Через какое время t поезд догонит человека? Определить скорость v_1 поезда в этот момент и путь, пройденный за это время человеком. (Ответ: $30\ \text{с}; 3\ \text{м/с}; 45\ \text{м}$).

19. Тело брошено горизонтально с начальной скоростью v_0 = 15 м/с. Найти нормальное a_n и касательное a_τ ускорения через время t = 1 с после начала движения тела. (Ответ: $a_n = 8{,}2\ \text{м/с}, a_\tau = 5{,}4\ \text{м/с}$).

20. Тело брошено с земли под углом α к горизонту с начальной скоростью v_0. Какое время t тело будет находиться в полете? Какое расстояние s по горизонтали от места бросания пролетит тело? (Ответ: $S = (v^2 sin2\alpha)/g$).

21. Тело брошено под углом к горизонту с начальной скоростью $v_0 = 10\ \text{м/ с}$. Найти скорость v тела в момент, когда оно оказалось на высоте h = 3 м. (Ответ: $v = 6{,}4\ \text{м/с}$).

22. Тело брошено под углом α к горизонту с начальной скоростью v_0. Через какие промежутки времени после бросания скорость тела будет составлять с горизонтом углы β_1 = 45°? (Ответ: $t_1 = (v_0/g) \cdot (sin\alpha - cos\alpha)$).

23. Два тела брошены одновременно из одной точки – одно вверх, другое вниз, оба с начальной скоростью $v_0 = 30\ \text{м/с}$ под углом $\alpha = 60°$ к вертикали. Найти разность уровней, на которых будут находиться тела спустя время t = 2 с. (Ответ: $y_1 - y_2 \approx 60\ \text{м}$).

24. Самолёт, оторвавшись от взлетной дорожки, летит по прямой линии, составляющей с горизонтом угол $\alpha = 30°$, с начальной скоростью $v_0 = 50\ \text{м/с}$ и ускорением $a = 3\ \text{м/с}^2$. Из самолета, спустя время $t_0 = 5\ \text{с}$, после отрыва его от земли выброшен по вертикали вниз ключ с начальной скоростью $u_0 = 3\ \text{м/с}$ относительно самолета. На каком расстоянии от места взлета упадет ключ? (Ответ: $s = 766\ \text{м}$).

25. За какое время тело, свободно падающее, проходит n-й сантиметр своего пути? (Ответ: $\Delta t = \sqrt{\frac{2}{g}}(\sqrt{n} - \sqrt{n-1})$).

26.* Поезд прошел расстояние между двумя станциями $s = 17\ \text{км}$ со средней скоростью $\langle v \rangle = 60\ \text{км/ч}$. При этом на разгон в начале движения и торможения перед остановкой он потратил в общей сложности $t_1 = 4\ \text{мин}$, а остальное время двигался с постоянной скоростью v. Чему равна эта скорость? (Ответ: $v = 68\ \text{км/ч}$).

27.* От пристани A к пристани B по реке плывет лодка со скоростью $v_1 = 3\ \text{км/ч}$ относительно воды. От пристани B по направлении к пристани A одновременно с лодкой отходит катер, скорость которого относительно воды $v_2 = 10\ \text{км/ч}$. За время движения лодки между пристанями катер успевает пройти это расстояние четыре раза и прибывает к B одновременно с лодкой. Определите направление и скорость течения реки. (Ответ: v = 0,51 км/ч, направление от B к A.)

28.* Автобус движется по прямому шоссе со скоростью v_1. Человек может бежать с меньшей скоростью v_2. Определить геометрическое место точек, в которых может находиться первоначально человек, чтобы успеть «перехватить» автобус.

29.* Лифт начинает подниматься с ускорением $a = 2{,}2\ \text{м/с}^2$. Когда его скорость достигла $v = 2{,}4\ \text{м/с}$, с потолка кабины начал падать болт. Чему равны время t падения болта и перемещение болта при падении относительно Земли? Высота кабины лифта $H = 2{,}5\ \text{м}$. (Ответ: $t = 0{,}645\ \text{с}$, $h = 0{,}49\ \text{м}$).

30.* Какую наименьшую начальную скорость должен получить при ударе футбольный мяч, чтобы перелететь через стену высотой H, находящуюся на расстоянии? (Ответ: $S = (\sqrt{g(H + \sqrt{H^2 + s^2})})$).

2. КИНЕМАТИКА ВРАЩАТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ

2.1. Основные формулы

◊ Угловая скорость тела есть производная от угла по времени

$$\vec{\omega} = \frac{d\vec{\varphi}}{dt}. \tag{1}$$

◊ Угловое ускорение тела есть первая производная от угловой скорости по времени или вторая производная от угла поворота от времени

$$\vec{\varepsilon} = \frac{d\vec{\varphi}}{dt} = \frac{d^2\vec{\varphi}}{dt^2}. \tag{2}$$

При равномерном вращательном движении ($\omega = const$) справедливо соотношение

$$\vec{\varphi} = \vec{\omega}\, t. \tag{3}$$

Для равнопеременного вращательного движения тела вокруг неподвижной оси (ε = const):

$$\vec{\omega} = \vec{\omega}_0 + \vec{\varepsilon} t; \tag{4}$$

$$\vec{\varphi} = \vec{\varphi}_0 + \vec{\omega}_0 t + \frac{\vec{\varepsilon} t^2}{2}. \qquad (5)$$

3. Связь линейных величин с угловыми

$$S = \varphi R;\ V = \omega R;\ a_{\tau} = \varepsilon R;\ a_n = \frac{V^2}{R} = \omega^2 R, \qquad (6)$$

где S – путь, пройденный точкой (длина дуги); R – радиус дуги (расстояние от точки до оси вращения).

Полное ускорение точки при движении по окружности

$$a = \sqrt{a_{\tau}^2 + a_n^2}. \qquad (7)$$

2.2. Примеры решения задач

Пример 1. Линейная скорость V_1 точек на окружности вращающегося диска равна 3 м/с. Точки, расположенные на ΔR = 10 см, ближе к оси колеса имеют линейную скорость V_2 = 2 м/с. Определить частоту вращения n диска.

Решение. Линейная скорость связана с угловой соотношением $V = \omega R$, где $\omega = 2\pi n$. Учитывая оба равенства, выразим $n = \frac{V_2}{2\pi R_2}$. Угловая скорость всех точек диска одна и та же. Так как $\omega_1 = \omega_2$, то $\frac{V_1}{R_1} = \frac{V_2}{R_2}$, где $R_1 = R_2 + \Delta R$. Тогда $R_2 = {V_2 \Delta R}/{(V_1 - V_2)}$. Подставим последнее равенство в выражение для n, получим

$$n = \frac{V_1 - V_2}{2\pi \Delta R};$$

$$n \approx 1{,}59\ \text{c}^{-1}.$$

Пример 2. Маховик вращается равноускоренно. Найти угол α, который составляет вектор полного ускорения любой точки маховика с радиусом в тот момент, когда маховик совершит первые N = 2 оборота (рис. 2.1).

Решение. Разложив вектор полного ускорения точки M на тангенциальное и нормальное ускорения, видно, что искомый угол определяется соотношением $tg\alpha = \frac{a_{\tau}}{a_n}$. Так как в условии дано лишь число оборотов, перейдем к угловым величинам, при-

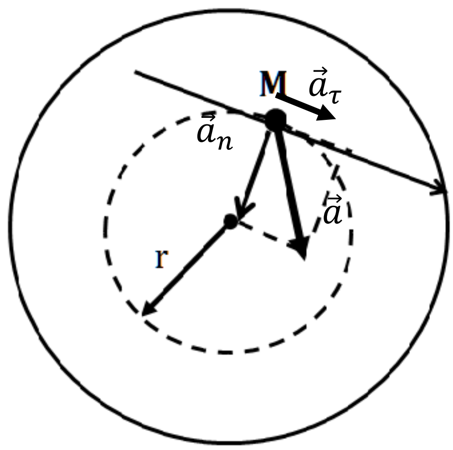


Рис. 2.1

менив формулы линейных величин с угловыми (6). Тогда получим $tg\alpha = \frac{\varepsilon r}{\omega^2 r} = \frac{\varepsilon}{\omega^2}$.

Так как маховик вращается равноускоренно, найдем связь между величинами ε и ω с помощью формул равнопеременного вращения (4) и (25), исключив из них время $\omega^2 - \omega_0^2 = 2\varepsilon\varphi$. Поскольку $\omega_0 = 0$, а $\varphi = 2\pi N$, то $\omega^2 = 4\pi N\varepsilon$.

Подставив ω^2 в первую формулу для расчета $tg\alpha$, получим $tg\alpha = \frac{1}{4\pi N} = 0{,}04$; $\alpha = 17°$.

Пример 3. На цилиндр, который может вращаться около горизонтальной оси, намотана нить. К концу нити привязали грузик и предоставили ему возможность опускаться. Двигаясь равноускоренно, грузик за время t = 3 с опустился на h = 1,5 м. Определить угловое ускорение ε цилиндра, если его радиус $r = 4$ см.

Решение. Угловое ускорение цилиндра связано с тангенциальным $\varepsilon = \frac{a_\tau}{R}$, где a_τ определим из уравнения (5) $a_\tau = \frac{2h}{t^2}$. После подстановки получим

$$\varepsilon = \frac{2h}{rt^2} = 8{,}33\ рад/с^2.$$

Пример 4. Велосипедное колесо вращается под действием сил трения с частотой n = 5 с$^{-1}$. Под действием сил трения оно остановилось через интервал времени t = 1 мин. Определить угловое ускорение ε колеса и число N оборотов, которое сделает колесо за это время.

Решение. Угловой путь, пройденный колесом

$$\varphi = \omega_0 t - \frac{\varepsilon t^2}{2}.$$

С другой стороны, $\varphi = 2\pi N$, где N – число оборотов колеса до его полной остановки. Скорость при этом определится по формуле (4), где конечная скорость $\omega = 0$. Таким образом,

$$\varepsilon = \frac{\omega_0}{t} \approx 0{,}523\ \left(\frac{рад}{с^2}\right).$$

Решая совместно первые два уравнения, получим

$$2\pi N = \frac{\omega_0 t}{2} = \frac{2\pi n t}{2}.$$

Сокращая правую и левую части, получим $N = \frac{nt}{2} = 150$ об.

2.3. Задачи для самостоятельного решения

1. Уравнение вращательного движения материальной точки имеет вид: $\varphi = A + Bt + Ct^3$, где A = 2 рад; B = 3 рад/с; C = 1 рад/с^3. Найдите угол φ, угловую скорость w и угловое ускорение ε в моменты времени t_1 = 1 с и t_2 = 4 с. (Ответ: φ_1 = 6 рад, ω_1 = 6 рад/с, ε_1 = 6 рад/с^2; φ_2 = 78 рад, ω_2 = 51 рад/с, ε_2 = 24 рад/с^2).

2. Угловая скорость вращающегося тела изменяется по закону $\omega = At + Bt^2$, где A = 2 рад/с; B = 3 рад/с^3. На какой угол повернулось тело за время от t_1 = 1 с до t_2 = 3 с? (Ответ: 34 рад).

3. Число оборотов центрифуги достигает $n = 2\times10^4$ об/мин. После отключения двигателя вращение прекращается через t = 8 мин. Считая движение равнопеременным, найдите угловое ускорение ε и зависимость угла поворота φ от времени. Укажите направление векторов ω и ε. (Ответ: 4,36 рад/с^2, $\varphi = \varepsilon t^2/2 = 2{,}18t^2$.)

4. Точка движется по окружности с постоянной скоростью V = 50 см/с и нормальным угловым ускорением $a_n = 13\ см/с^2$. Определить, за какое время Δt вектор скорости изменяет направление на $\Delta\varphi$ = 30°. (Ответ: $\Delta t = \frac{V\Delta\varphi}{a_n} = 2\ c.$)

5. Конец минутной стрелки часов на Спасской башне Кремля передвинулся за 1 мин на 37 см. Какова длина стрелки? (Ответ: L = 3,5 м).

6. Минутная стрелка часов в три раза длиннее секундной. Каково отношение между линейными скоростями концов этих стрелок? (Ответ: $\frac{V_c}{V_{мин}} = 20$).

7. Каково ускорение точек земного экватора, обусловленное суточным вращением Земли? Во сколько раз должна была бы увеличиться угловая скорость Земли, чтобы это ускорение стало равным g? (Ответ: $a_n = \frac{4\pi^2 R}{T^2} = 3{,}4$ см/с^2; ${}^{w_1}/_{w_2} = \sqrt{gt^2/(4\pi^2 R)} = 17$).

8. Точка движется по окружности радиуса R = 20 см с постоянным касательным ускорением $a_{\tilde{\imath}} = 5\frac{см}{с^2}$. Через сколько времени нормальное ускорение будет равно касательному? (Ответ: $t = \sqrt{R/a_{\tilde{\imath}}} = 2\ c.$)

9. Вал начинает вращение из состояния покоя и в первые t = 10 с совершает N = 50 оборотов. Считая вращение вала ускоренным, определить угловое ускорение. (Ответ: $\varepsilon = {}^{4\pi n}/_{t^2} = 6{,}3$ рад/с^2).

10. Тело начинает вращаться с постоянным угловым ускорением ε = 0,04 рад/с^2. Через какое время после начала вращения полное уско-

рение какой-либо точки тела будет направленно под углом β = 76° к направлению скорости этой точки? (Ответ: $t = \sqrt{tg\,\beta/\varepsilon} = 10\ c$).

11. Диск начинает вращение из состояния покоя и вращается равноускоренно. Каким будет угол между вектором скорости и вектором ускорения произвольной точки диска, когда он сделает один оборот? (Ответ: $\beta = \mathrm{arctg}\ (4\pi N)$ = 85°).

12. Найти среднюю скорость V Земли при ее орбитальном движении. Средний радиус земной орбиты R = 1,5×10^8 км. (Ответ: ≈30 км/с).

13. Пропеллер самолета радиусом 1,5 м вращается при посадке с частотой 2000 мин$^{-1}$, посадочная скорость самолета относительно Земли равна 162 км/ч. Определить скорость точки на конце пропеллера. Какова траектория движения этой точки? (Ответ: $V \approx$ 316 м/с; точка описывает винтовую линию с шагом ≈1,35 м).

14. По горизонтальной плоскости катится без скольжения с постоянной скоростью V_c обруч радиусом R. Каковы скорости и ускорения различных точек обруча относительно Земли? Выразить скорость как функцию угла между вертикалью и прямой, проведенной между точкой прикосновения обруча с плоскостью и данной точкой обруча. (Ответ: $V_A = 2V_c \cos\alpha$. Ускорения всех точек обода центростремительные и равны $a_{ц.с} = {V^2}/{R}$).

15. Автомобиль движется со скоростью V = 60 км/ч. С какой частотой n вращаются его колеса, если они катятся по шоссе без скольжения, а внешний диаметр покрышек колес равен d = 60 см? Найти центростремительное ускорение внешнего слоя резины на покрышках его колес. (Ответ: $n \approx$ 8,84 с$^{-1}$; $a_{ц.с.} \approx 926$ м/с^2).

16. Цилиндрическое тело диаметром 10 см начало вращаться из состояния покоя с угловым ускорением, пропорциональным времени. Через 2 с после начала вращения угловая скорость тела стала равной 4π с$^{-1}$. Найти скорость и ускорение точки на поверхности цилиндра в конце 36-го его оборота. (Ответ: $\varepsilon = 12\pi$ с$^{-2}$; $\omega = 36\pi$ с$^{-1}$; $V = 1{,}8\pi$ м/с; $a \approx 639$ м/с^2).

17. Вентилятор вращался с частотой n_0 = 900 об/мин. После выключения вентилятор, вращаясь равнозамедленно, сделал до остановки N = 75 об. Какое время t прошло с момента выключения до остановки вентилятора? С каким угловым ускорением ε он двигался? (Ответ: ε = 9,42 рад/с^2, t = 10 с).

18. Автомобиль, движущийся со скоростью 36 км/ч, проходит закругленное шоссе с радиусом кривизны 200 м. На повороте шофер тормозит машину, сообщая ей ускорение 0,3 м/с^2. Найти нормальное и полное ускорения автомобиля на повороте. Найти угол между вектором полного

ускорения автомобиля на повороте и вектором его скорости. Каковы угловые скорость и ускорение автомобиля в момент вхождения машины в поворот? (Ответ: $a_n = 0{,}5$ м/с^2; $a = 0{,}58$ м/с^2; $\varepsilon = 1{,}5$ рад/с^2; $\omega = 0{,}05$ *рад/с*; α = 59°; φ = 121°).

19. В период разгона ротор электродвигателя вращается по закону $\varphi = 2t^3$, где t в с, φ в рад. Определить в конце 4-й секунды линейную скорость и полное ускорения точки, лежащей на ободе ротора, если диаметр ротора D = 40 см. (Ответ: V = 19,2 м/с; a = 1843,21 м/с^2).

20. Пропеллер самолета, делающий 1200 об/мин, после выключения двигателя останавливается через 8 с. Сколько оборотов сделал пропеллер за это время, если считать его вращение равнозамедленным? (Ответ: N = 80 оборотов).

21. Ось с двумя дисками, расположенными на расстоянии L = 0,5 м друг от друга, вращается с частотой n = 1600 об/мин. Пуля, летящая вдоль оси, пробивает оба диска; при этом отверстие от пули во втором диске смещено относительно отверстия в первом диске на угол φ = 12°. Найти скорость пули V. (Ответ: V = 400 м/с).

22. Найти радиус R вращающегося колеса, если известно, что линейная скорость V_1 точки, лежащей на ободе, в 2,5 раза больше линейной скорости V_2 точки, лежащей на расстоянии r = 5 см ближе к оси колеса. (Ответ: R = 8,33 см).

23. Экваториальный радиус Земли равен 6370 км. Определить линейную и угловую скорости движения точек экватора при вращении Земли вокруг оси. (Ответ: V = 463 м/с, $\omega = 7{,}3\times10^{-5}$ рад/с).

24. Колесо вращается вокруг неподвижной оси так, что угол φ его поворота зависит от времени как $\varphi = \beta t^2$, где β = 0,20 рад/с^2. Радиус колеса 10 см. Найти полное ускорение точки А на ободе колеса в момент t = 2,5 с, если скорость точки A в этот момент υ = 0,65 м/с. (Ответ: 0,502 м/с^2).

25. Снаряд вылетел со скоростью v = 320 м/с, сделав внутри ствола n = 2,0 оборота. Длина ствола l = 2,0 м. Считая движение снаряда в стволе равноускоренным, найти его угловую скорость вращения вокруг оси в момент вылета. (Ответ: ω = 2009,6 рад/с).

26.* Твердое тело начинает вращаться вокруг неподвижной оси с угловым ускорением $\beta = at$, где $a = 2{,}0\cdot10^{-2}$ рад/с^2. Через сколько времени после начала вращения вектор полного ускорения произвольной точки тела будет составлять угол α = 60° с ее вектором скорости? (Ответ: t = 7 с).

27.* Найти закон вращения тела вокруг оси, если известны следующие данные: угловая скорость изменяется пропорционально t^2, начальный угол поворота φ_0 = 2 рад, для заданного момента времени t_1 = 3 с угловое ускорение $\varepsilon = -5\pi$ с$^{-2}$. (Ответ: $\varphi = -\frac{5\pi^3}{18} + 2$).

28.* Частица движется по дуге окружности радиуса R по закону $l = a\sin\omega t$, где l – смещение из начального положения, отсчитываемое вдоль дуги, a и ω – постоянные. Положив R = 1,00 м, $a = 0{,}80\,м$ и ω = 2,00 рад/с, найти: а) полное ускорение частицы в точках l = 0 и $\pm a$; б) минимальное значение полного ускорения a_{min} и смещение lm, ему соответствующее. (Ответ: а) $a_0 = 2{,}6\ \frac{\text{м}}{\text{с}^2}$; $a_a = 3{,}2\ \frac{\text{м}}{\text{с}^2}$; б) $l_m = \pm 0{,}37$ м; $a_{min} = 2{,}5$ м/с^2).

29.* Твердое тело вращается вокруг неподвижной оси так, что его угловая скорость зависит от угла поворота φ по закону $\omega = \omega_0 - a\varphi$, где ω_0 и a – положительные постоянные. В момент времени t = 0 угол φ = 0. Найти зависимости от времени: а) угла поворота; б) угловой скорости. (Ответ: $\omega = \omega_0 e^{-at}$; $\varphi = \frac{\omega_0}{a}(1 - e^{-at})$).

30.* Точка движется, замедляясь, по окружности радиуса R так, что в каждый момент времени ее тангенциальное и нормальное ускорение по модулю равны друг другу. В начальный момент t = 0 скорость точки равна v_0. Найти: а) скорость точки в зависимости от времени и от пройденного пути s; б) полное ускорение точки в функции скорости и пройденного пути. (Ответ: $V = V_0 e^{-\frac{S}{R}}$; $a = \frac{V_0^2 e^{-\frac{2S}{R}}}{R}\sqrt{2}$).

3. ДИНАМИКА ДВИЖЕНИЯ ТВЁРДЫХ ТЕЛ ПОД ДЕЙСТВИЕМ НЕСКОЛЬКИХ СИЛ (БЕЗ УЧЕТА ВРАЩЕНИЯ)

3.1. Основные формулы

◊ Первый закон Ньютона: если на тело не действуют внешние силы, или действие их скомпенсировано, то тело движется прямолинейно и равномерно.

◊ Второй закон Ньютона – основной закон динамики поступательного движения

$$\vec{F} = m\frac{d\vec{p}}{dt},$$

где силу можно представить как $\vec{F} = m\frac{d\vec{\upsilon}}{dt} = \frac{d(m\vec{\upsilon})}{dt}$; где $m\vec{\upsilon} = \vec{p}$ – импульс тела.

◊ Сила, действующая на материальную точку, движущуюся по кривой (рис. 3.1), может быть разложена на две составляющие:

● *тангенциальную* $\vec{F}_\tau = m\vec{a}_\tau$;

● *нормальную* $\vec{F}_n = m\vec{a}_n \left|\vec{F}_n\right|$, где R – радиус кривизны траектории; ω – угловая скорость; v – линейная скорость.

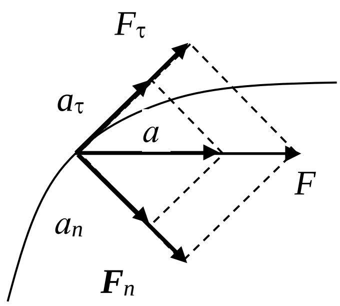


Рис. 3.1

◊ Третий закон Ньютона – силы, с которыми два тела действуют друг на друга, равны по модулю и противоположны по направлению

$$\vec{F}_1 = -\vec{F}_2 .$$

◊ Существует несколько видов сил разной природы, в том числе электромагнитные, обусловленные взаимным притяжением атомов по отношению друг к другу. К ним относятся:

● силы трения, возникающие вследствие неровностей поверхностей: $\vec{F}_{mp} = \mu\vec{N}$;

● сила упругости (возникающая при деформации тел: $F_{упр} = -kx$, где k – жесткость пружины (Н/м); x – деформация пружины, м.

Вес тела – это сила, с которой тело действует на другие тела вследствие его притяжения к планете.

Помимо электромагнитных сил существуют и гравитационные, называемые ещё силами тяготения. Так, закон всемирного тяготения

$$\vec{F} = \frac{m_1 m_2}{r^2}\frac{\vec{r}}{r},$$

где $G = 6{,}672 \cdot 10^{-11}\ \text{м}^3/(\text{кг} \cdot \text{с}^2)$ – гравитационная постоянная; m_1 и m_2 – массы притягивающихся тел; r^2 – расстояние между центрами масс тел; $\frac{\vec{r}}{r}$ – единичный вектор, указывающий направление силы, показывает силу взаимного притяжения между материальными точками. Частным случаем силы всемирного тяготения является сила тяжести – сила, возникающая между телом (материальной точкой) и планетой.

3.2. Примеры решения задач

Пример 1. В лифте на пружинных весах находится тело массой m = 10 кг (рис. 3.2). Лифт движется с ускорением a = 2м/с^2. Определить показания весов в двух случаях: когда ускорение лифта направленно вертикально вверх и вниз.

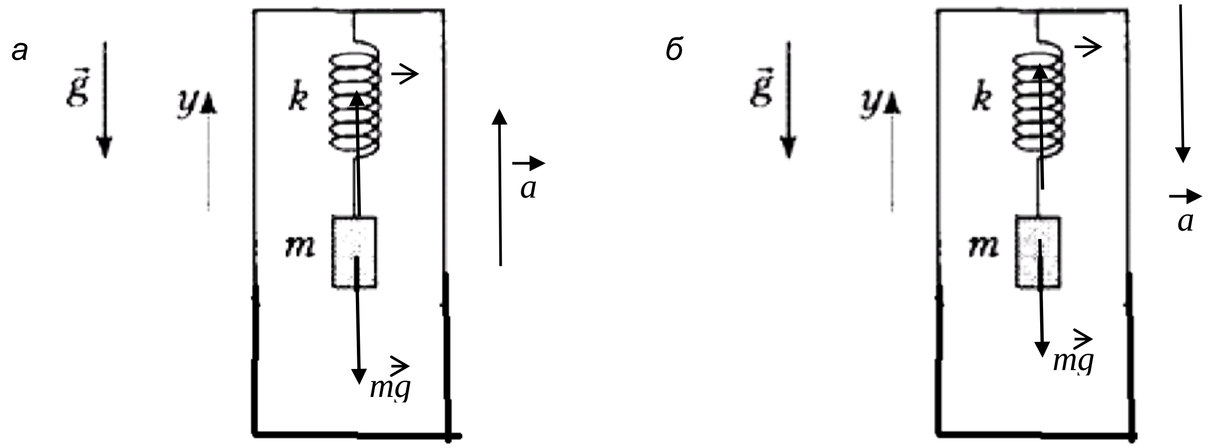


Рис. 3.2

Решение. Определить показания весов – это значит найти вес тела P, т.е. силу, с которой тело действует на пружину. Но эта сила, согласно третьему закону Ньютона, равна по модулю и противоположна по направлению силе упругости N, с которой пружина действует на тело. Запишем 2-й закон Ньютона в векторной форме

$$m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{N}.$$

Запишем уравнение движения с учетом проекций на ось OY:

$$ma = -mg + N$$

откуда

$$N = P = mg + ma = m(g + a).$$

В случае (рис. 3.2, *б*) ускорение лифта направлено вниз, тогда уравнение движения в скалярной форме с учетом проекций запишем

$$-ma = -mg + N$$

откуда

$$N = P = mg - ma = m(g - a).$$

При вычислении получаем

● если ускорение направлено вертикально вверх

$$P = 10\ (9{,}8 + 2) = 118H;$$

● если ускорение направлено вертикально вниз

$$P = 10\ (9{,}8 - 2) = 78H.$$

Важно отметить, что ни модуль, ни направление скорости лифта не влияют на показания весов. Существенны лишь величина и направление ускорения.

Пример 2. Через блок перекинута нить, к концам которой прикреплены грузы 100 г и 200 г. Определите силу давления на блок при движении грузов. Считать блок неподвижным и невесомым.

Дано: $m_1 = 100\ г = 0{,}1\ кг$, $m_2 = 20\ г = 0{,}02\ кг$, $P -$?

Решение. Сделаем рис. 3.3 к задаче и расставим все силы, действующие на систему. Так, в системе, кроме сил тяжести m_1g и m_2g, действующих на грузы, возникают силы натяжения нити T_1 и T_2. Так как блок и нить невесомы, то $T_1 = T_2 = T$. Поэтому на блок со стороны нити действует $2T$, направленная вниз. Именно эта сила и является силой давления на ось блока. Поэтому $P = 2T$.

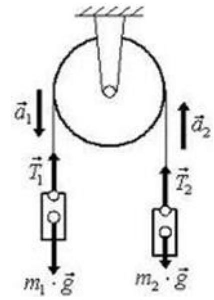


Рис. 3.3

Запишем уравнения движения грузов:

$$\begin{cases} m_1\overrightarrow{a_1} = m_1\vec{g} + \overrightarrow{T_1} \\ m_2\overrightarrow{a_2} = m_2\vec{g} + \overrightarrow{T_2}. \end{cases}$$

Возьмем проекции сил на ось OY, а также учтем, что $T_1 = T_2 = T$ и $a_1 = a_1 = a$ (разные части одной нити не могут двигаться с разным ускорением):

$$\begin{cases} m_1 a = m_1 g - T \\ -m_2 a = m_2 g - T. \end{cases}$$

Решая эту систему уравнений, получим

$$a = \frac{g(m_1 - m_2)}{m_1 + m_2}.$$

Чтобы выразить силу натяжения нити воспользуемся любым уравнением системы. Зная силу натяжения, найдем давление на ось блока:

$$T_1 = m_1(g - a) \text{ или } P = 2T_1 = 2m_1(a - g).$$

Расчет: $P = 2m_1(g - a) = 2 \cdot 0{,}1(9{,}8 - 6{,}5) = 0{,}66H$.

Пример 3. Санки съезжают с горы высотой H и углом наклона α и выезжают на горизонтальный участок. Коэффициент трения на всем пути одинаков и равен μ. Найдите расстояние s, которое пройдут санки, двигаясь по горизонтальному участку до полной остановки.

Дано: H, μ, α. *Найти* s – ?

Решение. Сделаем рис. 3.4 к задаче и обозначим все силы, действующие на тело.

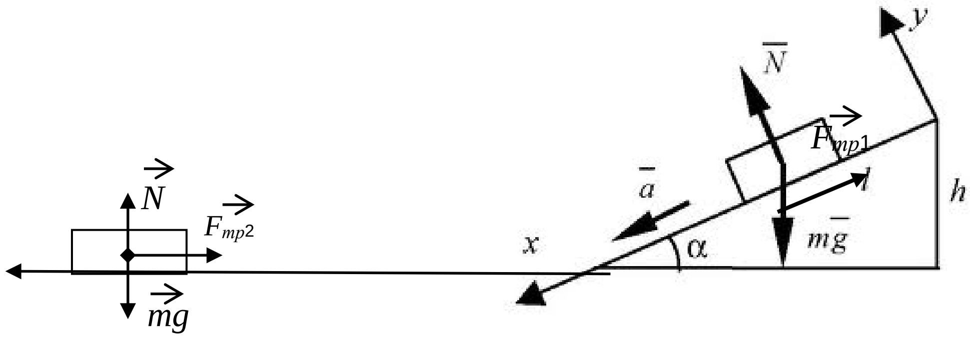


Рис. 3.4

Воспользуемся 2-м законом Ньютона

$$\vec{F}_{mp} + \vec{N} + m\vec{g} = m\vec{a}.$$

При проекции уравнения на ось OX и OY, получим

$$\begin{cases} mgsin\alpha - F_{mp1} = ma \\ N - mgcos\alpha = 0. \end{cases}$$

Зная, что $F_{mp1} = \mu N = \mu mgcos\alpha$, получим

$$mgsin\alpha - \mu mgcos\alpha = ma_1.$$

Рассмотрим, какие силы действуют на тело при его движении на прямом μ участке:

$$\vec{F}_{mp} + \vec{N} + m\vec{g} = m\vec{a}.$$

При проекции уравнения на ось OX и OY, получим

$$\begin{cases} -F_{mp2} = -ma_2 \\ N - mg = 0. \end{cases}$$

Отсюда

$$F_{mp2} = \mu N = \mu mg.$$

Поэтому ускорение a_2 на участке 2 выразим как (на прямом участке)

$$a_2 = \mu g.$$

Зная формулу связи ускорения при равнозамедленном движении пути и скорости, получим

$$a_2 = \frac{v^2}{2s} = \mu g.$$

или

$$s = \frac{v^2}{\mu g}.$$

Скорость, которую приобретает тело, можно найти из первого уравнения:

$$mgsin\alpha - \mu mgcos\alpha = ma_1,$$

или

$$gsin\alpha - \mu gcos\alpha = a_1.$$

Учитывая, что

$$a_1 = \frac{v^2}{2l},$$

где l – путь тела на наклонной плоскости; $l = {}^{H}/_{sin\alpha}$,
получим

$$gsin\alpha - \mu gcos\alpha = \frac{v^2}{2l},$$

или

$$v^2 = (gsin\alpha - \mu gcos\alpha)2l.$$

Тогда получаем окончательное выражение:

$$S = \frac{v^2}{\mu g} = \frac{(g\sin\alpha - \mu g\cos\alpha)2l}{\mu g} = \frac{2(\sin\alpha - \mu\cos\alpha)H}{\mu\sin\alpha} = 2H\left(\frac{1}{\mu} - \mathrm{ctg}\alpha\right).$$

Пример 4. Шарик массой 0,2 кг, привязанный к нити, закрепленной одним концом, описывает в горизонтальной плоскости окружность. Найти число оборотов шарика в минуту. Длину нити принять равной 3 м.

Дано: $m = 0{,}2$ *кг*; $l = 3$ *м*. Найти: n–?

Решение. Сделаем рис. 3.5 к задаче и расставим все силы, действующие на шарик.

Число оборотов шарика (частоту вращения) можно найти, зная нормальное ускорение, которое сообщает шарику равнодействующая сила. Поэтому задачу решим, используя 2-й закон Ньютона. Запишем 2-й закон Ньютона в векторной форме:

$$m\vec{a} = \vec{T} + m\vec{g}.$$

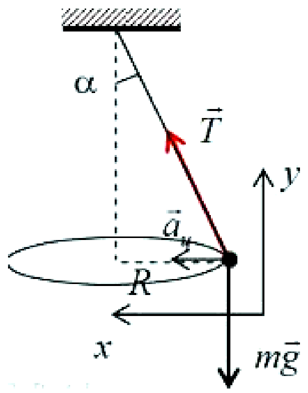


Рис. 3.5

Выбрав систему координат, рассмотрим проекцию данного уравнения на оси OX и OY:

$$\begin{cases} Tcos\alpha = ma_n \\ Tsin\alpha - mg = 0. \end{cases}$$

Данную систему можно переписать как

$$\begin{cases} Tcos\alpha = ma_n \\ Tsin\alpha = mg. \end{cases}$$

Для того чтобы выразить ускорение a_n, разделим второе уравнение системы на первое:

$$tg\alpha = \frac{g}{a_n}.$$

Зная формулу связи нормального ускорения и угловой частоты вращения $a_n = \omega^2 R$, а также угловой частоты и обычной частоты $\omega = 2\pi n$, можем записать

$$tg\alpha = \frac{g}{\omega^2 R} = \frac{g}{4\pi^2 n^2 R}.$$

Отсюда

$$n = \sqrt{\frac{g}{4\pi^2 R tg\alpha}}.$$

Воспользовавшись геометрическими формулами, выразим

$$R = {l}/{sin\alpha},$$

и представим выражение в виде:

$$n = \sqrt{\frac{g}{4\pi^2 R tg\alpha}} = \sqrt{\frac{g}{4\pi^2 \frac{l}{sin\alpha} \cdot \frac{sin\alpha}{cos\alpha}}} = \sqrt{\frac{g cos\alpha}{4\pi^2 l}}.$$

Расчеты

$$cos\alpha = \sqrt{1 - sin^2\alpha} = \sqrt{1 - {1}/{9}} = \sqrt{\frac{8}{9}} = \frac{2\sqrt{2}}{3} = 0{,}94;$$

$$n = \sqrt{\frac{9{,}8 \cdot 0{,}94}{4 \cdot 3{,}14^2 \cdot 3}} = \frac{0{,}279 об}{с} \approx 16{,}8 об/мин.$$

3.3. Задачи для самостоятельного решения

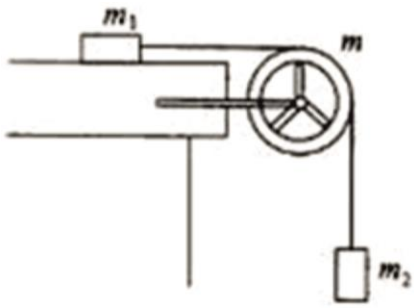


Рис. 3.6

1. Брусок массой 400 г под действием груза массой 100 г проходит из состояния покоя путь 80 см за 2 с. Найти коэффициент трения тела о поверхность (рис. 3.6) (вращением блока, трением нити о блок и их массами пренебречь). (Ответ: μ = 0,2).

2. Через блок перекинута нить, к концам которой подвешены грузы с массами m = 100 г каждый. Определить массу груза, который нужно добавить к одному из грузов, чтобы за время t = 3 с этот груз опустился на 1,2 м (трением, массами нити и блока пренебречь). (Ответ: m = 0,01 кг).

3. Шарик массой 0,2 кг, привязанный к нити, которая закреплена одним концом, вращается в горизонтальной плоскости. Найти период вращения шарика, а также силу натяжения нити. Длина нити 3 м. (Ответ: 3,4 с; 2,1 Н).

4. Горизонтально расположенный диск вращается с частотой 10 об/мин, вокруг вертикальной оси, проходящей через его центр. На каком расстоянии от центра диска может удержаться тело, если коэффициент трения 0,200? (Ответ: $r \leq 1{,}8$ м).

5. Через блок перекинута нить, к концам которой подвешены грузы с массами m_1 = 100 г и m_2 = 200 г. С каким ускорение будут двигаться гру-

зы, если их предоставить самим себе? Найти силу давления на ось блока в состоянии движения грузов и в состоянии покоя, если каждый из грузов поочередно поддерживать. Сравните эти силы давления и сделайте вывод (трением, массами нити и блока пренебречь). (Ответ: a = 3,27 м/с^2).

6. Через блок перекинута нить, к концам которой подвешены грузы с массами m_1 = 100 г и m_2 = 180 г. За какое время поднимется меньший груз на высоту 1,5 м (трением, массами нити и блока пренебречь)? (Ответ: 10,1 с).

7. Поезд, шедший со скоростью v = 10 м/с, внезапно был заторможен, и остановился через t = 30 с после начала торможения. Определить силу, с которой прижималась тормозная колодка к ободу колеса, если масса поезда $m = 4 \cdot 10^5$ кг, а общее число тормозных колодок 180. Коэффициент трения колес о рельсы μ_1 = 0,02. Коэффициент трения колес о тормозную колодку μ_2 = 0,2. (Ответ: F = 1522 Н).

8. Чтобы определить коэффициент трения между деревянными поверхностями, брусок положили на доску и стали поднимать один конец доски до тех пор, пока брусок не начал скользить. Это произошло при угле наклона 14°. Чему равен коэффициент трения? (Ответ: 0,25).

9. В установке (рис. 3.7) известны угол наклона плоскости к горизонту α, коэффициент трения между телом m_1 и наклонной плоскостью. Масса блока и нити пренебрежимо малы. Трения в блоке нет. Считая, что в начальный момент оба тела неподвижны, найти отношение ${m_2}/{m_1}$, при котором тело m_2 начнет опускаться, подниматься. (Ответ: при подъеме m_2: ${m_2}/{m_1} \geq sin\alpha + \mu cos\alpha$; если m_2 опускается: ${m_2}/{m_1} < sin\alpha - \mu cos\alpha$).

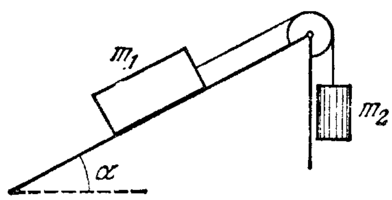


Рис. 3.7

10. Небольшое тело пустили снизу вверх по наклонной плоскости. Найти коэффициент трения, если время подъема оказалось в δ раз меньше времени спуска? Угол наклона плоскости к горизонту α. (Ответ: $\mu = \left[\frac{\delta^2-1}{\delta^2+1}\right] tg\alpha$.)

11. На доске, равномерно вращающейся вокруг оси OO' (рис. 3.8), укреплен на вертикальной стойке, отстоящей от оси вращения, подвес на расстоянии 5 см. Какова частота вращения доски, если нить отвеса длиной

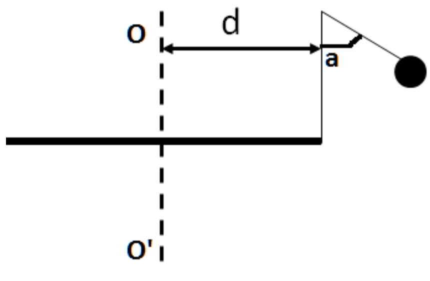


Рис. 3.8

8 см отклонилась от вертикали на угол 45°? (Ответ: 1,5 об/с).

12. Тело массой m = 100 кг поднимают по наклонной плоскости с ускорением a = 2 м/с^2. Какую силу, параллельную наклонной плоскости, необходимо приложить для подъёма тела? Коэффициент трения 0,2, угол наклона плоскости 30°. (Ответ: F = 860 Н).

13. На горизонтальной поверхности лежат два, связанных нитью груза массой по m = 1 кг каждый. На нити, прикреплённой к этим грузам и перекинутой через неподвижный блок, подвешен такой же груз. С каким ускорением a движется система грузов и какова сила натяжения T между ними? Трение не учитывать. (Ответ: a = 3,27 м/с^2; T = 6,7 Н).

14. Через блок перекинута невесомая нерастяжимая нить, к концам которой привязаны грузы m_1 = 0,5 кг и m_2 = 0,6 кг. Найти силу давления блока на ось при движении грузов. Массой блока и трением пренебречь. (Ответ: P = 0,96 Н).

15. Шарик вращается на нити настолько быстро, что его плоскость вращения горизонтальна. Частота вращения ω. Найти расстояние от центра шарика до оси вращения. (Ответ: $l = {gtg\alpha}/{\omega^2}$).

16. Два бруска с массами m_1 = 1 кг и m_2 = 4 кг, соединённые шнуром, лежат на столе. С каким ускорением будут двигаться бруски, если к одному из них приложить силу 10 Н, направленную горизонтально? Какова будет сила натяжения шнура, соединяющего бруски, если силу 10 Н приложить к первому бруску? Ко второму бруску? Трением пренебречь. (Ответ: a = 2 м/с^2; T_1 = 8 Н; T_2 = 2 Н).

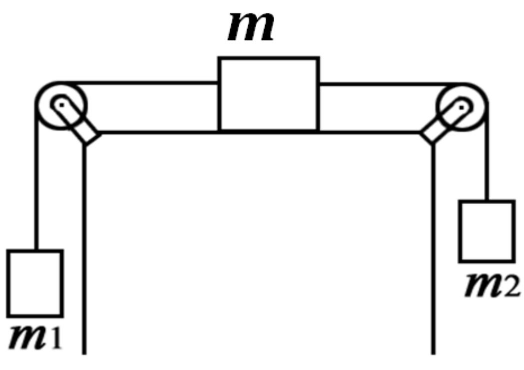


Рис. 3.9

17. На гладком столе лежит брусок массой m = 4 кг. К бруску привязаны шнуры, перекинутые через неподвижные блоки. К концам шнуров подвешены гири, массы которых m_1 = 1 кг и m_2 = 2 кг. Найти ускорение и силу натяжения каждого из шнуров. Массой блоков и трением пренебречь. (Ответ: a = 1,4 м/с^2; T_1 = 11,4 Н; T_2 = 17,2 Н).

18. Аэростат массы m начал опускаться с постоянным ускорением a. Найти массу балласта, который следует сбросить за борт, чтобы аэростат получил такое же ускорение, но направленное вверх. Сопротивлением воздуха пренебречь. (Ответ: $\Delta m = {2ma}/{g + a}$).

19. Груз массой $m_1 = 5$ кг, связанный нерастяжимой нитью, перекинутой через неподвижный блок, с другим грузом массой $m_2 = 2$ кг, движется вниз по наклонной плоскости. Найти силу натяжения нитей и ускорения грузов, если коэффициент трения между первым грузом и плоскостью 0,1. Угол наклона плоскости к горизонту 30°. Массой нити и трением в блоке пренебречь. (Ответ: $a = 0{,}097$ м/с^2; $T = 19{,}8$ Н).

20. Невесомый блок укреплён на вершине двух наклонных плоскостей, составляющих с горизонтом 30° и 45°. Гири массами по $m = 1$ кг каждая соединены нитью, перекинутой через блок. Найти ускорение, с которым движутся гири и силу натяжения нити. Считать нить нерастяжимой и невесомой, трением пренебречь. (Ответ: $a = 1$ м/с^2, $T = 6$ Н).

21. К концам невесомой нерастяжимой нити, перекинутой через невесомый неподвижный блок, подвешены два груза 100 г и 200 г каждый. Система подвешена на весах и находится в движении. Что показывают весы? Изменятся ли показания весов и как, если на груз меньшей массы добавить перегрузок 50 г, 100 г? (Ответ: 26,7 Н; да, изменятся).

22. По столу тянут груз массой $m = 1$ кг с помощью нити, приложенной к динамометру, показывающему 30 Н. Второй раз тот же груз приводят в движение с помощью нити, перекинутой через неподвижный блок, на которой висит гиря массой $m_1 = 3$ кг. Вычислить ускорения a_1, a_2 и найти их отношение. (Ответ: $a_1 = 30$ м/с^2; $a_2 = 7{,}4$ м/с^2; $a_1 / a_2 = 4{,}1$).

23. На столе лежит брусок, к которому привязаны нити, перекинутые через блоки, укреплённые на обоих концах стола. К свободным концам нити подвешены грузы массами $m_1 = 0{,}85$ кг и $m_2 = 0{,}2$ кг, вследствие чего брусок приходит в движение и за $t = 3$ с проходит расстояние $S = 0{,}81$ м. Зная, что масса бруска $m_3 = 2$ кг, определить коэффициент трения скольжения и силу натяжения нитей. (Ответ: $\mu = 0{,}3$; $T_1 = 8{,}27$ Н; $T_2 = 2$ Н).

24. Три груза массой по $m = 1$ кг связаны нитью и движутся по горизонтальной плоскости под действием силы $F = 10$ Н, направленной под углом $\alpha = 30°$ к горизонту. Определить ускорение a системы и силы натяжения нити T_1 и T_2, если коэффициент трения $\mu = 0{,}1$. (Ответ: $a = 1{,}91$ м/с^2; $T_1 = 5{,}77$ Н; $T_2 = 2{,}88$ Н).

25. Два тела, связанные нитью, движутся по горизонтальной плоскости под действием силы $F = 100$ Н, направленной горизонтально. Если силу приложить к правому телу массой $m_1 = 7$ кг, то сила натяжения нити будет 30 Н. Определить силу натяжения нити, если силу приложить к левому грузу массой $m_2 = 3$ кг. Считать, что в обоих случаях тела движутся в направлении приложенной силы (трением пренебречь). (Ответ: $F_H = 70$ Н).

26.* Небольшому телу сообщают начальный импульс, в результате чего он начинает двигаться поступательно вверх без трения по наклонной плоскости со скоростью 3 м/с. Плоскость образует угол 20° с горизонтом. Определить: 1) на какую высоту поднимется тело? 2) сколько времени оно будет двигаться вверх до остановки? 3) сколько времени затратит при скольжении вниз до исходного положения? 4) какую скорость тело будет иметь в момент возвращения в исходное положение. (Ответ: 0,46 м; 0,89 с; 0,89 с; 3 м/с).

27.* На горизонтальном столе лежат два тела одинаковой массы по 1 кг каждое. Тела связаны невесомой нерастяжимой нитью, которая перекинута через блок, укрепленный на краю стола. К свободному концу нити привязаны груз массой 0,5 кг. Коэффициент трения первого тела со столом 0,1, второго тела 0,15. Найти: 1) ускорение, с которым движется система; 2) натяжение нити, связывающей тела, массами по 1 кг? 3) натяжение нити, на которой висит груз. (Ответ: 0,98; 2 Н; 4,4 Н).

28.* Электровоз тянет состав, состоящий из n одинаковых вагонов. Найти силу натяжения сцепки между $k-м$ вагоном и $(k+1)-м$ вагонам, считая от начала состава. Масса каждого вагона m, а коэффициент сопротивления μ. (Ответ: $F = m(n-k)(a+\mu g)$).

29.* К бруску массы $m,$ лежащим на гладкой горизонтальной плоскости, приложили постоянную по модулю силу $F = {}^{mg}\!/_{3}$. В процессе его прямолинейного движения угол α между направлением силы и горизонтом меняют по закону: $\alpha = ks$, где $s-$ путь, пройденный телом от начального положения, k – постоянная. Найти скорость бруска как функцию угла α. (Ответ: $v = \sqrt{{}^{2g}\!/_{3k}\, sin\alpha}$).

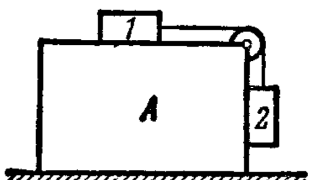


Рис. 3.10

30.* С каким минимальным ускорением следует перемещать брусок A, чтобы тела m_1 и m_2 не двигались относительно него (рис. 3.9). Массы тел одинаковы, коэффициент трения между телами и бруском одинаковый и равен μ. Массы блока и нитей пренебрежимо малы. Трения в блоке нет. (Ответ: $a_{мин} = {}^{g(1-\mu)}\!/_{(1+\mu)}$).

4. ДИНАМИКА ВРАЩАТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ

4.1. Расчет момента инерции твердого тела. Теорема Штейнера

4.1.1. Основные формулы

◊ Моментом инерции механической системы относительно неподвижной оси OO' называется физическая величина Joo', равная сумме произведений масс всех материальных точек системы на квадрат их расстояний до оси вращения:

$$J_{oo'} = \sum_{i=1}^{n} m_i r_i^{\,2}, \tag{1}$$

где m_i и r_i – соответственно масса i-й точки и ее расстояние до оси вращения.

Момент инерции тела относительно оси OO'

$$J_{oo'} = \int_0^m r^2\, dm = \int_0^V r^2\, \rho dV, \tag{2}$$

где $dm = \rho dV$ – масса элемента объема dV; ρ – плотность тела; r – расстояние от элемента объема dV до оси вращения OO'.

Если тело однородно, т.е. его плотность всюду одинакова, то

$$J_{oo'} = \rho \int_0^V r^2\, dV.$$

Момент инерции тела является мерой инертности тела во вращательном движении вокруг неподвижной оси OO', подобно тому, как масса является мерой его инертности в поступательном движении.

Момент инерции данного тела зависит от выбранной оси вращения. Если ось вращения переносят параллельно относительно центральной оси, то момент инерции вычисляется по теореме Штейнера:

$$J_{o_1o_1'} = J_{oo'} + md^2,$$

где d – расстояние между осью OO' и осью полученной параллельным переносом O_1O_1'.

Моменты инерции однородных тел простейшей формы, относительно некоторых осей, представлены в табл. 4.1.

Таблица 4.1

Моменты инерции однородных тел простейшей формы

Тело	Положение оси	Расчетная формула
Полый тонкостенный цилиндр радиуса R и массы m	Центральная ось цилиндра	$J_{oo'} = mR^2$
Сплошной цилиндр (диск) радиуса R и массы m	Центральная ось цилиндра	$J_{oo'} = \frac{1}{2}mR^2$

Окончание табл. 4.1

Тело	Положение оси	Расчетная формула
Шар радиуса R и массы m	Ось проходит через центр шара	$J_{oo'} = \frac{2}{5}mR^2$

Тело	Положение оси	Расчетная формула
Тонкостенная сфера радиуса R и массы m	Ось проходит через центр сферы	$J_{oo'} = \frac{2}{3}mR^2$
Прямой тонкий стержень длины l и массы m	Ось перпендикулярна стержню и проходит через его середину	$J_{oo'} = \frac{1}{12}ml^2$
Тот же стержень	Ось перпендикулярна стержню и проходит через его конец	$J_{oo'} = \frac{1}{3}ml^2$

4.1.2. Примеры решения задач

Пример 1. Шары на стержне расположены так, как показано на рис. 4.1. Если шары m и $2m$ поменять местами, как изменится момент инерции стержня? В каком случае стержень будет легче заставить вращаться? Принять шары за материальные точки, а стержень считать пренебрежимо малой массы.

Решение. Данная механическая система состоит из нескольких материальных точек, которые находятся на разных расстояниях от оси вращения OO'. Воспользовавшись формулой (4.1) для первой системы, находим

$$J_{1_{oo'}} = ml^2 + 2m(l)^2 + 2ml^2 + m(2l)^2 = l^2(m + 8m + 2m + 4m) = 15ml^2;$$

для второго случая имеем (рис. 4.2):

$$J_{2_{oo'}} = 2ml^2 + 2m(2l)^2 + ml^2 + m(2l)^2 = l^2(2m + 8m + m + m) = 12ml^2$$

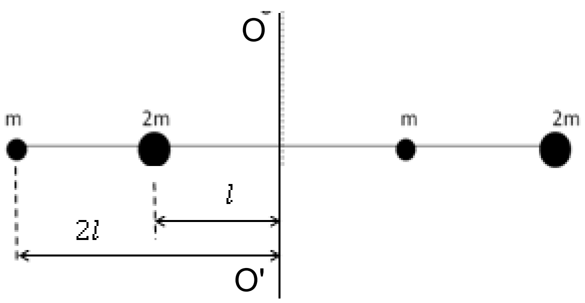


Рис. 4.1

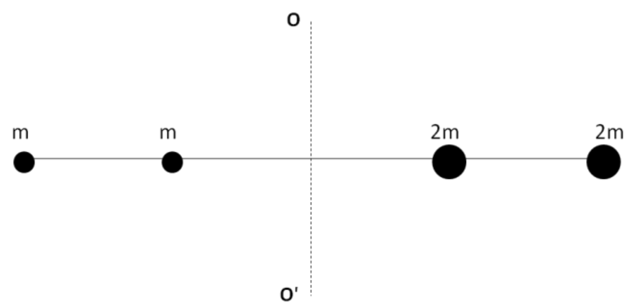


Рис. 4.2

Таким образом,

$$\frac{J_{1_{oo'}}}{J_{2_{oo'}}} = \frac{15}{12} = 1{,}3 \text{ раза}.$$

Следовательно, отсюда стержень заставить вращаться во втором случае проще, поскольку его момент инерции меньше ($12ml^2$).

Пример 2. Сплошной цилиндр может вращаться вокруг центральной оси. Каков будет момент инерции цилиндра, если его заставить вращаться вокруг одной из его образующих (рис. 4.3)? Считать массу цилиндра m, радиус R.

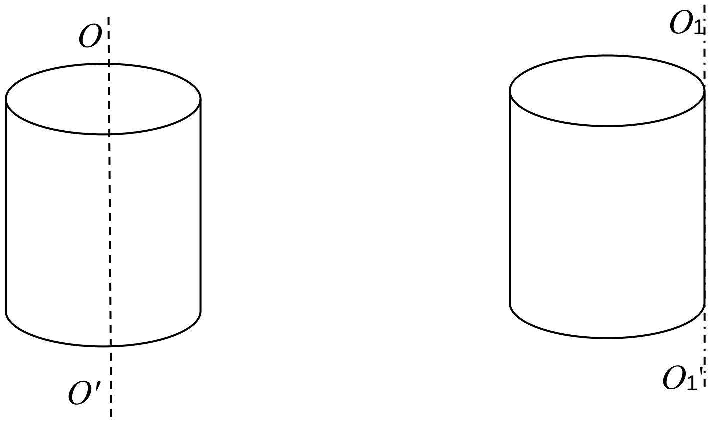


Рис. 4.3

Дано: m, R. Найти $J_{o_1o_1'}$ – ?

Решение. Для расчета момента инерции воспользуемся теоремой Штейнера, поскольку оси OO' и $O_1O_1{}'$ параллельны:

$$J_{o_1o_1'} = J_{oo'} + md^2,$$

где $J_{oo'}$ можно найти, воспользовавшись табличным значением (см. табл. 4.1), а расстояние d равно радиусу R. Тогда получается

$$J_{o_1o_1'} = \frac{1}{2}mR^2 + mR^2 = \frac{3}{2}mR^2.$$

Таким образом, вокруг образующей вращение цилиндра будет происходить труднее, поскольку момент инерции возрастет.

Пример 3. Каркас в форме квадрата, имеющего сторону l, может свободно вращаться вокруг оси OO' (рис. 4.4). Масса равномерно распределена по каркасу с линейной плотностью τ. Найти момент инерции каркаса относительно оси OO'?

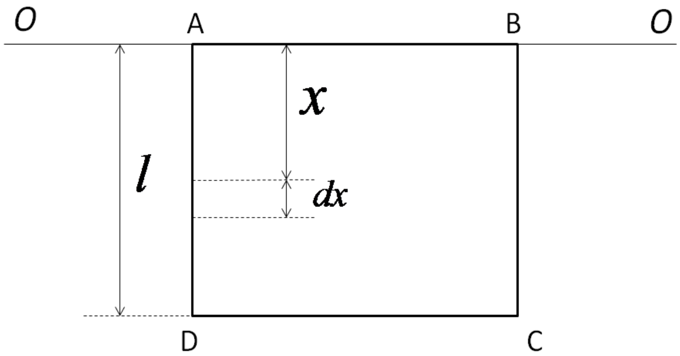


Рис. 4.4

Решение. Чтобы найти момент инерции всей механической системы (каркас), необходимо сложить моменты инерций всех частей, составляющих систему

$$J_{oo'} = J_{AB} + J_{BC} + J_{CD} + J_{DA};$$

при этом $J_{AB} = 0$, так как стержень AB находится на оси OO'; $J_{BC} = J_{DA} = J_1$;

$$J_{CD} = J_2,$$

тогда

$$J_{oo'} = 2J_1 + J_2.$$

Для того чтобы найти момент инерции стержней AD и BC, необходимо учесть зависимость от расстояния, поскольку каждый участок стержня вращается на разном расстоянии от оси OO'. Мысленно разобьем стержень AD на малые участки длиной dx массой dm и найдем момент инерции каждого участка относительно оси OO', воспользовавшись формулой (4.2) (рис. 4.4):

$$dJ_1 = dmx^2.$$

Поскольку линейная плотность τ показывает массу, приходящуюся на единицу длины стержня, то

$$\tau = \frac{dm}{dl} = \frac{dm}{dx}.$$

Получаем

$$dJ_1 = \tau x^2 dx.$$

Для того чтобы найти момент инерции всего стержня, воспользуемся интегрированием

$$J_1 = \int dJ_1 = \int_0^l \tau x^2 dx = \tau \int_0^l x^2 dx = \tau \frac{l^3}{3}.$$

Стержень CD находится от оси OO' на расстоянии l и расположен параллельно ей. Поэтому можно сказать, что он получен параллельным перемещением стержня AB. Воспользовавшись теоремой Штейнера, получаем

$$J_2 = 0 + md^2 = ml^2 = \tau l l^2.$$

Тогда полный момент инерции

$$J_{oo'} = 2J_1 + J_2 = 2\tau \frac{l^3}{3} + \tau l^3 = \frac{5\tau l^3}{3}.$$

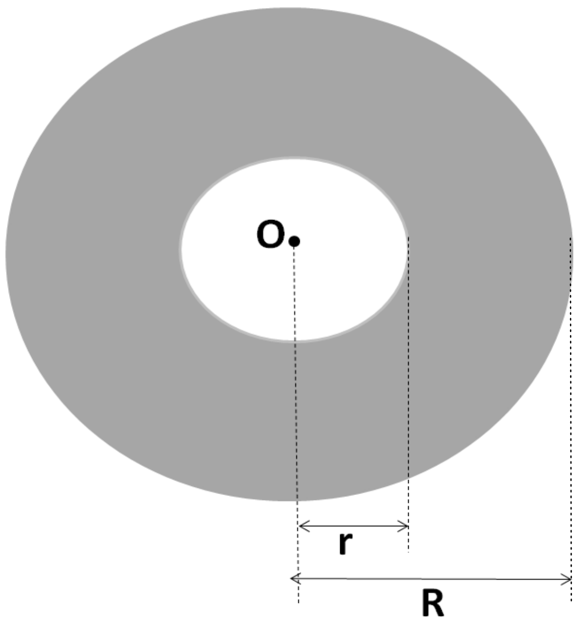


Рис. 4.5

Пример 5. Сплошной цилиндр радиусом R имеет полость, вырезанную в центре радиусом r (рис. 4.5). Найти момент инерции такого цилиндра, если объемная плотность его распределена равномерно и имеет значение ρ.

Дано: R, r, ρ. Найти: J – ?

Решение. В данном случае задачу можно решить, представив, что вырезанная полость – это тот же цилиндр, но радиусом r. Тогда момент инерции искомой фигуры J можно найти с помощью вычитания момента инерции всего цилиндра J_1 момента инерции вырезанной части J_2:

$$J = J_1 - J_2,$$

где $J_1 = \frac{1}{2} m_1 R^2$, а $J_2 = \frac{1}{2} m_2 r^2$.

Массу полного цилиндра m_1 и вырезанной части массой m_2 найдем, используя понятие объемной плотности. Объемная плотность ρ показывает, какая масса приходится на единицу объема цилиндра:

$$\rho = \frac{dm}{dV}$$

или

$$\rho = \frac{m}{V},$$

отсюда $m_1 = \rho V_1, m_2 = \rho V_2$. Объем цилиндра можно найти по известной геометрической формуле $V = SH$, где H – высота цилиндра, S – площадь основания. Сводя все в одну формулу, получаем

$$J = J_1 - J_2 = \frac{1}{2}m_1R^2 - \frac{1}{2}m_2r^2 = \frac{1}{2}\rho V_1R^2 - \frac{1}{2}\rho V_2r^2 = \frac{1}{2}\rho S_1HR^2 - \frac{1}{2}\rho S_2Hr^2 =$$
$$= \frac{1}{2}\rho\pi R^2HR^2 - \frac{1}{2}\rho\pi r^2Hr^2 = \frac{1}{2}\rho\pi H(R^4 - r^4).$$

4.1.3. Задачи для самостоятельного решения

1. Определить момент инерции J материальной точки массой m = 0,3 кг относительно оси, отстоящей от точки на r = 20 см. Как изменится момент инерции, если точку удалить от оси на расстояние 1 м? В каком случае усилие к точке необходимо приложить меньшее, для того чтобы остановить вращающуюся систему? (Ответ: 0,012 кг м^2; уменьшится в 25 раз; во втором случае).

2. Два шара массами m и 2m (m = 10 г) закреплены на тонком стержне длиной l = 40 см так, как это указано на рис. 4.6. Определить моменты инерции J системы относительно оси, перпендикулярной стержню и проходящей через его конец в этих двух случаях (размерами шаров пренебречь, массу стержня принять равной m). (Ответ: 4,5·10^{-3} кг·м^2).

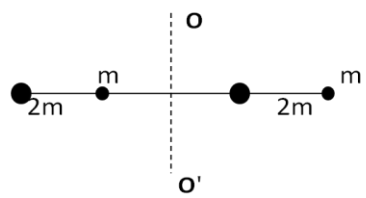


Рис. 4.6

3. Два шара массами m и 2m (m = 10 г) закреплены на тонком невесомом стержне длиной 100 см (рис. 4.6). Во сколько раз изменится момент инерции системы, если ось вращения параллельным переносом сместить влево к шару массой 2m? (Ответ: 2,09 раза).

4. Найти момент инерции J и момент импульса L земного шара относительно оси вращения (необходимые данные возьмите из справочных таблиц). (Ответ: 490·10^{36} кг·м^2; 6·10^{33} кг·м^2/с^2).

5. Чему равен момент инерции относительно центральной оси полого медного цилиндра с тонкими стенками толщиной 0,1 мм относительно его оси, если его высота 40 см, диаметр 20 см? (Ответ: 22,4·10^{-4} кг·м^2).

6. Два шара одинакового радиуса $R = 5$ см закреплены на концах невесомого стержня. Расстояние между шарами 0,5 м. Масса каждого шара $m = 1$ кг. Найти: а) момент инерции системы относительно оси, проходящей через середину стержня перпендикулярно к нему; б) момент инерции системы относительно той же оси, считая шары материальными точками, массы которых сосредоточены в их центрах; в) относительную ошибку измерений. (Ответ: 0,127 кг·м^2; 0,125 кг·м^2; 1,6 %).

7. Три маленьких шарика массой $m = 10$ г каждый расположены в вершинах равностороннего треугольника со стороной $a = 20$ см и скреплены между собой. Определить момент инерции J системы относительно оси перпендикулярной плоскости треугольника и проходящей через центр описанной окружности. (Ответ: $0{,}4 \cdot 10^{-3}$ кг·м^2).

8. Три маленьких шарика массой $m = 5$ г каждый расположены в вершинах равностороннего треугольника со стороной $a = 10$ см и скреплены между собой. Определить момент инерции J системы относительно оси лежащей в плоскости треугольника и проходящей через центр описанной окружности и одну из вершин треугольника (массой стержней, соединяющих шары, пренебречь). (Ответ: $2{,}5 \cdot 10^{-5}$ кг·м^2).

9. Определить момент инерции тонкого стержня длиной 30 см и массой 100 г относительно оси проходящей перпендикулярно стержню, отстоящей от конца на расстоянии 2/3 длины. (Ответ: 10^{-3} кг·м^2).

10. Вычислить момент инерции J проволочного прямоугольника со сторонами $a = 12$ см и $b = 16$ см относительно оси, лежащей в плоскости прямоугольника и проходящей через середины малых сторон. Масса равномерно распределена по длине проволоки с линейной плотностью $\tau = 0{,}1$ кг/м. (Ответ: $0{,}144 \cdot 10^{-3}$ кг·м^2).

11. Вычислить момент инерции J проволочного прямоугольника со сторонами $a = 10$ см и $b = 20$ см относительно оси, лежащей в плоскости прямоугольника и проходящей через середины больших сторон. Масса равномерно распределена по длине проволоки с линейной плотностью $\tau = 0{,}5$ кг/м. (Ответ: 0,0017 кг·м^2).

12. Тонкое кольцо радиусом 20 см и массой 100 г может вращаться относительно оси, лежащей в плоскости кольца и проходящей через его центр. Определите момент инерции относительно этой оси. Сравните с осью, проходящей перпендикулярно плоскости кольца через его середину. (Ответ: $2 \cdot 10^{-3}$ кг·м^2; в 2 раза меньше).

13. Кольцо радиусом 10 см и массой 50 г может вращаться вокруг оси, лежащей в плоскости кольца и проходящей как касательная. Определите момент инерции относительно этой оси. (Ответ: $0{,}25 \cdot 10^{-3}$ кг·м^2).

14. Два однородных тонких стержня: AB длиной l_1 = 40 см и массой m_1 = 900 г и CD длиной l_2 = 40 см и массой m_2 = 400 г скреплены под прямым углом (рис. 4.7). Определить момент инерции J системы стержней относительно оси OO', проходящей через конец стержня AB параллельно стержню CD. (Ответ: 0,114 кг·м^2).

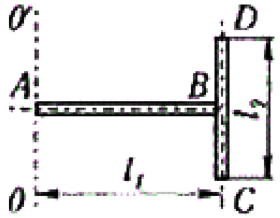


Рис. 4.7

15. Проволочный равносторонний треугольник массой 6 г может вращаться вокруг оси, проходящей через одну из его вершин, параллельно одной из сторон. Найдите момент инерции системы. Сторона треугольника 10 см. (Ответ: 0,25·10^{-3} кг·м^2).

16. Проволочный равносторонний треугольник массой 10 г вращается вокруг одной из своих сторон. Определите момент инерции такой системы. Сторона треугольника 20 см. (Ответ: 3·10^{-3} кг•м^2).

17. Даны четыре одинаковых тела массой m, каждое расположено на плоскости в вершинах квадрата со стороной L. Чему равен момент инерции J этой системы относительно оси, проходящей через одно из тел этой системы перпендикулярно плоскости? (Ответ: $J = 4mL^2$).

18. Система состоит из двух, скрепленных между собой, однородных, взаимно перпендикулярных стержней массами m_1 и m_2 и длиной l_1 и l_2 (рис. 4.8). Найти момент инерции системы относительно оси, проходящей через точку O и перпендикулярной плоскости системы. (Ответ: $J = l_1^2\left({}^1\!/_3\, m_1 + m_2\right) + m_2 l_2^2/_3$).

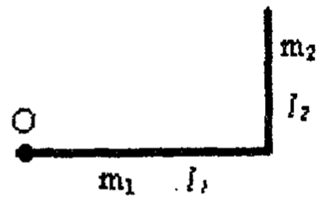


Рис. 4.8

19. Дан квадратный каркас стороной a. Найти момент инерции, если вращать каркас вокруг одной из сторон. Линейная плотность распределения массы τ. (Ответ: $J = \tau a^2\left(\frac{2}{3} + \frac{l}{4}\right)$).

20. Выведите формулу для момента инерции муфты массой m, внешним радиусом R и внутренним радиусом r. (Ответ: $J = {}^1\!/_2\, m(R^2 + r^2)$).

21. Найти момент инерции сплошного цилиндра, длиной l, относительно перпендикулярной к его продольной геометрической оси, проходящей через одно из оснований. (Ответ: $J = {}^1\!/_3\, ml^2 + {}^1\!/_4\, mR^2$).

22. Монета массой m и радиусом r, вращаясь в горизонтальной плоскости вокруг своей оси, с угловой скоростью ω падает на диск и прилипает к нему. В результате диск приходит во вращение вокруг собственной оси. Момент инерции диска J_0. Расстояние между осями диска и мо-

неты d. Найти момент инерции системы относительно оси диска. (Ответ: $J = J_0 + m(d^2 + {r^2}/{2})$).

23. Однородный диск радиусом 0,2 м и массой 1 кг вращается вокруг оси, проходящей через его центр и перпендикулярной к его плоскости. Зависимость угловой скорости вращения от времени задается уравнением $\omega = 5 + 4t$. Найти момент инерции, касательную силу, приложенную к ободу диска. (Ответ: 0,02 кг·м^2; 0,4 Н).

24. Однородный стержень вращается вокруг горизонтальной оси, проходящей через его центр с некоторой угловой скоростью. Как изменится момент инерции стержня и его угловое ускорение, если стержень заставить вращаться тем же моментом сил, но вокруг оси проходящей через его конец? (Ответ: увеличится в 4 раза; уменьшится в 4 раза).

25. Четыре маленьких шарика закреплены в углах каркаса, образующего квадрат. Найдите момент инерции такой системы, если ее вращать вокруг одной из сторон квадрата. Сторона квадрата 1 м (считать массу каркаса бесконечно малой, массы шариков 0,5 кг). (Ответ: 2 кг·м^2).

26.* С крыши скатывается сплошной цилиндр. На каком расстоянии от стены дома упадет он на землю, если высота стены равна 8 м, угол наклона крыши 45° и цилиндр проходит по крыше путь 6 м? (Ответ: 6,6 м).

27.* Найти момент инерции однородного сплошного конуса. (Ответ: $J = {3}/{10}\, mr^2$).

28.* В однородном диске массой 1 кг и радиусом $R = 0{,}5$ м вырезано круглое отверстие диаметром $d = 10$ см. Центр отверстия находится на расстоянии $l = 30$ см от центра диска. Найти момент инерции такого тела. (Ответ: $J = {m}/{2}\left[R^2 - {d^2}/{2R^2}\left({d^2}/{8} + l^2\right)\right]$, $J = 0{,}124$ кг · м^2).

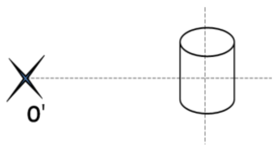


Рис. 4.9

29.* Цилиндр массой m и диаметром d вращается вокруг оси O' (рис. 4.9), находящейся на расстоянии r. Найти момент инерции цилиндра и сравнить его с моментом инерции этого цилиндра вокруг собственной оси. (Ответ: $\frac{md^2}{3} + md(r + d)$).

30.* Плотность цилиндра длины 0,1 м и радиуса 0,05 м изменяется с расстоянием от оси линейно от значения ρ_1 = 500 кг/м^3 до ρ_2 = 2000 кг/м^3. Найти момент инерции цилиндра относительно оси и сравнить его с моментом инерции однородного цилиндра такой же массы и размеров. (Ответ: $J = {13}/{10}\, \rho_1 l \pi R^4 = 1{,}3 \cdot 10^{-3}$ кг · м^2; момент инерции однородного цилиндра меньше в 1,114 раза).

4.2. Основной закон динамики вращательного движения

4.2.1. Основные формулы

◊ Основное уравнение динамики вращательного движения:

$$\vec{M}dt = d(J\vec{\omega}),$$

где M – момент силы; J – момент инерции тела; ω – угловая скорость.

В случае постоянного момента силы и момента инерции выражение будет иметь вид:

$$\vec{M} = J\frac{\Delta\vec{\omega}}{\Delta t}, \quad (3)$$

где $\frac{\Delta\vec{\omega}}{\Delta t}$ – изменение углового ускорения тела за единицу времени (угловое ускорение $\vec{\varepsilon}$).

◊ Момент силы относительно оси вращения:

$$\vec{M} = [\vec{F}\vec{r}];$$

$$M = Frsin\alpha,$$

где $\vec{F}$ – сила, действующая на точку A; r – радиус-вектор точки A.

$$M = Fl, \quad (4)$$

где l – плечо силы.

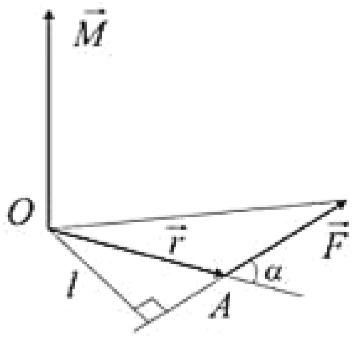


Рис. 4.10

4.2.2. Примеры решения задач

Пример 1. Через блок, представляющий собой сплошной диск радиусом R, перекинута нить. На нити подвешены грузы m_1 и m_2, причем $m_2 > m_1$. Масса блока m. Определите разность сил натяжений нити и ускорение, с которым движется система.

Дано: R, m_1 и m_2, m. Найти: $(T_2 - T_1)$ – ? a – ?

Решение. Вращение блока обеспечивает разность сил натяжений нити (рис. 4.11). По 3-му закону Ньютона, сила, возникающая в одном конце нити T_1, способствует появлению силы, равной ей по модулю и противоположной по направлению, силы, возникающей в другой части нити: T_1'. Поэтому названные силы равны по модулю и противоположны по направлению:

$$|\vec{T}_1| = |\vec{T}_1'| \text{ и } |\vec{T}_2| = |\vec{T}_2'|.$$

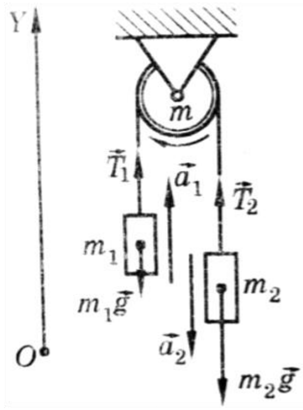


Рис. 4.11

Момент сил, обеспечивающий вращение блока, запишем, используя формулу (2): $M = -(T_2' - T_1')R$. Знак «–» записываем с учетом того, что сила $T_2' - T_1'$ направлена против оси OY (рис. 4.11).

С другой стороны, момент силы можно записать, используя основной закон вращательного движения (3):

$$M = J\varepsilon \text{ или } -(T_2' - T_1')R = J\varepsilon,$$

где угловое ускорение ε можно связать с линейным ускорением a:

$$\varepsilon = \frac{a}{R}.$$

а момент инерции диска J запишем с учетом табличного выражения (подразд. 4.1): (знак «–» в левой части появляется, потому что касательное ускорение блока направлено против оси OY):

$$-(T_2' - T_1')R = -\frac{mR^2}{2}\frac{a}{R},$$

или с учетом того, что $|\vec{T}_1| = |\vec{T}_1'|$ и $|\vec{T}_2| = |\vec{T}_2'|$, имеем

$$(T_2 - T_1)R = \frac{mRa}{2}$$

или

$$(T_2 - T_1) = \frac{ma}{2}.$$

Таким образом, для того чтобы найти разность сил натяжений нити, необходимо найти ускорение, с которым движется блок. Поскольку ускорение грузов и блока одинаковы (так как сообщаются одной и той же силой всей системе), то запишем 2-й закон Ньютона для грузов:

$$\begin{cases} m_1\vec{a} = \vec{T}_1 + m_1\vec{g} \\ m_2\vec{a} = \vec{T}_2 + m_2\vec{g}. \end{cases}$$

С учетом проекций на ось OY и уравнения движения блока имеем общее уравнение движения системы:

$$\begin{cases} m_1 a = T_1 - m_1 g \\ -m_2 a = T_2 - m_2 g \\ (T_2 - T_1) = \dfrac{ma}{2}. \end{cases}$$

Вычтем из второго уравнения системы первое и перенесем в левую часть разность сил натяжений нити

$$\begin{cases} (T_2 - T_1) = m_2 g - m_1 g - m_2 a - m_1 a \\ (T_2 - T_1) = \dfrac{ma}{2}. \end{cases}$$

Приравняв правые части уравнений, выразим a:

$$a = \frac{(m_2 - m_1)g}{(m_1 + m_2 + {}^{m}/_{2})}.$$

Разницу сил натяжений нити, можно выразить как

$$(T_2 - T_1) = \frac{m}{2}\left[\frac{(m_2 - m_1)g}{(m_1 + m_2 + {}^{m}/_{2})}\right].$$

Пример 2. К ободу колеса радиусом 0,7 м и массой 100 кг приложена касательная сила F = 100 Н. Найти угловое ускорение ε колеса. Через какое время после начала действия силы колесо будет иметь частоту вращения 100 об/с (колесо считать однородным диском, трением пренебречь)?

Дано: R = 0,7 м; F = 100 Н; m = 100 кг; n = 100 об/с. Найти: ε – ? t – ?

Решение. Колесо вращается, поскольку к ободу приложена касательная сила, которая сообщает момент $M = FR,$ где R – плечо силы, в данном случае радиус колеса.

С другой стороны, момент вращающей силы можно расписать через основной закон вращательного движения (3):

$$M = J\varepsilon,$$

где J – момент инерции колеса.

Приравняв правые части выражений и расписав момент инерции по формуле (табл. 4.1), получаем

$$J\varepsilon = FR;$$
$$mR^2\varepsilon = FR;$$
$$\varepsilon = \frac{F}{mR}.$$

Проверим полученное выражение по единицам измерения

$$[\varepsilon] = \frac{\text{Н}}{\text{кг м}} = \frac{\text{кг м}}{\text{с}^2\text{кг м}} = {}^{1}\!/_{\text{с}^2}.$$

Выражение для времени t найдем, используя формулу связи углового ускорения и угловой скорости ω. Учтем, что в начальный момент времени колесо не вращалось, т.е $\omega_0 = 0,$ а через некоторый момент времени t достигло частоты вращения 100 об/с:

$$\varepsilon = \frac{\omega - \omega_0}{t} = \frac{\omega}{t} = \frac{2\pi n}{t}$$

или

$$t = \frac{2\pi n}{\varepsilon} = \frac{2\pi n m R}{F}.$$

Рассчитав значения, получим

$$\varepsilon = \frac{100}{100 \bullet 0{,}7} \approx \frac{1.4\text{рад}}{\text{с}^2}; \;\; t = \frac{2\pi 100}{1{,}4} = 448{,}6\ \text{с} \approx 7{,}4\ \text{мин}.$$

Пример 3. Сплошной цилиндр радиуса R и массой m скатывается с наклонной плоскости с углом α (рис. 4.12). Определить ускорение центра масс цилиндра и силу трения.

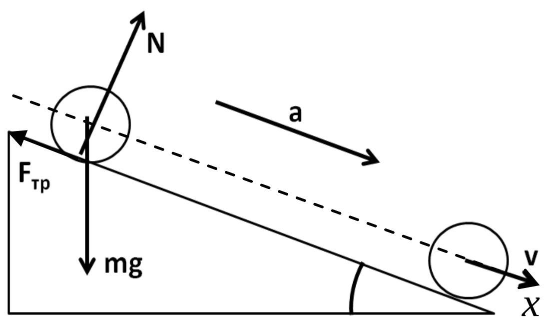


Рис. 4.12

Дано: R, m, α. Найти: a – ? $F_{тр}$ – ?

Решение. Используя законы динамики, запишем уравнение движения центра масс цилиндра

$$m\vec{a} = \vec{F}_{\text{тр}} + m\vec{g} + \vec{N}.$$

С учетом проекции данного уравнения на ось *OX* получаем:

$$ma = mgsin\alpha - F_{\text{тр}},$$

где $F_{\text{тр}}$ – сила сцепления с наклонной плоскостью. Момент этой силы и сообщает вращательное движение цилиндра, относительно центра масс. Запишем уравнение основного закона вращательного движения

$$M_{\text{тр}} = J\varepsilon.$$

Представив момент силы трения с помощью формулы (4), а также расписав момент инерции сплошного цилиндра относительно центра масс (табл. 4.1), получаем

$$F_{\text{тр}}R = \frac{mR^2}{2}\frac{a}{R}$$

или

$$F_{\text{тр}} = \frac{ma}{2}.$$

Полученное выражение для силы трения, подставим в уравнение движения центра масс цилиндра:

$$ma = mgsin\alpha - \frac{ma}{2}.$$

Решив данное уравнение относительно a, получаем

$$a = \frac{2}{3}gsin\alpha.$$

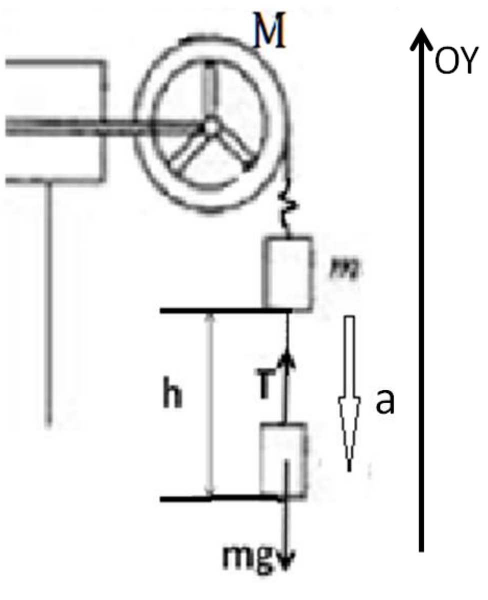


Рис. 4.13

Пример 4. Блок в виде сплошного цилиндра массой M и радиусом r укреплен на горизонтальной поверхности стола (см. рис. 4.13). К концу нити, обвитой вокруг цилиндра, привязан брусок массой m. Брусок удерживают на некоторой высоте. Далее брусок перестают держать, и он свободно падает, проходя некоторое расстояние h, после чего блок начинает вращаться. Пренебрегая массой нити, найти, с какой угловой скоростью вращается блок.

Дано: M, r, m, h. Найти: ω – ?

Решение. Когда груз свободно летит с высоты h, блок находится в состоянии покоя, поскольку отсутствует сила, которая бы вызывала вращение блока. Как только брусок натягивает нить, появляется сила натяжения, которая сообщает момент силы, вращающий блок. Поскольку угловая скорость вращения входит в основное уравнение вращательного движения, запишем его $M = J\varepsilon$, с учетом создаваемого силой натяжения момента сил $M = Tr$, получаем

$$Tr = J\varepsilon.$$

Зная взаимосвязь углового ускорения и угловой скорости, выразим из полученного уравнения силу натяжения:

$$T = \frac{J\varepsilon}{r} = \frac{J\omega}{rt}. \qquad (5)$$

С другой стороны, силу натяжения можно выразить, используя второй закон Ньютона для поступательного движения. С учетом проекций на ось OY (рис. 4.13) запишем

$$T - mg = -ma$$

или

$$T = mg - ma,$$

где a – ускорение, с которым начинает движение нить с грузом, в завершающей точке падения. Линейное ускорение a связано с угловым ускорением соотношением $a = \varepsilon r,$ угловое ускорение можно связать с угловой скоростью через выражение $\varepsilon = {}^{\omega}/_{t}$, где t – время падения груза. Сведем приведенные выше выражения в уравнение движения груза:

$$T = mg - m\frac{\omega r}{t}.$$

Подставив в формулу силы натяжения (5) и выразив угловую скорость ω, получаем

$$\frac{J\omega}{rt} = mg - m\frac{\omega r}{t};$$

$$\omega = \frac{mgt}{({}^{J}/_{r}) + mr}.$$

Определим момент инерции сплошного цилиндра по формуле из табл. 4.1, а время свободного падения через законы кинематики:

$$h = \frac{gt^2}{2}, \ \ t = \sqrt{\frac{2h}{g}},$$

получим

$$\omega = \frac{2m\sqrt{2gh}}{r(M+2m)}.$$

4.2.3. Задачи для самостоятельного решения

1. К ободу однородного диска радиусом 0,2 м приложена касательная сила F = 98,1 Н. При вращении на диск действует момент сил трения $M_{тр}$ = 4,9 Н·м. Найти массу m диска, если известно, что диск вращается с угловым ускорением ε = 100 рад/с^2. (Ответ: 9,81 кг).

2. Однородный стержень длиной 1 м и массой 0,5 кг вращается в вертикальной плоскости вокруг горизонтальной оси, проходящей через

середину стержня. С каким угловым ускорением ε вращается стержень, если на него действует момент сил M = 100 мН·м? (Ответ: 2,4 рад/с^2).

3. Однородный диск радиусом 0,2 м и массой 5 кг вращается вокруг оси, проходящей через его центр перпендикулярно к его плоскости. Зависимость угловой скорости ω вращения диска от времени t дается уравнением $\omega(t) = A + Bt$, где B = 8 рад/с^2. Найти касательную силу F, приложенную к ободу диска (трением пренебречь). (Ответ: 4 Н).

4. Маховик, момент инерции которого 63,6 кг·м^2, вращается с угловой скоростью ω = 31,4 рад/с. Найти момент сил торможения M, под действием которого маховик останавливается через время t = 20 с. Маховик считать однородным диском. (Ответ: $M \approx 100$ Н·м).

5. Маховик радиусом 0,2 м и массой 10 кг соединен с мотором при помощи приводного ремня. Сила натяжения ремня, идущего без скольжения, T = 20 Н. Какую частоту вращения будет иметь маховик через время 10 с после начала движения? Маховик считать однородным диском (трением пренебречь). (Ответ: 31,8 об/с).

6. Маховое колесо, момент инерции которого 245 кг·м^2, вращается с частотой 20 об/с. Через 1 мин после того, как на колесо перестал действовать момент силы M, оно остановилось. Найти момент силы трения $M_{тр}$ и число оборотов N, которое сделало колесо до полной остановки после прекращения действия сил. Колесо считать однородным диском. (Ответ: 512,9 Н·м; 600 об.).

7. Две гири с массами m_1 = 2 кг и m_2 = 1 кг соединены нитью, перекинутой через блок массой M = 1 кг. Найти ускорение a, с которым движутся гири, и силы натяжения нитей, к которым подвешены гири (блок считать однородным диском, трением пренебречь). (Ответ: 2,8 м/с^2).

8. На барабан массой 9 кг намотан шнур, к концу которого привязан груз массой 2 кг. Найти ускорение a груза. Барабан считать однородным цилиндром (трением пренебречь). (Ответ: 3 м/с^2).

9. Доказать, что кинетическая энергия вращательного движения имеет выражение

$$E_k = \frac{J\omega^2}{2}.$$

10. Колесо, вращаясь равнозамедленно, уменьшило за время 1 мин частоту вращения от 300 до 180 об/мин. Момент инерции колеса J = 2 кг·м^2. Найти угловое ускорение ε колеса, момент сил торможения M, работу A сил торможения и число оборотов N, сделанных колесом за время t = 1 мин. (Ответ: 0,2 рад/с^2; 0,4 Н·м; 394 Дж; 242 об.).

11. Маховое колесо, момент инерции которого 245 кг·м^2, вращается с частотой 20 об/с. После того, как на колесо перестал действовать вращающий момент, оно остановилось, сделав 1000 об. Найти момент силы

трения $M_{тр}$ и время, прошедшее от момента прекращения действия вращающего момента до остановки колеса. (Ответ: 307 Н·м; 100 с).

12. Через блок переброшена нить, и на ее концах подвешены гири 1 кг и 2 кг. Определить момент инерции блока, если натяжение нити со стороны меньшей гири 1,3 Н, а радиус блока 5 см? (Ответ: $5{,}8 \cdot 10^{-5}$ кг·м^2).

13. Колесо катится без скольжения по горизонтальной поверхности со скоростью 2 м/с. Масса колеса 2 кг. На каком расстоянии можно его затормозить, приложив к ободу силу в 1 Н? (Ответ: 80 см).

14. Алюминиевый шар радиусом 5 см скатывается без проскальзывания с наклонной плоскости, находящейся под углом 30°. Определить ускорение центра масс шара и силу трения. (Ответ: 3,5м/с^2).

15. Полый и сплошной цилиндр скатываются с наклонной плоскости, находящейся под углом к горизонту. Во сколько раз отличаются ускорения, сплошного и полого цилиндров, которые они приобретают при скатывании? Зависит ли ускорение от радиуса цилиндра, его массы, угла наклона? (Ответ: в 1,3 раза ускорение сплошного больше ускорения полого цилиндра).

16. Неподвижный блок укреплен на торце стола (рис. 4.14). Через него перекинута нить, к одному концу которого подвешен груз массой m_1 = 2 кг, к другому присоединен груз массой m_2 = 1 кг. Вся система приводится в движение, под действием веса первого груза. Найти ускорение, с которым движется система. Коэффициент трения второго груза о стол 0,1, масса блока m = 1 кг. (Ответ: 5,32 м/с^2).

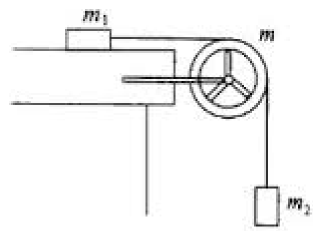


Рис. 4.14

17. Один конец веревки намотан на сплошной цилиндр. Другой конец закреплен на некоторой высоте так, что цилиндр может свободно вращаться, опускаясь вниз. Найти, с каким ускорением цилиндр опускается вниз и силу натяжения нити в этом случае (принять массу цилиндра 1 кг). (Ответ: v_1 = 2,74 м/с при массе муфты 50 г).

18. Шар радиусом 10 см вращается вокруг оси симметрии согласно уравнению $\varphi = A + Bt^2 + Ct^3$, где $B = 2$ рад/с^2 и $C = -1$ рад/с^3. Определите момент сил для 3 с. (Ответ: $-0{,}28$ Н · м).

19. Маховик в виде сплошного диска, момент инерции которого 200 кг · м^2 вращается с частотой 300 об/мин. Через 1,5 мин он остановился под действием сил торможения. Определите момент сил торможения, полное число оборотов маховика от начала торможения до остановки. (Ответ: 70 Н · м, 450 об.).

20. К ободу однородного диска радиусом 0,5 м приложена постоянная касательная сила 100 Н. При вращении диска действует момент сил

торможения $M = 5\ \text{Н} \cdot \text{м}$. Найдите массу диска, если известно, что диск вращается с постоянным угловым ускорением 10 $\text{рад}/\text{с}^2$. (Ответ: 12 кг).

21. Шар скатывается без скольжения с наклонной плоскости, которая образует угол α с горизонтом. Найдите линейное ускорение шара. (Ответ: $a = {}^5\!/_7\, g sin\alpha$).

22. Чему равно отношение скорости центра масс цилиндра, скатывающегося без проскальзывания, в нижней точки наклонной плоскости к его скорости в этой же точке в случае чистого скольжения? (Ответ: $\sqrt{{}^2\!/_3}$).

23. К маховику с моментом инерции J, вращающемуся с угловой скоростью ω_1, приложили тормозную колодку. Через некоторое время угловая скорость маховика уменьшилась до ω_2. Какая энергия выделилась за это время в виде теплоты? (Ответ: $Q = {}^{J(\omega_1^2 - \omega_2^2)}\!/_2$).

24. Найти линейные скорости движения центров диска, обруча и шара, скатывающихся без скольжения с наклонной плоскости. Начальную скорость принять равной нулю. Произведите расчет скорости у основания с учетом коэффициента трения. Сравните найденные значения скорости со скоростью скатывающегося тела без учета трения. Сделайте вывод. (Ответ: $v = \sqrt{{}^{2mgh}\!/_{m + \frac{J}{R^2}}}$).

25. Монета массой m и радиусом r, вращаясь в горизонтальной плоскости вокруг своей оси, с угловой скоростью ω падает на диск и прилипает к нему. В результате диск приходит во вращение вокруг собственной оси. Момент инерции диска J_0. Возникающий при этом момент силы трения постоянен и равен M_0. Расстояние между осями диска и монеты d. Через какое время диск остановится? Какое количество оборотов диска до полной остановки? (Ответ: $t = {}^{mr^2\omega}\!/_{2M_0}$; $N = {}^{M_0 t^2}\!/_{2J}$).

26.* Два цилиндра сплошной (алюминиевый) и полый (свинцовый) находятся на вершине наклонной плоскости. Как будет отличаться время скатывания цилиндров с наклонной плоскости без проскальзывания? (Ответ: $t_1 = {}^1\!/_{sin\alpha}\sqrt{{}^{3h}\!/_g}$; $t_2 = {}^1\!/_{sin\alpha}\sqrt{\frac{2h}{g}(1 + \frac{2\rho_2 - \rho_1}{2\rho_2}}$).

27.* Однородный полый цилиндр радиуса R раскрутили вокруг его оси до угловой скорости ω_0 и поместили затем в угол. Коэффициент трения между стенками угла и цилиндра равен μ. Через какое время цилиндр остановится? (Ответ: $t = \frac{(1+\mu^2)\omega_0 R}{8\pi\mu(1+\mu)g}$).

28.* Цилиндр массой M катится по горизонтальной поверхности стола. Обвитая вокруг цилиндра нить горизонтально проходит через неподвижный блок, к другому концу нити подвешен груз массой m. Пренебрегая массами блока и нити, найти ускорение центра масс цилиндра. (Ответ: для сплошного цилиндра $a = {}^{4mg}/_{(3M+4m)}$).

29.* Гимнаст на перекладине выполняет большой оборот из стойки на руках так, что он вращается вокруг нее, не сгибаясь под действием собственного веса. Найти наибольшую нагрузку на его руку. Трением ладоней о перекладину пренебречь. (Ответ: $T = mg\left(1 + {}^{4l^2m}/_{J}\right)$, где l – расстояние между осью вращения и центром масс цилиндра).

30.* Сплошному однородному цилиндру массы m и радиуса R сообщили вращение вокруг его оси с угловой скоростью ω, затем положили на горизонтальную плоскость. Найти: а) время, в течение которого движение будет со скольжением; б) сколько оборотов сделает цилиндр до полной остановки, если его поставить вертикально? Коэффициент трения равен μ. (Ответ: $t = {}^{\omega R}/_{3\mu g}$; $N = {}^{3\pi r\omega^2}/_{4\mu g}$).

4.3. Закон сохранения момента импульса

4.3.1. Основные формулы

◊ Момент импульса точки

$$\vec{L} = [\vec{r}\vec{p}] = [\vec{r}m\vec{v}],$$

где r – радиус-вектор точки A (рис. 4.15); $\vec{p} = m\vec{v}$ – импульс точки A.

Момент импульса тела, закрепленного в точке O, и его угловая скорость совпадают по направлению и связаны соотношением

$$\vec{L} = J\vec{\omega},$$

где J – момент инерции тела относительно главной оси.

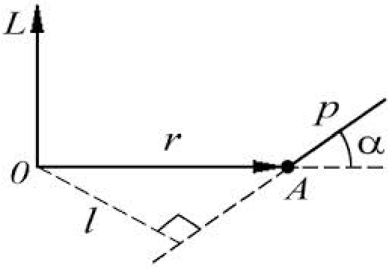


Рис. 4.15

◊ Закон сохранения момента импульса.

Из законов Ньютона следует, что

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}^{\text{внеш}}.$$

Изменение момента импульса системы с течением времени $\frac{d\vec{L}}{dt}$ обусловлено действием момента внешних сил $\vec{M}^{\text{внеш}}$. Если система замкнутая, имеем

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = 0, \text{или } \sum_{i=1}^{n} \vec{L} = const,$$

где $\sum_{i=1}^{n} \vec{L} -$ сумма моментов импульсов механической системы относительно главной оси.

Для двух тел механической системы, можно записать

$$J_1\omega_1 + J_2\omega_2 = J_1'\omega_1' + J_2'\omega_2',$$

где $J_1, \omega_1, J_1', \omega_1'$ – момент инерции и угловое ускорение первого тела до и после взаимодействия соответственно; $J_2, \omega_2, J_2', \omega_2'$ – момент инерции и угловое ускорение второго тела до и после взаимодействия соответственно.

Для одного тела, с изменяющимся моментом инерции, закон сохранения момента импульса запишется

$$J_1\omega_1 = J_2\omega_2.$$

4.3.2. Примеры решения задач

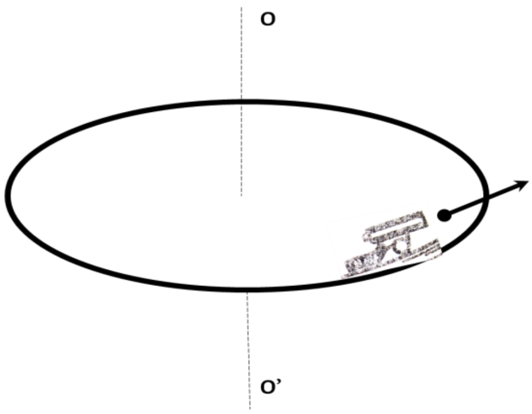


Рис. 4.16

Пример 1. На краю горизонтальной платформы массой m и радиусом R, которая может свободно вращаться относительно оси OO', закреплена небольшая пушка (рис. 4.16). Платформа покоится. Из пушки производится выстрел. Снаряд летит по касательной к краю платформы со скоростью ν. Масса снаряда m_c, масса пушки $m_{\text{п}}$. Определить угловую скорость платформы после выстрела (пушку и снаряд рассматривать как материальные точки).

Дано: R, m, m_c, m_n, v. Найти: ω – ?

Решение. До выстрела момент внешних сил, действующих на пушку и на платформу, равен нулю. Он равен нулю и после выстрела, так как при выстреле действуют лишь внутренние силы, суммарный момент которых равен нулю. Вследствие этого суммарный момент импульса пушки и платформы остается неизменным. Это означает, что момент импульса, которым обладал снаряд, равен по модулю и противоположен по знаку моменту импульса платформы и пушки.

Момент импульса снаряда

$$L_c = m_c v R.$$

Момент импульса платформы и пушки состоит из двух частей: момента импульса пушки $L_п = J_п\omega = m_п R^2\omega$ и момента импульса платформы $L_{пл} = J_{пл}\omega = \frac{1}{2}mR^2\omega$ (здесь принято, что платформа имеет форму диска, поэтому момент инерции $\frac{1}{2}mR^2$).

По закону сохранения момента импульса получаем

$$m_c vR = m_п R^2\omega + \frac{1}{2}mR^2\omega;$$

$$\omega = \frac{m_c v}{(m_п + {}^m/_2)R}.$$

Пример 2. Круглая платформа в виде сплошного диска может свободно вращаться вокруг оси. На платформе стоит человек. Суммарный момент инерции платформы и человека 10 кг·м^2. Человек ловит мяч, летящий со скоростью 25 м/с на расстоянии 80 см от центра платформы. Масса мяча 400 г. С какой угловой скоростью начнет вращаться платформа и почему?

Дано: $J = 10$ кг $\cdot$ м^2 , $v = 25$ м/с; $r = 80$ cм; $M = 0{,}4$ кг. Найти: ω – ?

Решение. До того, как человек поймал мяч, момент импульса платформы $L_1 = 0$. Момент импульса мяча, относительно оси платформы $L_2 = mvr$. После того, как человек ловит мяч, его момент импульса меняется $L_2{}' = mr^2$. Момент импульса платформы с человеком также меняется, поскольку скорость движения мяча уменьшается до нуля, а по закону сохранения момента импульса суммарный момент импульса мяча и платформы с человеком не может меняться. Поэтому $L_1{}' = J\omega,$ где J – момент инерции платформы и человека.

По закону сохранения момента импульса замкнутой системы (мяч – платформа) имеем

$$mvr = (J + mr^2)\omega;$$

$$\omega = \frac{mvr}{J + mr^2} = \frac{0{,}4 \cdot 25 \cdot 0{,}8}{10 + 0{,}4 \cdot 0{,}8^2} \approx 0{,}8 \text{ Гц}.$$

Пример 3. Гладкий однородный стержень AB массы M и длины l свободно вращается с угловой скоростью ω_0 в горизонтальной плоскости вокруг неподвижной вертикальной оси, проходящей через его конец A. Из точки A начинает скользить по стержню небольшая муфта массой m. Найдите скорость муфты v_1 относительно стержня в тот момент, когда она достигнет его конца B.

Дано: M, m, l, ω_0. Найти: v_1 – ?

Решение. Из рис. 4.17 следует, что общая скорость муфты v относительно земли складывается из двух скоростей, направленных перпендикулярно,

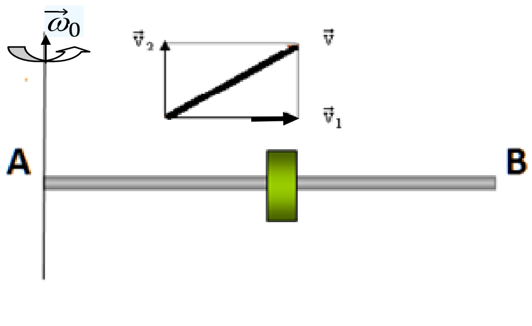


Рис. 4.17

т.е. скорости самой точки B относительно земли v_2 и искомой скорости движения муфты относительно стержня v_1. Тогда, составив уравнение для общей скорости v, выразим v_1:

$$v = \sqrt{{v_1}^2 + {v_2}^2};$$

$$v_1 = \sqrt{v^2 - v_2^2}.$$

Линейную скорость стержня в точке B v_2 можно найти из соотношения

$$v_2 = \omega l,$$

где ω – угловая скорость точки B; l – расстояние от точки B до оси вращения стержня (в данном случае длина стержня). Для того чтобы найти угловую скорость ω, запишем закон сохранения момента импульса (поскольку нам ничего не сказано о действии на систему внешних сил):

$$J\omega_0 = (J + ml^2)\omega,$$

где ml^2 – момент инерции муфты в точке B; J – момент инерции стержня AB относительно оси вращения. Зная момент инерции стержня (табл. 4.1), выразим скорость v_2:

$$v_2 = \frac{J\omega_0}{J+ml^2} l = \frac{M}{M+3m}\omega_0 l.$$

Для того чтобы найти общую скорость муфты v относительно земли, запишем закон сохранения энергии для данной системы. При этом необходимо учесть, что кинетическая энергия вращательного движения стержня перераспределяется между кинетической энергией вращательного движения стержня в точке B и кинетической энергией поступательного движения муфты:

$$\frac{J\omega_0^2}{2} = \frac{J\omega^2}{2} + \frac{mv^2}{2}.$$

Тогда

$$v^2 = \frac{J\omega_0^2 - J\omega^2}{m} = \frac{Ml^2}{3}\left[\omega_0^2 - (\frac{M\omega_0}{M+3m})^2\right].$$

Выразим ${v_1}^2$ из соотношения скоростей ${v_1}^2 = v^2 - {v_2}^2$ и подставим найденные выражения для v_2 и v в данное уравнение

$${v_1}^2 = \frac{Ml^2}{3}\left[\omega_0^2 - (\frac{M\omega_0}{M+3m})^2\right] - \left[\frac{M}{M+3m}\omega_0 l\right]^2 =$$

$$= l^2\omega_0^2\left[\frac{M}{3m}\left(\frac{(M+3m)^2 - M^2}{(M+3m)^2}\right) - \frac{M^2}{(M+3m)^2}\right] =$$

$$= l^2\omega_0^2 \frac{M}{(M+3m)^2}\left[\frac{(M+3m)^2}{3m} - M\right] =$$

$$= l^2\omega_0^2 \frac{M}{(M+3m)^2}\left[\frac{9m^2+3mM}{3m}\right] = l^2\omega_0^2 \frac{M3m}{(M+3m)^2} \cdot \frac{M+3m}{3m}.$$

Сделав нужные сокращения, получим

$$v_1{}^2 = \frac{l^2\omega_0^2 M}{M+3m}$$

или

$$v_1 = l\omega_0\sqrt{\frac{M}{3m+M}}.$$

Пример 4. Человек массой 60 кг стоит на краю горизонтальной платформы массой 240 кг. На какой угол повернется платформа, если человек будет идти вдоль края платформы и сделает полный оборот?

Дано: m = 60 кг; M = 240 кг; $l = 2\pi R$. Найти: φ – ?

Решение. Человек–платформа составляют замкнутую систему. Следовательно, суммарный момент импульса данной системы равен нулю, поскольку внутренние силы не могут его изменить. Первоначально система покоится, поэтому $L_1 = 0$, затем человек начинает двигаться относительно центра платформы с некоторой скоростью $v,$ при этом его момент импульса будет $L_ч = J\omega_ч = mR^2\omega_ч$. Платформа начинает вращаться, ее момент импульса $L_{пл} = J\omega_{пл} = {MR^2}/{2}\cdot\omega_{пл}$. По закону сохранения момента импульса получаем

$$L_1 = L_ч + L_{пл}$$

или

$$0 = mR^2\omega_ч + \frac{MR^2}{2}\omega_{пл}.$$

Связав угловую скорость человека с его линейной скоростью относительно Земли, получим

$$0 = mR^2\left(\frac{v-\omega_{пл}}{R}\right) + \frac{MR^2}{2}\cdot\omega_{пл}.$$

Выразим из данного уравнения угловую скорость, которую приобретает платформа:

$$\omega_{пл} = \frac{mv}{R(m+{M}/{2})}.$$

Далее распишем скорость человека: $v = {2\pi R}/{T}$, где T – время движения человека (период) и учтем, что угол поворота платформы можно представить в виде: $\varphi = \omega_{пл}T$, имеем

$$\varphi = \frac{4\pi m}{M+2m} = \frac{4\pi\cdot 60}{240+2\cdot 60} = \pi = 180°.$$

4.3.3. Задачи для самостоятельного решения

1. Горизонтальная платформа массой 100 кг вращается вокруг вертикальной оси, проходящей через центр платформы, с частотой 10 об/мин. Человек массой m = 60 кг стоит на краю платформы. С какой частотой начнет вращаться платформа, если человек перейдет от края платфор-

мы к ее центру (платформу считать однородным диском, а человека – точечной массой)? (Ответ: 22 об/мин).

2. Горизонтальная платформа массой m = 25 кг и радиусом R = 1 м вращается с частотой 18 мин$^{-1}$. В центре стоит человек и держит в расставленных руках гири. Считая платформу диском, определить частоту вращения платформы, если человек, опустив руки, уменьшит свой момент инерции от 3 кг·м^2 до 1 кг·м^2. (Ответ: 21 об/мин).

3. Горизонтальная платформа массой 250 кг может вращаться вокруг вертикальной оси, проходящей через центр платформы. На краю платформы стоит человек массой 80 кг. С какой частотой начнет вращаться платформа, если человек будет идти вдоль края платформы со скоростью 2 м/с? Считать платформу однородным диском радиусом 2 м, а человека – точечной массой. Почему? (Ответ: 6 об/мин).

4. Однородный стержень длиной $l = 1{,}5$ м подвешен на горизонтальной оси, проходящей через верхний конец стержня. Нижнему концу стержня сообщили некоторую скорость, в результате чего он отклонился на угол 60°. С какой скоростью стержень пройдет положение равновесия? (Ответ: v = 13,3 м/с).

5. Человек массой 60 кг стоит на неподвижной платформе массой 150 кг. С какой частотой будет вращаться платформа, если человек будет идти вдоль края платформы по окружности радиусом 2 м? Скорость движения человека относительно платформы 2 км/ч. Радиус платформы 5 м (платформу считать однородным диском, радиусом 2 м, а человека – точечной массой). (Ответ: 10,7 об/мин).

6. Монета массой 10 г и радиусом 1 см, вращаясь в горизонтальной плоскости вокруг своей оси, с угловой скоростью 2 об/с падает на диск и прилипает к нему. В результате диск приходит во вращение вокруг собственной оси. Момент инерции диска 10^{-3} Н·м. Возникающий при этом момент сил трения постоянен и равен M_0. Найти, через какое время диск остановится, а также количество оборотов диска до полной остановки (Ответ: $t = \dfrac{mr^2\omega}{2M_0}$; $N = \dfrac{m^2r^4\omega^2}{16\pi\left(\dfrac{mr^2}{g} + J_0\right)}$).

7. Два горизонтальных диска свободно вращаются вокруг вертикальной оси, проходящей через их центры. Моменты инерции дисков относительно этой оси равны I_1 и I_2, а угловые скорости – ω_1 и ω_2. После падения верхнего диска на нижний оба диска благодаря трению между ними начали через некоторое время вращаться как единое целое. Найдите установившуюся угловую скорость вращения, работу, которую совершили при этом силы трения. (Ответ: $\vec{\omega} = \frac{J_1\vec{\omega}_1 + J_1\vec{\omega}_1}{J_{об}}$).

8. Шарик массой m, закрепленный на конце нити, движется по окружности на гладкой поверхности стола. Другой конец нити пропущен сквозь отверстие в столе. Первоначально шарик вращается с линейной скоростью $v_1 = 2{,}4$ м/с по окружности радиусом R_1 = 0,8 м. Затем нить начинают очень медленно протягивать сквозь отверстие так, что радиус окружности уменьшается до значения R_2 = 0,48 м. Определите величину скорости шарика в этот момент. (Ответ: 4 м/с).

9. Платформа, имеющая форму сплошного однородного диска, может вращаться по инерции вокруг неподвижной вертикальной оси. На краю платформы стоит человек, масса которого в 3 раза меньше массы платформы. Определить, как и во сколько раз изменится угловая скорость вращения платформы, если человек перейдет ближе к центру на расстояние, равное половине радиуса платформы. (Ответ: увеличится в 1,43 раза).

10. Человек стоит в центре горизонтальной платформы и держит в руках вертикально шест длиной 2 м. Платформа вращается с частотой 1 об/с. Суммарный момент инерции человека и платформы 6 кг·м^2. С какой частотой будет вращаться платформа, если человек повернет шест горизонтально (считать, что человек держит шест за центр масс, силами трения пренебречь)? (Ответ: 0,7 об/с).

11. Однородный стержень длиной 85 см подвешен на горизонтальной оси, проходящей через верхний конец стержня. Какую скорость v надо сообщить нижнему концу стержня, чтобы он сделал полный оборот вокруг оси? (Ответ: 20 м/с).

12. Однородный диск массы M и радиуса R может свободно вращаться вокруг оси O, проходящей через цент диска перпендикулярно его плоскости (рис. 4.18). Пуля массой m, имеющая скорость v_0, попадает в диск и застревает в нем. Найти угловую скорость ω вращения диска вместе с застрявшей в нем пулей. (Ответ: $\omega = n2mv_0/(M+2m)R$).

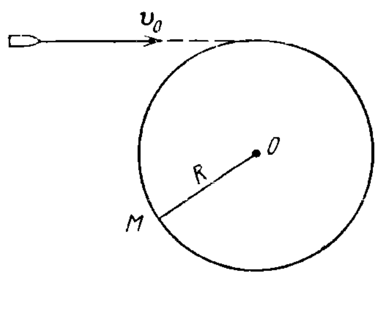


Рис. 4.18

13. Карандаш длиной 15 см, поставленный вертикально, падает на стол. Какую угловую скорость и линейную скорость будут иметь в конце падения середина и верхний конец карандаша? (Ответ: 14 рад/с, 1 м/с, 2 м/с).

14. Горизонтальная платформа массой 50 кг и радиусом 1,5 м вращается с некоторой частотой. В центре платформы стоит человек и держит в расставленных руках гири. Как изменится частота вращения платформы, если человек опустит руки и уменьшит свой момент инерции от 3 до 0,8 кг·м^2? Платформу счи-

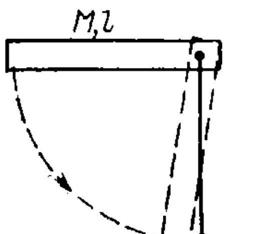


Рис. 4.19

тать однородным диском. (Ответ: увеличится в 1,04 раза).

15. Стержень массы M и длиной l, подвешенный за один из концов, отклонили на угол 90° и отпустили. Вблизи положения равновесия он неупруго соударяется с математическим маятником, массы m и той же длины (рис. 4.19). Определить угловую скорость системы после соударения. (Ответ: $\omega = \sqrt{\dfrac{3g/l}{1 + 3m/M}}$).

16. Найти приращение угловой скорости $\Delta\omega$ планеты вокруг собственной оси, происходящее вследствие падения на ее поверхность метеорита массы m, летящего под углом α к вертикали в плоскости экватора планеты со скоростью v (рис. 4.20) (считать массу планеты M и ее радиус R известными). (Ответ: $\Delta\omega = 5mv sin\alpha/2MR$).

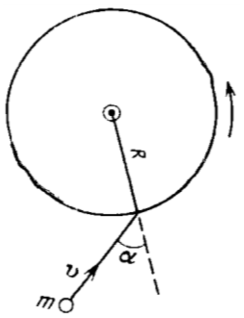


Рис. 13. 4.20

17. Гладкий однородный стержень AB массы 0,5 кг и длины 1 м свободно вращается с угловой скоростью 3 рад/с в горизонтальной плоскости вокруг неподвижной вертикальной оси, проходящей через его конец A. Из точки A начинает скользить по стержню небольшая муфта массы 5 г. Найдите скорость муфты v_1 относительно стержня в тот момент, когда она достигнет его конца B. (Ответ: v_1 = 2,74 м/с при $m_{муфты}$ = 50 г).

18. Обруч массой m и радиуса R вращается вокруг неподвижной оси с угловой скоростью ω, проходящей через центр обруча перпендикулярно его плоскости. Найдите момент импульса обруча. Как изменится момент импульса, если ось вращения перенести параллельно на расстояние равное радиусу обруча от оси вращения? (Ответ: $L = m\omega R^2$).

19. Маховое колесо вращается с постоянным угловым ускорением 0,5 рад/с^2 и через 15 с приобретает момент импульса 73,5 кг·м^2/с. Найти кинетическую энергию колеса через 20 с после начала движения. (Ответ: $E_к$ = 490 Дж).

20. На краю неподвижной скамьи Жуковского диаметром 80 см и массой 6 кг стоит человек массой 60 кг. С какой угловой скоростью начнет вращаться скамья, если человек поймает летящий на него мяч массой 0,5 кг? Траектория мяча горизонтальна и проходит на расстоянии 0,4 м от оси скамьи. Скорость мяча 5 м/с. (Ответ: ω=0,1 рад/с).

21. Однородный стержень длиной $l = 1$ м подвешен на горизонтальной оси, проходящей через верхний конец стержня. Нижнему концу стержня сообщают скорость v = 5 м/с, при этом стержень отклоняется от положения равновесия на угол α. Найти угол отклонения. (Ответ: 81°).

22. Человек стоит в центре горизонтальной платформы массой 100 кг и радиусом 1 м и держит в руках вертикально шест массой 5 кг и длиной

горизонтально 2 м. Платформа вращается с частотой 1 об/мин. С какой частотой будет вращаться платформа, если человек повернет шест вертикально? Считать, что человек держит шест за центр масс. Силами трения пренебречь. (Ответ: 61,02 об/с).

23. Маховое колесо вращается постоянным угловым ускорением 0,5 рад/с^2 и через 15 с приобретает кинетическую энергию 400 Дж. Найти, какой момент импульса приобретает колесо через 30 с движения. (Ответ: 142 кг·м^2/с).

24. Однородный диск массой 1 кг и радиусом R = 50 см может свободно вращаться вокруг горизонтальной оси, перпендикулярной плоскости диска и проходящей через центр диска. В точку, находящуюся на расстоянии 25 см от центра диска, попадает пластилиновый шарик, летящий горизонтально со скоростью 10 м/с, и прилипает к его поверхности. Масса шарика равна 0,1 г. Определить угловую скорость диска после взаимодействия с шаром. (Ответ: 21 об/мин).

25. Человек стоит на скамье Жуковского и держит в руках стержень, расположенный вертикально вдоль оси вращения скамейки. Стержень служит осью вращения колеса, расположенного на верхнем конце стержня. Скамья неподвижна, колесо вращается с частотой 20 с$^{-1}$. Радиус R колеса равен 40 см, его масса m = 3 кг. Определить частоту вращения скамьи, если человек повернет стержень на угол 180°? Суммарный момент инерции человека и скамьи равен 6 кг м^2. Массу колеса можно считать равномерно распределенной по ободу. (Ответ: 3 об/с).

26.* Однородный шар массой m и радиуса R скатывается без скольжения по наклонной плоскости, составляющей угол α с горизонтом. Найти зависимость от времени момента импульса шара, относительно точки касания в начальный момент времени. (Ответ: $L = Rmtgsin\alpha$).

27.* Однородный стержень длиной 0,5 м совершает малые колебания около горизонтальной оси в вертикальной плоскости. Найти период колебаний. (Ответ: T = 1,16 с).

28.* Обруч диаметром 1 м висит на гвозде, вбитом в стенку, и совершает колебания в плоскости параллельной стене. Найти период колебаний. (Ответ: T = 1,5 с).

29.* Дрессированная собака впрыгнула на опрокинутую бочку (без дна), массой m и радиусом R и побежала так, что все время оставалась в верхней точке бочки, сообщая ей ускорение ε_0. С каким моментом сил относительно мгновенной оси вращения собака действовала на бочку? (Ответ: $M = 2mR\varepsilon_0$).

30.* Платформа в виде однородного горизонтального диска вращается вокруг вертикальной оси, проходящей через его центр с некоторой угловой скоростью ω. Два человека, каждый массой m начинают в момент времени $t = 0$ двигаться по одному из диаметров платформы, с постоянной скоростью v' относительно платформы, в противоположные стороны друг от друга. Как со временем должна меняться мощность двигателя, поддерживающего неизменным частоту вращения? (Ответ: $P = {dT}/{dt} = 2mv'^2\omega^2 t,$ где T – кинетическая энергия системы).

5. ЗАКОНЫ СОХРАНЕНИЯ

5.1. Законы сохранения при поступательном движении

5.1.1. Основные формулы

◊ Закон сохранения импульса в замкнутой системе

$$\vec{p} = \sum_{i=1}^{N} m_i \vec{v}_i = \mathrm{const}, \quad (1)$$

где m_i и $\vec{v}_i$ – соответственно масса и скорость i-го тела; N – число тел.

◊ Работа силы упругости при сжатии пружины

$$A = \frac{kx_1^2}{2} - \frac{kx_2^2}{2}, \quad (2)$$

где k – жесткость пружины; x_1 и x_2 – соответственно начальное и конечное смещение края пружины от положения равновесия.

◊ Потенциальная энергия тела, поднятого на высоту h

$$E_{\text{п}} = \mathrm{m}gh. \quad (3)$$

◊ Потенциальная энергия деформированной пружины

$$E_{\text{п}} = \frac{kx^2}{2}, \quad (4)$$

где x – смещение края пружины от положения равновесия.

◊ Работа консервативных сил при перемещении тела из одного положения в другое

$$A = E_{\text{п}2} - E_{\text{п}1}, \quad (5)$$

где $E_{\text{п}1}$ и $E_{\text{п}2}$ – соответственно начальная и конечная потенциальная энергия тела.

◊ Кинетическая энергия поступательного движения тела

$$E_{\text{к}} = \frac{mv^2}{2} = \frac{p^2}{2m}, \quad (6)$$

где v – скорость центра массы тела, p – импульс тела.

◊ Теорема о кинетической энергии

$$A = \Delta E_{\text{к}}, \tag{7}$$

где A – работа всех сил действующих на тело; $\Delta E_{\text{к}}$ – изменение кинетической энергии тела.

◊ Закон сохранения полной механической энергии в поле действия консервативных сил

$$E = E_{\text{к}} + E_{\text{п}} = \text{const}. \tag{8}$$

◊ Закон сохранения полной механической энергии при наличии сил трения

$$E_2 - E_1 = A_{\text{тр}}, \tag{9}$$

где E_1 и E_2 – соответственно полные начальная и конечная механические энергии тела; $A_{\text{тр}}$ – работа сил трения (всегда отрицательная величина).

Вспомогательные формулы к разделу 5

◊ Импульс ракетного двигателя

$$P = FT, \tag{10}$$

где F – среднее значение тяги (реактивной силы) двигателя; T – общее время его работы.

◊ Тяга ракетного двигателя

$$F = \omega q, \tag{11}$$

где ω – скорость истечения реактивной струи; $q = dm/dt$ – секундный расход массы топлива (рабочего тела).

◊ Приращение скорости ракеты в отсутствии силы тяжести (формула Циолковского)

$$\text{v} = \omega \ln \frac{\text{M}_0}{\text{M}_{\text{к}}} \tag{12}$$

или

$$\text{M}_{\text{к}} = \text{M}_0 e^{-\frac{v}{\omega}}, \tag{13}$$

где ω – скорость истечения реактивной струи; M_0 – начальная; а $\text{M}_{\text{к}}$ – конечная масса ракеты с двигателем.

◊ Элементарная работа силы

$$dA = \vec{F} \cdot d\vec{s} = \left|\vec{F}\right|\left|d\vec{s}\right| \cos\alpha, \tag{14}$$

где $\vec{F}$ – сила; $d\vec{s}$ – элементарное перемещение; α – угол между направлениями силы и элементарного перемещения.

◊ Средняя мощность

$$\langle N \rangle = \Delta A / \Delta t, \quad (15)$$

где ΔA – работа, произведенная за время Δt.

◊ Мгновенная мощность

$$N = dA/dt = \vec{F} \cdot \vec{v} = |\vec{F}||\vec{v}| \cos\alpha, \quad (16)$$

где $\vec{F}$ – сила; $\vec{v}$ – скорость; α – угол между направлениями силы и скорости.

◊ Работа силы тяжести при перемещении тела

$$A = mg(h_1 - h_2), \quad (17)$$

где m – масса тела; g – ускорение свободного падения; h_1 и h_2 – начальная и конечная высота подъема тела соответственно.

◊ Элементарная работа консервативных сил при перемещении тела

$$dA = dE_n = \vec{F} \cdot d\vec{s} = |\vec{F}||d\vec{s}| \cos\alpha, \quad (18)$$

где $E_п$ – потенциальная энергия тела.

◊ Сила трения скольжения

$$F_{тр} = \mu N, \quad (19)$$

где N – сила давления на опорную поверхность; μ – коэффициент трения скольжения пары поверхностей.

5.1.2. Примеры решения задач

Пример 1. На игрушечном автомобиле закреплена пружина с жесткостью 1 Н/м. Масса автомобиля 20 гр. Пружина сжата на 4 см и к ней прижат стальной шарик диаметром 1 см. Какие скорости при отталкивании приобретут шарик и автомобиль (в расчетах силами трения и массой пружины пренебречь, плотность стали принять равной 7800 кг/м^3)?

Дано: $k = 100$ Н/м, $m_1 = 20 \cdot 10^{-3}$ кг; $\Delta x = 4 \cdot 10^{-2}$ м; $d = 1 \cdot 10^{-2}$ м; $\rho = 7{,}8 \cdot 10^3$ кг/м^3 . Найти: v_1, v_2 – ?

Решение. Из условия задачи видно, что при отталкивании потенциальная энергия сжатой пружины в соответствии с законом сохранения механической энергии полностью перейдет в кинетическую энергию тел, поэтому

$$E_к = E_п = m_1 \frac{v_1^2}{2} + m_2 \frac{v_2^2}{2} = k\frac{(\Delta x)^2}{2}.$$

По закону сохранения импульса можно записать

$$p_1 = -p_2 = m_1 v_1 = -m_2 v_2.$$

Объединив два уравнения и подставив $m_2 = \frac{4}{3}\pi\left(\frac{d}{2}\right)^3 \rho$, получаем

$$v_1 = \sqrt{\frac{k(\Delta x)^2}{m_1 + \frac{m_1^2}{\frac{4}{3}\pi\left(\frac{d}{2}\right)^3 \rho}}}, \; v_2 = -\frac{m_1}{m_2} v_1.$$

Подставив числовые данные, получим $v_1 = 13{,}6$ см/с, $v_2 = 66{,}4$ см/с.

Пример 2. Вертикально вверх запущена ракета массой 120 г, имеющая реактивный двигатель с импульсом 22 Нс. На какую максимальную высоту поднимется ракета, если время работы двигателя 2 с, а вес топлива 20 г (в расчетах сопротивлением воздуха пренебречь)?

Дано: $m_1 = 120 \cdot 10^{-3}$ кг; $m_2 = 20 \cdot 10^{-3}$ кг; $P = 22$ Нс; $T_1 = 2$ с. Найти: h – ?

Решение. Из выражений силы тяги реактивного двигателя $F = P/T_1$ и $F = \omega q$ (предполагая, что она постоянна во время его работы) найдем скорость истечения продуктов сгорания в реактивной струе

$$\omega = \frac{P}{qT_1}.$$

По формуле Циолковского с учетом действия силы тяжести найдем скорость ракеты в момент окончания работы двигателя

$$v_1 = \omega_г \ln\frac{m_1}{m_1 - m_2} - gT_1.$$

За это время при равноускоренном движении ракета поднимется на высоту $h_1 = \frac{v_1 T_1}{2}$.

Оставшееся время подъема ракета летит, замедляясь под действием силы тяжести. Расстояние, пройденное за это время, составит $h_2 = \frac{gT_2^2}{2}$.

Тогда максимальная высота подъема составит $h = h_1 + h_2$.

Подставив числовые данные, получим $h = 403{,}3$ м.

Пример 3. Хоккеист несильно ударил клюшкой по резиновой шайбе диаметром 7,62 см и массой 163 г, находящейся на ровном льду. От удара она набрала скорость 2 м/с. Какое расстояние пройдет по льду шайба, если коэффициент трения пары резина – лед 0,14?

Дано: $m = 163 \cdot 10^{-3}$ кг; $v = 2$ м/с; $\mu = 0{,}14$. Найти: l – ?

Решение. С достаточной точностью можно считать, что сила трения скольжения не зависит от скорости и определяется выражением $F_{тр} = \mu N$, где сила давления на опорную поверхность $N = mg$. Под действием этой силы шайба будет двигаться равнозамедленно с ускорением $a =$

$F_{тр}/m$. Время движения до остановки составит $t = v/a$. За время движения шайба пройдет расстояние $l = \frac{vt}{2}$ или

$$l = \frac{v^2}{\mu g}.$$

Тот же результат можно получить, приравняв работу сил трения – $l \cdot F_{тр}$ и кинетическую энергию шайбы – $m\frac{v^2}{2}$.

Подставив числовые данные в полученное выражение, получим $l = 26{,}3$ м.

Пример 4. Вывести формулу Циолковского $v = \omega \ln \frac{М_0}{М_к}$.

Решение. Формула выводится для случая постоянной скорости истечения реактивной струи ω, при этом сила тяги составит

$$F_т = \omega q,$$

где $q = dm/dt$ – секундный расход массы топлива (рабочего тела).

Элементарное приращение скорости можно записать как

$$dv = \frac{F_т}{m} dt\ .$$

Подставив $F_т$ и q (учитывая, что расход это отрицательное по отношению ко времени изменение массы) запишем

$$dv = \frac{\omega\left(-\frac{dm}{dt}\right)}{m} dt = -\frac{\omega}{m} dm.$$

Интегрируя выражение в диапазоне от начальной $М_0$ до конечной $М_к$ массы ракеты получим

$$v = -\int_{М_0}^{М_к} \frac{\omega}{m} dm = -\omega \ln(m)\Big|_{М_0}^{М_к} = \omega \ln(М_0) - \omega \ln(М_к) = \ \omega \ln \frac{М_0}{М_к},$$

где ω – скорость истечения реактивной струи; $М_0$ – начальная, а $М_к$ – конечная масса ракеты с двигателем.

5.1.3. Задачи для самостоятельного решения

1. С какой скоростью отдачи будет двигаться автомат АК-74 массой 3,6 кг, если скорость вылета пули массой 3,4 г – 880 м/с, масса порохового заряда – 1,45 г, а средняя скорость истечения пороховых газов из ствола – 1275 м/с? Какую энергию приобретает пуля при выстреле? (Ответ: 1,34 м/с; 1316 Дж).

2. Бетонная свая массой 1830 кг забивается в грунт с помощью сваебойного молота массой 3800 кг, совершающего удары с частотой 45 уд/мин. Найти за какое минимальное время сваю забьют глубже 8 м, если при движении сваи грунт в среднем оказывает сопротивление 400 КН, масса ударной части 1800 кг, а высота ее подъема перед уда-

ром 2 м? В расчетах считать удар абсолютно неупругим. (Ответ: 3 мин 28 с).

3. Рабочий забивает гвозди в деревянный пол. Масса молотка 500 г. В момент удара скорость корпуса (стальной ударной части) молотка 2 м/с. При ударе гвоздь углубляется в доску на 2 см. Найти энергию корпуса молотка при ударе, среднее силу сопротивления движению гвоздя и время, за которое оно совершается (массой гвоздя пренебречь). (Ответ: 1 Дж; 50 Н; 20 мс).

4. Пуля массой 3,4 г, летящая горизонтально со скоростью 850 м/с, попадает в деревянный брусок массой 5 кг, находящийся на горизонтальном плоском и ровном деревянном настиле. Найти скорость бруска в момент времени сразу после остановки пули в бруске и расстояние, на которое сместится брусок, если коэффициент трения скольжения пары дерево–дерево равен 0,62. (Ответ: 5,5 см).

5. Школьники запускали модель ракеты вертикально вверх. Готовый реактивный двигатель ракеты имел импульс 5,76 Нс и расчетное время работы 12 с. Масса модели ракеты 34 г. Масса заряда топлива 8 г. Найти максимальную скорость, высоту подъема и время полета ракеты. Рассчитать среднюю скорость истечения продуктов сгорания из сопла двигателя (сопротивлением воздуха пренебречь). (Ответ: 75,4 м/с; 742 м; 32 с).

6. В мешок с песком массой 50 кг, подвешенный на веревке так, что расстояние от центра тяжести мешка до точки подвеса равно 3 м, выстрелили из охотничьего ружья пулей массой 43 г. На какое максимальное расстояние по горизонтали отклонится мешок, если скорость пули в момент попадания была 420 м/с и пуля застряла в мешке. (Ответ: 20 см).

7. Резиновый мяч отпустили падать с высоты 3 м на ровную твердую поверхность. По прошествии какого времени высота отскока мяча окажется меньше 1 м, если при отскоке каждый раз теряется 15 % энергии мяча (для уменьшения объема вычислений для нахождения конечной суммы можно воспользоваться справочной формулой)? (Ответ: 8,36 с).

8. Первый и второй легковые автомобили непосредственно перед лобовым столкновением двигались со скоростями 40 и 90 км/ч соответственно. Масса первого автомобиля 990 кг, масса второго 2250 кг. В процессе деформации от удара центры масс автомобилей сблизились на 2,6 м. Найти ускорение центров масс первого и второго автомобилей, считая их в процессе деформации постоянными. (Ответ: 221,5 м/с^2 или 22,6 g; 29,2 м/с^2 или 3,0 g).

9. Бетоноподатчик подает бетон со скоростью 100 м^3/ч. Какую реактивную тягу создает транспортируемая бетонная смесь, если ее плотность 2,2 т/м^3, а диаметр подающей трубы 80 мм? (Ответ: 337 Н).

10. Ручной пожарный ствол КР-Б имеет диаметр насадки (выходное сопло) 19 мм, и позволяет пропускать расход воды 7,4 л/с. Какую реактивную силу (тягу) создает поток воды, проходящий через насадку? Груз какой массой создает такую же силу тяжести? (Ответ: 193,1 Н; 19,7 кг).

11. Четырехцилиндровый двигатель легкового автомобиля с рабочим объемом цилиндров 1998 см^3 обеспечивает мощность 140 кВт при вращении коленчатого вала с частотой 5800 об/мин. Найти среднее давление при сгорании топливной смеси в цилиндрах. (Ответ: 25 кПа).

12. За какое время автомобиль с передними ведущими колесами и массой 1049 кг проедет расстояние 100 м по сухому асфальту, если его начальная скорость равна нулю, а мощность двигателя 88 кВт (в расчетах коэффициенты трения покоя и трения скольжения принять равными 0,95, потерями в трансмиссии и трения качения пренебречь, вес машины считать равномерно распределенным по колесам)? (Ответ: 6,65 с).

13. Водитель полноприводного автомобиля массой 2100 кг и мощностью двигателя 131 кВт в нарушении правил выехал на перекресток, на красный сигнал светофора. Перед этим автомобиль стоял у стоп-линии, а водитель-нарушитель полностью нажал педаль газа. Через две секунды после начала движения водитель заметил, что на перекресток выехал другой автомобиль и нажал на тормоз. Произойдет ли авария, если расстояние от стоп линии до борта другого автомобиля 19,5 м (в расчетах принять коэффициенты трения покоя и трения скольжения равными 0,71, трением качения и потерями в трансмиссии пренебречь)? Указать: если да – то сколько тормозного пути не хватило; если нет – какое расстояние было между автомобилями при остановке автомобиля нарушителя ПДД. (Ответ: да, 1,21 м).

14. Два стальных шара диаметрами 1 см и 2 см подвешены на нитях длиной 50 см. Расстояние по горизонтали между точками подвеса шаров равно сумме их радиусов. Первый шар был отклонен так, что угол между его нитью и вертикалью составил 30 градусов, а затем отпущен. Найти максимальный угол, на который отклонится нить второго шара и кинетические энергии первого и второго шара сразу после удара (удар шаров считать абсолютно упругим). (Ответ: 23,2 градуса; 1,63 мДж; 1,07 мДж).

15. Два свинцовых шара диаметрами 10 см и 20 см подвешены на прочных легких веревках длиной 10 м. Шары были отклонены в разные стороны так, что угол между вертикалью и веревками составил 45 градусов. Считая удар полностью не упругим, найти, насколько нагреются свинцовые шары, если теплообменом с окружающей средой пренебречь. Найти скорость и кинетическую энергию шаров после столкновения. Плотность свинца 11340 кг/м^3, теплоемкость 130 Дж/(кг·°С). (Ответ: 0,087 градуса; 5,89 м/с; 928 Дж).

16. Два стальных шара диаметрами 3 см подвешены на нитях длиной 1 м. Шары были разведены в стороны так, что углы отклонения нитей были одинаковы. Найти кинетическую энергию шаров до удара и первоначальный угол отклонения нитей, если в процессе удара рассеялось 10 % энергии шаров, а угол отклонения нитей после отскока составил 20 градусов. В расчетах принять плотность стали 7,8 г/см^2. (Ответ: 72,4 мДж; 21,1 градус).

17. В космической станции космонавт решил быстро пролететь от одной стенки к другой, для этого он с силой в 1/3 своего веса на земле оттолкнулся от первой стенки. Масса космической станции 11 т, масса космонавта 70 кг. Во время этого перелета центр массы тела космонавта сместился относительно станции на 4,5 м. Найти скорость, с которой он летел, и насколько сместилась станция после этого перелета, считая, что при отталкивании путь действия силы был 50 см, а сила действовала только на часть тела космонавта массой 40 кг. (Ответ: 1,37 м/с; 2,8 см).

18. К космической станции массой 11 т пристыковался космический грузовой корабль массой 7 т. Какая энергия выделилась в амортизаторах стыковочного узла, если скорость сближения перед стыковкой была равна 20 см/с? Насколько изменилась скорость космической станции? (Ответ: 7,78 см/с; 85,5 Дж).

19. Во время аварийной стыковки к космической станции массой 11 т пристыковался космический грузовой корабль массой 7 т. Какая энергия выделилась в амортизаторах стыковочного узла, если скорость сближения перед стыковкой была равна 1 м/с? Насколько изменилась скорость космической станции? (Ответ: 38,9 см/с; 2,14 кДж).

20. Во время сближения транспортного космического корабля массой 7 т и космической станции массой 12 т необходимо произвести коррекцию скорости сближения с начальной 2,5 м/с до расчетной 0,15 м/с. На какое время должен быть включен двигатель коррекции-сближения тягой 300 кгс (1 кгс = 9,8 Н)? Насколько уменьшится кинетическая энергия космического корабля при торможении, и какая энергия выделится в стыковочном узле? (Ответ: 5,6 с; 21,8 кДж; 48,1 Дж).

21. Металлическая трубка наклонена от вертикали на угол 30 градусов. На дне трубки расположена сжатая на 10 см пружина, жесткостью 50 Н/м. На какую высоту при освобождении пружины вылетит свободно лежащий на ней стальной шарик диаметром 1 см, если расстояние от начального положения шарика до выходного отверстия трубы 2 м (массой пружины и силами трения пренебречь)? Плотность стали принять равной 7,8 г/см^2. (Ответ: 5,12 м).

22. Состав массой 2700 т движется с подъемом по участку пути, имеющему уклон 12 ‰. Какое тяговое усилие должен обеспечивать локомотив при движении состава со скоростью 60 км/ч, если удельное со-

противление движению для такой скорости 1,8 кгс/т (для нахождения сопротивления движению необходимо удельное сопротивление движению умножить на массу поезда в тоннах, а результат перевести в Н по формуле 1 кгс = 9,8 Н)? Какую мощность должен отдавать в нагрузку двигатель локомотива? (Ответ: 6085 кВт.)

23. Динамическая альпинистская веревка диаметром 9,8 мм имеет допустимое усилие рывка 12 кН и удлиняется на 7,6 % при нагружении ее массой 80 кг (статическое удлинение). При спуске альпиниста страховали сверху ненатянутой веревкой. В момент срыва альпиниста длина веревки была 37 м. Найти максимальную силу натяжения веревки и максимальное удлинение, если масса альпиниста со снаряжением 84 кг (массой веревки и трением в расчетах пренебречь). (Ответ: 5,91 м; 1,65 кН).

24. Альпиниста, совершающего подъем по отвесной скале, страховали сверху с помощью динамической веревки, имеющей статическое удлинение при нагружении массой 80 кг – 8 %, при этом возникла петля, т.е. расстояние между точкой закрепления веревки и альпинистом (12 м) оказалось меньше длинны веревки (31 м). Альпинист сорвался. Найти максимальное удлинение и максимальную силу натяжения веревки. Какое максимальное ускорение испытает альпинист? Масса альпиниста со снаряжением 76 кг (массой веревки и трением в расчетах пренебречь). (Ответ: 12,1 м; 3,82 кН; 5,13 g).

25. Альпинист сорвался с отвесной скалы, перед этим он закрепил страховочную веревку длинной 8 м в точке ниже точки срыва на 2 м. Масса альпиниста вместе со снаряжением 78 кг. Найти максимальную силу натяжения страховочной динамической веревки, если ее статическое удлинение при нагрузке 80 кг – 9,5%. Оцените нагрузку на альпиниста при падении, если допустимое для него усилие рывка 250–300 кг (1 кгс = 9,8 Н) (массой веревки и трением в расчетах пренебречь). (Ответ: 4,82 кН; 492 кгс, нагрузка выше предельной.)

26*. Какую мощность должен иметь двигатель полноприводного автомобиля массой 2250 кг, чтобы разогнать его до скорости 100 км/ч за 10 секунд на сухом асфальте? Коэффициент трения покоя и скольжения пары сухой асфальт–резина принять равным 0,58, начальную скорость равной нулю, а потерями в трансмиссии и трения качения пренебречь. Какую продолжительность времени колеса автомобиля будут проскальзывать? (Ответ: 92,7 кВт; 1,28 с).

27.* Ракета, с начальной массой 10 т, разгоняется реактивным двигателем, скорость истечения продуктов горения топлива которого – 3200 м/с. Какова будет масса ракеты, и ее энергия, когда скорость достигнет 8,5 км/с? Какую часть составит эта энергия от общей работы, произведенной реактивным двигателем. (Ответ: 702 кг; 25,6 ГДж; 0,533).

28.* Водитель полноприводного автомобиля массой 2100 кг и мощностью двигателя 131 кВт в нарушение правил выехал на перекресток на красный сигнал светофора. Перед этим автомобиль стоял у стоп-линии, а водитель-нарушитель полностью нажал педаль газа. Через 2 секунды после начала движения водитель заметил, что на перекресток выехал другой автомобиль, и нажал на тормоз. Произойдет ли авария, если расстояние от стоп линии до борта другого автомобиля 19,5 м? В расчетах принять коэффициенты трения покоя и трения скольжения равными 0,71, трением качения и потерями в трансмиссии пренебречь. Указать: если да – то сколько тормозного пути не хватило; если нет – какое расстояние было между автомобилями при остановке автомобиля нарушителя ПДД. (Ответ: да, 1,21 м).

29.* Электрический конденсатор образован двумя плоскими пластинами (обкладками) площадью $S = 1\ \text{м}^2$ каждая, расположенными на расстоянии $d = 1\ \text{см}$ друг от друга. Конденсатор подключен к источнику напряжения $U = 10000\ \text{В}$. Зная формулу электрической емкости плоского конденсатора $\mathrm{C} = \varepsilon\varepsilon_0 \frac{\mathrm{S}}{\mathrm{d}}$, где ε – диэлектрическая проницаемость среды (для воздуха $\varepsilon \approx 1$), $\varepsilon_0 \approx 8{,}85 \cdot 10^{-12}\ \Phi/\text{м}$ – электрическая постоянная; и формулу потенциальной энергии конденсатора $\mathrm{E}_\text{п} = \mathrm{C}\frac{\mathrm{U}^2}{\mathrm{d}}$, необходимо найти силу притяжения пластин, схематично изобразить зависимость этой силы от расстояния между пластинами, а также найти работу, которую следует совершить для удаления одной из пластин на достаточно большое расстояние. Сравнить полученные результаты с результатами решения задачи 30.* (Ответ: 1,11 Н; 22,1 мДж).

30.* Электрический конденсатор образован двумя плоскими пластинами (обкладками) площадью $S = 1\ \text{м}^2$ каждая, изолированными от других цепей и расположенными на расстоянии $d = 1\ \text{см}$ друг от друга. Конденсатор заряжен первоначально до напряжения $U = 10000\ \text{В}$. Зная определение электрической емкости $\mathrm{C} = \frac{Q}{\mathrm{U}}$, где Q – заряд, сообщенный одной обкладке конденсатора; U – электрическое напряжение между обкладками, формулу электрической емкости плоского конденсатора $\mathrm{C} = \varepsilon\varepsilon_0 \frac{\mathrm{S}}{\mathrm{d}}$, где ε – диэлектрическая проницаемость среды (для воздуха $\varepsilon \approx 1$), $\varepsilon_0 \approx 8{,}85 \cdot 10^{-12}\ \Phi/\text{м}$ – электрическая постоянная, и формулу потенциальной энергии конденсатора $\mathrm{E}_\text{п} = \mathrm{C}\frac{\mathrm{U}^2}{\mathrm{d}}$ и также считая заряд пластин конденсатора неизменным, необходимо найти силу притяжения пластин, схематично изобразить зависимость этой силы от расстояния между пластинами, а также найти работу, которую необходимо совершить для удаления одной из пластин на достаточно большое расстояние. Сравнить полученные результаты с результатами из задачи 29*. (Ответ: 1,11 Н; 1,11 Δd мДж).

5.2. Законы сохранения при вращательном движении

5.2.1. Основные формулы

◊ Кинетическая энергия твердого тела, вращающегося вокруг неподвижной оси

$$E_{\text{к}} = \frac{J\omega^2}{2}, \qquad (20)$$

где ω – угловая скорость.

◊ Элементарная работа, совершаемая за малый промежуток времени dt:

$$\delta A = M^{\text{внеш}} d\varphi, \qquad (21)$$

где $M^{\text{внеш}}$ – главный момент внешних сил, действующих на тело относительно оси вращения.

◊ Движение свободного тела относительно оси вращения

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}^{\text{внеш}},$$

где $\vec{M}^{\text{внеш}}$ – главный момент внешних сил, относительно оси вращения; $\vec{L}$ – момент импульса тела относительно той же оси. Если момент внешних сил равен нулю, то: $\vec{L} = const$.

◊ Полная кинетическая энергия твердого тела, с учетом вращательного и поступательного движения:

$$E_{\text{к}} = \frac{J\omega^2}{2} + \frac{mv^2}{2}.$$

Вспомогательные формулы к подразделу 5.2

◊ Работа силы упругости при повороте пружины кручения

$$A = \frac{k\varphi_1^2}{2} - \frac{k\varphi_2^2}{2}, \qquad (22)$$

где k – угловая крутильная жесткость пружины; φ_1 и φ_2 – соответственно начальное и конечное угловое смещение от положения равновесия.

◊ Момент сил трения качения колеса

$$M_{\text{тк}} = k_{\text{тк}} F \qquad (23)$$

где $k_{тк}$ – коэффициент трения качения, м; F – прижимающая сила.

◊ Потенциальная энергия деформированной пружины кручения

$$E_п = \frac{k\varphi^2}{2},$$

где φ – угловая деформация пружины кручения от положения равновесия.

◊ Угловая крутильная жесткость стержня диаметром d и длиной l:

$$k = G\frac{\pi d^4}{32l},$$

где G – модуль сдвига материала стержня.

◊ Сила трения качения колеса, кольца или шара

$$F_{тк} = k_{тк}\frac{F}{r}, \qquad (24)$$

где $k_{тк}$ – коэффициент трения качения, м; F – прижимающая сила; r – радиус тела вращения.

◊ Потенциальная энергия гравитационного взаимодействия двух материальных точек

$$E_p = G\frac{m_1 \cdot m_2}{r},$$

где r – расстояние, на котором находятся два взаимодействующих тела массами m_1 и m_2 соответственно.

5.2.2. Примеры решения задач

Пример 1. На игрушечном автомобиле закреплена пружина с жесткостью 1 Н/м. Масса автомобиля 20 г, в том числе 14 г приходится на колеса, выполненные в виде сплошных дисков, диаметром 2 см, из резины плотностью 1050 кг/м^3. Пружина сжата на 4 см и к ней прижат стальной шарик массой 4,1 г. Автомобиль находится на ровной поверхности. Какие скорости приобретут при освобождении пружины шарик и автомобиль? В расчетах коэффициент трения скольжения колес по поверхности считать равным бесконечности (колеса не проскальзывают), а массой пружины и различными потерями пренебречь.

Дано: $m_1 = 20 \cdot 10^{-3}$ кг; $m_{11} = 14 \cdot 10^{-3}$ кг; $m_2 = 4{,}1 \cdot 10^{-3}$ кг; $d_1 = 2 \cdot 10^{-2}$ м; $d_2 = 1 \cdot 10^{-2}$ м; $\Delta x = 4 \cdot 10^{-2}$ м; $k = 1$ Н/м. Найти: v_1, v_2 – ?

Решение. Из условия задачи видно, что при отталкивании потенциальная энергия сжатой пружины в соответствии с законом сохранения механической энергии полностью перейдет в кинетическую энергию тел, поэтому

$$\mathrm{E_к} = \mathrm{E_п} = \mathrm{E_{к1}} + \mathrm{E_{к2}} = \frac{k(\Delta \mathrm{x})^2}{2},$$

где $E_{к1}$ и $E_{к2}$ – кинетические энергии автомобиля и шарика; а $E_п$ – потенциальная энергия сжатой пружины.

В свою очередь кинетическая энергия автомобиля может быть представлена из двух частей кинетической энергии корпуса – $E_{\text{ккор}}$ и кинетической энергии вращения колес – $E_{\text{ккол}}$:

$$\mathrm{E}_{\text{к}1} = \mathrm{E}_{\text{ккор}} + \mathrm{E}_{\text{ккол}}.$$

Все четыре колеса идентичного диаметра и их суммарный момент инерции можно записать как

$$\mathrm{J} = \frac{1}{2}\mathrm{m}_{11}(\mathrm{d}_1/2)^2.$$

Выразив скорость вращения колес через скорость автомобиля

$$\omega = \frac{v_1}{d_1/2},$$

можем записать выражение зависимости его полной кинетической энергии от линейной скорости:

$$E_{\text{к}1} = E_{\text{ккор}} + E_{\text{ккол}} = m_1\frac{v_1^2}{2} + J\frac{\omega^2}{2} = \left(m_1 + \frac{1}{2}m_{11}\right)\frac{v_1^2}{2}.$$

Выразив элементарную работу по изменению кинетической энергии автомобиля как

$$dA = dE_{\text{к}1} = Fdx,$$

где dx – элементарное перемещение автомобиля найдем выражение действующей силы

$$F = \frac{dE_{\text{к}1}}{dx}$$

или
$$\mathrm{F}\frac{\mathrm{dx}}{\mathrm{dt}} = \frac{\mathrm{dE}_{\text{к}1}}{\mathrm{dt}} = \left(\mathrm{m}_1 + \frac{1}{2}\mathrm{m}_{11}\right)\frac{dx}{dt}\frac{d^2x}{dt^2},$$

или
$$F = \left(m_1 + \frac{1}{2}m_{11}\right)\frac{d^2x}{dt^2} = \left(m_1 + \frac{1}{2}m_{11}\right)a_1 .$$

Тогда приращение импульса можно записать $\mathrm{dp}_1 = \mathrm{Fdt}$, а импульс (если в начальный момент времени скорость была равна нулю):

$$p_1 = \int Fdt = \int\left(m_1 + \frac{1}{2}m_{11}\right)a_1dt = \left(m_1 + \frac{1}{2}m_{11}\right)v_1.$$

Кинетическую энергию и импульс шарика в свою очередь можно выразить как

$$E_{\text{к}2} = m_2\frac{v_2^2}{2} \text{ и } p_2 = m_2v_2.$$

По закону сохранения импульса записываем

$$p_1 = -p_2 = \mathrm{m}_1\mathrm{v}_1 = -\mathrm{m}_2\mathrm{v}_2.$$

Объединив уравнения, составленные по законам сохранения кинетической энергии и импульса, получим

$$\mathrm{v}_1 = \sqrt{\frac{\mathrm{m}_2k(\Delta\mathrm{x})^2}{\left(m_1+\frac{1}{2}m_{11}\right)\mathrm{m}_2+\left(m_1+\frac{1}{2}m_{11}\right)^2}},\ \mathrm{v}_2 = -\frac{\left(m_1+\frac{1}{2}m_{11}\right)}{\mathrm{m}_2}\mathrm{v}_1.$$

Подставив числовые данные, получим $\mathrm{v}_1 = 000\text{м/с}$, $\mathrm{v}_2 = 000\text{м/с}$.

Пример 2. В стальном цилиндре диаметром 1 м, ось которого расположена горизонтально, вращается по стенкам стальной шарик диаметром 1 см в плоскости, перпендикулярной этой оси. Найти минимальную скорость вращения, при которой шарик во всех точках пути будет касаться стенок, и энергию шарика, считая потенциальную энергию шарика в нижней точке пути нулевой.

Дано: $d_1 = 1$ м; $d_2 = 1 \cdot 10^{-2}$ м; $g = 9{,}8$ м/с^2. Найти: ω, E – ?

Решение. Центр массы шарика из условия задачи должен двигаться по окружности радиусом $R = \frac{d_1 - d_2}{2}$. Для выполнения этого условия центростремительная сила в верхней точке окружности должна быть не меньше силы тяжести, действующий на шарик, т.е. равна ей при минимальной скорости вращения:

$$F_{ц} = m\omega^2 R = mg.$$

Отсюда

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{R}} = \sqrt{\frac{g}{\frac{d_1 - d_2}{2}}}.$$

Механическая энергия движущегося шарика в общем случае состоит из кинетической и потенциальной энергии. Кинетическая энергия шарика в свою очередь состоит из энергии поступательного движения $E_{кп}$ и энергии вращательного движения $E_{кв}$. Энергия поступательного движения шарика по окружности имеет вид:

$$\mathrm{E}_{кп} = \mathrm{m}\frac{\mathrm{v}^2}{2} = \mathrm{m}\frac{(\omega R)^2}{2} = m\frac{\left(\omega\frac{d_1 - d_2}{2}\right)^2}{2} = m\frac{\omega^2 (d_1 - d_2)^2}{8}.$$

Зная момент инерции шара относительно оси, проходящей через его центр масс $J_0 = \frac{2}{5}m\left(\frac{d_2}{2}\right)^2$, и выразив скорость вращения шарика через его скорость вращения по окружности

$$\omega_2 = \frac{\omega\frac{d_1}{2}}{\frac{d_2}{2}} = \omega\frac{d_1}{d_2},$$

можем записать кинетическую энергию вращения шарика вокруг своей оси:

$$E_{кв} = J_0\frac{\omega_2^2}{2} = \frac{2}{5}m\left(\frac{d_2}{2}\right)^2 \cdot \frac{\left(\omega\frac{d_1}{d_2}\right)^2}{2} = m\frac{(\omega d_1)^2}{20}.$$

Потенциальная энергия шарика в верхней точке может быть выражена как

$$\mathrm{E}_{п} = \mathrm{mg}(\mathrm{d}_1 - \mathrm{d}_2).$$

В результате для полученной минимальной скорости в верхней точке окружности можно записать:

$$E = E_{к} + \mathrm{E}_{п} = E_{кп} + E_{кв} + E_{п} = m\frac{\omega^2 (d_1 - d_2)^2}{8} + m\frac{(\omega d_1)^2}{20} + mg(d_1 - d_2).$$

Найдя массу шара по формуле $m = \frac{4}{3}\pi\left(\frac{d_2}{2}\right)^3$ и подставив данные в найденные выражения, получим численные значения ω, E.

Пример 3. Тонкий стержень длиной 20 см и массой 30,6 г подвешен горизонтально за точку, проходящую через центр массы стержня, на стальной проволоке диаметром 1 мм и длиной 20 см. Модуль сдвига стали равен 79 ГПа. Найти период малых собственных колебаний такого маятника.

Дано: $l_1 = 20 \cdot 10^{-2}$ м; $l_2 = 20 \cdot 10^{-2}$ м; $d_2 = 1 \cdot 10^{-3}$ м; $m = 30{,}6 \cdot 10^{-3}$ г; $G = 79 \cdot 10^{9}$ Па. Найти: T – ?

Решение. Во время совершения колебаний механическая энергия периодически переходит из кинетической формы в потенциальную, и в консервативных замкнутых системах, в которых выполняется закон сохранения механической энергии, можно записать $E = E_к + E_п = const$, т.е.

$$\mathrm{E} = J_0 \frac{\omega^2}{2} + \mathrm{k}\frac{\varphi^2}{2} = \frac{\mathrm{J}_0}{2}\left(\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{dt}}\right)^2 + \frac{\mathrm{k}\varphi^2}{2},$$

где $J_0 = \frac{1}{12} m l_1^2$ – момент инерции стержня (моментом инерции тонкой проволоки пренебрегаем); $k = G\frac{\pi d_2^4}{32 l_2}$ – крутильная жесткость стержня.

Дифференцируя это выражение по t, получим

$$0 = J_0\left(\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)'_t \cdot \frac{d\varphi}{dt} + \frac{d\varphi}{dt} \cdot \left(\frac{d\varphi}{dt}\right)'_t\right) + k2\varphi\frac{d\varphi}{dt};$$

$$\frac{\mathrm{d}^2\varphi}{\mathrm{dt}^2} + \frac{\mathrm{k}}{J_0}\varphi = 0.$$

Будем искать решение этого дифференциального уравнения в виде:

$$\varphi = \varphi_0 \cos(\Omega t).$$

Тогда вторая производная этого выражения по времени

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} = -\varphi_0\, \Omega^2 \cos(\Omega\, t),$$

подставив эти выражения в дифференциальное уравнение, получим

$$-\varphi_0\, \Omega^2 \cos(\Omega\, t) + \frac{k}{J_0}\varphi_0 \cos(\Omega\, t) = 0$$

или

$$\Omega = \sqrt{\frac{k}{J_0}},$$

где Ω – круговая частота колебаний, рад/с.

Период собственных колебаний маятника можно записать

$$\mathrm{T} = 2\pi\sqrt{\frac{\mathrm{J}_0}{\mathrm{k}}}.$$

Подставив выражения для k и J_0, окончательно получим

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{\frac{1}{12} m l^2}{G\frac{\pi d_2^4}{32 l_2}}} = 2\pi\sqrt{\frac{8 l_2 m l_1^2}{3 G \pi d_2^4}}.$$

Подставляя числовые значения, получим $T = 000$ с.

Задача 4. Два материальные точки массой m могут свободно перемещаться по невесомому стержню, имеющему в центре ось вращения.

В начальный момент времени материальные точки расположены на равных расстояниях R_0 от центра стержня, а стержень вращается со скоростью ω_0. На материальные точки действуют одинаковые по модулю центростремительные силы F. Систему считать консервативной. Вывести зависимость удерживающей материальные точки силы от радиуса вращения материальных точек.

Дано: m, R_0, ω_0. Найти: $F(R)$ – ?

Решение. Запишем выражение кинетической энергии

$$\mathrm{E_к} = \frac{\mathrm{J}\omega^2}{2} = mR^2\omega^2.$$

В консервативных системах работа силы равна изменению энергии системы, а сила в свою очередь равна производной от энергии по пути действия силы. В нашем случае силы две и поэтому можно записать

$$F = \frac{1}{2}\frac{d\mathrm{E_к}}{dR}.$$

Из записанного ранее выражения видно, что энергия системы зависит как от радиуса вращения цилиндров, так и от угловой скорости вращения. Поэтому полный дифференциал от энергии имеет вид:

$$\mathrm{dE_к} = 2\mathrm{mR}\omega^2\mathrm{dR} + 2\mathrm{mR}^2\omega\mathrm{d}\omega,$$

а затем $\frac{d\mathrm{E_к}}{dR}$, именно

$$\frac{\mathrm{dE_к}}{\mathrm{dR}} = 2\mathrm{mR}\omega^2 + 2\mathrm{mR}^2\omega\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{dR}}.$$

По закону сохранения момента импульса

$$\mathrm{J}\omega = 2\mathrm{mR}^2\omega = \mathrm{const} = 2\mathrm{mR}_0^2\omega_0,$$

где R_0 и ω_0 – начальный радиус и угловая скорость вращения. Выразим из полученного соотношения

$$\omega = \frac{\mathrm{R}_0^2\omega_0}{\mathrm{R}^2},$$

и возьмем производную по R

$$\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{dR}} = -2\frac{\mathrm{R}_0^2\omega_0}{\mathrm{R}^3}.$$

Объединив найденные выражения, получим

$$\mathrm{F} = \frac{1}{2}\frac{\mathrm{dE_к}}{\mathrm{dR}} = \frac{1}{2}\left(2\mathrm{mR}\left(\frac{\mathrm{R}_0^2\omega_0}{\mathrm{R}^2}\right)^2 + 2\mathrm{mR}^2\frac{\mathrm{R}_0^2\omega_0}{\mathrm{R}^2}\left(-2\frac{\mathrm{R}_0^2\omega_0}{\mathrm{R}^3}\right)\right) = -\mathrm{m}\frac{\mathrm{R}_0^2\omega_0}{\mathrm{R}^3}.$$

Полученное выражение $\mathrm{F} = -\mathrm{m}\frac{\mathrm{R}_0^2\omega_0}{\mathrm{R}^3}$ показывает, что в случае свободно вращающихся грузов модуль силы необходимой для их удержания обратно пропорционален третьей степени радиуса их вращения, т.е. быстро растет при уменьшении радиуса. Отрицательный знак в выражении говорит о том, что работа совершается при уменьшении радиуса.

5.2.3. Задачи для самостоятельного решения

31. Пуля из автомата Калашникова (АК) массой 7,9 летит со скоростью 715 м/с, а затем застревает в массивном диске из дуба диаметром 0,5 м и толщиной 10 см. С какой скоростью начнет вращаться диск, если он закреплен свободно (без трения), на своей центральной оси, траектория полета пули проходила в плоскости диска по его середине, а кратчайшее расстояние от оси вращения до траектории пули 20 см? Плотность дуба принять равной $\rho = 0{,}69 \text{ т/м}^3$. (Ответ: 2,67 рад/с или 25,5 об/мин).

32. В начальный момент времени резиновая хоккейная шайба диаметром 7,62 см, высотой 2,54 см и массой 163 г вращается на льду со скоростью 20 об/с. Через какой промежуток времени она остановится, если коэффициент трения пары резина-лед равен 0,12? (Ответ: 3,05 с).

33. Два одинаковых стальных диска диаметром 10 см и высотой 1 см расположены в одной плоскости на минимальном расстоянии, при котором они не соприкасаются. Диски могут свободно вращаться на своих центральных осях. Положение оси первого диска жестко фиксировано, а ось второго диска может смещаться параллельно самой себе в плоскости, проходящей через оси дисков. Первоначально первый диск вращался со скоростью 10 об/с, а второй был неподвижен. Затем диски были сближены так, что проскальзывание их поверхностей стало невозможно. Найти, какую скорость вращения приобретут диски; проверить выполнение законов сохранения энергии и импульса, объяснить результаты. В расчетах плотность стали принять равной 7,8 т/м^3. (Ответ: 5 об/с).

34. Два одинаковых стальных диска диаметром 10 см и высотой 1 см расположены в одной плоскости на минимальном расстоянии, при котором они не соприкасаются. Диски могут свободно вращаться на своих центральных осях, а оси свободно перемещаться в плоскости дисков. Первоначально первый диск вращался со скоростью 10 об/с, а второй был неподвижен. Затем диски были сближены так, что произошло их сцепление (слипание или иначе жесткая фиксация в точке первого контакта). Найти, какую скорость вращения приобретут диски, проверить выполнение законов сохранения энергии и импульса, объяснить результаты.
В расчетах плотность стали принять равной 7,8 т/м^3. (Ответ: 1,67 об/с).

35. Два одинаковых стальных диска диаметром 10 см и высотой 1 см расположены в одной плоскости на минимальном расстоянии, при котором они не соприкасаются. Диски могут свободно вращаться на своих центральных осях, а оси скреплены двумя невесомыми стержнями, длину которых можно менять. Вся система может свободно перемещаться в плоскости дисков. Первоначально первый диск вращался со скоростью 10 об/с, а второй был неподвижен. Затем диски были сближены так, что проскальзывание их поверхностей стало невозможно. Найти, какую ско-

рость вращения приобретут диски, проверить выполнение законов сохранения энергии и импульса, объяснить результаты. В расчетах плотность стали принять равной 7,8 т/м^3. (Ответ: 7,5 об/м и 2,5 об/м относительно неподвижной системы координат).

36. Космическая станция массой 83 т имеет форму близкую к тонкостенному цилиндру и диаметром 6 м. Внутри станции, в средней части, в плоскости перпендикулярной ее оси расположен поручень в виде соосной окружности диаметром 5,5 м. Первоначально вращение станции вокруг оси отсутствует. Космонавт массой 80 кг начал двигаться вдоль поручня со скоростью 1 м/с. Какое расстояние он должен преодолеть вдоль поручня, чтобы станция повернулась на 180 градусов (в расчетах предположить, что вся масса станции равномерно распределена по стенкам цилиндра)? (Ответ: 3395 м).

37. Две ракеты массой 100 г закреплены на концах тонкого стержня массой 1 кг и длиной 1 м. Стержень может вращаться вокруг перпендикулярной оси, проходящей через его центр. Направления осей симметрии ракет составляют с осью вращения стержня угол 45 градусов, а также перпендикулярны оси стержня. Масса ракетного топлива 20 г, его время работы 20 с, а скорость истечения реактивной струи 1100 м/с. Найти максимальную скорость вращения стержня. (Ответ: 121 рад/с).

38. Стальной шар диаметром 10 см находится на наклонной гладкой плоскости, расположенной под углом 30° к горизонтали. Через какое время шар, начав движение под действием силы тяжести, прокатится без скольжения на расстояние 5 м? Какую кинетическую энергию он будит при этом иметь (силой трения качения пренебречь)? (Ответ: 1,69 с; 100 Дж.)

39. Космический корабль массой 11 200 кг вращается вокруг земли по круговой орбите высотой 350 км. Насколько увеличится механическая энергия корабля, если после корректировки радиус круговой орбиты будет увеличен на 1 км? Массу Земли принять равной $5{,}97 \cdot 10^{24}$ кг, радиус Земли 6371 км. (Ответ: 98,7 МДж).

40. Автомобиль массой 1430 кг был неаккуратно оставлен со снятым тормозом и на нейтральной передаче, на асфальтированном прямом участке дороги. Колеса автомобиля имели шины 195/65 R14: ширина 195 мм; высота боковых стенок $195 \cdot \frac{65}{100} \approx 127\ \text{мм}$; внутренний диаметр 14 дюймов ($14 \cdot 25{,}4 \approx 366\ \text{мм}$). Автомобиль оказался неаккуратно оставленным на асфальтированном прямом участке дороги. На дороге с каким минимальным уклоном автомобиль может покатиться, если коэффициент трения качения пары резина–асфальт – 0,0021 м? (Ответ: 6,8/1000).

41. Шину типа 175/70 R13 массой 7,1 кг отпустили на дороге, имеющей участок с уклоном 20/1000 длиной 50 м. Найти ее максимальную скорость и расстояние, которое она прокатится, по идущему далее ровному участку дороги, если ее ширина 175 мм, внешний диаметр 575 мм, высота боковых стенок 122,5 мм ($175 \cdot \frac{70}{100}$). Коэффициент трения качения для пары шина-асфальт принять равным 0,002 м. При расчетах предположить, что суммарный вес стенок равен половине веса шины, при расчете момента инерции представить шину в виде пустотелого цилиндра диаметром 575 мм шириной 175 мм и двух боковых стенок в виде дисков с отверстием диаметром 330 мм, плотность резины, из которой изготовлена шина, считать равной 1,2 т/м^3. (Ответ: 2,61 м/с; 94,1 м).

42. Какое расстояние проехал бы автомобиль на нейтральной передаче по ровному асфальтированному участку дороги при начальной скорости 80 км/ч, если бы другие силы трения кроме силы трения качения шин об асфальт отсутствовали? Масса автомобиля 980 кг, шины имеют внешний диаметр 575 мм, коэффициент трения качения для пары шина-асфальт – 0,0027 м. (Ответ: 2683 м).

43. Через два шкива диметрами 20 и 40 см и массами 2 и 4 кг соответственно перекинута длинная веревка, массой которой можно пренебречь. На концах веревки закреплены грузы массами 0,1 и 0,2 кг. Считая, что верёвка может двигаться по шкивам без проскальзывания, записать уравнения пути конца веревки. (Ответ: $s = 1{,}26t^2$).

44. Внутри стальной трубы с внутренним диаметром 1 м находится стальной шарик диаметром 1 см. В начальный момент времени шарик движется по внутренней поверхности трубы в плоскости, перпендикулярной оси трубы, со скоростью 50 м/с. Найти время, которое потребуется для того, чтобы скорость шарика уменьшилась вдвое. В расчетах сопротивление качению пары сталь–сталь принять равной 0,0005 м, сопротивлением воздуха и силой тяжести пренебречь. (Ответ: 0,14 с).

45. С какой минимальной начальной скоростью должен двигаться космический корабль, находящийся на высоте геостационарной орбиты, чтобы навсегда покинуть орбиту Земли? В расчетах принять радиус геостационарной орбиты равной 42164 км, а массу Земли равной $5{,}97 \cdot 10^{24}$ кг. (Ответ: 4347 м/с.)

46. С какой скоростью движется спутник, находящийся на геостационарной орбите Земли? В расчетах принять радиус геостационарной орбиты равной 42164 км, а массу Земли равной $5{,}97 \cdot 10^{24}$ кг. (Ответ: 3066 м/с).

47. Какой коэффициент трения качения пары шар–сукно был у бильярдного стола, если шар, катящийся по сукну с начальной скоростью

2м/с, остановился, прокатившись 2 м? Вес биллиардного шара 285 г, диаметр 68 мм. (Ответ: 4,9 мм).

48. При метании диска массой 2 кг спортсмен раскручивал его по радиусу 110 см. Диск был выпущен из рук на высоте 1,8 м под углом 37 градусов к горизонту. Найти начальную скорость диска и силу, с которой спортсмен удерживал диск перед отпусканием, если дальность броска составила 59 м. Влиянием воздуха на полет диска пренебречь. Для упрощения расчетов можно считать угол снижения перед падением диска также равным 37 градусов. (Ответ: 24,02 м/с; 1049 Н или 107,1 кгс).

49. Молекула азота (двухатомный газ) при температуре $T = 300$ К имеет среднюю кинетическую энергию вращения равную kT, где $k = 1{,}38 \cdot 10^{-23}$ Дж/К – постоянная Больцмана. Имея такую энергию вращения, молекула передала свой момент импульса покоящейся сферической молекуле фуллерена С60. Молекулярная масса атома азота 14 а.е.м (1 а.е.м. = $1{,}66 \cdot 10^{-27}$ кг). Расстояние между атомами в молекуле – 0,11 нм. Молекулярная масса фуллерена 12×60 а.е.м. Считая всю массу молекулы фуллерена равномерно распределенной по поверхности сферы диаметром 0,71 нм, найти скорость ее вращения. (Ответ: $95{,}3 \cdot 10^{6}$ рад/с).

50. Известно, что в кристалле фуллерена (фуллерит) молекулы С60 при комнатных температурах хаотически вращаются. Предполагая, что при трех вращательных степенях свободы, средняя кинетическая энергия вращения молекулы составляет $\frac{3}{2}kT$ ($k = 1{,}38 \cdot 10^{-23}$ Дж/К), необходимо найти среднюю скорость вращения молекул и суммарную энергию их вращения в кристалле фуллерита весом 1 кг, при температуре $T = 300$ К. Масса молекулы фуллерена 720 а.е.м. (1 а.е.м.= $1{,}66 \cdot 10^{-27}$ кг.). (Ответ: $95{,}3 \cdot 10^{6}$ рад/с).

51. Какую максимальную массу может иметь тонкий диск диаметром 8 см, подвешенный за свой край, чтобы он мог совершить полный оборот при попадании пульки воздушного ружья массой 0,29 г, летящей со скоростью 110 м/с прямо в центр диска? Силами трения пренебречь, а удар считать неупругим. (Ответ: 31 г).

52. Автомобиль приводится в движение с помощью маховика, который, с достаточной точностью можно представить, в виде тонкостенного полого цилиндра диаметром 80 см, вращающегося вокруг своей оси. Какую скорость вращения должен иметь маховик массой 80 кг, чтобы автомобиль смог проехать, не снижая скорости, расстояние 10 км и 100 км? Шины автомобиля имеют внешний диаметр 575 мм, коэффициент трения качения пары шина–асфальт – 0,037, другими силами трения пренебречь. (Ответ: 397 рад/с ≈ 3790 об/с; 1256 рад/с ≈ 11990 об/с).

53. Какую максимальную скорость вращения может иметь маховик диаметром 80 см в виде тонкого обода, изготовленный из намотанных кевларовых нитей с пределом прочности на разрыв 3600 МПа и плотностью 1450 кг/м^3?

Подсказка: силу натяжения можно найти, мысленно разрезав маховик на две части, силы которые нужны, чтобы удержать эти части вместе и есть сила натяжения, приложенная к сечению маховика. Предел прочности это сила необходимая для разрыва, отнесенная к площади сечения, по которому разрывается тело. (Ответ: 3939 рад/с или 37617 об/мин).

54. Какую максимальную удельную кинетическую энергию может накопить вращающийся маховик диаметром 80 см в виде тонкого обода, изготовленный из намотанных кевларовых нитей, с пределом прочности на разрыв 3600 МПа и плотностью 1450 кг/м^3?

Подсказка: силу натяжения можно найти, мысленно разрезав маховик на две части, силы которые нужны, чтобы удержать эти части вместе и есть сила натяжения, приложенная к сечению маховика. Предел прочности это сила необходимая для разрыва, отнесенная к площади сечения, по которому разрывается тело. Удельная энергия это отношение энергии запасенной маховиком к его массе. (Ответ: 2,48 МДж/кг).

55. Для ориентации космического корабля используется вращение маховика диаметром обода 20 см и массой 1 кг. Сколько раз должен повернуться маховик, чтобы развернуть космическую станцию массой 16 т вокруг своей оси на 90°, если принять, что вся масса маховика сосредоточена в его ободе, а станцию представить как тонкий пустотелый цилиндр с равной толщиной всех стенок и диаметром 4 м и длиной 10 м? (Ответ: около 147 тыс. раз).

56.* Травяная лягушка массой 22 г сидела сверху детского резинового мяча массой 600 г и диаметром 20 см. Мяч находился на ровной асфальтированной площадке. Лягушка прыгнула с мяча под углом 45 градусов к горизонту, и ее начальная скорость была равна 5 м/с^2. Найти начальную скорость качения мяча и расстояние, на которое откатится мяч без отскока, если коэффициент пары трения качения резина–асфальт – 0,003 м. Мяч считать полым шаром, весом воздуха в мяче пренебречь. (Ответ: 15,6 см/с; 6,9 см).

57.* Какой коэффициент трения скольжения пары шар–сукно был у бильярдного стола, если шар, получивший начальную скорость без вращения 3 м/с, остановился, пройдя путь в 3 м? Вес биллиардного шара 285 г, диаметр 68 мм. Коэффициент трения качения принять равным 5 мм. (Ответ: 0,049).

58.* Два одинаковых шара массой m соединены невесомой пружиной с жесткостью k и начальной длинной R_0. Шары вращаются вокруг общего центра масс с угловой скоростью ω_0. Необходимо найти частоту малых собственных колебаний такой упругой системы. (Ответ: ($f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m} + 3\omega_0^2}$)).

59.* Возможно, что во время мытья посуды Вы слышали звук, возникающий при мытье бокала на длинной ножке. Он возникает из-за нелинейности эффекта трения и наличия механического резонанса в системе «ножка–основание» бокала. Оцените резонансную частоту крутильных колебаний основания бокала, выполненного из хрустального стекла плотностью 3,16 кг/дм^2, имеющего модуль упругости, равный 23,6 ГПа. В расчетах ножку бокала можно считать стержнем длиной 6 см и диаметром 8,5 мм, а основание бокала считать диском диаметром 7 см и толщиной 5 мм. (Ответ: 371 Гц).

60.* В ходе испытаний коленчатого вала мощного двигателя массой 151 кг и моментом инерции 0,79 кг·м^2 он раскручивался на стенде до скорости 1750 оборотов в минуту. Коленчатый вал удерживался на подшипниках скольжения. Найти время, которое будет вращаться коленчатый вал по инерции, если коэффициент трения скольжения пары сталь-бабит при использовании смазки – 0,05, а диаметр коренных шеек, опирающихся на подшипник, – 10 см. В расчете силы трения скольжения использовать формулу (19).(Ответ: 39 с).

6. УПРУГОСТЬ ТЕЛ

6.1. Основные формулы

В разд. 1–4 при рассмотрении воздействия сил на тела и взаимодействия тел между собой использовалась такая физическая модель, как **абсолютно твердое тело**, т. е. тело, не подверженное деформации. В реальных условиях все тела под действием сил в той или иной степени деформируются, меняя свою форму и размеры.

Если после прекращения воздействия внешних сил тела остаются такими же, какими они были до этого воздействия (сохраняют свою форму и размеры), то такая деформация считается **упругой**, если нет, то деформация называется **пластической**.

В реальности деформации всегда пластические. Однако когда остаточные деформации малы, ими можно пренебречь, и считать, что деформация была упругой. Именно такие деформации изучаются в рамках теории упругости и будут рассмотрены в настоящей главе.

Кроме того, согласно теории упругости, все виды деформаций могут быть сведены к одновременно происходящим деформациям растяжения или сжатия и сдвига.

◊ Нормальным **напряжением** называется упругая сила, которая действует на единицу площади поперечного сечения тела (проволока, стержень и т.п.):

$$\sigma = \frac{F_{упр}}{S}.$$

◊ Численно характеризовать степень деформации тела можно при помощи величины **относительной деформации**. **Относительная деформация** при продольном растяжении или сжатии тела определяется формулой

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l},$$

где Δl – абсолютное удлинение (изменение длины по сравнению с первоначальной, взятое по модулю); l – начальная длина тела.

◊ Для малых деформаций относительное удлинение ε и напряжение σ связаны выражением

$$\sigma = \varepsilon E,$$

где E – модуль Юнга. Это выражение называется законом Гука для продольного растяжения или сжатия и может быть представлено в другом виде:

$$F_{упр} = -kx,$$

где $F_{упр}$ – упругая сила; k – коэффициент упругости (для пружины – жесткость).

◊ Деформации кручения характеризуются моментом, который закручивает однородный круглый стержень на угол φ и определяется как

$$M = C\varphi,$$

где C – постоянная кручения.

◊ Работа, которая совершается при деформации тела

$$A = \frac{kx^2}{2},$$

где x – абсолютное удлинение тела, изменяющееся в процессе деформации от 0 до Δl.

◊ Потенциальная энергия деформированного (растянутый или сжатый) стержня

$$П = \frac{kx^2}{2} \quad \text{или} \quad П = \frac{\sigma^2}{2E}V = \frac{E\varepsilon^2}{2}V,$$

где V – объем деформируемого тела.

◊ Предел прочности материала – это механическое напряжение, выше которого происходит разрушение материала. При проектировании значение запаса прочности предписывается специальными нормами проектирования конструкций. При решении задач данной главы за допускаемое напряжение σ принимается расчетное напряжение.

Запас прочности (табл. 6.1) определяется как отношение разрушающего напряжения (предел прочности) к расчетному напряжению:

$$n = \frac{\sigma_{пр}}{\sigma}.$$

Таблица 6.1

Предел прочности разных материалов на сжатие и растяжение

Материал	Растяжение, ГПа	Сжатие, МПа
Бетон	4	30–40
Кирпич	5,5	10–21
Мрамор	10	110
Гранит	20	240
Железо	170	650
Кость	110	150

6.2. Примеры решения задач

Пример 1. Определить запас прочности стального стержня длиной 0,4 м и площадью поперечного сечения 1,5 см^2, к которому подвешен груз массой 4 т. Предел прочности (разрушающее напряжение) при растяжении стали составляет 1,25 ГПа. Определить также относительное удлинение стержня и его энергию упругой деформации (массой стержня пренебречь).

Дано: $m = 4 \cdot 10^3$ кг; $l = 0{,}4$ м; $S = 1{,}5 \cdot 10^{-4}$ м^2; $\sigma_{пр} = 1{,}25 \cdot 10^9$ Па; модуль Юнга для стали $E = 2{,}2 \cdot 10^{11}$ Па; ускорение свободного падения $g = 9{,}8$ м/с^2. Найти: n, ε, Π – ?

Решение. Для нахождения запаса прочности воспользуемся формулой

$$n = \frac{\sigma_{пр}}{\sigma},$$

в которой $\sigma = \frac{F_{упр}}{S} = \frac{mg}{S}$. Тогда предел прочности $n = \frac{\sigma S}{mg}$.

Относительное удлинение найдем из закона Гука $\sigma = \varepsilon E$:

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E} = \frac{mg}{SE}.$$

Зная формулы деформирующей силы $F = mg$ и абсолютной деформации $\Delta l = \varepsilon l$, определяем энергию упругой деформации:

$$\varPi = \frac{F\Delta l}{2} = \frac{(mg)^2 l}{2ES}.$$

Проверим размерность

$$[n] = \frac{\text{Па}\cdot\text{м}^2}{\text{кг}\cdot\text{м/с}^2} = 1;$$

$$[\varepsilon] = \frac{\text{кг}\cdot\text{м/с}^2}{\text{Па}\cdot\text{м}^2} = 1;$$

$$[\varPi] = \frac{(\text{кг}\cdot\text{м/с}^2)^2\cdot\text{м}}{\text{Па}\cdot\text{м}^2} = \text{Дж}.$$

Подставляя данные, получим численные значения искомых величин:

$$n = \frac{1{,}25\cdot 10^9\cdot 1{,}5\cdot 10^{-4}}{4\cdot 10^3\cdot 9{,}8} = 5;$$

$$\varepsilon = \frac{4\cdot 10^3\cdot 9{,}8}{2{,}2\cdot 10^{11}\cdot 1{,}5\cdot 10^{-4}} = 1{,}2\cdot 10^{-3};$$

$$\varPi = \frac{(4\cdot 10^3\cdot 9{,}8)^2\cdot 0{,}4}{2\cdot 2{,}22\cdot 10^{11}\cdot 1{,}5\cdot 10^{-4}} = 9{,}3.$$

Ответ. $n = 5$; $\varepsilon = 1{,}2\cdot 10^{-3}$; $\varPi = 9{,}3$ Дж.

Пример 2. При упругой деформации стальная проволока длиной 2 м и площадью поперечного сечения 1 мм^2 мм под действием растягивающей силы удлинилась на 6 мм. Определить величину деформирующей силы. Модуль Юнга для данной марки стали $E = 196$ ГПа.

Дано: $l = 2$ м; $\Delta l = 6\cdot 10^{-3}$ м; $S = 10^{-6}$ м^2; $E = 1{,}96\cdot 10^{11}$ Па. Найти: F –?

Решение. Деформирующую силу определим по формуле, вытекающей из определения механического напряжения

$$F = \sigma S, \tag{1}$$

где σ напряжение – найдем из закона Гука:

$$\sigma = \varepsilon E = \frac{\Delta l}{l}E. \tag{2}$$

Подставим (2) в (1)

$$F = \frac{\Delta l}{l}ES.$$

Проверим размерность

$$[F] = \frac{\text{м}}{\text{м}} \text{Па} \cdot \text{м}^2 = \text{Н}.$$

Подставляя данные, получим численные значения искомых величин:

$$F = \frac{6 \cdot 10^{-3}}{2} 1{,}96 \cdot 10^{11} \cdot 10^{-6} = 5{,}9 \cdot 10^2.$$

Ответ. $F = 5{,}9 \cdot 10^2$ Н.

Пример 3. Стальная проволока закреплена одним концом так, что может принимать любое положение в вертикальной плоскости. К другому ее концу подвешен груз 50 Н. Определить, насколько удлинится проволока в нижней точке траектории, если проволоку вместе с грузом отклонить до высоты подвеса и отпустить. Длина проволоки 1,5 м, ее поперечное сечение 1 мм^2, модуль Юнга $E = 196$ ГПа.

Дано: $l = 1{,}5$ м; $S = 10^{-6}$ м^2; $E = 1{,}96 \cdot 10^{11}$ Па, $P = 50$ Н. Найти: Δl – ?

Решение. Величину удлинения проволоки будем искать из закона Гука для деформации растяжения $\sigma = \varepsilon E$:

$$\sigma = \frac{F}{S} = \frac{\Delta l}{l} E, \quad \text{тогда} \quad \Delta l = \frac{Fl}{ES}.$$

Сила F, под действием которой растягивается в нижней точке траектории проволока с грузом, складывается из веса груза и действующей на груз центростремительной силы:

$$F = P + \frac{m\upsilon^2}{l + \Delta l},$$

где υ – скорость груза.

По закону сохранения энергии

$$\frac{m\upsilon^2}{2} = mg(l + \Delta l),$$

где первое слагаемое – кинетическая энергия груза в нижней точке траектории, а второе – убыль его потенциальной энергии при опускании с высоты $(l + \Delta l)$.

Тогда $$m\upsilon^2 = 2mg(l + \Delta l)$$

и сила $$F = P + \frac{2mg(l + \Delta l)}{l + \Delta l} = 3P.$$

Сопоставив эти два уравнения, выразим

$$\Delta l = \frac{3Pl}{ES}.$$

Проверим размерность

$$\left[\Delta l\right] = \frac{\text{Н} \cdot \text{м}}{\text{Па} \cdot \text{м}^2} = \text{м}.$$

Подставляя данные, получим численные значения искомых величин:

$$\Delta l = \frac{3 \cdot 50 \cdot 1{,}5}{1{,}96 \cdot 10^{11} \cdot 10^{-6}} = 1{,}15 \cdot 10^{-3}.$$

Ответ: $\Delta l = 1{,}15 \cdot 10^{-3}$ м.

Пример 4. Стальная проволока закреплена неподвижно одним концом, к другому – подвешен груз массой 800 кг. Найти абсолютное и относительное удлинения проволоки, если ее длина 3 м, а площадь поперечного сечения 1 мм^2. Модуль Юнга $E = 196$ ГПа.

Дано: $m = 8 \cdot 10^2$ кг; $l = 3$ м; $S = 10^{-6}$ м^2; $E = 1{,}96 \cdot 10^{11}$ Па. Найти: Δl; ε – ?

Решение. Воспользуемся законом Гука:

$$\sigma = \varepsilon E, \tag{1}$$

где напряжение растянутой проволоки

$$\sigma = \frac{F}{S} = \frac{mg}{S}, \tag{2}$$

а F – сила, действующая вдоль оси стержня, в нашем случае равная силе тяжести.

Относительное удлинение равно отношению абсолютного удлинения к первоначальной длине проволоки

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l}.$$

Подставим данное уравнение и уравнение (2) в (1):

$$\frac{mg}{S} = \frac{\Delta l}{l} E,$$

откуда

$$\Delta l = \frac{mgl}{ES}.$$

Проверим размерность

$$\left[\Delta l\right] = \frac{\text{кг} \cdot \text{м/с}^2 \cdot \text{м}}{\text{Па} \cdot \text{м}^2} = \text{м}, \quad \left[\varepsilon\right] = \frac{\text{м}}{\text{м}} = 1.$$

Подставляя данные, получим численные значения искомых величин:

$$\Delta l = \frac{8 \cdot 10^2 \cdot 9{,}8 \cdot 3}{1{,}96 \cdot 10^{11} \cdot 10^{-6}} = 4 \cdot 10^{-4}, \quad \varepsilon = \frac{4 \cdot 10^{-4}}{3} = 1{,}3 \cdot 10^{-4}.$$

Ответ: $\Delta l = 4 \cdot 10^{-4}$ м; $\varepsilon = 1{,}3 \cdot 10^{-4}$.

6.3. Задачи для самостоятельного решения

1. Напряжение, возникающее в проволоке при подвешивании к ней груза массой 3 кг, равно 5,99 МПа. Определить диаметр проволоки. (Ответ: $d = 2{,}5$ мм).

2. В стержне диаметром 0,5 см в результате действия силы, направленной вдоль его оси, возникает напряжение 180 МПа. Определить величину этой силы. (Ответ: $F = 3{,}5$ кН).

3. Какую величину не будет превышать напряжение в стержне крюка подъемного крана при равномерном подъеме груза весом 25 кН? Диаметр стержня 2,5 см. (Ответ: $\sigma = 51$ МПа).

4. К стальному стержню с площадью поперечного сечения 8 см^2 подвешен груз массой 7,5 т. Определить запас прочности этого стержня, если разрушающее напряжение для данной марки стали при растяжении равно 600 МПа. Массу стержня не учитывать. (Ответ: $n = 2{,}45$).

5. Две проволоки, диаметр первой из которых в 3 раза больше, чем диаметр второй, подвержены действию одинаковых растягивающих сил. Сравнить возникающие в них напряжения. (Ответ: $\sigma_2 = 9\sigma_1$).

6. Определить момент силы, приложенной к концу стержня, закрепленного другим концом. Постоянная кручения $C = 150$ кН·м/рад, угол закручивания стержня $\varphi = 15^\circ$. (Ответ: $M = 39$ кН·м).

7. Определить запас прочности кирпичного здания высотой 530 м, если предел прочности кирпича на сжатие составляет 60 МПа. Плотность кирпича $\rho = 1{,}8 \cdot 10^3$ кг/м^3 (Ответ: $n = 6{,}4$).

8. Определить механическое напряжение у основания кирпичной стены высотой 20 м. Плотность кирпича $\rho = 1{,}8 \cdot 10^3$ кг/м^3. (Ответ: $\sigma = 3{,}53 \cdot 10^5$ Па).

9. Медная проволока с площадью поперечного сечения 2,0 мм^2 разорвалась под действием груза, весящего 440 Н. Определить предел прочности меди. (Ответ: $\sigma_{пр} = 2{,}2 \cdot 10^8$ Па).

10. Свинцовая проволока подвешена в вертикальном положении за верхний конец. Какую наибольшую длину может иметь проволока, не обрываясь под действием силы тяжести? Предел прочности свинца равен $\sigma_{пр} = 12{,}3$ МПа, плотность свинца 11,3 г/см^3. (Ответ: $l = 111$ м).

11. К вертикальной проволоке длиной 5 м и площадью поперечного сечения 2 мм^2 подвешен груз массой 5,1 кг. В результате проволока удлинилась на 0,6 мм. Найти модуль Юнга материала проволоки. (Ответ: $E = 208$ ГПа).

12. Медный стержень длиной 3 м и площадью поперечного сечения 1,5 мм^2 растягивают. Определить работу растяжения, если относительное удлинение равно 0,001. (Ответ: $A = 292$ Дж).

13. Стальная струна диаметром 0,5 мм и длиной 80 см растягивается на 1 мм. Определить работу растяжения струны и силу, приложенную к струне. (Ответ: $A = 2{,}6 \cdot 10^{-2}$ Дж; $F = 52$ Н).

14. Определить относительное удлинение алюминиевого стержня, если при его растяжении затрачена работа 62,1 Дж. Длина стержня 2 м, площадь поперечного сечения 1 мм^2, модуль Юнга для алюминия $E = 69$ ГПа (Ответ: $\varepsilon = 0{,}03$).

15. Какую работу нужно совершить, чтобы растянуть на 1 мм стальной стержень длиной 1 м и площадью поперечного сечения 1 см^2? Модуль Юнга для стали 200 ГПа. (Ответ: $A = 10$ Дж).

16. Для сжатия пружины на 1 см нужно приложить силу 10 Н. Какую работу нужно совершить, чтобы сжать пружину на 10 см, если сила пропорциональна сжатию? (Ответ: $A = 5$ Дж).

17. Пружина жесткостью $k = 1$ кН/м была сжата на 4 см. Какую нужно совершить работу, чтобы сжатие пружины увеличить до 18 см? (Ответ: $A = 15{,}4$ Дж).

18. Стальной стержень массой 3,9 кг растянут на 0,001 своей первоначальной длины. Найти потенциальную энергию растянутого стержня. Модуль Юнга для стали 200 ГПа, плотность стали 7,87 г/см^3. (Ответ: $\Pi = 50$ Дж).

19. Стальной стержень длиной 2 м и площадью поперечного сечения 2 см^2 растягивается некоторой силой так, что удлиняется на 0,4 см. Вычислить потенциальную энергию растянутого стержня. Модуль Юнга для стали 200 ГПа. (Ответ: $\Pi = 160$ Дж).

20. Стальной стержень длиной 2 м и площадью поперечного сечения 2 см^2 растягивается силой 10 кН. Определить потенциальную энергию растянутого стержня. Модуль Юнга для стали 200 ГПа. (Ответ: $\Pi = 2{,}5$ Дж).

21. Как отличаются относительные и абсолютные удлинения двух проволок из одного и того же материала при одинаковых растягивающих их силах, если длина и диаметр первой из них в два раза больше, чем у второй. Массой проволок пренебречь. (Ответ: $\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} = 4$; $\frac{\Delta l_2}{\Delta l_1} = 2$).

22. При растяжении алюминиевой проволоки длиной 2 м в ней возникло механическое напряжение 35 МПа. Найти ее относительное и абсолютное удлинения. (Ответ: $\varepsilon = 0{,}0005$; $\Delta l = 1$ мм).

23. Найти напряжение, возникающее в стальном тросе при его относительном удлинении 0,001. (Ответ: $\sigma = 200$ МПа).

24. Во сколько раз абсолютное удлинение медной проволоки больше, чем стальной (такой же длины и такого же поперечного сечения), при действии на них одинаковых растягивающих сил? (Ответ: $\frac{\Delta l_1}{\Delta l_2} = 1{,}67$).

25. К концам стальной проволоки длиной 3 м и поперечным сечением 1 мм^2 приложены растягивающие силы по 200 Н каждая. Найти абсолютное и относительное удлинения. (Ответ: $\Delta l = 3$ мм; $\varepsilon = 0{,}001$).

26.* Стальной стержень массой 3,9 кг растянут на 0,001 своей первоначальной длины. Найти потенциальную энергию растянутого стержня. Модуль Юнга для стали 200 ГПа, плотность стали 7,87 г/см^3. (Ответ: $П = 50$ Дж).

27.* Найти напряжение, возникающее в стальном тросе при его относительном удлинении 0,001. (Ответ: $\sigma = 200$ МПа).

28.* При каком абсолютном удлинении стальной стержень длиной 2 м и площадью поперечного сечения 10 мм^2 обладает потенциальной энергией 44 мДж? (Ответ: $\Delta l = 2{,}8 \cdot 10^{-4}$ м).

29.* Определить относительное удлинение медного стержня, если при его растяжении работа упругой силы равна 0, 24 Дж. Длина стержня 2 м, а площадь его поперечного сечения 2 мм^2. (Ответ: $\varepsilon = 0{,}001$).

30.* Под действием силы 100 Н проволока длиной 5 м и площадью поперечного сечения 2,5 мм^2 удлинилась на 1 мм. Определить напряжение, испытываемое проволокой, модуль Юнга и энергию упругой деформации. (Ответ: $\sigma = 4 \cdot 10^7$ Па; $E = 2 \cdot 10^{11}$ Па; $П = 5 \cdot 10^{-2}$ Дж).

7. МОЛЕКУЛЯРНО-КИНЕТИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ И ТЕРМОДИНАМИКА

7.1. Основы молекулярно-кинетической теории. Уравнение Клапейрона–Менделеева

7.1.1. Основные формулы

◊ Количество вещества ν – число структурных элементов, содержащихся в системе или теле. Количество вещества выражается в молях. Моль равен количеству вещества системы, содержащей столько же структурных элементов, сколько содержится атомов в углероде C^{12} массой 0,012 кг:

$$\nu = \frac{N}{N_A},$$

где N – число молекул (структурных элементов, составляющих систему); N_A = 6,022·10^{23} моль$^{-1}$ – постоянная Авогадро.

◊ Молярная масса μ вещества

$$\mu = \frac{m}{\nu},$$

где m – масса однородного тела (системы).

◊ Относительная молекулярная масса вещества

$$\mu_r = \sum_i n_i A_{r,i},$$

где n_i – число атомов i-го химического элемента, входящего в состав молекулы данного вещества; $A_{r,i}$ – относительная атомная масса (приводится в таблице Д.И. Менделеева) этого элемента.

Связь молярной массы μ с относительной молекулярной массой вещества

$$\mu = k\mu_r,$$

где k = 10^{-3} кг/моль.

◊ Молярная масса смеси газов определяется по формуле

$$\mu = \frac{m_1 + m_2 + ... + m_n}{\nu_1 + \nu_2 + ... + \nu_n},$$

где m_i – масса i-го газа, входящего в смесь; $\nu_i = \frac{m_i}{\mu_i}$ – число молей i-го газа, находящегося в смеси; n – число различных газов в смеси.

◊ Уравнение Клапейрона–Менделеева (уравнение состояния идеального газа)

$$pV = \frac{m}{\mu}RT,$$

где R = 8,31 Дж/(моль·К) – молярная газовая постоянная; μ – молярная масса; m – масса газа.

◊ Масса одной молекулы m_0 любого вещества

$$m_0 = \frac{\mu}{N_A}.$$

◊ Число молекул N в данной массе m вещества

$$N = \frac{m}{\mu}N_A.$$

◊ Концентрация частиц (молекулы, атомы и т. п.) однородной системы

$$n = \frac{N}{V},$$

где V – объем системы.

◊ Зависимость давления газа от концентрации молекул и от температуры

$$P = nkT,$$

где $k = 1{,}38 \cdot 10^{-23}$ Дж/К – постоянная Больцмана ($k = R / N_A$); T – термодинамическая температура.

◊ Закон Дальтона определяет давление смеси газов

$$p = p_1 + p_2 + ... + p_i,$$

где p_i – парциальное давление газа, т.е. давление, которое оказывал бы i-й газ на стенку сосуда, если бы других газов не было.

7.1.2. Примеры решения задач

Пример 1. В сосуде находится газ массой 12 кг при давлении 8 МПа. Давление в сосуде понижают до 2 МПа, выпустив из него часть газа. Считая, что температура газа неизменна, определить массу выпущенного газа.

Дано: $m_1 = 12$ кг; $P_1 = 8$ МПа; $P_2 = 2$ МПа; $T = \mathrm{const}$. Найти: Δm – ?

Решение. Запишем уравнение Клапейрона–Менделеева для начального и конечного состояний газа:

$$p_1 V_1 = \frac{m}{\mu} RT,$$

$$p_2 V_2 = \frac{m}{\mu} RT.$$

Разделим первое уравнение на второе:

$$\frac{P_1 V_1}{P_2 V_2} = \frac{m_1}{m_2}$$

и так как объем сосуда измениться не может $(V_1 = V_2 = V)$, то

$$\frac{P_1}{P_2} = \frac{m_1}{m_2}.$$

По условию задачи $m_2 = m_1 - \Delta m$.

Подставим

$$\frac{P_1}{P_2} = \frac{m_1}{m_1 - \Delta m},$$

откуда

$$\Delta m = \frac{m_1 (P_1 - P_2)}{P_1}.$$

Проверим размерность

$$[\Delta m] = \frac{\text{кг} \cdot \text{Па}}{\text{Па}} = \text{кг}.$$

Подставив численные значения заданных величин, получим

$$\Delta m = \frac{12 \cdot (8-2) \cdot 10^6}{8 \cdot 10_6} = 9.$$

Ответ: $\Delta m = 9$ кг.

Пример 2. Определить вместимость баллона, в котором содержится смесь из двух газов: азота массой 1 кг и водорода массой 2 кг при нормальных условиях, а также молекулярную массу смеси.

Дано: $m_1 = 1$ кг; $m_2 = 2$ кг; $\mu_1 = 28 \cdot 10^{-3}$ кг/моль; $\mu_2 = 2 \cdot 10^{-3}$ кг/моль; $P = 1{,}013 \cdot 10^5$ Па; $T = 273$ К. Найти: V и $\mu_{см}$ – ?

Решение. Пусть m_1 и μ_1 – масса и молярная масса азота, а m_2 и μ_2 – масса и молярная масса водорода.

Запишем закон Дальтона, определяющий давление смеси газов. В нашем случае он выглядит как

$$p = p_1 + p_2,$$

где p_1 и p_2 – парциальные давления азота и водорода соответственно. Определим их из уравнения Клапейрона–Менделеева:

$$p_1 = \frac{m_1}{\mu_1 V} R T_1, \quad p_2 = \frac{m_2}{\mu_2 V} R T_2,$$

где V – объем баллона, в котором находится смесь газов; $T_1 = T_2 = T$ – температура смеси; R = 8,31 Дж/(моль·К) – молярная газовая постоянная.

Давление смеси найдем из выражения

$$p = \frac{m_{см}}{\mu_{см} V} R T,$$

где $m_{см}$ – масса смеси газов, кг; $\mu_{см}$ – молярная масса смеси, кг/моль.

Для смеси газов выполняется соотношение

$$\frac{m_{см}}{\mu_{см}} = \frac{m_1}{\mu_1} + \frac{m_2}{\mu_2},$$

или

$$\mu_{ст} = \frac{(m_1 + m_2)\mu_1 \mu_2}{m_1 \mu_2 + m_2 \mu_1}.$$

Объем сосуда со смесью газов определим из уравнения Клапейрона–Менделеева:

$$V = \frac{RT}{p} \cdot \frac{m_{cm}}{\mu_{cm}}.$$

Проверим размерность

$$[\mu_{см}] = \frac{\text{кг} \cdot \text{кг/моль} \cdot \text{кг/моль}}{\text{кг} \cdot \text{кг/моль}} = \frac{\text{кг}}{\text{моль}};$$

$$[V] = \frac{\text{Дж/(моль} \cdot \text{К)} \cdot \text{К} \cdot \text{кг}}{\text{Па} \cdot \text{кг/моль}} = \text{м}^3.$$

Подставив численные значения заданных величин, получим

$$\mu_{см} = \frac{(1+2) \cdot 28 \cdot 10^{-3} \cdot 2 \cdot 10^{-3}}{1 \cdot 2 \cdot 10^{-3} + 2 \cdot 28 \cdot 10^{-3}} = 2{,}9 \cdot 10^{-3},$$

$$V = \frac{8{,}31 \cdot 273 \cdot 3}{1{,}013 \cdot 10^5 \cdot 2{,}9 \cdot 10^{-3}} = 22{,}25.$$

Ответ: $V = 22{,}25$ м^3; $\mu_{см} = 2{,}9 \cdot 10^{-3}$ кг/моль.

Пример 3. Определить плотность кислорода, если его давление 100 кПа, а температура 12 °С.

Дано: $P = 100$ кПа $= 10^5$ Па; $T = 12 + 273 = 285$ К. Найти: ρ – ?

Решение. Плотность можно определить из выражения

$$\rho = \frac{m}{V},$$

где V – объем газа, а m – его масса. Массу выразим из уравнения Клапейрона–Менделеева

$$m = \frac{PV\mu}{RT},$$

где R = 8,31 Дж/(моль·К) – молярная газовая постоянная.

Подставив, получим следующее выражение для плотности кислорода

$$\rho = \frac{P\mu}{RT}.$$

Проверим размерность

$$[\rho] = \frac{\text{Па} \cdot \text{кг/моль}}{\text{Дж/(моль} \cdot \text{К)} \cdot \text{К}} = \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}.$$

Подставив численные значения заданных величин, получим

$$\rho = \frac{10^5 \cdot 32 \cdot 10^{-3}}{8{,}31 \cdot 285} = 1{,}35.$$

Ответ: $\rho = 1{,}35$ кг/м^3.

Пример 4. Найти массу кислорода, находящегося в сосуде объемом 5 л, если его концентрация составляет $8 \cdot 10^{25}$ м$^{-3}$.

Дано: $V = 5$ л $= 5 \cdot 10^{-3}$ м^3; $n = 8 \cdot 10^{25}$ м$^{-3}$. Найти: m – ?

Решение. Концентрацию кислорода можно выразить формулой

$$n = \frac{N}{V}, \tag{1}$$

где V – объем сосуда; N – число молекул кислорода, содержащихся в сосуде. В свою очередь, N определим из соотношения

$$N = \frac{m}{\mu} N_A, \tag{2}$$

где $\mu = 32 \cdot 10^{-3}$ кг/моль – молярная масса кислорода; N_A = 6,022·10^{23} моль$^{-1}$ – постоянная Авогадро.

После подстановки (2) в (1) получим выражение для искомой массы

$$m = \frac{n\mu V}{N_A}.$$

Проверим размерность

$$[m] = \frac{\text{м}^{-3} \cdot (\text{кг/моль}) \cdot \text{м}^3}{\text{моль}^{-1}} = \text{кг}.$$

Подставив численные значения заданных величин, получим

$$m = \frac{8 \cdot 10^{25} \cdot 32 \cdot 10^{-3} \cdot 5 \cdot 10^{-3}}{6{,}022 \cdot 10^{23}} = 0{,}02.$$

Ответ: $m = 0{,}02$ кг.

7.1.3. Задачи для самостоятельного решения

1. Определить минимальный объем сосуда, который вмещал бы кислород массой 6,4 кг при температуре 20 °С, если его стенки выдерживают давление 16 МПа. (Ответ: $V = 30{,}4 \cdot 10^{-3}$ м^3).

2. Сколько молекул содержится в 1 м^3 воды? Какова масса молекулы? Плотность воды 1000 кг/м^3. (Ответ: $N = 3{,}34 \cdot 10^{28}$; $m_0 = 2{,}99 \cdot 10^{-26}$ кг).

3. Какое число молекул содержится в комнате объемом 80 м^3 при температуре 17 °С и давлении 100 кПа? (Ответ: $N = 2 \cdot 10^{27}$).

4. В сосуде находится смесь 10 г углекислого газа и 15 г азота. Найти плотность этой смеси при температуре 27 °С и давлении $1{,}5 \cdot 10^5$ Н/м^2. (Ответ: $\rho =$ 1,98 кг/м^3).

5. Определить молярную массу смеси кислорода массой 25 г и азота массой 75 г. (Ответ: $\mu_{см} = 28{,}9 \cdot 10^{-3}$ кг/моль).

6. В сосуде находится смесь углекислого газа массой 10 г и азота массой 15 г. Определить плотность смеси при температуре 27 °С и давлении 150 кПа. (Ответ: $\rho = 1{,}98$ кг/м^3).

7. В сосуде объемом 0,3 л при температуре 290 К находится некоторый газ. Насколько понизится давление газа в сосуде, если из него из-за утечки выйдет $\Delta N = 10^{19}$ молекул? (Ответ: на $\Delta P =$ 133 Па).

8. Азот массой 5 г, находящийся в закрытом сосуде объемом 4 л при температуре 20 °С, нагревают до температуры 40 °С. Определить давление газа до и после нагревания. (Ответ: $P_1 = 108$ кПа; $P_2 = 116$ кПа).

9. В баллоне находится 2,8 кг газа при температуре 390 К. Какую массу газа нужно удалить из баллона, чтобы при нагревании оставшегося газа до температуры 840 К давление в баллоне возросло в полтора раза? (Ответ: $\Delta m =$ 0,85 кг).

10. 12 г газа занимают объем $4 \cdot 10^{-3}$ м^3 при температуре 7 °С. После нагревания газа при постоянном давлении его плотность стала равна $6 \cdot 10^{-4}$ г/см^3. До какой температуры нагрели газ? (Ответ: $T_2 =$ 1400 К).

11. Некоторый газ при температуре 10 °С и давлении 200 кПа имеет плотность 0,34 кг/м^3. Определить молярную массу газа. (Ответ: $\mu = 4 \cdot 10^{-3}$ кг/моль).

12. Подсчитать число молекул, содержащихся в единице массы углекислого газа; найти массу одной молекулы; вычислить для нормальных условий число молекул в 1 м^3 газа. (Ответ: $n_m = 1{,}37 \cdot 10^{25}$ кг$^{-1}$; $m_0 = 7{,}31 \cdot 10^{-26}$ кг; $n = 2{,}7 \cdot 10^{25}$ м$^{-3}$).

13. Во сколько раз плотность воздуха, заполняющего помещение зимой при температуре 7 °С, больше его плотности летом при температуре 27 °С (давление газа считать постоянным)? (Ответ: $\frac{\rho_1}{\rho_2} =$ 1,07).

14. В сосуде вместимостью 5 л находится однородный газ количеством вещества 0,2 моль. Определить, какой это газ, если его плотность 1,12 кг/м^3. (Ответ: в сосуде находится азот $\mu = 28 \cdot 10^{-3}$ кг/моль).

15. Определить объем, занимаемый смесью азота массой 1 кг и гелия массой 1 кг при нормальных условиях. (Ответ: $V = 6{,}42$ м^3).

16. В баллоне вместимостью 25 л находится водород при температуре 290 К. После того, как часть водорода израсходовали, давление в баллоне понизилось на 0,4 МПа. Определить массу израсходованного водорода. (Ответ: $\Delta m = 8{,}3$ г).

17. Смесь водорода и азота общей массой 290 г при температуре 600 К и давлении 2,46 МПа занимает объем 30 л. Определить массу водорода и азота. (Ответ: $m_1 = 0{,}01$ кг; $m_2 = 0{,}28$ кг).

18. Посчитать, во сколько раз отличается плотность метана CH_4 от плотности кислорода при одинаковых условиях. (Ответ: $\rho_1 = 0{,}5\rho_2$).

19. Газ при давлении 0,2 МПа и температуре 15 °C имеет объем 5 л. Определить объем этой массы газа при нормальных условиях. (Ответ: $V_2 = 9{,}5$ л).

20. При увеличении абсолютной температуры идеального газа в 2 раза давление газа увеличилось на 25 %. Определить, во сколько раз изменился объем. (Ответ: объем увеличится в 1,6 раза).

21. При уменьшении объема газа в 2 раза давление увеличилось на 120 кПа, а абсолютная температура возросла на 10 %. Определить первоначальное давление. (Ответ: $P_1 = 100$ кПа).

22. Определить температуру, при которой давление газа, занимающего объем 240 л, равно 126,6 кПа, если при нормальных условиях тот же газ занимает объем 364 л. Вычислить массу газа. (Ответ: $T = 225$ К; $m = 32{,}8$ г).

23. Найти плотность кислорода при температуре 300 К и давлении $1{,}6 \cdot 10^5$ Па. Вычислить массу кислорода, занимающего при этих условиях объем 200 м^3. (Ответ: $\rho = 2{,}05$ кг/м^3; $m = 410$ кг).

24. В цилиндре дизельного двигателя автомобиля КамАЗ-5320 температура воздуха в начале такта сжатия была 50 °C. Определить температуру воздуха в конце такта, если его объем уменьшается в 17 раз, а давление возрастает в 50 раз. (Ответ: 677 °C).

25. В баллоне находится газ при температуре 15 °C. Определить, во сколько раз уменьшится давление газа, если 40 % его выйдет из баллона, а температура при этом понизится на 8 °C. (Ответ: давление уменьшится в 1,7 раза).

26.* Плотность смеси гелия и аргона при давлении $1{,}5 \cdot 10^5$ Па и температуре 27 °C равна 2 кг/м^3. Определить концентрацию атомов гелия в смеси газов. Молярная масса гелия μ_1 = 0,004 кг/моль, аргона – μ_2 = 0,04 кг/моль. (Ответ: $n_1 = 5{,}6 \cdot 10^{24}$ м^3).

27.* В воздухе содержится 23,6 % кислорода и 76,4 % азота (по массе) при давлении 100 кПа и температуре 13 °C. Найти плотность воздуха и парциальные давления кислорода и азота. (Ответ: $\rho = 1{,}2$ кг/м^3; $P_1 = 21$ кПа; $P_2 = 79$ кПа).

28.* В первом сосуде объемом 3 л находится газ под давлением 0,2 МПа, во втором сосуде объемом 4 л находится тот же газ под давлением 0,1 МПа. Температуры газов одинаковы. Определить давление, под которым будет находиться газ, если соединить сосуды. (Ответ: $P = 140$ кПа).

29.* В баллоне содержится 2,4 кг газа при температуре 300 К. Какую массу газа нужно удалить из баллона, чтобы при нагревании оставшегося газа до температуры 450 К давление в баллоне осталось прежним? (Ответ: $\Delta m = 0{,}8$ кг).

30.* Баллон вместимостью 30 л содержит смесь водорода и гелия при температуре 300 К и давлении 828 кПа. Масса смеси равна 24 г. Определить массы водорода и гелия. (Ответ: $m_1 = 16$ г; $m_2 = 8$ г).

7.2. Закон распределения скоростей

7.2.1. Основные формулы

◊ Давление газа на стенку сосуда складывается из отдельных ударов молекул о стенку

$$p = \frac{1}{3} n m_0 < \upsilon_{кв} >^2 ,$$

где n – число молекул в единице объема (концентрация); m_0 – масса молекулы; $< \upsilon_{кв} >$ – средняя квадратичная скорость молекул газа.

◊ Основное уравнение молекулярно-кинетической теории газов

$$p = \frac{2}{3} n < \varepsilon_n > ,$$

где p – давление газа; $< \varepsilon_n >$ – средняя кинетическая энергия поступательного движения молекулы.

◊ На одну степень свободы i молекулы приходится средняя кинетическая энергия

$$< \varepsilon_1 > = \frac{1}{2} kT ,$$

где T – абсолютная температура газа, $k = 1{,}38 \cdot 10^{-23}$ Дж/К – постоянная Больцмана.

◊ На все степени свободы i молекулы приходится средняя кинетическая энергия

$$< \varepsilon >= \frac{i}{2} kT .$$

Это полная энергия молекулы.

◊ Средняя кинетическая энергия поступательного движения молекулы

$$< \varepsilon_п >= \frac{3}{2} kT .$$

◊ Средняя кинетическая энергия вращательного движения молекулы

$$< \varepsilon_{вр} >= \frac{i-3}{2} kT .$$

При своем движении молекулы идеального газа, постоянно сталкиваясь друг с другом, беспорядочно меняют как величину, так и направление своей скорости. Охарактеризовать скорость одной молекулы невозможно. Для характеристики движения всей совокупности огромного числа молекул пользуются понятиями наиболее вероятной скорости υ_B; средней арифметической скорости υ_{cp}; средней квадратичной скорости $< \upsilon_{кв} >$

◊ Наиболее вероятная скорость

$$\upsilon_в = \sqrt{\frac{2RT}{\mu}} = \sqrt{\frac{2kT}{m_0}} .$$

◊ Средняя арифметическая скорость

$$< \upsilon > = \sqrt{\frac{8RT}{\pi\mu}} = \sqrt{\frac{2kT}{\pi m_0}} .$$

◊ Средняя квадратичная скорость

$$< \upsilon_{кв} >= \sqrt{\frac{3RT}{\mu}} = \sqrt{\frac{3kT}{m_0}} ,$$

где $R = 8{,}31$ Дж/(моль·К) – молярная газовая постоянная; T – абсолютная температура газа; μ – масса одного моля газа; $k = 1{,}38 \cdot 10^{-23}$ Дж/К – постоянная Больцмана; m_0 – масса одной молекулы газа.

7.2.2. Примеры решения задач

Пример 1. Определить внутреннюю энергию, которой обладает водород массой 50 г, имеющий температуру 20 °С, а также доли этой энергии, приходящиеся на поступательное и вращательное движение.

Дано: $m = 50$, $г = 0{,}05$ кг; $T = (273 + 20)$, К $= 293$ К. Найти: $E, E_n, E_{вр}$.

Решение. Внутренняя энергия произвольной массы m газа определяется формулой

$$E = \frac{i}{2}\frac{m}{\mu}kTN_A = \frac{i}{2}\frac{m}{\mu}RT,$$

где $i = 5$ – число степеней свободы двухатомного газа; $R = 8{,}31$ Дж/(моль·К) – молярная газовая постоянная; $\mu = 2 \cdot 10^{-3}$ кг/моль – молярная масса водорода.

На энергию поступательного движения молекул всегда приходится 3 степени свободы $i_п = 3$, а на энергию вращательного движения – оставшиеся степени свободы, в нашем случае – 2 степени свободы $i_{вр} = 2$.

Тогда доли внутренней энергии, приходящиеся на поступательное и вращательное движение молекул водорода, найдем из выражений:

$$E_п = \frac{3}{2}\frac{m}{\mu}RT \quad \text{и} \quad E_{вр} = \frac{2}{2}\frac{m}{\mu}RT.$$

Проверим размерность

$$[E] = \frac{\text{кг}}{\text{кг/моль}} \cdot \frac{\text{Дж}}{\text{моль} \cdot \text{К}} \cdot \text{К} = \text{Дж}.$$

Подставив численные значения заданных величин, получим

$$E = \frac{5}{2} \cdot \frac{0{,}05}{2 \cdot 10^{-3}} \cdot 8{,}31 \cdot 293 = 152 \cdot 10^3;$$

$$E_п = \frac{3}{2} \cdot \frac{0{,}05}{2 \cdot 10^{-3}} \cdot 8{,}31 \cdot 293 = 91{,}3 \cdot 10^3;$$

$$E_{вр} = \frac{2}{2} \cdot \frac{0{,}05}{2 \cdot 10^{-3}} \cdot 8{,}31 \cdot 293 = 60{,}7 \cdot 10^3.$$

Ответ. $E = 152 \cdot 10^3$ Дж, $E_п = 91{,}3 \cdot 10^3$ Дж, $E_{вр} = 60{,}7 \cdot 10^3$ Дж.

Задача 7.2. Молекулы некоторого газа при нормальных условиях имеют среднюю квадратичную скорость 450 м/с. Сколько молекул N содержится в 1 кг этого газа?

Дано: $m = 1$ кг; $< \upsilon_{кв} > = 450$ м/с. Найти: N – ?

Решение. Число молекул в 1 кг (единица массы) газа найдем из соотношения

$$N = N_A \frac{m}{\mu},$$

где N_A = 6,022·10^{23} моль$^{-1}$ – постоянная Авогадро; μ – неизвестная молярная масса газа. Для нахождения молярной массы воспользуемся выражением для средней квадратичной скорости молекул

$$< \upsilon_{кв} >= \sqrt{\frac{3RT}{\mu}},$$

где $T = 273$ К – термодинамическая температура, соответствующая нормальным условиям; $R = 8{,}31$ Дж/(моль·К) – молярная газовая постоянная. Тогда

$$\mu = \frac{3RT}{< \upsilon_{кв} >^2} .$$

При подстановке одного выражения в другое:

$$N = \frac{mN_A < \upsilon_{кв} >^2}{3RT} .$$

Проверим размерность

$$[N] = \frac{\text{кг} \cdot \text{моль}^{-1} \cdot (\text{м}/\text{с})^2}{\text{Дж}/(\text{моль} \cdot \text{К}) \cdot \text{К}} = \text{кг}^{-1}.$$

Подставив численные значения заданных величин, получим

$$N = \frac{1 \cdot 6{,}022 \cdot 10^{23} \cdot (450)^2}{3 \cdot 8{,}31 \cdot 273} = 1{,}79 \cdot 10^{25}.$$

Ответ: $N = 1{,}79 \cdot 10^{25}$ кг$^{-1}$.

Пример 3. Определить полную внутреннюю энергию одноатомного газа, который находится в сосуде объемом 1 л под давлением 80 кПа.

Дано: $V = 1$ л $= 10^{-3}$ м^3; $P = 80$ кПа $= 8 \cdot 10^4$ Па. Найти: E – ?

Решение. Внутренняя энергия произвольной массы m газа определяется формулой

$$E = \frac{i}{2}\frac{m}{\mu}kTN_A = \frac{i}{2}\frac{m}{\mu}RT,$$

где $i = 3$ – число степеней свободы одноатомного газа; $R = 8{,}31$ Дж/(моль·К) – молярная газовая постоянная; μ – молярная масса газа; T – его термодинамическая температура. В уравнении (1) неизвестны три величины. Для того чтобы заменить их известными параметрами, воспользуемся уравнением Клапейрона–Менделеева

$$pV = \frac{m}{\mu}RT,$$

и сопоставим уравнения

$$E = \frac{i}{2}PV.$$

Проверим размерность

$$[E] = \text{Па} \cdot \text{м}^3 = \text{Дж}.$$

Подставив численные значения заданных величин, получим

$$E = \frac{3}{2} \cdot 8 \cdot 10^4 \cdot 10^{-3} = 120.$$

Ответ: $E = 120$ Дж.

Пример 4. Определить температуру, при которой наиболее вероятная скорость молекул азота будет равна 500 м/с.

Дано: $\upsilon_в = 500$ м/с. Найти: T – ?

Решение. Известно, что наиболее вероятная скорость молекул связана с температурой газа соотношением

$$\upsilon_в = \sqrt{\frac{2RT}{\mu}},$$

в котором $R = 8{,}31$ Дж/(моль·К) – молярная газовая постоянная; $\mu = 28 \cdot 10^{-3}$ кг/моль – молярная масса азота; T – его термодинамическая температура. Исходя из этого температура будет определяться выражением

$$T = \frac{\upsilon_в^2 \cdot \mu}{2 \cdot R}.$$

Проверим размерность

$$[T] = \frac{(\text{м}/\text{с})^2 \cdot \text{кг}/\text{моль}}{\text{Дж}/(\text{моль} \cdot \text{К})} = \text{К}.$$

Подставив численные значения заданных величин, получим

$$T = \frac{500^2 \cdot 28 \cdot 10^{-3}}{2 \cdot 8{,}31} = 421.$$

Ответ. $T = 421$ К.

7.2.3. Задачи для самостоятельного решения

31. Найти среднюю квадратичную скорость движения молекул воздуха при нормальных условиях. Воздух считать однородным газом с молярной массой 0,029 кг/моль. (Ответ: $< \upsilon_{кв} > = 485$ м/с).

32. Найти наиболее вероятную скорость молекул гелия при температуре 10 К. (Ответ: $\upsilon_в = 204$ м/с).

33. Найти температуру, при которой средняя арифметическая скорость молекул кислорода составляет 495 м/с. (Ответ: $t = 55$ °С).

34. Молекулы какого газа имеют среднюю квадратичную скорость в четыре раза большую средней квадратичной скорости молекул кислорода при одинаковой температуре? (Ответ: молекулы водорода).

35. Найти отношение средних квадратичных скоростей движения молекул воздуха $<\upsilon_{кв}>_1$ и взвешенной в воздухе пылинки массой $1{,}74\cdot 10^{-12}$ кг $<\upsilon_{кв}>_2$. (Ответ: $\frac{<\upsilon_{кв}>_1}{<\upsilon_{кв}>_2} = 6\cdot 10^5$).

36. В 1 см^3 газа содержится $3\cdot 10^{19}$ молекул. Определить давление газа, если средняя кинетическая энергия поступательного движения отдельных молекул газа равна $5\cdot 10^{-21}$ Дж. (Ответ: $P = 10^5$ Па).

37. Средняя кинетическая энергия поступательного движения одной молекулы газа равна $6{,}9\cdot 10^{-21}$ Дж. Определить температуру газа. (Ответ: $T = 330$ К).

38. Наиболее вероятная скорость молекул кислорода при давлении 240 мм рт. ст. составляет 160 м/с. Определить число молекул в 100 см^3. (Ответ: $N = 7{,}2\cdot 10^{22}$).

39. Наиболее вероятная скорость молекул газа при давлении 40 кПа равна 478 м/с. Определить плотность газа. (Ответ: $\rho = 0{,}35$ кг/м^3).

40. В баллоне ёмкостью 8 л содержится 2 кг газа при давлении $5\cdot 10^5$ Па. Определить среднюю квадратичную, среднюю арифметическую и наиболее вероятную скорости молекул газа. (Ответ: $<\upsilon_{кв}> = 77{,}46$ м/с; $<\upsilon> = 71{,}4$ м/с; $\upsilon_в = 63{,}26$ м/с).

41. Определить, сколько необходимо молекул газа, чтобы их кинетическая энергия поступательного движения при температуре 32 °С была равна 1 Дж. (Ответ: $N = 6{,}27\cdot 10^{21}$).

42. Определить, сколько необходимо молекул водорода, чтобы их полная кинетическая энергия при температуре 32 °С была равна 1 Дж. (Ответ: $N = 9{,}5\cdot 10^{19}$).

43. Плотность некоторого газа при нормальных условиях равна 0,09 кг/м^3. Определить среднюю квадратичную скорость молекул газа. (Ответ: $<\upsilon_{кв}> = 1{,}84\cdot 10^3$ м/с).

44. Определить массу 1 кмоль газа, средняя квадратичная скорость которого при температуре 320 К равна 350 м/с. (Ответ: $\mu = 65$ кг/кмоль).

45. Определить массу взвешенной в воздухе микроскопической пылинки, если ее средняя квадратичная скорость при температуре 120 °С равна 0,41 см/с. (Ответ: $m = 10^{-15}$ кг).

46. Найти среднюю квадратичную скорость движения молекул водорода, концентрация которых при давлении 266,6 Па составляет $4{,}2 \cdot 10^{24}$ м$^{-3}$. (Ответ: $< v_{кв} > = 24 \cdot 10^{3}$ м/с).

47. Найти импульс молекулы водорода при температуре 20 °С (скорость молекулы считать равной средней квадратичной скорости). (Ответ: $m < v_{кв} > = 6{,}3 \cdot 10^{-24}$ (кг·м)/с).

48. Определить внутреннюю энергию 20 г кислорода при температуре 20 °С. Какая часть этой энергии приходится на долю поступательного движения молекул и какая – на вращательное движение? (Ответ: $E = 3{,}7$ кДж; $E_{пост} = 2{,}2$ кДж; $E_{вращ} = 1{,}5$ кДж).

49. Определить среднюю арифметическую скорость молекул газа, если их средняя квадратичная скорость равна $< \upsilon_{кв} > = 1$ км/с. (Ответ: $< v > = 0{,}92$ км/с).

50. Определить кинетическую энергию, приходящуюся в среднем на одну степень свободы молекулы азота, при температуре 1 кК, а также среднюю кинетическую энергию поступательного движения, вращательного движения и среднее значение полной кинетической энергии молекулы. (Ответ: $\varepsilon_1 = 6{,}9 \cdot 10^{-21}$ Дж; $\varepsilon_{пост} = 20{,}7 \cdot 10^{-21}$ Дж; $\varepsilon_{вращ} = 13{,}8 \cdot 10^{-21}$ Дж; $\varepsilon = 34{,}5 \cdot 10^{-21}$ Дж).

51. Смесь гелия и аргона находится при температуре 1,2 кК. Определить среднюю квадратичную скорость и среднюю кинетическую энергию атомов гелия и аргона. (Ответ: гелий: $< \upsilon_{кв} > = 2{,}73 \cdot 10^{3}$ м/с; $\varepsilon = 2{,}48 \cdot 10^{-20}$ Дж; аргон: $< \upsilon_{кв} > = 8{,}64$ м/с; $\varepsilon = 2{,}48 \cdot 10^{-20}$ Дж).

52. При какой температуре средняя квадратичная скорость молекул азота больше их наиболее вероятной скорости на $\Delta\upsilon = 50$ м/с? (Ответ: при $T = 83$ К).

53. Найти среднюю арифметическую, среднюю квадратичную и наиболее вероятную скорости молекул идеального газа, у которого при давлении 300 мм рт. ст. плотность составляет 0,3 кг/м^3. (Ответ: $< \upsilon > = 579$ м/с; $< \upsilon_{кв} > = 628$ м/с; $\upsilon_{в} = 513$ м/с).

54. Найти отношение средних квадратичных скоростей молекул гелия и азота при одинаковых температурах. (Ответ: $\frac{< v_{кв} > \mathrm{He}}{< v_{кв} > \mathrm{N_2}} = 2{,}65$).

55. Определить энергию теплового движения молекул двухатомного газа, заключенного в сосуд объемом 2 л и находящегося под давлением 150 кПа. (Ответ: $E = 750$ Дж).

56.* Частицы гуммигута диаметром 1 мкм участвуют в броуновском движении. Плотность гуммигута 1 г/см^3. Определить среднюю квадратичную скорость частиц гуммигута при температуре 0 °С. (Ответ: $<\upsilon_{кв}> = 4{,}6\cdot10^{-3}$ м/с).

57.* Кинетическая энергия поступательного движения молекулы азота, находящегося в баллоне объемом 0,02 м^3, равна 5 кДж, а средняя квадратичная скорость его молекул равна $2\cdot10^3$ м/с. Определить массу азота в баллоне и давление, под которым находится азот. (Ответ: $m = 2{,}5$ г; $P = 167$ кПа).

58.* При изохорном нагревании давление водорода увеличилось в 1,44 раза. Как и во сколько раз увеличилась средняя квадратичная скорость молекул водорода? (Ответ: $<v_{кв}>2 = 1{,}2<v_{кв}>1$).

59.* В баллоне объемом 10^{-3} м^3 находится азот под давлением 200 кПа. Известно, что 1 см^3 газа содержит $4{,}3\cdot10^{19}$ молекул. Вычислить энергию поступательного движения одной молекулы и суммарную энергию всех молекул. Найти среднюю квадратичную скорость молекул и плотность газа. (Ответ: $\varepsilon = 7\cdot10^{-21}$ Дж; $E = 300$ Дж; $<\upsilon_{кв}> = 550$ м/с; $\rho = 2$ кг/м^3).

60.* Средняя квадратичная скорость молекул ацетилена, находящегося в закрытом баллоне, равна 500 м/с. Плотность газа равна 18 кг/м^3. Определить энергию поступательного движения одной молекулы и суммарную энергию всех молекул. Найти давление газа, если его масса равна 7,2 кг. (Ответ: $\varepsilon = 5{,}4\cdot10^{-21}$ Дж; $E = 9\cdot10^5$ Дж; $P = 1{,}5$ МПа).

7.3. Первый закон термодинамики. Работа газа

7.3.1. Основные формулы

◊ Внутренняя энергия газа

$$U = \frac{i}{2}\frac{m}{\mu}RT,$$

где i – число степеней свободы газа (для одноатомного $i = 3$, двухатомного $i = 5$, трехатомного и многоатомного $i = 6$); m и μ – масса и молярная масса газа соответственно.

Внутренняя энергия есть сумма всех кинетических и потенциальных энергий молекул. Для идеального газа принимается, что потенциальная энергия молекул равна нулю.

◊ Первый закон термодинамики (закон охранения энергии в тепловых процессах): количество теплоты, передаваемое газу, идет на изменение его внутренней энергии и на совершение газом работы, против внешних сил:

$$\delta Q = dU + \delta A,$$

где dU – изменение внутренней энергии; δA – элементарная работа газа при изменении объема на dV.

В табл. 7.1 представлена запись первого закона термодинамики для изопроцессов и адиабатного процесса.

Таблица 7.1

Первый закон термодинамики для различных процессов

Наименование	Название процесса			
	Изотермический	Изобарный	Изохорный	Адиабатный
	$T = const$	$p = const$	$V = const$	$\delta Q = 0$
Уравнение процесса	$pV = const$	$\frac{V}{T} = const$	$\frac{p}{T} = const$	$pV^{\gamma} = const$ γ – коэффициент адиабаты $\gamma = {}^{c_p}/_{c_V}$
Первый закон термодинамики	$\delta Q = \delta A$ $dU = 0$	$\delta Q = dU + \delta A$	$\delta Q = dU$ $\delta A = 0$	$A = -\Delta U$
Работа газа	$\delta A = pdV$ $A = \frac{m}{\mu} RT ln \frac{V_2}{V_1}$	$\delta A = pdV$ $A = p\Delta V$	$A = 0$	$\delta A = pdV$ $A = -\Delta U$ $A = \frac{p_1V_1}{\gamma - 1}(1 - \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\gamma - 1})$

◊ Элементарное количество теплоты, сообщаемое газу при постоянном объеме

$$\delta Q = \vartheta C_{V\mu} dT,$$

где $C_{V\mu}$ – молярная теплоемкость газа при постоянном объеме.

Элементарное количество теплоты, сообщаемое газу при постоянном давлении,

$$\delta Q = \vartheta C_{P\mu} dT,$$

где $C_{P\mu}$ – молярная теплоемкость газа при постоянном давлении.

Молярные теплоемкости $C_{P\mu}$ и $C_{V\mu}$ связаны соотношением (уравнение Майера):

$$C_{P\mu} - C_{V\mu} = R,$$

где R – универсальная газовая постоянная, $R = 8{,}31$ Дж/моль К.

Для удельных теплоемкостей уравнение Майера имеет вид:

$$c_P - c_V = {}^{R}/_{\mu}.$$

Для теплоемкостей C_P и C_V:

$$C_P - C_V = \vartheta R,$$

где ϑ – количество молей газа.

7.3.2. Примеры решения задач

Пример 1. Некоторая масса кислорода занимает объем 2 л при температуре 17 °С и давлении 800 кПа. В другом состоянии газ имеет объем 5 л и давление 600 кПа. Найти: 1) количество теплоты Q, полученное газом; 2) работу, совершенную газом при расширении; 3) изменение внутренней энергии газа при переходе газа из одного состояния в другое по участку ACB; 4) по участку ADB найти работу газа. Во сколько раз отличается работа газа в первом и во втором процессе?

Дано: $V_1 = 2\text{л} = 2 \cdot 10^{-3}\ \text{м}^3$, $V_2 = 5\text{л} = 5 \cdot 10^{-3}\ \text{м}^3$, $p_1 = 800\text{кПа} = 8 \times \times 10^5\ \text{Па}$, $p_2 = 600\text{кПа} = 6 \cdot 10^5\ \text{Па}$, $T_1 = 290\ K$. Найти: $Q_{ACB}-?$ $Q_{ADB}-?$ $A_{ACB}-?$ $A_{ADB}-?$ $(A_{ACB}/A_{ADB})-?$

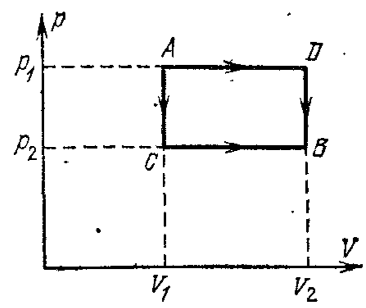


Рис. 7.1

Решение. Рассмотрим участок ACB (рис. 7.1). Газ переходит из точки A в точку C изохорически (с постоянным объемом), а из точки C в точку B изобарно (давление в этом процессе остается постоянным). Запишем первый закон термодинамики для изохорного процесса (табл. 7.1):

$$Q_{AC} = \Delta U_{AC}.$$

Поскольку работа в изохорном процессе равна нулю ($A_{AC} = 0$), то изменение внутренней энергии и количество теплоты можно найти

$$Q_{AC} = \Delta U_{AC} = \frac{i}{2}\frac{m}{\mu} R\Delta T.$$

Для того чтобы найти изменение температуры в изохорном процессе, воспользуемся законом Шарля:

$$\frac{p_A}{p_C} = \frac{T_A}{T_C}.$$

Отсюда

$$T_C = \frac{p_C}{p_A} T_A$$

или согласно данным задачи

$$T_C = \frac{p_2}{p_1} T_1;$$

$$T_C = \frac{600 \cdot 10^3}{800 \cdot 10^3} \cdot 290\text{K} = 217{,}5\ \text{K}.$$

Поскольку масса кислорода неизвестна, запишем уравнение Менделеева–Клапейрона для двух состояний газа:

$$\begin{cases} p_A V_A = \dfrac{m}{\mu} R T_A \\ p_C V_C = \dfrac{m}{\mu} R T_C. \end{cases}$$

Вычтем из второго уравнения первое, общие множители вынесем за скобку:

$$(p_\text{C} - p_A) V_A = \frac{m}{\mu} R (T_\text{C} - T_A)$$

или

$$(p_2 - p_1) V_1 = \frac{m}{\mu} R \Delta T.$$

Сопоставив это выражение с формулой для изменения внутренней энергии, получим

$$Q_{AC} = \Delta U_{AC} = \frac{i}{2}\frac{m}{\mu} R \Delta T = \frac{i}{2} \Delta p V_1.$$

Подставив численные значения, имеем на участке AC

$$Q_{AC} = \Delta U_{AC} = \frac{5}{2}(6 \cdot 10^5 - 8 \cdot 10^5) \cdot 2 \cdot 10^{-3} = -500 \text{ Дж}.$$

Поскольку изменение внутренней энергии получилось отрицательным, это значит, что в результате перехода тело (газ) уменьшило свою внутреннюю энергию. При этом количество теплоты у газа отнималось (он отдавал энергию).

При переходе газа из состояния B в точку C был совершен изобарный процесс (рис. 7.1), поэтому первый закон термодинамики запишется

$$Q_\text{BC} = \Delta U_\text{BC} + A_\text{BC}.$$

Поскольку график дан в координатах PV, то работу найдем по площади, которую участок BC образует с осью абцисс:

$$A_\text{BC} = p_2 (V_2 - V_1) = p_2 \Delta V.$$

Для того чтобы найти изменение внутренней энергии в изобарном процессе, воспользуемся теми же рассуждениями, что и для участка AC. Запишем уравнение Менделеева–Клапейрона для двух состояний газа B и C:

$$\begin{cases} p_C V_C = \dfrac{m}{\mu} R T_C \\ p_B V_B = \dfrac{m}{\mu} R T_B. \end{cases}$$

Вычтем из второго уравнения первое, общие множители вынесем за скобку:

$$p_C (V_B - V_C) = \frac{m}{\mu} R (T_B - T_C)$$

или

$$(V_2 - V_1)p_2 = \frac{m}{\mu} R\Delta T.$$

Сопоставим полученную формулу с выражением для изменения внутренней энергии

$$\Delta U_{\text{BC}} = \frac{i}{2}\frac{m}{\mu} R\Delta T = \frac{i}{2} p_2 \Delta V = \frac{i}{2} A_{\text{BC}}.$$

Подставим численные значения:

$$A_{\text{BC}} = 6 \cdot 10^5 \cdot (5 \cdot 10^{-3} - 2 \cdot 10^{-3}) = 1800 \text{ Дж};$$

$$\Delta U_{\text{BC}} = \frac{5}{2} \cdot 1800 = 4500 \text{ Дж};$$

$$Q_{\text{BC}} = 1800\text{Дж} + 4500\text{Дж} = 6300 \text{ Дж}.$$

На всем участке ACB получим:

1) работу газа $A_{ACB} = A_{\text{BC}} = 1800$ Дж;

2) изменение внутренней энергии $\Delta U_{ACB} = \Delta U_{\text{BC}} + \Delta U_{AC} = 4500\text{ Дж} - -500\text{ Дж} = 4000\text{ Дж}$;

3) количество теплоты $Q_{ACB} = Q_{\text{BC}} + Q_{AC} = 6300\text{Дж} - 500\text{Дж} = 5800\text{Дж}$.

Для того чтобы найти работу на участке ADB, воспользуемся теми же рассуждениями, что и в первом случае. Работа численно равна площади кривой ADB с осью абцисс. Из рис. 7.1 видно, что работа на участке DB равна нуль (поскольку площадь равна нулю, или процесс изохорный). Тогда работа на участке ADB равна работе на участке AD (процесс AD изобарный). Подставив данные, получим

$$A_{ADB} = A_{AD} = 8 \cdot 10^5 \cdot (5 \cdot 10^{-3} - 2 \cdot 10^{-3}) = 2400\text{Дж};$$

$$\frac{A_{ADB}}{A_{ACB}} = \frac{2400\text{Дж}}{1800\text{Дж}} = 1{,}3 \text{ раза}.$$

Работа на участке ACB в 1,3 раза меньше, чем работа на участке ADB.

Пример 2. В цилиндре под поршнем находится водород массой 1 кг при температуре 27 °С. Водород сначала расширяется адиабатически, так что его объем увеличивается в 5 раз, а затем сжимается изотермически, объем при этом уменьшается, также в 5 раз. Найти работу, совершенную газом во всем процессе. Построить график. Какая стала температура в конце адиабатного расширения?

Дано: t = 27 °С; $V_2 = 5V_1$; $V_3 = {}^{V_2}\!/_5 = V_1$; m = 1 кг. Найти: A – ?

Решение. Рассмотрим процесс адиабатного расширения. Запишем для него первый закон термодинамики (табл. 7.1):

$$A_1 = -\Delta U_1.$$

Из уравнения следует, что работа газа совершается за счет уменьшения внутренней энергии газа, поэтому $T_2 < T_1$. Работу газа можно определить по формуле, представленной в табл. 7.1, а можно исходить из уравнения

$$A_1 = -\Delta U_1 = \frac{i}{2}\frac{m}{\mu}R\Delta T.$$

Температуру в конце адиабатного расширения T_2 найдем из уравнения Пуассона (табл. 7.1):

$$p_1 V_1^{\gamma} = p_2 V_2^{\gamma}.$$

Выражая давление из уравнения Менделеева–Клапейрона, запишем уравнение Пуассона через параметры T и V:

$$\frac{T_2}{T_1} = \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\gamma-1}$$

или

$$T_2 = T_1\left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\gamma-1},$$

где $\gamma = {}^{c_p}/_{c_V} = 1{,}4$.

Подставим численные значения и найдем температуру

$$T_2 = 300\cdot\left(\frac{V_1}{5V_1}\right)^{1,4-1} = 300\cdot\left(\frac{1}{5}\right)^{0,4} = 157\ \text{К}.$$

Тогда работу при адиабатном расширении найдем как

$$A_1 = -\frac{5}{2}\cdot\frac{1}{2\cdot10^{-3}}\cdot 8{,}31\cdot(157-300) = 1500000\ \text{Дж} = 1500\ \text{кДж}.$$

В изотермическом процессе внутренняя энергия газа не меняется, поэтому работу газа найдем из следствия первого закона термодинамики для изотермического процесса (табл. 7.1):

$$A_2 = \frac{m}{\mu}RT_2 ln\frac{V_3}{V_2}.$$

Подставим численные значения

$$A_2 = \frac{1}{2\cdot10^{-3}}\cdot 8{,}31\cdot 157\cdot ln\left(\frac{V_1}{5V_1}\right) = -1000000\ \text{Дж} = -1000\ \text{кДж}.$$

Полную работу найдем

$$A = A_1 + A_2 = 1500\ \text{Дж} - 1000\ \text{Дж} = 500\ \text{Дж}.$$

Пример 3. 300 г кислорода изобарно нагревают от температуры 18 °С до температуры 210 °С. Определить совершаемую газом работу, увеличение его внутренней энергии и поглощаемую при этом теплоту.

Дано: $m = 300$; $г = 0{,}3$ кг; $t_1 = 18\ ^{\circ}\text{C}\ (T_1 = 291\text{K})$, $t_2 = 210\ ^{\circ}\text{C}\ (T_2 = 483\ \text{K})$. Найти: $Q, \Delta U, A$.

Решение. Первое начало термодинамики для изобарного процесса выглядит следующим образом:

$$Q = \Delta U + A,$$

т.е. подведенная к газу теплота расходуется на изменение (в данном случае увеличение) его внутренней энергии и совершение газом работы.

В изобарном процессе давление газа не изменяется, и работу газа можно найти по формуле

$$A = \int_{V_1}^{V_2} p dV = p \int_{V_1}^{V_2} dV = p(V_2 - V_1),$$

где V_1 и V_2 – объемы газа соответственно в начале и конце процесса.

Запишем уравнение Клапейрона–Менделеева для параметров начала и конца процесса:

$$pV_1 = \frac{m}{\mu} RT_1, \qquad pV_2 = \frac{m}{\mu} RT_2,$$

где $\mu = 0{,}032$ кг/моль – молярная масса кислорода. Тогда

$$A = pV_2 - pV_1 = \frac{m}{\mu} R(T_2 - T_1).$$

Внутреннюю энергию идеального газа можно найти как

$$U = \frac{i}{2} \frac{m}{\mu} RT,$$

где i – число степеней свободы молекулы (молекула кислорода двухатомная, поэтому $i = 5$). Увеличение внутренней энергии кислорода при увеличении температуры от T_1 до T_2 найдем по формуле

$$\Delta U = U_2 - U_1 = \frac{i}{2} \frac{m}{M} RT_2 - \frac{i}{2} \frac{m}{M} RT_1 = \frac{i}{2} \frac{m}{M} R(T_2 - T_1).$$

Подставив выведенные выражения в уравнение 1-го закона термодинамики, найдем поглощаемую теплоту:

$$Q = \frac{i}{2} \frac{m}{\mu} R(T_2 - T_1) + \frac{m}{\mu} R(T_2 - T_1) = \frac{i+2}{2} \frac{m}{\mu} R(T_2 - T_1).$$

Проверим размерность

$$[A] = [\Delta U] = [Q] = \frac{\text{кг}}{\text{кг} \cdot \text{моль}^{-1}} \cdot \frac{\text{Дж}}{\text{моль} \cdot \text{К}} \cdot \text{К} = \text{Дж}.$$

Расчет

$$Q = \frac{5+2}{2} \cdot \frac{0{,}300}{0{,}032} \cdot 8{,}31(483 - 291) = 52{,}4 \cdot 10^3 \text{ Дж} = 52{,}4 \text{ кДж};$$

$$\Delta U = \frac{5}{2} \cdot \frac{0{,}300}{0{,}032} \cdot 8{,}31(483 - 291) = 37{,}4 \cdot 10^3 \text{ Дж} = 37{,}4 \text{ кДж};$$

$$A = \frac{0{,}300}{0{,}032} \cdot 8{,}31(483 - 291) = 15 \cdot 10^3 \text{ Дж} = 15 \text{ кДж}.$$

Ответ. $Q = 52{,}4$ кДж; $\Delta U = 37{,}4$ кДж; $A = 15$ кДж.

Пример 4. Кислород массой 15 г расширяется при постоянной температуре –20 °С. Давление его в этом процессе изменяется от 200 до 80 кПа. Определить работу, которую совершает кислород при расширении.

Дано: $m = 15$ г $= 0{,}015$ кг; $t = -20$ °С $(T = 253$ К$)$, $P_1 = 200$ кПа, $P_2 = 80$ кПа. Найти: A – ?

Решение. Используем формулу, определяющую работу в изотермическом процессе

$$A = \frac{m}{\mu} RT \ln \frac{V_2}{V_1},$$

где $\mu = 0{,}032$ кг/моль – молярная масса кислорода; V_1 и V_2 – объемы газа соответственно в начале и конце процесса.

Применим закон Бойля–Мариотта, описывающий изотермический процесс, чтобы перейти от неизвестных значений объема к известным значениям давлений

$$P_1V_1 = P_2V_2.$$

Следовательно,

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{P_1}{P_2}.$$

Подставив найденное выражение в первый закон термодинамики для изотермического процесса, найдем работу расширения кислорода:

$$A = \frac{m}{\mu} RT \ln \frac{p_1}{p_2}.$$

Проверим размерность

$$[A] = \frac{\text{кг}}{\text{кг} \cdot \text{моль}^{-1}} \cdot \frac{\text{Дж}}{\text{моль} \cdot \text{К}} \cdot \text{К} \frac{\text{Па}}{\text{Па}} = \text{Дж}.$$

Расчет

$$A = \frac{0{,}015}{0{,}032} \cdot 8{,}31 \cdot 253 \cdot \ln \frac{200}{80} = 907{,}16 \text{ Дж}.$$

Ответ. $A = 907{,}16$ Дж.

7.3.3. Задачи для самостоятельного решения

1. Газообразный водород массой m = 0,1 кг совершает круговой процесс *1–2–3–1* (рис. 7.2). Найдите работу газа на участке *1–2*, если T_1 = 300 К, а $V_2 = 3V_1$. (Ответ: $2{,}5 \cdot 10^5$ Дж).

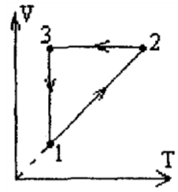


Рис. 7.2

2. Давление ν молей идеального газа связано с температурой по закону $T = \alpha p^2$ ($\alpha = \text{const}$). Найти работу газа при увеличении объема от значения V_1 до значения V_2. Выделяется или поглощается при этом тепло? (Ответ: тепло поглощается, $A = (V_2^2 - V_1^2)/2\alpha\nu R$).

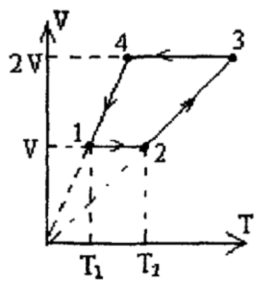


Рис. 7.3

3. Идеальный газ массой m = 20 г и молярной массой 28 г/моль совершает замкнутый процесс (рис. 7.3). Температура в точках *1* и *2* T_1 = 300 К; T_2 = 496 К. Найти работу газа за цикл. (Ответ: 1,162 Дж).

4. При изотермическом процессе газ совершил работу 1000 Дж. Насколько увеличится внутренняя энергия этого газа, если ему сообщить количества теплоты в два раза больше, чем в первом случае, а процесс провести изохорически? (Ответ: увеличится на 2000 Дж).

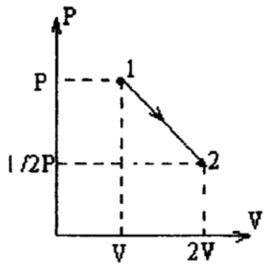


Рис. 7.4

5. Найти количество теплоты, сообщенное газу в процессе *1–2* (рис. 7.4). (Ответ: $Q = {}^{3pV}/_{4}$).

6. Один моль идеального газа нагревают сначала изотермически. При этом он совершает работу 10 Дж. Затем его нагревают изобарически, сообщая ему то же количество теплоты. Какую работу совершает газ во втором случае? (Ответ: 4 Дж).

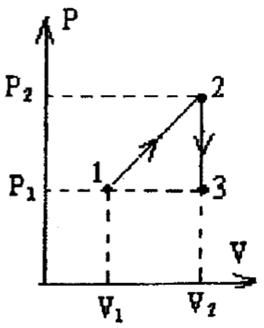


Рис. 7.5

7. Один моль идеального газа совершает процесс *1–2–3* (рис. 7.5) (считать известным давление p_1, p_2 и объем V_1, V_2). Найти поглощенное газом в этом процессе количество теплоты. (Ответ: ($Q = (V_2 - V_1)(2p_1 + {}^{p_2}/_{2})$.

68. Водород массой m = 1 кг при начальной температуре T_1 = 300 К охлаждают изохорически так, что его давление падает в η = 3 раза. Затем газ расширяют при постоянном давлении до начальной температуры. Найти произведенную газом работу. (Ответ: 0,83 МДж).

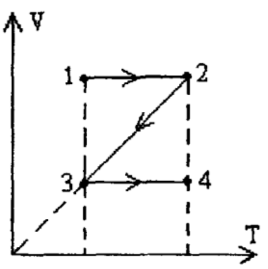


Рис. 7.6

69. Один моль идеального газа переводят из начального состояния *1* в состояние *4* в процессе, представленном на рис. 7.6. Какое количество теплоты подвели к газу, если $\Delta T = T_4 - T_1$ = 100 К? (Ответ: 415 Дж).

70. Для нагревания некоторого количества газа с молярной массой 28 г/моль на 14 К при постоянном давлении требуется 10 Дж количества теплоты. Чтобы охладить его на ту же температуру при изохорном процессе требуется отнять 8 Дж теплоты. Определить массу газа. (Ответ: 0,48 г).

71. В процессе расширения азота его объем увеличился на 2 %, а давление уменьшилось на 1 %. Какая часть теплоты, полученной азотом, была превращена в работу? Удельная теплоемкость азота при постоянном объеме c_V = 745 Дж/кг·К. (Ответ: 44 %).

72. Масса 10 г кислорода, находящегося при нормальных условиях, сжимается до объема 1,4 л. Найти давление и температуру кислорода после сжатия, если кислород сжимается: а) изотермически; б) адиабатически. Найти работу сжатия в каждом из этих случаев. При изохорном нагревании кислорода объемом 50 л давление газа изменилось на 0,5 МПа. Найти количество теплоты, сообщенное газу. (Ответ: $Q = 62{,}5$ Дж).

73. Азот массой 200 г расширяется изотермически при температуре 280 К так, что его объем увеличивается в два раза. Найти изменение внутренней энергии газа, совершенную при расширении газа работу и количество теплоты, полученное газом. (Ответ: $\Delta U = 0$, $A = 11{,}6$ кДж, $Q = 11{,}6$ кДж).

74. Азот, занимающий объем 10 л под давлением 0,2 МПа, изотермически расширился до объема 28 л. Определить работу расширения газа и количество теплоты, полученное газом. (Ответ: $A = 2{,}06$ кДж, $Q = 2{,}06$ кДж).

75. При изотермическом расширении кислорода, содержавшего количество вещества 1 моль и имевшего температуру 300 К, газу было передано количество теплоты 2 кДж. Во сколько раз увеличился объем газа? (Ответ: объем увеличился в 2,23 раза).

76. В теплоизолированном цилиндре с поршнем находится азот массой 0,2 кг при температуре 20 °С. Азот, расширяясь, совершает работу 4,47 кДж. Найти изменение внутренней энергии азота и его температуру после расширения. Удельная теплоемкость азота при постоянном объеме $c_V = 745$ Дж/(кг·К). (Ответ: $\Delta U = 4{,}47$ кДж; $\Delta T = 263$ К).

77. Двухатомный газ занимает объем 0,5 л при давлении 50 кПа. Газ сжимается адиабатически. Затем он охлаждается при постоянном объеме до первоначальной температуры, причем его давление становится равным 100 кПа. Начертить график этого процесса. Найти объем и давление во втором случае, а также работу газа. (Ответ: $V_2 = 0{,}25$ л; $p_2 = 81{,}5$ кПа; A_{12} = 20 Дж).

78. Газ расширяется адиабатически так, что его давление падает от 200 до 100 кПа. Затем он нагревается при постоянном объеме до первоначальной температуры, причем его давление становится равным 122 кПа. Найти отношение c_p/c_V для этого газа. Начертить график этого процесса. (Ответ: $c_p/c_V = 1{,}4$).

79. Водород массой 20 г был нагрет на 100 К при постоянном давлении. Определить количество теплоты, переданное газу; приращение

внутренней энергии газа и работу расширения. (Ответ: $Q = 29{,}3$ кДж, $\Delta U = 20{,}9$ кДж, A = 8,4 кДж).

80. Воздух массой 1,43 кг занимает при 0 °С объем 0,5 м^3. Воздуху сообщили некоторое количество теплоты, и он изобарически расширился до объема 0,55 м^3. Найти совершенную работу, количество поглощенной теплоты, изменение температуры и внутренней энергии воздуха. (Ответ: $A = 11$ кДж, $Q = 39$ кДж, $\Delta T = 27$ К, $\Delta U = 28$ кДж).

81. Дан газ водород. Во сколько раз большее количество теплоты потребуется для изобарного нагревания, чем для изохорного, на ту же самую температуру? (Ответ: 1,4 раза).

82. Количество 2 кмоль углекислого газа нагревается при постоянном давлении на 50 К. Определить изменение внутренней энергии газа, его работу расширения и количество сообщенной газу теплоты. (Ответ: $\Delta U = 2{,}5$ МДж; $A = 0{,}83$ МДж; $Q = 3{,}32$ МДж).

83. Азот массой 10 г, находящийся при температуре 17 °С, расширился изотермически. При этом была совершена работа 860 Дж. Определить во сколько раз изменилось давление азота при расширении. (Ответ: $\frac{P_1}{P_2} = 2{,}72$).

84. При адиабатном сжатии кислорода массой 1 кг совершена работа 100 кДж. Определить конечную температуру газа, если до сжатия его температура была 300 К. (Ответ: $T = 454$ К).

85. Определить работу адиабатного расширения водорода массой 4 г, если температура газа понизилась на 10 К. (Ответ: $A = 416$ Дж).

86.* В сосуде под поршнем находится 1 г азота. Какое количество теплоты надо затратить, чтобы нагреть азот на 10 К? На какую высоту при этом поднимется поршень? Масса поршня 1 кг, площадь его поперечного сечения 10 см^2, давление над поршнем 100 кПа. (Ответ: $Q = 10{,}4$ Дж; $\Delta h = 2{,}7$ см).

87.* Моль идеального газа, имевший первоначально температуру 290 К, расширяется изобарически до тех пор, пока его объем не возрастет в 2 раза. Затем газ охлаждают изохорически до первоначальной температуры. Найти: приращение внутренней энергии; работу совершаемую газом: количество теплоты. (Ответ: $\Delta U = 3{,}6$ кДж; A = 4,8 кДж; Q = 8,4 кДж).

88.* Гелий массой 321 г, находившийся при температуре 20 °С и давлении 10^5 Па, сжимают адиабатически до давления 10^7 Па. Считая процесс сжатия обратимым, определить: температуру в конце сжатия, работу совершаемую газом, во сколько раз уменьшился объем газа? (Ответ: 1850 К; –156 МДж; в 16 раз).

89.* Некоторое количество идеального газа с одноатомными молекулами совершило при давлении 10^5 Па обратимый изобаричекий процесс, в ходе которого объем изменился от 10 до 20 л. Найти: приращение внутренней энергии; работу, совершаемую газом; количество теплоты. (Ответ: 1500 Дж; 1000 Дж; 2,5 кДж).

90.* Закрытый цилиндр разделен на 2 части поршнем радиусом 10 см и массой 1 кг, который может перемещаться без трения. Установив поршень в среднее положение, обе части цилиндра наполняют газом до одинакового давления 10^5 Па. Объем газа каждой из половин 5 л. Газ можно считать идеальным. Отношение теплоемкости при постоянном давлении к теплоемкости при постоянном объеме 1,4. Пренебрегая теплообменом через стенки цилиндра и через поршень, найти частоту колебаний поршня, возникающих при небольшом смещении из среднего положения. (Ответ: $\nu = r^2\sqrt{\gamma p_0 / 2mV_0} = 37\ \text{Гц}$).

7.4. Теплообмен. Фазовые превращения

7.4.1. Основные формулы

◊ Для характеристики процессов теплопередачи (конвекция, теплопроводность, излучение) введено понятие количество теплоты Q. Количеством теплоты называют количественную меру изменения внутренней энергии тела. Необходимо помнить, что тело может отдавать или получать только энергию, а количество теплоты является числовым эквивалентом энергии.

Количество теплоты зависит от рода процесса и не является функцией состояния системы.

В табл. 7.2 представлены формулы для определения количества теплоты.

Таблица 7.2

Формулы расчета количества теплоты в разных процессах

Процесс	Формула	Примечания
1. Нагревание (охлаждение)	$Q = cm\Delta T$	c – удельная теплоемкость вещества
2. Плавление (отвердевание)	$Q = \lambda m$	λ – удельная теплота парообразования
3. Сгорание	$Q = qm$	q –удельная теплота сгорания
4. Парообразование (конденсация)	$Q = rm$	r – удельная теплота парообразования

◊ Уравнение теплового баланса (справедливо для замкнутых систем):

$$\sum_{i=1}^{n} Q = 0.$$

Если между телами, находящимися в замкнутой системе, происходит теплообмен, то количество теплоты, отданное всеми остывающими телами, равно количеству теплоты, полученному всеми нагревающимися телами.

◊ Теплоемкостью C называют физическую величину численно равную количеству теплоты, сообщаемому телу δQ, к изменению температуры dT тела в рассматриваемом термодинамическом процессе:

$$C = \frac{\delta Q}{dT}.$$

Величина C зависит от химического состава тела, термодинамического состояния и процесса, в котором сообщается теплота.

Удельной теплоемкостью c называется теплоемкость единицы массы вещества:

$$c = \frac{C}{m}.$$

Молярной теплоемкостью C_μ называется теплоемкость одного моля вещества:

$$C_\mu = \frac{C}{\vartheta} = \mu c,$$

где ϑ – количество молей вещества; μ – молярная масса вещества.

7.4.2. Примеры решения задач

Пример 1. Один конец железного стержня поддерживается при температуре 100 °C, другой упирается в лед. Длина стержня 14 см, площадь поперечного сечения 2 см^2. Найти количество теплоты Q, протекающее в единицу времени вдоль стержня. Какая масса m льда растает за время 40 мин (потерями тепла через стенки пренебречь)?

Дано: $t = 100\,°C$, $l = 0{,}14$ м, $S = 2\text{см}^2 = 2 \cdot 10^{-4}\ \text{м}^2$, $\tau = 40\ \text{мин} = 2400$ с.
Найти: $Q-?$, $m-?$

Решение. Количество теплоты вдоль стержня передается с помощью взаимодействия молекул стержня. В данном случае вид теплопередачи – теплопроводность. Чтобы найти какое количество теплоты проходит через стержень, воспользуемся законом Фурье:

$$\frac{\Delta Q}{\Delta \tau} = KS\frac{\Delta T}{\Delta x},$$

где $\frac{\Delta T}{\Delta x}$ – изменение температуры концов стержня, приходящееся на единицу длины. Так как тепло передается вдоль длины стержня, то $l = \Delta x$, поскольку лед тает при подведении тепла, его температура и температура другого конца стержня 0 °C. Коэффициент теплопроводности K найдем из табл. 2 приложения: $K = 58{,}7\,{}^{\text{Вт}\cdot\text{м}}/_{\text{К}}$. Подставив данные, получим

$$Q_i = \frac{\Delta Q}{\Delta \tau} = 58{,}7 \cdot 2 \cdot 10^{-4} \cdot \frac{100}{0{,}14} = 8{,}38\ \text{Дж/с}.$$

Лед плавится за счет происходящего теплообмена между ним и стержнем. Поэтому по закону сохранения энергии количество теплоты, полученное за время 40 мин льдом от стержня Q_1, полностью идет на его плавление Q_2:

$$Q_1 = Q_2,$$

где $Q_1 = Q_i \cdot \tau$, $Q_2 = \lambda m$; λ – удельная теплота плавления льда, $\lambda = 3{,}4 \times \times 10^5$ Дж/кг.

$$Q_i \cdot \tau = \lambda m;$$
$$m = \frac{Q_i \cdot \tau}{\lambda}.$$

Подставив численные значения, найдем массу расплавившегося льда:

$$m = \frac{8{,}38 \cdot 2400}{3{,}4 \cdot 10^5} = 0{,}06 \text{ кг}.$$

Пример 2. На плите стоит алюминиевая кастрюля диаметром 30 см, наполненная водой. Вода кипит, и при этом за 1 мин образуется масса 400 г водяного пара. Найти температуру внешней поверхности дна кастрюли, если толщина его d = 2,5 мм (Потерями тепла пренебречь).

Дано: d = 2,5 мм; D = 30 см; m = 400 г = 0,4 кг; $\Delta t = 1$ *мин* $= 60$ с. Найти: $T_2 - ?$

Решение. В результате происходящего теплообмена между алюминиевой кастрюлей и водой вода находится в состоянии кипения. Это значит, что на поддержание такого состояния вода постоянно потребляет

$$Q_1 = rm,$$

где $r = 2{,}3 \cdot 10^6$ Дж/кг – удельная теплота парообразования.

С другой стороны, в результате постоянного нагревания стенок кастрюли, расходуется:

$$\frac{\Delta Q}{\Delta t} = K\frac{\Delta TS}{\Delta X}$$

или в нашем случае

$$\frac{Q_2}{\Delta t} = K\frac{\Delta TS}{d},$$

где K – коэффициент теплопроводности алюминия (табличная величина) (см. приложение).

По закону сохранения энергии получаемое количество теплоты от плиты тратится на кипение воды, поэтому получаем

$$Q_1 = Q_2;$$
$$rm = K\frac{\Delta TS}{d}\Delta t$$

или

$$\Delta T = \frac{rmd}{KS\Delta t}$$

или

$$T_2 = \frac{rmd}{KS\Delta t} + T_1,$$

где T_1 – температура внутренней поверхности кастрюли (равна температуре кипящей воды), $T_1 = 373$ К; площадь дна кастрюли можно рассчитать $S = \pi\, {d^2}/{4}$, тогда получим

$$T_2 = \frac{4rm}{K\pi d\Delta t} + T_1.$$

Подставим в найденное выражение числовые значения:

$$T_2 = \frac{4\cdot 2{,}3\cdot 10^6\cdot 0{,}4}{210\cdot 3{,}14\cdot 0{,}3\cdot 60} + 373\text{К} = 683\text{К} = 410\ {}^\circ\text{C}.$$

Пример 3. Вычислить удельные теплоемкости c_V и c_p смеси водорода и кислорода, массовые доли которых составляют 60 % и 40 % соответственно.

Дано: $m_1 = 0{,}6m$; $m_2 = 0{,}4m$; $\mu_1 = 2\cdot 10^{-3}\,\frac{\text{кг}}{\text{моль}}$; $\mu_2 = 32 \times \times 10^{-3}$кг/моль. Найти: c_V–? c_p–?

Решение. Если данной смеси передавать некоторое количество теплоты Q (нагревать газовую смесь), то тепло распределится на нагревание водорода Q_1 и кислорода Q_2:

$$Q = Q_1 + Q_2.$$

Рассмотрим процесс, происходящий при постоянном объеме. Количество теплоты, передаваемое газовой смеси: $Q = c_{V,CM} m_{CM}\Delta t$ расходуется на нагрев водорода: $Q_1 = c_{V1} m_1 \Delta t$ и нагревание кислорода: $Q_2 = c_{V2} m_2 \Delta t$. Учитывая закон сохранения энергии, запишем

$$c_{V,CM} m_{CM}\Delta t = c_{V1} m_1 \Delta t + c_{V2} m_2 \Delta t$$

или

$$c_V m_{CM}\Delta t = c_{V1} 0{,}6 m_{CM}\Delta t + c_{V2} 0{,}4 m_{CM}\Delta t;$$
$$c_V = c_{V1} 0{,}6 + c_{V2} 0{,}4,$$

где c_{V1} и c_{V2} – удельные теплоемкости водорода и кислорода, соответственно. Учитывая следствие первого закона термодинамики, удельную теплоемкость водорода и кислорода можно определить как

$$c_{V1} = {iR}/{2\mu_1} \text{ и } c_{V2} = {iR}/{2\mu_2}.$$

Зная, что число степеней свободы для кислорода и водорода $i = 5$, подставим в уравнение числовые значения:

$$c_V = 0{,}6\frac{5}{2}\cdot\frac{8{,}31}{2\cdot 10^{-3}} + 0{,}4\frac{5}{2}\cdot\frac{8{,}31}{32\cdot 10^{-3}} = 6492 \text{ Дж}.$$

Пример 4. Какое количество теплоты Q теряет помещение за 1 ч через окно за счет теплопроводности воздуха, заключенного между рамами? Площадь каждой рамы S = 4 м^2, расстояние между ними d = 30 см. Температура помещения 18 °С, температура наружного воздуха –20 °С. Диаметр молекул воздуха 0,3 нм (температуру воздуха между рамами считать равной среднему арифметическому температур помещения и наружного воздуха). Давление 101,3 кПа.

Дано: S = 4 м^2, d = 30 см, $T_1 = -20 + 273\ K = 253\ K;\ T_2 = 18 + 273\ K =$ $= 291\ K$; $d = 0{,}3$мм; $t = 1$ ч. Найти: $^{\Delta Q}/_{\Delta t} -?$

Решение. Чтобы определить количество теплоты, теряемое за 1 ч, воспользуемся законом Фурье:

$$\frac{\Delta Q}{\Delta t} = K\frac{\Delta T}{\Delta X},$$

где $\frac{\Delta T}{\Delta X} = \frac{T_1 - T_2}{d}$ – градиент температур, показывающий, как меняется температура на единицу длины. В нашем случае тепло переносится через рамы, расстояние между которыми d.

Таким образом, задача сводится к тому, чтобы определить коэффициент теплопроводности воздуха при данных условиях:

$$K = \frac{1}{3}\lambda c_V \rho \bar{v}.$$

Среднюю скорость теплового движения, определим, воспользовавшись законами молекулярно-кинетической теории:

$$\bar{v} = \sqrt{\frac{8RT}{\pi\mu}},$$

где T – температура между рамами. По условию она равна средне-арифметическому

$$T = \frac{T_1 + T_2}{2} = \frac{291 + 253}{2} = 272\ K.$$

Длину свободного пробега λ также найдем из законов молекулярно-кинетической теории:

$$\lambda = \frac{\sqrt{2}}{2\pi d^2 n}.$$

Концентрацию молекул n определим из соотношения давления газа на стенки $p = nkT$, тогда

$$\lambda = \frac{\sqrt{2}kT}{2\pi d^2 p}.$$

Удельную теплоемкость при постоянном объеме вычислим, воспользовавшись следствием первого закона термодинамики для изохорического процесса:

$$c_V = \frac{i}{2}\frac{R}{\mu} = \frac{5 \cdot 8{,}31}{2 \cdot 29 \cdot 10^{-3}} = 716\ ^{\text{Дж} \cdot \text{кг}}/_{\text{К}}.$$

Сведем полученные формулы для λ, $\bar{v}$, ρ в выражение для коэффициента теплопроводности:

$$K = \frac{1}{3}\frac{\sqrt{2}kT}{2\pi d^2 p}\frac{p\mu}{RT}c_V\sqrt{\frac{8RT}{\pi\mu}}$$

или

$$K = \frac{2kc_V}{3d^2}\sqrt{\frac{\mu T}{\pi^3 R}}.$$

Рассчитав коэффициент K, подставим значение в формулу для количества теплоты, имеем

$$\frac{\Delta Q}{\Delta t} = 12{,}8 \cdot 10^{-3}\,\frac{291-253}{0{,}3} \cdot 4 = 6485\,\frac{\text{Дж}}{\text{с}} = 23{,}3\,{}^{\text{МДж}}/_{\text{ч}}.$$

7.4.3. Задачи для самостоятельного решения

1. В сосуд, содержащий 10 г льда, при температуре −10 °С малыми порциями впускают водяной пар при температуре 100 °С. Какое количество воды окажется в сосуде, когда весь лед растает? (Ответ: 113 г).

2. Сферическая дождевая капля радиусом 2 мм падает с постоянной скоростью. Насколько повысится температура капли за время 10 с, если всё выделяющееся тепло идёт на её нагревание, а сила сопротивления воздуха $Fc = 0.24\pi R^2 v^2$ (v – скорость капли)? (Ответ: 0,25 К).

3. В колбе находится вода при 0 °С. Откачивая пар, воду заморозили. Какая часть воды испарилась? (Ответ: 1/7).

4. Две жидкости с начальными температурами T_1 и T_2 и удельными теплоёмкостями c_1 и c_2 смешали в теплоизолированном сосуде. В результате разность между начальной температурой одной из жидкостей и установившейся температурой оказалась вдвое меньше разности начальных температур жидкостей. Найти отношение масс жидкостей. (Ответ: ${}^{m_1}/_{m_2} = {}^{c_2}/_{c_1}$).

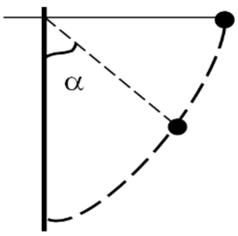


Рис. 7.7

5. Шарик, подвешенный на нити длиной l, отвели в положение B и отпустили (рис. 7.7). После удара о стену шарик отклонился на угол α до положения C. Насколько повысилась температура шарика, если k% потерянной механической энергии перешло во внутреннюю энергию шарика? Удельную теплоемкость шарика принять равной c. (Ответ: $\Delta t = \frac{kglcos\alpha}{100c}$).

6. Если температура на улице равна −20 °С, то температура в комнате равна +20 °С. Если же температура на улице равна −40 °С, то в комнате устанавливается температура +10 °С. Найти температуру батареи, отапливающей комнату. (Ответ: 60 °С).

7. В сосуде находится лёд и вода в одинаковых по массе количествах. Через сосуд пропускают пар, массой в 2 раза меньше при температуре 100 °С. Какая установится конечная температура? Потерь тепла нет. (Ответ: 97 °С).

8. Две одинаковые льдинки летят навстречу друг другу с одинаковыми скоростями и, сталкиваясь абсолютно неупруго, превращаются в пар

при температуре 100 °С. Найти скорость льдинок до удара, если температура их до соударения –10 °С. (Ответ: 2400 м/с).

9. Свинцовая пуля, летящая со скоростью 400 м/с, ударяется о стенку и входит в нее. Считая, что 10 % кинетической энергии пули идет на ее нагревание, найти, насколько нагрелась пуля? (Ответ: 63 °К).

10. Пластинки из железа (толщина 10 мм) и меди (толщина d_2 = 5 мм) сложены вместе. Внешняя поверхность медной пластинки поддерживается при температуре 0 °С, внешняя поверхность железной – при температуре 20 °С. Найти температуру поверхности их соприкосновения. Площадь пластинок велика по сравнению с толщиной. (Ответ: 1 °С).

11. Наружная поверхность стены имеет температуру –30 °С, внутренняя – температуру 10 °С. Толщина стены d = 40 см. Найти теплопроводность материала стены, если через единицу ее поверхности за время 1 ч проходит количество теплоты Q = 460,5 кДж/м^2. (Ответ: 1,28 Вт/м·К).

12. Площадь кирпичной стены, выходящей на улицу 12 м^2, а толщина 1 м. Температура наружного воздуха –15 °С, а температура в комнате 15 °С. Чему равно количество теплоты, выходящего из комнаты за 24 ч (теплопроводность кирпича посмотрите в табл. 2 приложения)? (Ответ: 40 МДж).

13. Найти теплопроводность стенки, которая состоит из двух соприкасающихся пластин, одинаковой толщины, сделанных из разных материалов. Теплопроводности материалов соответственно равны k_1 и k_2. (Ответ: $(k_1 + k_2)/_2$).

14. В калориметре находится лед. Определить теплоемкость калориметра, если при нагревании его вместе с содержимым от 270 до 272 К требуется количество теплоты 2100 Дж, а от 272 до 274 К – 69700 Дж. (Ответ: C = 630 Дж/К).

15. В теплоизолированном цилиндре под невесомым поршнем находится 30 г воды при температуре 0 °С. Площадь поршня 512 см^2, внешнее давление нормальное. На какую высоту поднимется поршень, если находящийся в цилиндре электронагреватель выделит в виде тепла энергию 24,2 кДж? (Ответ: 17 см).

16. Комната имеет площадь пола 20 м^2 и высоту стены h = 3 м. Каждая стена толщиной d = 30 см. Какое количество теплоты Q теряет за время 1 мин комната через четыре кирпичные стены? Температура в комнате 15 °С, температура наружного воздуха –20 °С. Теплопроводность кирпича 0,84 Вт/(м К). (Ответ: 316 кДж).

17. Площадь поперечного сечения алюминиевого стержня 10 см^2, длина стержня 50 см. Разность температур на концах стержня 20 К.

Какое количество теплоты Q проходит в единицу времени через стержень? Потерями тепла пренебречь. (Ответ: 8,4 Дж/с).

18. На плите находится алюминиевая кастрюля диаметром 15 см. Кастрюля полностью заполнена водой. Воду нагревают до кипения, и в ходе кипения за 1 мин образуется 300 г водяного пара. Найти температуру внешней поверхности дна кастрюли, если толщина его d = 2 мм. Потерями тепла можно пренебречь. (Ответ: 106 °С).

19. Металлический цилиндрический сосуд диаметром 18 см наполнен льдом при температуре 0 °С. Сосуд теплоизолирован слоем пробки толщиной d = 1 см. Через какое время весь лед, находящийся в сосуде, растает, если температура наружного воздуха 10 °С (считать, что обмен тепла происходит только через боковую поверхность сосуда средним радиусом 9,5 см)? (Ответ: около 2 сут, 71,5 ч).

20. В алюминиевом сосуде массой 100 г содержится 1,3 кг воды при температуре 15 °С. После того, как в воду опустили 300 г металла при температуре 165 °С, температура смеси оказалась 18,8 °С. Определить удельную теплоемкость металла. (Ответ: 0,114 кал/г°С).

21. В латунном сосуде массой 200 г содержится 0,5 л воды при температуре 10 °С. При погружении в сосуд 0,5 кг сплава олова со свинцом при температуре 100 °С температура смеси оказалась 13 °С. Найти процентное содержание свинца в сплаве. (Ответ: 84,4 %).

22. В алюминиевой кастрюле кипит вода. Определить температуру нижней части дна кастрюли площадью 180 см^2, если ежеминутно из кастрюли выкипает 20 г воды. Толщина дна кастрюли 2 мм. (Ответ: 100,4 °С).

23. Вычислить $\gamma = c_p/c_V$ для газовой смеси, состоящей из ν_1 = 2 молей кислорода и ν_2 = 3 молей углекислого газа. (Ответ: $\gamma \approx 1{,}6$).

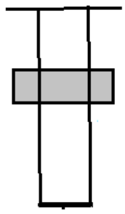
24. В печи стоит сосуд с поверхностью нагрева 500 см^2 и толщиной стенок 0,4 см. В нем находится 1 кг воды при температуре 10 °С. Определить температуру печи, если известно, что вода подогрелась до 100 °С в течение 2 мин 24 с. Коэффициент теплопроводности сосуда 0,5 мВт·м/К. (Ответ: 155 °С).

25. Два свинцовых шара одинаковой массы движутся навстречу друг другу со скоростями 20 и 40 м/с. Насколько повысится температура шаров в результате неупругого удара? (Ответ: 3,5 К).

26.* На электрической плитке мощностью 1 кВт кипит чайник с водой. Найти скорость истечения пара из носика чайника. Площадь носика 1 см^2, давление на выходе из носика считать равным атмосферному. (Ответ: 7,5 м/с).

27.* 100 г льда при температуре 0 °С заключены в теплонепроницаемую оболочку и подвергнуты сжатию до давления 120 МПа. Найти массу растаявшей части льда, если понижение температуры плавления происходит прямо пропорционально давлению и при увеличении давления на 13,8 МПа температура плавления понижается на 1 °C. (Ответ: 5,6 г).

28.* В теплоизолированном сосуде находится идеальный одноатомный газ при температуре 300 K и кусочек железа массой 0,2 кг при температуре 500 K. Начальное давление газа равно 10^5 Па, а объем сосуда 1000 см^3. Найти давление газа в равновесном состоянии. Больше или меньше будет давление газа, если газ будет двухатомный? Удельная теплоемкость железа 450 Дж/(кг·К) (объемом железа пренебречь). (Ответ: 1.66×10^5 Па; давление будет немного меньше).



29.* Вдоль невесомого резинового шнура длины l_0 соскальзывает железная шайба (рис. 7.8). Сила трения, действующая между шнуром и шайбой – F. Коэффициент жесткости (упругости) шнура – k. Найти количество теплоты, выделившейся при скатывании. (Ответ: $Q = F\left(l_0 + {}^{F}\!/_{2k}\right)$).

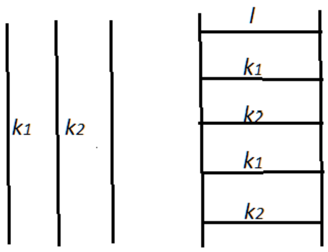


Рис. 7.9

30.* Две стенки A и B одинаковой толщины составлены из разнородных металлов, так как это указано на рис. 7.9. В каком случае теплопроводность стенки больше? (Ответ: в первом случае).

8. КАЧЕСТВЕННЫЕ ЗАДАЧИ

8.1. Примеры решения задач

8.1.1. Кинематика поступательного и вращательного движения

1. Во сколько раз угловая скорость часовой стрелки больше угловой скорости суточного вращения Земли?

2. Почему обтачивание на токарных станках изделий большего диаметра производится с меньшей угловой скоростью, чем изделий малого диаметра?

3. Четыре черепахи находятся в углах квадрата со стороной a. Черепахи начинают двигаться одновременно с одинаковой и постоянной по модулю скоростью v. При этом первая черепаха все время держит курс на вторую, вторая – на третью, третья – на четвертую, четвертая – на первую. Через какое время t черепахи встретятся?

4. Выпущенный вертикально вверх снаряд в верхней точки траектории разорвался на множество мелких осколков, разлетающихся с одина-

ковой по модулю начальной скоростью v_0 в разные стороны. Как будет меняться со временем форма «облака» из осколков?

5. Как изменится линейная скорость и центростремительное ускорение точки веретена, если его радиус увеличить в два раза? Период считать не изменяющимся.

8.1.2. Основы динамики поступательного и вращательного движения

1. Барон Мюнхгаузен утверждал, что вытащил сам себя из болота за волосы. Обоснуйте невозможность этого.

2. Что произойдет с космонавтом при свободном полете космического корабля, если он выпустит без толчка из рук предмет? Если он бросит его?

3. Почему крупные капли дождя падают с большей скоростью, чем мелкие?

4. В чем недостаток формулировки принципа относительности «Законы природы одинаковы во всех инерциальных системах отчета»?

5. То, что пассажиры любого транспортного средства в момент торможения наклоняются вперёд по инерции, – хорошо известно. Если быть внимательным, то можно заметить, что в момент торможения наклон пассажира вперёд сменяется наклоном назад. Таких толчков вперёд и назад может быть несколько. С чем это связано?

8.1.3. Законы сохранения в механике

1. Может ли кинетическая энергия тела оставаться неизменной, если равнодействующая приложенных к нему сил отличается от нуля?

2. Почему при отклонении в маятнике Ньютона трех (четырех) шаров из пяти отклоняются также три (четыре) шара?

3. Известен опыт: на ось мотора насаживают диск из прочного картона и раскручивают его до быстрого вращения, и если в это время к краю поднести деревянную доску, то ее можно перепилить. Объясните опыт. Попытайтесь оценить угловую скорость вращения ротора.

4. Подумайте, какие силы вызывают изменение угловой скорости вращения в опыте Жуковского, когда демонстратор подносит гантели к себе, удаляет от себя?

5. Виртуозный парижский биллиардист Миньо в 1883 г. в Варшаве ставил на краю бильярдного стола стакан с водой. Бильярдный шар располагался на противоположном конце. Миньо наносил по шару сильный кратковременный удар кием, наклоненным под большим углом в горизонтальной плоскости, быстро убирая кий после удара. Шар быстро приближался к стакану, но затем внезапно отбрасывался назад, не дойдя 1–2 см до стакана. Объясните явление.

8.1.4. Законы молекулярной физики

1. Почему в бетонных конструкциях в качестве арматуры используется только железо (железобетон), а другие металлы, например дералюминий, не применяются?

2. На весах установлены два одинаковых сосуда. Один заполнен сухим воздухом, а другой – влажным (содержащий водяные пары). Температура и давление в обоих сосудах одинаковы. Какой из сосудов легче? Почему?

3. Период колебаний маятника зависит от длины, которая меняется с температурой. Каким образом может быть осуществлен подвес маятника, чтобы его длина не менялась с температурой?

4. Будет ли кипеть вода в кастрюле, которая плавает в другой кастрюле с кипящей водой?

5. Два полых стеклянных шарика соединены трубкой, посередине которой находится капелька ртути. Можно ли по положению капельки судить о температуре воздуха в комнате?

8.1.5. Термодинамика

1. Второе начало термодинамики гласит (формулировка Планка): невозможно построить периодически действующую машину, единственным результатом которой было бы поднятие груза за счет охлаждения теплового резервуара (массивное тело, обладающее большим запасом внутренней энергии). Однако можно привести следующий пример. Пусть в цилиндре под поршнем находится идеальный газ. На поршне лежит груз весом P. Приведем дно цилиндра в тепловой контакт с большим тепловым резервуаром и будем малыми порциями разгружать поршень. Тогда, поршень начнет подниматься. Не противоречит ли опыт второму началу термодинамики?

2. На плитку поставили две одинаковые кастрюли с равными количествами воды при одинаковой температуре. Через некоторое время в одну из кастрюль долили немного воды из кипящего чайника. В какой кастрюле вода закипит быстрее? Почему?

3. В предыдущем вопросе после доливания воды из чайника часть воды из этой кастрюли отлили в другую так, что воды в кастрюлях оказалось поровну. В какой кастрюле вода теперь закипит быстрее?

4. Как заставить воду кипеть без нагревания? Как заставить воду замерзнуть кипением?

5. Понизится ли температура в комнате, если открыть дверцу работающего холодильника?

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Завершая пособие, авторы хотят обратить внимание студентов на то, что физика занимает особое место среди других фундаментальных дисциплин, так как представляет собой учение о наиболее общих свойствах материи. Отсюда очевидно, что законы и методы физики широко используются и применяются в других специальных дисциплинах: теоретической механике, строительной физике, основах гидравлики, основах теории машин и механизмов. Именно поэтому в пособие включены главы «Упругость тел», «Расчет момента инерции твердого тела», «Фазовые превращения».

Таким образом, для успешного овладения профессией студентам, учащимся на строительных направлениях, необходимо обратить серьезное внимание на решение физических задач, имеющих междисциплинарные связи. Оказание такой помощи и призвано обеспечить данное пособие.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Волькенштейн, В.С. Сборник задач по общей физике : учеб. пособие / В.С. Волькенштейн. – 11-е изд., перераб. – М. : Наука, 1985. – 384 с.

2. Гольдфарб Н.И. Сборник вопросов и задач по физике / Н.И. Гольдфарб. – 1985.

3. Иродов, И.Е. Задачи по общей физике : учеб. пособие / И.Е. Иродов. – М. : Наука, 2000.– 369 с.

4. Сборник задач и вопросов по физике для средних специальных учебных заведений : учеб. пособие / Р.А. Гладкова [и др.] ; под ред. Р.А. Гладковой. – М. : Наука (гл. ред. физ.-мат. лит.), 1988. – 384 с.

5. Сборник задач по элементарной физике : пособие для самообразования / Б.Б. Буховцев [и др.]. – 5-е изд. – М. : Наука, 1987. – 416 с.

6. Дмитриева, В.Ф. Физика : учеб. пособие для техникумов / В.Ф. Дмитриева ; под ред. В.Л. Прокофьева. – 4-е изд., стер. – М. : Высш. шк., 2001. – 415 с.

7. Фирганг, Е.В. Руководство к решению задач по курсу общей физики : учеб. пособие для втузов / Е.В. Фирганг. – М. : Высш. шк., 1977. – 351 с.

8. Трофимова, Т.И. Сборник задач по курсу физики : учеб. пособие для студентов втузов / Т.И. Трофимова. – М. : Высш. шк., 1996. – 303 с.

9. Чертов, А.Г. Задачник по физике : учеб. пособие для втузов / А.Г. Чертов, А.А. Воробьев. – М. : Изд-во Физико-математической литературы, 2005. – 640 с.

10. Яворский, Б.М. Справочник по физике / Б.М. Яворский, А.А. Детлаф. – 2-е изд., перераб. – М. : Наука (гл. ред. физ.-мат. лит.), 1985. – 512 с.

ПРИЛОЖЕНИЕ

ТАБЛИЦЫ СВОЙСТВ ТВЕРДЫХ ТЕЛ

Таблица 1

Свойства некоторых твердых тел

Вещество	Плотность, 10^3 кг/м^3	Температура плавления, °C	Удельная теплоемкость, Дж/(кг·К)	Удельная теплота плавления, кДж/кг	Температурный коэффициент линейного расширения
Алюминий	2,6	659	896	322	2,3
Железо	7,9	1530	500	272	1,2
Латунь	8,4	900	386	–	1,9
Лед	0,9	0	2100	335	–
Медь	8,6	1100	395	176	1,6
Олово	7,2	232	230	58,6	2,7
Платина	21,4	1770	117	113	0,89
Пробка	0,2	–	2050	–	–
Свинец	11,3	327	126	22,6	2,9
Серебро	10,5	960	234	88	1,9
Сталь	7,7	1300	460	–	1,06
Цинк	7,0	420	391	117	2,9

Таблица 2

Теплопроводность некоторых твердых тел, Вт/(м·К)

Алюминий	210	Песок сухой	0,325
Войлок	0,046	Пробка	0,050
Железо	58,7	Серебро	460
Кварц плавленый	1,37	Эбонит	0,174
Медь	390	Кирпич	1

ОГЛАВЛЕНИЕ

Учебное издание

МЕХАНИКА. МОЛЕКУЛЯРНАЯ ФИЗИКА И ТЕРМОДИНАМИКА

Практикум

Под редакцией
Корнеенко Татьяны Николаевны

Редактор *А.А. Иванова*
Технический редактор *С.С. Заикина*

План 2015 г. Поз. 9.18. Подписано в печать 20.07.2015.
Уч.-изд. л. 7,7. Усл. печ. л. 7,2. Зак. 118. Тираж 100 экз. Цена 251 руб.

Издательство ДВГУПС
680021, г. Хабаровск, ул. Серышева, 47.