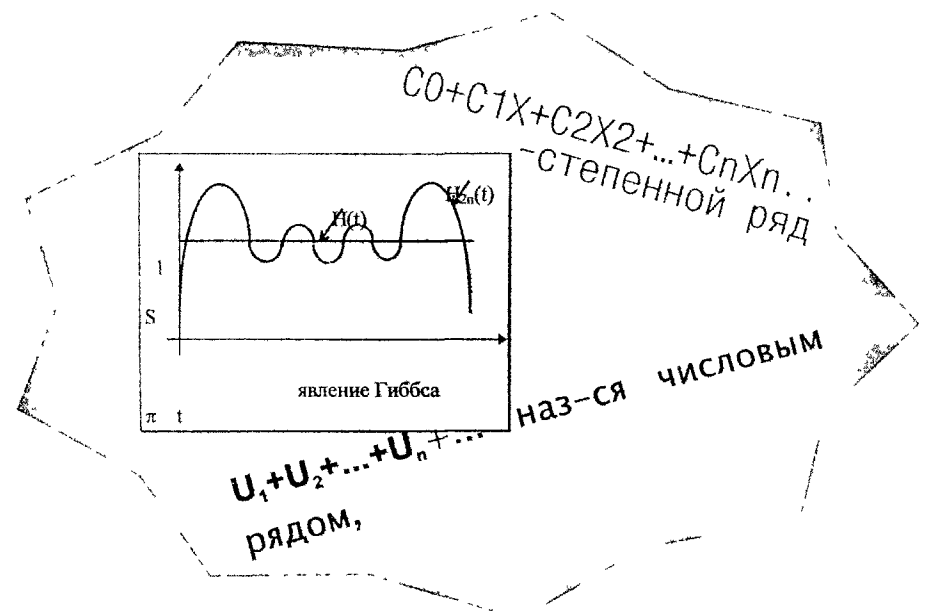
ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ЖЕЛЕЗНОДОРОЖНОГО ТРАНСПОРТА
ИРКУТСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ПУТЕЙ СООБЩЕНИЯ

РЯДЫ

Учебное пособие

для студентов заочной формы обучения
всех специальностей



Иркутск 2006

КОМПЛЕКС МЕТОДИЧЕСКИХ ПОСОБИЙ ПО МАТЕМАТИКЕ ДЛЯ ЗАОЧНОГО ОБУЧЕНИЯ

Под редакцией доктора технических наук,
профессора А. П. Хоменко

- Комплексные числа. Основы линейной алгебры. Системы линейных уравнений
- Векторная алгебра и аналитическая геометрия
- Введение в анализ
- Дифференциальное исчисление функций одной переменной
- Дифференциальное исчисление функций нескольких переменных
- Линейное программирование. Динамическое программирование
- Интегральное исчисление функций одной переменной
- Кратные, криволинейные и поверхностные интегралы. Элементы теории поля
- Обыкновенные дифференциальные уравнения
- **Ряды**
- Теория функций комплексной переменной. Операционное исчисление
- Уравнения математической физики. Основы вариационного исчисления
- Теория вероятностей
- Математическая статистика
- Марковские случайные процессы и теория игр
- Дискретная математика

ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ЖЕЛЕЗНОДОРОЖНОГО ТРАНСПОРТА

ИРКУТСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ПУТЕЙ СООБЩЕНИЯ

РЯДЫ

Учебное пособие
для студентов заочной формы обучения
всех специальностей

Под редакцией
доктора технических наук, профессора А. П. Хоменко

ИРКУТСК

2006

УДК 517.373
ББК 22.161.1
М 12

Рецензенты:
доктор химических наук, профессор Н.А. Корчевин (ИрГУПС);
кандидат физико-математических наук, доцент Л.С.Сергиенко (ИрГТУ)

Медведева И.П., Багдуева Х.Н. Ряды: учебное пособие.- Иркутск: ИрГУПС, 2006.- 114 с.

Пособие "Ряды" содержит достаточно полное изложение основных вопросов курса числовых и функциональных рядов, соответствующих требованиям к минимуму основной обязательной программы по подготовке дипломированного специалиста. Пособие снабжено большим количеством подробно разобранных примеров. В пособие включены вопросы для самоконтроля и десять вариантов заданий контрольной работы. Предназначено для студентов всех специальностей второго курса заочной формы обучения, но может быть полезно при изучении соответствующих разделов математики на дневном отделении.

Ил.10. Библиогр.: 7 назв.

© Иркутский государственный университет путей сообщения, 2006

1. Числовые ряды

1.1. Основные определения

Рассмотрим числовую последовательность $\{u_n\}$.

Это означает, что задана формула $u_n = f(n)$, $n \in N$, по которой можно найти числовое значение любого члена последовательности.

Например, $u_n = \dfrac{n}{n^2+1} \Rightarrow$

$$u_1 = \frac{1}{1^2+1} = \frac{1}{2}, \qquad u_2 = \frac{2}{2^2+1} = \frac{2}{5},$$

$$u_3 = \frac{3}{3^2+1} = \frac{3}{10}, \quad \ldots, \qquad u_{10} = \frac{10}{10^2+1} = \frac{10}{101}, \quad \ldots,$$

т.е. последовательность имеет вид $\left\{\frac{1}{2};\ \frac{2}{5};\ \frac{3}{10};\ \frac{10}{101};\ \ldots\right\}$.

Числовым рядом называют выражение вида

$$u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} u_n, \qquad (1.1)$$

где $u_1, u_2, u_3, \ldots, u_n, \ldots$ - члены числовой последовательности $\{u_n\}$.

u_n - называют ***общим членом ряда.***

Пример 1.1. Записать пять первых членов числового ряда:

а) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^2+1}$; *б)* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n}$.

Р е ш е н и е.

а) Общий член ряда $u_n = \dfrac{n}{n^2+1}$.

При $n=1$ получим $u_1=\dfrac{1}{1^2+1}=\dfrac{1}{2}$,

при $n=2$ $u_2=\dfrac{2}{2^2+1}=\dfrac{2}{5}$, при $n=3$ $u_3=\dfrac{3}{3^2+1}=\dfrac{3}{10}$,

при $n=4$ $u_4=\dfrac{4}{4^2+1}=\dfrac{4}{17}$, при $n=5$ $u_5=\dfrac{5}{5^2+1}=\dfrac{5}{26}$,

следовательно,

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n^2+1}=\frac{1}{1^2+1}+\frac{2}{2^2+1}+\frac{3}{3^2+1}+\frac{4}{4^2+1}+\frac{5}{5^2+1}+\ldots=$$

$$=\frac{1}{2}+\frac{2}{5}+\frac{3}{10}+\frac{4}{17}+\frac{5}{26}+\ldots$$

б) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{n}=3+\frac{3^2}{2}+\frac{3^3}{3}+\frac{3^4}{4}+\frac{3^5}{5}+\ldots.$ ♦

Пример 1.2. Записать формулу общего члена ряда:

а) $\boldsymbol{tg2+\frac{1}{2^2}tg^24+\frac{1}{3^2}tg^36+\frac{1}{4^2}tg^48+\ldots;}$

б) $\boldsymbol{\frac{1}{ln2}+\frac{1}{ln^22}+\frac{1}{ln^32}+\frac{1}{ln^42}+\ldots;}$

в) $\boldsymbol{1-\frac{1}{10}+\frac{1}{100}-\frac{1}{1000}+\frac{1}{10000}-\ldots.}$

Р е ш е н и е.

а) $tg2+\dfrac{1}{2^2}tg^24+\dfrac{1}{3^2}tg^36+\dfrac{1}{4^2}tg^48+\ldots$

При $n=1$ $u_1=\dfrac{1}{1^2}tg(2\cdot1)$,

при $n=2$ $\quad u_2=\frac{1}{2^2}tg^2(2\cdot 2)$,

при $n=3$ $\quad u_3=\frac{1}{3^2}tg^3(2\cdot 3)$, следовательно $\quad u_n=\frac{1}{n^2}tg^n(2n)$.

б) $\frac{1}{\ln 2}+\frac{1}{\ln^2 2}+\frac{1}{\ln^3 2}+\frac{1}{\ln^4 2}+\ldots$,

общий член ряда $\quad u_n=\frac{1}{\ln^n 2}$.

в) $1-\frac{1}{10}+\frac{1}{100}-\frac{1}{1000}+\frac{1}{10000}-\ldots$,

общий член ряда ряда $\quad u_n=(-1)^{n-1}\frac{1}{10^{n-1}}$.♦

n – ой частичной суммой ряда называют сумму n первых членов ряда. Обозначают S_n.

Так, $S_1=u_1$,

$S_2=u_1+u_2$,

$S_3=u_1+u_2+u_3$,

$S_4=u_1+u_2+u_3+u_4$,

.....

$S_{n-1}=u_1+u_2+u_3+u_4+\ldots+u_{n-1}$,

$S_n=u_1+u_2+u_3+u_4+\ldots+u_{n-1}+u_n$, ...

Частичные суммы ряда, в свою очередь, составляют числовую последовательность $\{S_n\}$: $\quad S_1;\ S_2;\ S_3;\ S_4;\ \ldots;\ S_{n-1};\ S_n;\ \ldots$

Если существует конечный предел S ***последовательности частичных сумм*** S_n ***числового ряда*** **(1.1)** ***при неограниченном возрастании номера*** n, т.е. $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$,

то числовой ряд

$u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n + \ldots$ *называется* ***сходящимся,***

а число S - ***суммой ряда.***

Если предела последовательности частичных сумм ряда не существует или предел равен ∞, то ряд называют ***расходящимся***.

Пример 1.3. Установить сходимость или расходимость ряда:

а) $\dfrac{1}{1\cdot 2} + \dfrac{1}{2\cdot 3} + \dfrac{1}{3\cdot 4} + \ldots + \dfrac{1}{n(n+1)} + \ldots;$

б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n = 1 + 2 + 3 + 4 + \ldots + n + \ldots;$

в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n = -1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \ldots.$

Р е ш е н и е.

а) $\dfrac{1}{1\cdot 2} + \dfrac{1}{2\cdot 3} + \dfrac{1}{3\cdot 4} + \ldots + \dfrac{1}{n(n+1)} + \ldots$

Составим последовательность частичных сумм ряда:

$S_1 = \dfrac{1}{2}, \qquad S_2 = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{6} = \dfrac{2}{3}, \qquad S_3 = \dfrac{2}{3} + \dfrac{1}{12} = \dfrac{3}{4}$ и т.д.

Очевидно, $S_n = \dfrac{n}{n+1}$.

Тогда $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n}{n+1} = 1$, следовательно, ряд сходится и его сумма $S = 1$.

б) $\sum_{n=1}^{\infty} n = 1+2+3+4+\ldots+n+\ldots$

Элементы ряда образуют арифметическую прогрессию, тогда

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n = \frac{1+n}{2} \cdot n = \frac{n+n^2}{2}$$

и $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n+n^2}{2} = \infty \quad \Rightarrow$ ряд расходится.

в) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n = -1+1-1+1-1+1-\ldots$

Последовательность частичных сумм ряда имеет вид:

$S_1 = -1;$

$S_2 = -1+1 = 0;$

$S_3 = -1+1-1 = -1;$

$S_4 = -1+1-1+1 = 0;$

.. ..

т.е. $S_{2k} = 0$, а $S_{2k+1} = -1.$

Таким образом, предела последовательности частичных сумм ряда не существует, следовательно, ряд расходится. ♦

Пример 1.4. Найти сумму ряда:

а) $\frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \frac{1}{4\cdot 5} + \ldots + \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \ldots;$

б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(5n-4)\cdot(5n+1)}.$

Р е ш е н и е.

а) $\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\frac{1}{4\cdot 5}+\ldots+\frac{1}{(n+1)(n+2)}+\ldots$

Общий член ряда $u_n=\frac{1}{(n+1)(n+2)}$.

Составим последовательность частичных сумм:

$$S_1=\frac{1}{2\cdot 3},\quad S_2=\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4},\quad S_3=\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\frac{1}{4\cdot 5},$$

$$S_n=\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\frac{1}{4\cdot 5}+\ldots+\frac{1}{(n+1)(n+2)}.$$

Разложим общий член ряда на сумму простейших дробей:

$$u_n=\frac{1}{(n+1)(n+2)}=\frac{A}{n+1}+\frac{B}{n+2}.$$

Приведем дроби к общему знаменателю

$$\frac{1}{(n+1)(n+2)}=\frac{A(n+2)+B(n+1)}{(n+1)(n+2)}$$

и приравняем числители:

$$1=A(n+2)+B(n+1),$$

при $n=-1$ $\quad 1=A \Rightarrow A=1,$

при $n=-2$ $\quad 1=-B \Rightarrow B=-1,$

получим $\quad \frac{1}{(n+1)(n+2)}=\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2},$

следовательно, $\quad u_1=\frac{1}{2\cdot 3}=\frac{1}{2}-\frac{1}{3},$

$$u_2 = \frac{1}{3\cdot 4} = \frac{1}{3} - \frac{1}{4}, \qquad u_3 = \frac{1}{4\cdot 5} = \frac{1}{4} - \frac{1}{5}, \quad \ldots$$

Тогда

$$S_n = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{5}\right) + \ldots +$$

$$+\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) + \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}\right).$$

После раскрытия скобок и приведения подобных членов, получим

$$S_n = \frac{1}{2} - \frac{1}{n+2},$$

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = 1 \quad \Rightarrow \quad \text{ряд сходится и}$$

его сумма $S = 1$.

б) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(5n-4)\cdot(5n+1)}$

Разложим общий член ряда $\displaystyle u_n = \frac{1}{(5n-4)\cdot(5n+1)}$

на сумму простейших дробей:

$$\frac{1}{(5n-4)\cdot(5n+1)} = \frac{A}{5n-4} + \frac{B}{5n+1} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{(5n-4)\cdot(5n+1)} = \frac{A(5n+1) + B(5n-4)}{(5n-4)\cdot(5n+1)} \quad \Rightarrow$$

$$1 = A(5n+1) + B(5n-4).$$

При $n=\frac{4}{5}$

$$1=A\left(5\cdot\frac{4}{5}+1\right)+B\left(5\cdot\frac{4}{5}-4\right) \quad \Rightarrow \quad 1=5A \quad \Rightarrow \quad A=\frac{1}{5},$$

при $n=-\frac{1}{5}$

$$1=A\left(-5\cdot\frac{1}{5}+1\right)+B\left(-5\cdot\frac{1}{5}-4\right) \quad \Rightarrow \quad 1=-5B \quad \Rightarrow \quad B=-\frac{1}{5},$$

получим $$u_n=\frac{1}{(5n-4)\cdot(5n+1)}=\frac{1}{5}\left(\frac{1}{5n-4}-\frac{1}{5n+1}\right),$$

следовательно, n – ая частичная сумма ряда равна

$$S_n=\frac{1}{5}\left[\left(1-\frac{1}{6}\right)+\left(\frac{1}{6}-\frac{1}{11}\right)+\left(\frac{1}{11}-\frac{1}{16}\right)+\ldots+\right.$$

$$\left.+\left(\frac{1}{5n-14}-\frac{1}{5n-9}\right)+\left(\frac{1}{5n-9}-\frac{1}{5n-4}\right)+\left(\frac{1}{5n-4}-\frac{1}{5n+1}\right)\right].$$

После приведения подобных членов, получим

$$S_n=\frac{1}{5}\left(1-\frac{1}{5n+1}\right).$$

Тогда $\lim\limits_{n\to\infty}S_n=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{5}\left(1-\frac{1}{5n+1}\right)=\frac{1}{5}$ $\Rightarrow$ ряд сходится и

сумма ряда $S=\frac{1}{5}$. ♦

Рассмотрим ряд, составленный из членов геометрической прогрессии:

$$a + aq + aq^2 + aq^3 + \ldots + aq^{n-1} + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} aq^{n-1}.$$

Сумма n первых членов геометрической прогрессии (n - ая частичная сумма построенного ряда) вычисляется по формуле

$$S_n = \frac{a(1-q^n)}{1-q}.$$

1) Если $|q|<1$, то $q^n \to 0$ при $n \to \infty$.

Тогда $$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{a(1-q^n)}{1-q} = \lim_{n\to\infty} \frac{a-aq^n}{1-q} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{a}{1-q} - \lim_{n\to\infty} \frac{aq^n}{1-q} = \frac{a}{1-q}.$$

Следовательно, ряд $\sum_{n=1}^{\infty} aq^{n-1}$ при $|q|<1$ сходится и его сумма равна $S = \frac{a}{1-q}$.

2) Если $|q|>1$, то $q^n \to \infty$ при $n \to \infty$.

Тогда $$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{a(1-q^n)}{1-q} = \infty$$

и, следовательно, ряд $\sum_{n=1}^{\infty} aq^{n-1}$ расходится.

3) Если $q=1$, то ряд принимает вид $a + a + a + a + \ldots + a + \ldots$.

При $a \neq 0$ $S_n = na$ и $\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} na = \infty$, т.е. ряд расходится.

4) Если $q=-1$, то ряд принимаст вид $a-a+a-a+a-a+....$

Так как при $a\neq 0$ $S_{2n}=0$, а $S_{2n-1}=a$, то $\lim\limits_{n\to\infty}S_n$ не существует и ряд расходится. ♦

Ряд, составленный из членов геометрической прогрессии,

$$\sum_{n=1}^{\infty}aq^{n-1} - \begin{cases} \text{сходится при } |q|<1, \\ \text{расходится при } |q|\geq 1. \end{cases}$$

Например,

ряды $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{5^n}$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{10^n}$ - **сходятся,**

а ряды $\sum\limits_{n=1}^{\infty}3^n$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}10^{n+1}$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{5}{3}\right)^n$ - **расходятся**

Ряд

$$u_{n+1}+u_{n+2}+u_{n+3}+...+u_{n+k}+...=\sum_{k=1}^{\infty}u_{n+k}, \quad (1.2)$$

полученный из ряда (1.1) отбрасыванием первых n членов, называется n -- ым остатком ряда или n – ым ***остаточным членом ряда***.

Если сумму остаточного члена сходящегося ряда обозначить R_n, то, очевидно, $S_n+R_n=S$.

Вычисление суммы ряда, если оно возможно, связано с громоздкими вычислениями. Поэтому чаще всего ограничиваются приближенным

вычислением частичной суммы ряда, полагая $S \cong S_n$ и допуская при этом ошибку, равную $R_n = \sum_{k=1}^{\infty} u_{n+k}$. Но для этого надо быть уверенным, что данный ряд сходится.

Поэтому особое значение приобретают приемы и методы, позволяющие определить сходимость ряда без нахождения его суммы.

1.2. Необходимый признак сходимости ряда

Теорема 1.1. Если ряд (1.1) сходится, то предел его общего члена равен нулю.

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n \text{ – сходится } \Rightarrow \lim_{n\to\infty} u_n = 0.$$

Доказательство.

Пусть $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ – сходится и его сумма равна S, т.е. $\lim_{n\to\infty} S_n = S$, но тогда и $\lim_{n\to\infty} S_{n-1} = S$. Так как $u_n = S_n - S_{n-1}$, то

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty}(S_n - S_{n-1}) = \lim_{n\to\infty} S_n - \lim_{n\to\infty} S_{n-1} = S - S = 0. \ \#$$

Сформулированный признак является необходимым, но не достаточным, т.е.

из того, что $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$ **не следует, что** $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ **– сходится.**

Следствие (достаточный признак расходимости)

$$\lim_{n\to\infty} u_n \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \sum_{n=1}^{\infty} u_n \text{ – расходится.}$$

Пример 1.5. Проверить выполнение необходимого признака сходимости:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{4}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}} + \ldots;$

б) $\frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \frac{3}{4} + \ldots + \frac{n}{n+1} + \ldots.$

Р е ш е н и е.

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{4}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}} + \ldots$

Вычислим $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$, т.е. необходимый признак сходимости ряда выполняется.

С другой стороны, оценим его n – ую частичную сумму

$$S_n = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{4}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}} \geq$$

$$\geq \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}} = \frac{n}{\sqrt{n}} = \sqrt{n}$$

Таким образом, $S_n \geq \sqrt{n}$. Но при $n \to \infty$ $\sqrt{n} \to \infty$, а, следовательно, и $S_n \to \infty$, т.е. ряд расходится (несмотря на то, что предел общего члена ряда равен нулю).

б) $\frac{1}{2}+\frac{2}{3}+\frac{3}{4}+\ldots+\frac{n}{(n+1)}+\ldots$

Так как $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}=1\neq 0 \quad \Rightarrow$ ряд расходится. ♦

1.3. Свойства сходящихся рядов

Теорема 1.2. Пусть ряды $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ - сходятся и имеют соответственно суммы S и σ, тогда ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(u_n \pm v_n)$ - тоже сходится и его сумма равна $S \pm \sigma$.

Доказательство.

Так как ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ - сходится, то существует $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$, где $S_n = u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n$.

Так как ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ - сходится, то существует $\lim\limits_{n\to\infty} \sigma_n = \sigma$, где $\sigma_n = v_1 + v_2 + v_3 + \ldots + v_n$.

Обозначим через δ_n $n-$ую частичную сумму ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(u_n \pm v_n)$:

$$\delta_n = (u_1 \pm v_1) + (u_2 \pm v_2) + (u_3 \pm v_3) + \ldots + (u_n \pm v_n) =$$

$$= (u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n) \pm (v_1 + v_2 + v_3 + \ldots + v_n) = S_n \pm \sigma_n.$$

Тогда $\lim\limits_{n\to\infty} \delta_n = \lim\limits_{n\to\infty}(S_n \pm \sigma_n) = \lim\limits_{n\to\infty} S_n \pm \lim\limits_{n\to\infty} \sigma_n = S \pm \sigma.$

Следовательно, ряд $\sum_{n=1}^{\infty}(u_n \pm v_n)$ - **сходится и его сумма равна** $S \pm \sigma$. #

Теорема 1.3. Пусть ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ - **сходится и имеет сумму** S. тогда ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda \cdot u_n$, где λ - число, тоже **сходится и его сумма равна** λS.

Доказательство.

Так как ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ - сходится, **то существует** $\lim_{n\to\infty} S_n = S$,

где $S_n = u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n$.

Обозначим через δ_n $n-$ую частичную сумму ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda \cdot u_n$:

$$\delta_n = \lambda u_1 + \lambda u_2 + \lambda u_3 + \ldots + \lambda u_n = \lambda (u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n) = \lambda S_n.$$

Тогда $\lim_{n\to\infty} \delta_n = \lim_{n\to\infty} \lambda S_n = \lambda \lim_{n\to\infty} S_n = \lambda S$,

следовательно, ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda \cdot u_n$ - сходится и его сумма равна λS. #

Теорема 1.4. Если у сходящегося ряда $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ отбросить конечное число первых членов ряда, то полученный ряд также будет сходиться.

Доказательство.

Обозначим через

$S_n = u_1 + u_2 + u_3 + ... + u_m + u_{m+1} + ... + u_n$ –

сумму n первых членов ряда $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$,

$S_m = u_1 + u_2 + u_3 + ... + u_m$ –

сумму m отброшенных членов $(m < n)$,

$\sigma_{n-m} = u_{m+1} + u_{m+2} + u_{m+3} + ... + u_n$ –

сумму $n - m$ первых членов полученного остатка ряда после m–го члена: $\sum_{r=m+1}^{\infty} u_r = u_{m+1} + u_{m+2} + u_{m+3} + ... + u_n + ...$

Тогда $S_n = S_m + \sigma_{n\ m}$.

Если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ сходится, то существует $\lim_{n\to\infty} S_n = S$.

Тогда $\lim_{n\to\infty} \sigma_{n-m} = \lim_{n\to\infty} (S_n - S_m) = \lim_{n\to\infty} S_n - \lim_{n\to\infty} S_m = S - S_m$,

т.е. последовательность частичных сумм σ_{n-m} ряда $\sum_{r=m+1}^{\infty} u_r$ имеет конечный предел.

Следовательно, ряд $\sum_{r=m+1}^{\infty} u_r$ сходится. #

1.4. *Достаточные признаки сходимости знакоположительных рядов*

Рассмотрим ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n + \ldots, \quad \text{где} \quad u_n \geq 0.$$

Такие ряды называют ***знакоположительными.***

Сходимость или расходимость знакоположительного ряда можно установить с помощью ***достаточных признаков сходимости.***

Рассмотрим наиболее часто встречающиеся достаточные ***признаки*** сходимости знакоположительных числовых рядов.

1.4.1. ИНТЕГРАЛЬНЫЙ ПРИЗНАК КОШИ

Теорема 1.5.

Пусть дан знакоположительный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n \quad (u_n \geq 0)$.

Пусть функция $f(x)$: а) положительная, непрерывная и монотонно убывающая на $[1; +\infty)$,

б) $f(1) = u_1,\ f(2) = u_2,\ \ldots,\ f(n) = u_n, \ldots$

Тогда интеграл $\int_1^{+\infty} f(x)dx$ и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ **одновременно сходятся или расходятся.**

Доказательство.

Рассмотрим криволинейную трапецию (рис.1), ограниченную сверху графиком функции $y = f(x)$, с основанием от $x = 1$ до $x = n$. Впишем в

эту трапецию и опишем около неё две ступенчатые фигуры, состоящие из прямоугольников, основаниями которых служат отрезки $[1;\ 2]$, $[2;\ 3]$, $[3;\ 4]$, ..., $[n-1;\ n]$.

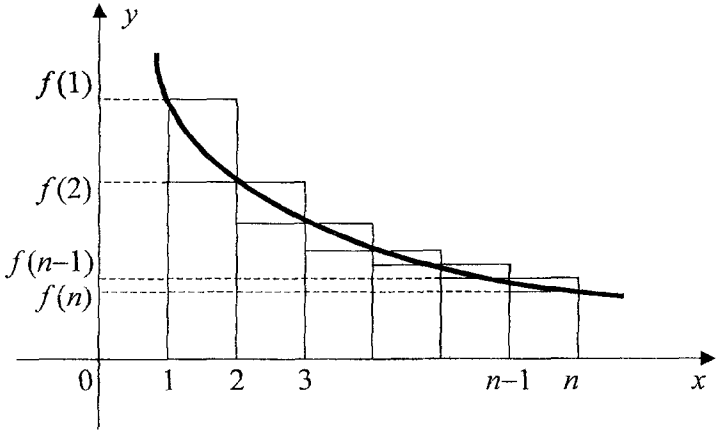


Рис.1

Высотами прямоугольников первой из фигур служат значения функции $f(2), f(3), f(4), ..., f(n)$, а высотами прямоугольников второй – значения $f(1), f(2), f(3), ..., f(n-1)$. Площадь криволинейной трапеции, выражаемая интегралом $\int_1^n f(x)dx$, заключается между площадями вписанной и описанной ступенчатых фигур.

Так как площадь вписанной фигуры выражается суммой

$$f(2)+f(3)+...+f(n)=u_2+u_3+...+u_n,$$

а описанной – суммой

$$f(1)+f(2)+...+f(n-1)=u_1+u_2+...+u_{n-1},$$

то получаем неравенство

$$u_2 + u_3 + \ldots + u_n < \int_1^n f(x)dx < u_1 + u_2 + \ldots + u_{n-1},$$

или короче, $$S_n - u_1 < \int_1^n f(x)dx < S_n - u_n.$$

Отсюда получаем:

$$S_n < u_1 + \int_1^n f(x)dx; \tag{1.3}$$

$$S_n > u_n + \int_1^n f(x)dx. \tag{1.4}$$

Рассмотрим теперь следующие случаи:

1. Пусть несобственный интеграл $\int_1^{+\infty} f(x)dx$ сходится, это значит, что существует $\lim\limits_{n\to\infty} \int_1^n f(x)dx = M$.

Так как $f(x) > 0$, то с возрастанием n интеграл $\int_1^n f(x)dx$ возрастает и не превосходит своего предела: $\int_1^n f(x)dx < M$

Из неравенства (1.3) следует, что $S_n < u_1 + M$.

Таким образом, в этом случае последовательность частичных сумм ограничена и, следовательно, существует конечный $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$, т.е. ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ сходится.

2. Пусть несобственный интеграл $\int_1^{+\infty} f(x)dx$ расходится, это значит, что $\lim\limits_{n\to\infty}\int_1^n f(x)dx = +\infty$.

Из неравенства (1.4) следует, что последовательность частичных сумм $\{S_n\}$ неограничена, следовательно, ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ расходится. #

Пример 1.6. Исследовать на сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$, $(p>0)$.

Р е ш е н и е.

Члены ряда являются значениями функции $f(x)=\frac{1}{x^p}$, удовлетворяющей всем условиям интегрального признака при $x\in[1;+\infty)$.

Рассмотрим несобственный интеграл $\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^p}$.

Сначала вычислим интеграл

$$\int_1^n\frac{dx}{x^p} = \int_1^n x^{-p}dx = \left.\frac{x^{-p+1}}{-p+1}\right|_1^n = \frac{n^{1-p}}{1-p} - \frac{1}{1-p}.$$

а) Пусть $\mathbf{0<p<1}$, тогда $n^{1-p}\to\infty$ при $n\to\infty$ и

$$\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^p} = \lim_{n\to\infty}\int_1^n\frac{dx}{x^p} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^{1-p}}{1-p} - \frac{1}{1-p}\right) = +\infty$$ - интеграл расходится. Следовательно, и ряд расходится.

б) Пусть $p>1$, тогда при $n\to\infty$ $n^{1-p}=\dfrac{1}{n^{p-1}}\to 0$ и

$$\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^p}=\lim_{n\to\infty}\int_1^n\frac{dx}{x^p}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^{1-p}}{1-p}-\frac{1}{1-p}\right)=-\frac{1}{1-p},$$

т.е. несобственный интеграл сходится.

Следовательно, и ряд сходится.

в) Пусть $p=1$, тогда

$$\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x}=\lim_{n\to\infty}\int_1^n\frac{dx}{x}=\lim_{n\to\infty}\ln x\Big|_1^n=\lim_{n\to\infty}(\ln n-\ln 1)=\infty.$$

Интеграл $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x}$ расходится, следовательно, и ряд $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ расходится. ♦

Замечание. При $p\le 0$ для ряда $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$ не выполняется необходимый признак сходимости, так как при $n\to\infty$ $\dfrac{1}{n^p}\to\infty$, следовательно, ряд расходится.

Ряд $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ называют ***гармоническим рядом,***

а ряд $\displaystyle\sum_{n-1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$, $(p>0)$ - ***обобщенным гармоническим рядом.***

Гармонический ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ – **расходится.**

Обобщенный гармонический ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} - \begin{cases} \text{при} \quad p>1 \quad \text{сходится,} \\ \text{при} \quad 0<p\le 1 \quad \text{расходится.} \end{cases}$$

Например,

ряды $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^5}$, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n^4}}$ - **сходятся,**

а ряды $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n^2}}$, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1/4}}$ - **расходятся.**

Пример 1.7. Исследовать на сходимость ряд:

а) $\frac{1}{1+1^2}+\frac{1}{1+2^2}+\ldots+\frac{1}{1+n^2}+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1+n^2}$;

б) $\frac{1}{2}+\frac{2}{5}+\frac{3}{10}+\frac{4}{17}+\frac{5}{26}+\ldots$;

в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)\ln(n+1)}$.

г) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\cdot \ln^3 n}$

Р е ш е н и е.

а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+n^2}$

Члены данного ряда являются значениями функции $f(x)=\frac{1}{1+x^2}$, удовлетворяющей условиям интегрального признака при $x\in[1;+\infty)$.

Вычислим интеграл

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{n\to\infty} \int_1^n \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{n\to\infty} arctg\, x \Big|_1^n =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left(arctg\, n - \frac{\pi}{4} \right) = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4},$$

т.е. несобственный интеграл $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}$ сходится и вместе с ним сходится ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+n^2}$.

б) $\frac{1}{2}+\frac{2}{5}+\frac{3}{10}+\frac{4}{17}+\frac{5}{26}+\ldots$

Общий член ряда $u_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^2+1}$.

Вычислим соответствующий несобственный интеграл:

$$\int_1^{\infty} \frac{x}{x^2+1} dx = \lim_{n\to\infty} \int_1^n \frac{x dx}{x^2+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2} \int_1^n \frac{d(x^2+1)}{x^2+1} =$$

$$= \frac{1}{2} \lim_{n\to\infty} (ln(x^2+1)) \Big|_1^n = \frac{1}{2} \lim_{n\to\infty} [ln(n^2+1) - ln 2] = \infty - ln 2 = \infty,$$

несобственный интеграл расходится, следовательно, и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^2+1}$ расходится.

в) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)ln(n+1)}$

Члены ряда являются значениями функции $f(x) = \frac{1}{(x+1)ln(x+1)}$,

удовлетворяющей условиям интегрального признака при $x \in [1; +\infty)$

Несобственный интеграл

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{(x+1)ln(x+1)} = \lim_{n\to\infty} \int_1^n \frac{d[ln(x+1)]}{ln(x+1)} = \lim_{n\to\infty} ln[ln(x+1)]\Big|_1^n =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left(ln[ln(n+1)] - ln(ln2)\right) = \infty \text{ - расходится,}$$

следовательно, и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)ln(n+1)}$ расходится.

г) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \cdot ln^3 n}$

Члены ряда являются значениями функции $f(x) = \frac{1}{x \cdot ln^3 x}$,

удовлетворяющей условиям интегрального признака при $x \in [2; +\infty)$

Несобственный интеграл

$$\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x \cdot ln^3 x} = \lim_{n\to\infty} \int_2^n \frac{d(ln x)}{ln^3 x} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{ln^{-2} x}{-2} \right)\Big|_2^n =$$

$$= -\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2ln^2 x}\Big|_2^n = -\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{2ln^2 n} - \frac{1}{2ln^2 2} \right) = \frac{1}{2ln^2 2} \text{ - сходится,}$$

следовательно, и ряд $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \cdot ln^3 n}$ сходится. ♦

1.4.2. ПРИЗНАК СРАВНЕНИЯ

Теорема 1.6.

Пусть даны два ряда $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$, причем $\mathbf{0 \le u_n \le v_n}$.

Тогда:

1) **если ряд** $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ **- сходится, то и ряд** $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ **- тоже сходится;**

2) **если ряд** $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ **- расходится, то и ряд** $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ **- расходится.**

Доказательство.

Обозначим через S_n и σ_n $n-$ые частичные суммы рядов $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ соответственно Из неравенства $u_n \le v_n$ следует, что $S_n \le \sigma_n$.

1) Так как ряд $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ - сходится, то существует $\lim_{n\to\infty} \sigma_n = \sigma$, при этом, очевидно, $\sigma_n < \sigma$, а следовательно, и $S_n \le \sigma_n < \sigma$.

Таким образом, частичные суммы S_n ряда $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ ограничены и, следовательно, ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ сходится, причем его сумма не превосходит суммы ряда $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$.

2) Если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ - расходится, то последовательность его частичных сумм возрастает, то есть $\lim\limits_{n\leftarrow\infty} S_n = \infty$.

А так как $S_n \leq \sigma_n$, то и $\lim\limits_{n\leftarrow\infty} \sigma_n = \infty$. Следовательно, ряд $\sum_{n-1}^{\infty} v_n$ - расходится. #

Замечание. Обычно, выбирая ряд для сравнения, рассматривают либо обобщенный гармонический ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$, либо ряд, составленный из членов геометрической прогрессии $\sum_{n=1}^{\infty} aq^{n-1}$.

Пример 1. 8. Исследовать на сходимость ряд:

а) $\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{2\cdot 3^2}+\frac{1}{3\cdot 3^3}+\frac{1}{4\cdot 3^4}+\cdots, \quad u_n = \frac{1}{n\cdot 3^n}$;

б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{5^{n-1}+n+1}$;

в) $\sum_{n=1}^{\infty} sin\frac{\sqrt[3]{n}}{\sqrt{n^5+2}}$.

Р е ш е н и е.

а) $\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{2\cdot 3^2}+\frac{1}{3\cdot 3^3}+\frac{1}{4\cdot 3^4}+\cdots, \quad u_n = \frac{1}{n\cdot 3^n}$.

Воспользуемся признаком сравнения.

Для сравнения возьмем ряд $\sum_{n-1}^{\infty} \frac{1}{3^n}$, о котором известно, что он

сходится (ряд геометрической прогрессии со знаменателем $q = \frac{1}{3} < 1$),

а т.к. $u_n = \frac{1}{n \cdot 3^n} < \frac{1}{3^n}$, то исходный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \cdot 3^n}$ сходится.

б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{5^{n-1} + n + 1}$

Оценим общий член данного ряда $\frac{1}{5^{n-1} + n + 1} < \frac{1}{5^{n-1}}$.

Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{5^{n-1}}$ - сходится (составлен из членов геометрической прогрессии со знаменателем $q = \frac{1}{5} < 1$).

А в силу неравенства $\frac{2}{5^{n-1} + n - 1} < \frac{2}{5^{n-1}}$, по признаку сравнения, из сходимости большего ряда следует, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{5^{n-1} + n - 1}$ тоже сходится.

в) $\sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{\sqrt[3]{n}}{\sqrt{n^5 + 2}}$

Воспользуемся признаком сравнения.

Так как $\sin t < t$ при $t \to 0$, а $\frac{\sqrt[3]{n}}{\sqrt{n^5 + 2}} \to 0$ при $n \to \infty$, можно записать цепочку неравенств

$$\sin\frac{\sqrt[3]{n}}{\sqrt{n^5+2}} < \frac{\sqrt[3]{n}}{\sqrt{n^5+2}} < \frac{\sqrt[3]{n}}{\sqrt{n^5}} = \frac{1}{n^{13/6}}, \qquad (*)$$

Ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt[3]{n}}{\sqrt{n^5}} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{13/6}}$ - сходится как обобщенный гармонический ряд с $p=\frac{13}{6}>1$.

Тогда, по признаку сравнения, сходится и ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{\sqrt[3]{n}}{\sqrt{n^5+2}}$. ♦

1.4.3. ПРЕДЕЛЬНЫЙ ПРИЗНАК СРАВНЕНИЯ

Теорема 1.7.

Пусть даны два ряда $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ $(u_n \geq 0,\ v_n > 0)$.

Если $\lim_{n\to\infty}\frac{u_n}{v_n} = A \ \ (0 < A < \infty)$, то **оба ряда одновременно сходятся или расходятся.**

Замечание. При выборе ряда для сравнения можно воспользоваться следующими правилами.

Пусть $P_m(n)$ и $Q_r(n)$ - многочлены относительно переменной n.

I. Ряды вида $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{P_m(n)}{Q_r(n)}$ сравнивают с рядом $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$,

где $p = r - m$.

II. Ряды вида

$$\sum_{n=1}^{\infty} P_m(n)\cdot \sin Q_r(n), \qquad \sum_{n=1}^{\infty} P_m(n)\cdot tgQ_r(n),$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} P_m(n)\cdot \arcsin Q_r(n), \qquad \sum_{n=1}^{\infty} P_m(n)\cdot arctgQ_r(n)$$

сравнивают с рядом $\sum_{n=1}^{\infty} P_m(n)\cdot Q_r(n).$

III. Ряды вида $\sum_{n=1}^{\infty} P_m(n)\cdot ln[1+Q_r(n)]$

сравнивают с рядом $\sum_{n=1}^{\infty} P_m(n)\cdot Q_r(n).$

Пример 1.9. *Исследовать на сходимость ряд:*

$$а)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+3}{n^2+2}; \qquad б)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+3n+1}{n^5+2};$$

$$в)\ \sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)ln^3(2n)}.$$

Р е ш е н и е.

$а)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+3}{n^2+2}.$

Ряды такого вида лучше исследовать по предельному признаку сравнения. Чтобы подобрать второй ряд, оставим в числителе и знаменателе общего члена ряда только старшие члены многочленов, получим $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n^2}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ - гармонический ряд, расходящийся, а далее применим предельный признак сравнения.

Имеем: $u_n = \dfrac{n+3}{n^2+2}, \quad v_n = \dfrac{1}{n},$

тогда $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{u_n}{v_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(n+3)\cdot n}{(n_2+2)\cdot 1} = \left[\dfrac{\infty}{\infty}\right] = 1,$ следовательно, по предельному признаку сравнения, ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n+3}{n^2+2}$ – расходится, т.к. выбранный для сравнения ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n}$ – расходится.

б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n^2+3n+1}{n^5+2}$

Для сравнения возьмем ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^{5-2}} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^3}$ – сходящийся (обобщенный гармонический ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^p}$ при $p=3$).

Имеем: $u_n = \dfrac{n^2+3n+1}{n^5+2}, \quad v_n = \dfrac{1}{n^3}.$

Вычислим

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n^2+3n+1)\cdot n^3}{(n^5+2)\cdot 1} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^5+3n^4+n^3}{n^5+2} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = 1.$$

Условие теоремы выполняется, а так как ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^3}$ сходится, то и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n^2+3n+1}{n^5+2}$ тоже сходится.

в) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{1}{(2n-1)\,ln^3(2n)}$

Рассмотрим сначала ряд $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{2n\ln^3(2n)}$.

По интегральному признаку этот ряд **сходится, т.к. соответствующий** *несобственный интеграл* сходится:

$$\int_2^{\infty} \frac{dx}{2x\ln^3 2x} = \lim_{n\to\infty} \int_2^{n} \frac{d(\ln 2x)}{\ln^3 2x} = \lim_{n\to\infty} \left(-\frac{1}{2\ln^2 2x} \right) \Bigg|_2^n =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left(-\frac{1}{2\ln^2 2n} + \frac{1}{2\ln^2 2} \right) = \frac{1}{2\ln^2 2}.$$

Для рядов $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)\ln^3(2n)}$ и $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{2n\ln^3(2n)}$ **применим** предельный *признак сравнения.*

Вычислим

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2n\cdot\ln^3(2n)}{(2n-1)\cdot\ln^3(2n)} = \lim_{n\to\infty} \frac{2n}{2n-1} = 1,$$

т.е. ряды ведут себя одинаково относительно сходимости, следовательно ряд $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)\ln^3(2n)}$ сходится. ♦

1.4.4. ПРИЗНАК ДАЛАМБЕРА

Теорема 1.8.

Если для ряда $\sum_{n=1}^{\infty} u_n, \quad u_n \geq 0,$

$\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = d$, то при $\begin{cases} d<1 & - \text{ ряд сходится,} \\ d>1 & - \text{ ряд расходится.} \end{cases}$

Доказательство.

а) Пусть $d < 1$. Так как $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = d$, то на основании определения предела числовой последовательности для любого $\varepsilon > 0$ можно подобрать такое натуральное число N, зависящее от ε, что для всех членов ряда, номер которых $n \geq N$, выполняется неравенство

$$\left| \frac{u_{n+1}}{u_n} - d \right| < \varepsilon.$$

Откуда следует, что $$-\varepsilon < \frac{u_{n+1}}{u_n} - d < \varepsilon,$$

или $$d - \varepsilon < \frac{u_{n+1}}{u_n} < \varepsilon + d.$$

Пусть $\varepsilon + d = q$, тогда имеем $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} < q$.

Так как $d < 1$ по предположению, а ε произвольно мало, то можно выбрать ε настолько малым, чтобы $q = \varepsilon + d < 1$.

Таким образом, для $n \geq N$ имеем:

$$\frac{u_{N+1}}{u_N} < q, \qquad \frac{u_{N+2}}{u_{N+1}} < q, \qquad \frac{u_{N+3}}{u_{N+2}} < q, \ \ldots, \ \Rightarrow$$

$$u_{N+1} < q \cdot u_N,$$

$$u_{N+2} < q \cdot u_{N+1} < q^2 \cdot u_N,$$

$$u_{N+3} < q \cdot u_{N+2} < q^3 \cdot u_N, \ \ldots$$

Рассмотрим два ряда:

$$u_N + u_{N+1} + u_{N+2} + u_{N+3} + \ldots, \tag{1.5}$$

$$u_N + q \cdot u_N + q^2 \cdot u_N + q^3 \cdot u_N + \ldots \tag{1.6}$$

Ряд (1.6) сходится как геометрическая прогрессия со знаменателем $|q|<1$. Так как члены ряда (1.5) меньше соответствующих членов ряда (1.6), то по признаку сравнения ряд (1.5) *тоже сходится.*

Но ряд (1.5) получается из данного ряда $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ отбрасыванием конечного числа первых членов $u_1+u_2+u_3+\ldots+u_{n-1}$; следовательно, по теореме 1.4. ряд (1.4) также сходится.

б) Пусть теперь $d>1$. Тогда $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{u_{n+1}}{u_n}=d>1$, т.е., ***начиная*** с достаточно больших значений $n\geq N$, выполняется **неравенство** $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}>1$, или $u_{n+1}>u_n$. Таким образом, члены ряда возрастают с увеличением номера члена n. Поэтому $\lim\limits_{n\to\infty}u_n\neq 0$, т.е. выполняется достаточный признак расходимости ряда и, следовательно, ряд расходится. #

Замечание. При $d=1$ признак Даламбера на вопрос о том, сходится или расходится ряд, ответа *не дает. В этом случае может иметь* место как сходимость, так и расходимость, что устанавливается с помощью других признаков.

Пример 1.10. Исследовать на **сходимость** ряд:

а) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{n+1}{2^n\cdot n!}$; *б)* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{3^n}$;

в) $\sum\limits_{n\to\infty}^{\infty} n!\sin\dfrac{\pi}{2^n}$.

Р е ш е н и е.

а) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n+1}{2^n n!}$

В формуле содержится множитель $n!$ (n факториал), поэтому воспользуемся признаком Даламбера.

Найдем $u_{n+1} = \frac{(n+1)+1}{2^{n+1}(n+1)!} = \frac{n+2}{2^{n+1}(n+1)!}$ и вычислим

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+2)\cdot 2^n \cdot n!}{2^{n+1}\cdot(n+1)!(n+1)} =$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} n! = 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot \ldots \cdot n, \\ (n+1)! = 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot \ldots \cdot n\cdot (n+1), \\ (n+1)! = n!(n+1) \end{array} \right\} =$$

$$= \frac{1}{2}\lim_{n\to\infty} \frac{(n+2)n!}{n!(n+1)(n+1)} = \frac{1}{2}\lim_{n\to\infty} \frac{n+2}{(n+1)(n+1)} = 0 < 1.$$

Следовательно, по признаку Даламбера, ряд сходится.

б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{3^n}$

Так как $u_n = \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{3^n}$,

то $u_{n+1} = \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2(n+1)-1)}{3^{n+1}} = \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n+1)}{3^{n+1}}$, тогда

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n+1)\cdot 3^n}{3^{n+1}\cdot 1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)} =$$

$$= \frac{1}{3}\lim_{n\to\infty} \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)(2n+1)}{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)} = \frac{1}{3}\lim_{n\to\infty} \frac{2n+1}{1} = \frac{1}{3}\cdot\infty = \infty > 1,$$

следовательно, ряд расходится.

в) $\sum_{n\to\infty}^{\infty} n!\sin\frac{\pi}{2^n}$

Воспользуемся признаком Даламбера.

Так как $u_n = n!\sin\frac{\pi}{2^n}$, то $u_{n+1} = (n+1)!\sin\frac{\pi}{2^{n+1}}$.

Вычислим

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)!\sin\frac{\pi}{2^{n+1}}}{n!\sin\frac{\pi}{2^n}} = \left\{\begin{array}{c}(n+1)! = n!(n+1)\\ \sin\frac{\pi}{2^{n+1}} \approx \frac{\pi}{2^{n+1}}\\ \sin\frac{\pi}{2^n} \approx \frac{\pi}{2^n},\ (n\to\infty)\end{array}\right\} =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{n!(n+1)\pi\cdot 2^n}{n!2^{n+1}\cdot\pi} = \frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}(n+1) = \infty > 1,$$

Следовательно, ряд расходится. ♦

1.4.5. РАДИКАЛЬНЫЙ ПРИЗНАК КОШИ

Теорема 1.9.

Если для ряда $\sum_{n=1}^{\infty} u_n \quad (u_n \geq 0)$

$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n} = k$, то при $\left\{\begin{array}{ll} k<1 & \text{– ряд сходится,}\\ k>1 & \text{– ряд расходится.}\end{array}\right.$

Доказательство радикального признака аналогично доказательству признака Даламбера и основано на сравнении с рядом (1.6).

Пример 1. 11. Исследовать на сходимость ряд:

$$а)\ \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{5n}{3n-1}\right)^n;\qquad б)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\ln^n(n+2)};$$

$$в)\ \sum_{n=1}^{\infty}2^{n-1}e^{-n};\qquad г)\ \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3n-1}{4n+2}\right)^{2n};$$

$$д)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2};\qquad е)\ \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{3n-1}\right)^{n^3}.$$

Р е ш е н и е.

$а)\ \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{5n}{3n-1}\right)^n$ Общий член ряда $u_n=\left(\frac{5n}{3n-1}\right)^n$

Воспользуемся радикальным признаком Коши.

Вычислим $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{5n}{3n-1}\right)^n}=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{5n}{3n-1}\right)=\frac{5}{3}$

Так как $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=\frac{5}{3}>1$, то ряд расходится.

$б)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\ln^n(n+2)}$

Общий член ряда $u_n=\frac{1}{\ln^n(n+2)}$.

Вычислим

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{\ln^n(n+2)}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\ln(n+2)}=0<1.$$

Так как $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=0<1$, следовательно, ряд сходится.

в) $\sum_{n-1}^{\infty} 2^{n-1} e^{-n}$

Общий член ряда $u_n = 2^{n-1} e^{-n}$.

Исследуем по радикальному признаку Коши:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{2^{n-1} e^{-n}} = \lim_{n\to\infty} 2^{\frac{n-1}{n}} \cdot e^{-\frac{n}{n}} =$$

$$= e^{-1} \cdot 2^{\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n-1}{n}} = e^{-1} \cdot 2^1 = \frac{2}{e} < 1.$$

Следовательно, ряд сходится.

г) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3n-1}{4n+2} \right)^{2n}$

Общий член ряда $u_n = \left(\frac{3n-1}{4n+2} \right)^{2n}$. **Вычислим предел:**

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(\frac{3n-1}{4n+2} \right)^{2n}} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{3n-1}{4n+2} \right)^{\frac{2n}{n}} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{3n-1}{4n+2} \right)^2 = \frac{9}{16} < 1.$$

Так как $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = \frac{9}{16} < 1$, то ряд сходится.

д) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \left(\frac{n+1}{n} \right)^{n^2}$

Так как $u_n = \frac{1}{2^n} \left(\frac{n+1}{n} \right)^{n^2}$ и

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{2^n} \left(\frac{n+1}{n} \right)^{n^2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2} \left(\frac{n+1}{n} \right)^{\frac{n^2}{n}} =$$

$$= \frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^n = \frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \frac{1}{2}e = \frac{e}{2} > 1,$$

следовательно, ряд расходится.

е) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{3n-1}\right)^{n^3}$

Воспользуемся радикальным признаком: $u_n = \left(\frac{n}{3n-1}\right)^{n^3}$,

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n} = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{n}{3n-1}\right)^{n^3}} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{3n-1}\right)^{n^2} = \left(\frac{1}{3}\right)^{\infty} = 0 < 1,$$

следовательно, ряд сходится. ♦

1.5. Знакопеременные ряды. Абсолютная и условная сходимость

До сих пор мы рассматривали только ряды, все члены которых были неотрицательными числами. Теперь перейдем к рассмотрению рядов, содержащих как положительные, так и отрицательные члены. Такие ряды называется ***знакопеременными***.

Например, знакопеременным является ряд

$$1 - \frac{1}{2^2} - \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} - \ldots + (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\frac{1}{n^2} + \ldots$$

Рассмотрим вопрос о сходимости знакопеременных рядов

Пусть дан знакопеременный ряд

$$u_1 + u_2 + u_3 \ldots + u_n + \ldots \ , \ (u_n \in R) \qquad (1.7)$$

Ряд, составленный из абсолютных величин членов знакопеременного ряда

$$|u_1|+|u_2|+|u_3|+...+|u_n|+..., \qquad (1.8)$$

является знакоположительным и сходимость его можно исследовать с помощью достаточных признаков сходимости знакоположительных рядов (Даламбера, Коши и т.д.).

Знакопеременный ряд $\sum_{n-1}^{\infty} u_n \quad (u_n \in R)$ называется ***абсолютно сходящимся***, если сходится ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$, составленный из абсолютных величин его членов.

Знакопеременный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n \quad (u_n \in R)$ называется ***условно сходящимся***, если он сходится, а ряд, составленный из абсолютных величин его членов, расходится.

Теорема 1.10 (признак сходимости знакопеременных рядов)

Если для знакопеременного ряда $\sum_{n=1}^{\infty} u_n \quad (u_n \in R)$ сходится ряд, составленный из абсолютных величин его членов, то данный знакопеременный ряд также сходится, причем абсолютно

$$\sum_{n=1}^{\infty} |u_n| - \textbf{сходится} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} u_n \quad (u_n \in R) - \textbf{сходится абсолютно}$$

Пример 1.12. Исследовать на сходимость ряд

$$1-\frac{1}{2^2}-\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{5^2}-\ldots+(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\frac{1}{n^2}+\ldots$$

Р е ш е н и е.

Рассмотрим ряд, составленный из абсолютных величин членов данного ряда

$$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\ldots+\frac{1}{n^2}+\ldots \qquad (*)$$

Ряд (*) является сходящимся (обобщенный гармонический ряд при $p=2$).

Следовательно, исходный знакопеременный ряд тоже сходится, причем абсолютно. ♦

Среди знакопеременных рядов абсолютно сходящиеся ряды занимают особое место. Это объясняется тем, что на такие ряды переносятся основные свойства конечных сумм. Особое значение имеет свойство переместительности, которым обладают только абсолютно сходящиеся ряды.

1^0. ***При любой перестановке членов абсолютно сходящегося ряда получается сходящийся ряд, сумма которого равна сумме данного ряда.***

Наоборот, в случае перестановки членов условно сходящегося ряда может измениться его сумма, и даже может получиться расходящийся ряд.

Говоря о перестановке членов ряда, подразумевается, что меняют местами бесконечное множество членов, так как, при перестановке двух, трех или любого конечного числа членов, сумма ряда, очевидно, не изменится.

2^0. ***Если знакопеременные ряды*** $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ ***и*** $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ ***сходятся абсолютно*** *и их суммы соответственно равны* S *и* σ, ***то сумма***

(разность) этих рядов есть также абсолютно сходящийся ряд, *сумма которого равна* $S+\sigma$ *(или соответственно* $S-\sigma$*).*

3^0. ***Если знакопеременные ряды*** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ ***и*** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ ***сходятся абсолютно*** *и их суммы соответственно равны* S *и* σ, ***то произведение этих рядов есть также абсолютно сходящийся ряд***, *сумма которого равна* $S\cdot\sigma$.

Под произведением двух сходящихся рядов

$$u_1+u_2+\ldots+u_n+\ldots, \tag{1.9}$$

$$v_1+v_2+\ldots+v_n+\ldots \tag{1.10}$$

понимают ряд, составленный из всевозможных попарных произведений членов данных рядов, расположенных в таком порядке:

$$u_1v_1+\left(u_1v_2+u_2v_1\right)+\ldots+\left(u_1v_n+u_2v_{n-1}+\ldots+u_nv_1\right)+\ldots \tag{1.11}$$

В каждой группе членов ряда (1.11), объединённых скобками, сумма индексов сомножителей (т.е. номеров мест, на которых они находятся в своих рядах) постоянна: в 1-ой скобке она равна 2, во 2-й равна 3, в 3-й равна 4, …, в n-ой равна $n+1$, и т.д.

1.6. Знакочередующиеся ряды. Признак Лейбница

Частным случаем знакопеременного ряда является знакочередующийся ряд.

Знакочередующимся рядом называют ряд вида

$$\boldsymbol{u_1-u_2+u_3-u_4+\ldots+(-1)^{n+1}u_n+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}u_n}, \tag{1.12}$$

где $u_n>0$ для всех $n\in N$ (т.е. ряд, положительные и отрицательные члены которого чередуются).

Для исследования сходимости знакочередующихся рядов используют достаточный признак сходимости Лейбница.

ПРИЗНАК ЛЕЙБНИЦА

Теорема 1.11.

Если у знакочередующегося ряда $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}u_n$

1) абсолютные величины членов ряда монотонно убывают (начиная с некоторого номера n):

$$u_1 > u_2 > u_3 > u_4 > \ldots > u_n > u_{n+1} > \ldots$$

2) общий член ряда стремится к нулю:

$$\lim_{n\to\infty} u_n = 0,$$

то **ряд сходится**.

Доказательство.

Рассмотрим частичную сумму чётного числа членов ряда

$$S_{2m} = u_1 - u_2 + u_3 - u_n + \ldots + u_{2m-1} - u_{2m}.$$

Сгруппируем члены попарно:

$$S_{2m} = (u_1 - u_2) + (u_3 - u_4) + \ldots + (u_{2m-1} - u_{2m}).$$

Так как по условию абсолютные величины членов ряда монотонно убывают, то все разности в скобках положительны и, следовательно, сумма S_{2m} положительна ($S_{2m} > 0$) и возрастает при увеличении номера m.

Запишем теперь S_{2m}, группируя члены иным образом:

$$S_{2m} = u_1 - [(u_2 - u_3) + (u_4 - u_5) + \ldots + (u_{2m-2} - u_{2m-1}) + u_{2m}].$$

Сумма в квадратных скобках будет также положительной.

Поэтому для любого значения m: $S_{2m} < u_1$. Таким образом, последовательность чётных сумм $\{S_{2m}\}$ возрастает с увеличением m, оставаясь ограниченной. Следовательно, S_{2m} имеет предел

$$\lim_{m\to\infty} S_{2m} = S.$$

Так как $S_{2m} < u_1$, то $S < u_1$.

Рассмотрим теперь сумму нечётного числа членов:

$$S_{2m+1} = S_{2m} + u_{2m+1}.$$

При $m \to \infty$ имеем

$$\lim_{m\to\infty} S_{2m+1} = \lim_{m\to\infty}\left(S_{2m} + u_{2m+1}\right) = \lim_{m\to\infty} S_{2m} + \lim_{m\to\infty} u_{2m+1} = S,$$

так как по условию $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$, следовательно, и $\lim\limits_{m\to\infty} u_{2m+1} = 0$.

Таким образом, частичные суммы как чётного, так и нечетного числа членов ряда имеют общий предел S. Это означает, что вообще $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$, т.е. ряд сходится. #

Замечание. Из доказательства теоремы следует, что сумма знакочередующегося ряда S удовлетворяет неравенствам $0 < S < u_1$.

Так как знакочередующийся ряд является частным случаем знакопеременных рядов, то для него справедливы все определения и теоремы предыдущего пункта 1.5, в том числе понятие и свойства абсолютной и условной сходимости ряда.

Если $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}u_n$ – **сходится** и

$\sum_{n=1}^{\infty}\left|(-1)^{n+1}u_n\right| = \sum_{n=1}^{\infty}u_n$ – **сходится,**

то $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}u_n$ – **сходится абсолютно.**

Если $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}u_n$ – **сходится**, а

$\sum_{n=1}^{\infty}\left|(-1)^{n+1}u_n\right| = \sum_{n=1}^{\infty}u_n$ – **расходится,**

то $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}u_n$ – **сходится условно.**

Пример 1.13. Исследовать ряд на абсолютную или условную сходимость:

а) $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots;$ *б)* $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\cdot\frac{2n-1}{3n};$

в) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\cdot\frac{n}{5n^3+1}.$

Р е ш е н и е.

а) $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\cdot\frac{1}{n}$ - это знакочередующийся ряд.

Проверим выполнение условий признака Лейбница:

1) $1>\frac{1}{2}>\frac{1}{3}>\frac{1}{4}>\ldots;$ 2) $\lim_{n\to\infty}u_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0,$

оба условия теоремы выполнены, следовательно, ряд сходится.

Исследуем характер сходимости, для чего составим ряд из абсолютных величин

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|(-1)^n\cdot\frac{1}{n}\right|=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}.$$

Получили знакоположительный ряд, гармонический, расходящийся.

Таким образом, знакочередующийся $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\cdot\frac{1}{n}$ ряд сходится, а ряд из абсолютных величин его членов - расходится, следовательно, знакочередующийся ряд $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\cdot\frac{1}{n}$ - сходится условно.

б) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\cdot\frac{2n-1}{3n}=-\frac{1}{3}+\frac{3}{3\cdot2}-\frac{5}{3\cdot3}+\frac{7}{3\cdot4}-\frac{9}{3\cdot5}+\ldots$

Ряд знакочередующийся. Проверим выполнение условий признака Лейбница:

1) $\frac{1}{3}<\frac{3}{6}<\frac{5}{9}<\ldots;$ 2) $\lim_{n\to\infty}\frac{2n-1}{3n}=\frac{2}{3}\neq0.$

Оба условия признака Лейбница не выполняются, следовательно, знакочередующийся ряд $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\cdot\frac{2n-1}{3n}$ - расходится.

в) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\cdot\frac{n}{5n^3+1}$

Ряд знакочередующийся.

Проверим выполнение условий признака Лейбница:

1) $\frac{1}{6}>\frac{2}{41}>\frac{3}{136}>\ldots;$ 2) $\lim_{n\to\infty}\frac{n}{5n^3+1}=0.$

Оба условия признака Лейбница выполняются, **следовательно,** знакочередующийся ряд $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \cdot \frac{n}{5n^3+1}$ - сходится.

Определим характер сходимости.

Составим ряд из абсолютных величин

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|(-1)^n \cdot \frac{n}{5n^3+1}\right| = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{5n^3+1}.$$

Полученный ряд – знакоположительный, следовательно для определения его сходимости нужно воспользоваться одним из достаточных признаков сходимости знакоположительных рядов. Воспользуемся признаком сравнения.

Сравним ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{5n^3+1}$ с рядом $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$, который сходится.

Так как $$\frac{n}{5n^3+1} < \frac{n}{5n^3} = \frac{1}{5n^2} < \frac{1}{n^2},$$

то из сходимости второго ряда следует сходимость первого (см. Признак сравнения).

Таким образом, ряд $\sum_{n-1}^{\infty}\frac{n}{5n^3+1}$ – **сходится,** а следовательно, знакочередующийся ряд $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \cdot \frac{n}{5n^3+1}$ – **сходится** абсолютно. ♦

1.7. Вычисление суммы знакочередующегося ряда

Пусть знакочередующийся ряд $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}u_n$ сходится и его сумма равна S, тогда $S = S_n + (u_{n+1} - u_{n+2} + u_{n+3} - ..)$

Разность $S - S_n = R_n$ - остаток ряда, в свою очередь, *является суммой знакочередующегося ряда* и, следовательно, удовлетворяет условию $|R_n| < u_{n+1}$. Таким образом, заменяя сумму ряда его частичной суммой, получаем ошибку, абсолютная величина которой меньше абсолютной величины первого отброшенного члена ряда.

Пример 1.14. Вычислить сумму ряда $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{3n^2}$ с точностью $\varepsilon = 0{,}01$.

Р е ш е н и е.

Ряд $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{3n^2} = \frac{1}{3} - \frac{1}{3\cdot 4} + \frac{1}{3\cdot 25} - \frac{1}{3\cdot 36} + \ldots$ сходится абсолютно (проверить самостоятельно).

Так как $u_3 = \frac{1}{3\cdot 25} = \frac{1}{75} > \frac{1}{100} = 0{,}01$,

а $u_4 = \frac{1}{3\cdot 36} = \frac{1}{108} < \frac{1}{100} = 0{,}01$, то для нахождения суммы S ряда с точностью $\varepsilon = 0{,}01$ достаточно три первых члена ряда:

$$S \approx \frac{1}{3} - \frac{1}{12} + \frac{1}{75} \approx 0{,}333 - 0{,}083 + 0{,}013 = 0{,}263 \approx 0{,}26.$$

Допускаемая при этом ошибка меньше, чем первый отброшенный член ряда (т.е. меньше, чем $0{,}009$). ♦

2. Функциональные ряды

2.1. Функциональный ряд. Область сходимости функционального ряда

Ряд

$$f_1(x)+f_2(x)+\ldots+f_n(x)+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}f_n(x), \qquad (2.1)$$

членами которого являются функции от x, определенные на множестве D, называется ***функциональным рядом***.

Функция $f_n(x)$ называется ***общим членом ряда***.

Например,

1. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(x+1)^n}=\frac{1}{x+1}+\frac{1}{(x+1)^2}+\frac{1}{(x+1)^3}+\ldots$ – функциональный ряд,

где общий член ряда $f_n(x)=\frac{1}{(x+1)^n}$;

2. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{nx}}{n!}=\frac{e^x}{1!}+\frac{e^{2x}}{2!}+\frac{e^{3x}}{3!}+\ldots+\frac{e^{nx}}{n!}+\ldots$ – функциональный ряд,

где $f_n(x)=\frac{e^{nx}}{n!}$.

При определенном значении аргумента $x=x_0\in D$ получим числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty}f_n(x_0)$.

Если числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty}f_n(x_0)$ сходится, где $x_0\in D$, то x_0 называется ***точкой сходимости*** функционального ряда (2.1).

Множество всех точек сходимости функционального ряда (2.1) называется ***областью сходимости*** ряда (2.1).

Например, рассмотрим функциональный ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(x+1)^n}=\frac{1}{x+1}+\frac{1}{(x+)^2}+\frac{1}{(x+1)^3}+\ldots$$

Взяв $x=0$, получим расходящийся числовой ряд

$$1+1+\ldots+1+\ldots,$$

а при $x=1$ получим ряд $\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\ldots+\frac{1}{2^n}+\ldots$, который сходится (ряд геометрической прогрессии со знаменателем $q=\frac{1}{2}$).

Таким образом, при одних значениях аргумента функциональный ряд может сходиться, при других - расходиться.

Суммы $S_1(x)=f_1(x)$

$S_2(x)=f_1(x)+f_2(x)$

$S_3(x)=f_1(x)+f_2(x)+f_3(x)$

.....

$S_n(x)=f_1(x)+f_2(x)+\ldots+f_n(x)$

называются ***частичными суммами функционального ряда.***

Если существует $\lim\limits_{n\to\infty}S_n(x)=S(x)$, где $x\in D$, то говорят, что ряд (2.1) сходится на множестве D к функции $S(x)$.

Функция $S(x)$ называется ***суммой функционального ряда*** (2.1).

Для нахождения области сходимости функционального ряда можно использовать эталонные ряды и достаточные признаки сходимости числовых рядов.

Пример 2.1. Найти область сходимости функционального ряда:

$$а)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{x}};\qquad б)\ \sum_{n=1}^{\infty}\ln^{n}x;$$

$$в)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+2)^{n}}{n\cdot 2^{n}};\qquad г)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!(x+2)^{2n}}.$$

Р е ш е н и е.

$а)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{x}}$

Данный ряд представляет собой обобщенный гармонический ряд, который сходится при $x>1$ и расходится при $x\le 1$. Следовательно, областью сходимости ряда является интервал $(1,+\infty)$.

$б)\ \sum_{n=1}^{\infty}\ln^{n}x$

Члены данного ряда образуют геометрическую прогрессию со знаменателем $q=\ln x$. Ряд будет сходиться при

$$|q|=|\ln x|<1$$

$$|\ln x|<1\ \Rightarrow\ -1<\ln x<1\ \Rightarrow\ \frac{1}{e}<x<e$$

Область сходимости ряда – интервал $\left(\frac{1}{e},e\right)$.

в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+2)^n}{n\cdot 2^n}$

Для нахождения области сходимости данного ряда можно воспользоваться признаком Даламбера (теорема 1.8), который применим лишь к рядам с положительными членами.

Так как ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+2)^n}{n\cdot 2^n}$ является знакопеременным, то составим ряд из абсолютных величин членов данного ряда:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|x+2|^n}{n\cdot 2^n} \qquad (*)$$

и к нему применим признак Даламбера:

$$u_n=\frac{|x+2|^n}{n\cdot 2^n}, \qquad u_{n+1}=\frac{|x+2|^{n+1}}{(n+1)\cdot 2^{n+1}},$$

тогда

$$d=\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{|x+2|^{n+1}n\cdot 2^n}{(n+1)\cdot 2^{n+1}|x+2|^n}=$$

$$=\frac{|x+2|}{2}\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}=\frac{|x+2|}{2}.$$

Знакоположительный ряд (*) будет сходиться, если

$$d=\frac{|x+2|}{2}<1 \quad\Rightarrow\quad |x+2|<2 \quad\Rightarrow\quad -2<x+2<2, \text{ т.е.}$$

$$-4<x<0.$$

Тогда и исходный ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+2)^n}{n\cdot 2^n}$ **будет сходиться,** и **притом** абсолютно в интервале (–4, 0).

При $x \in (-\infty,-4) \bigcup (0,+\infty)$ ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+2)^n}{n \cdot 2^n}$ расходится, как не удовлетворяющий необходимому признаку сходимости ($\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = d > 1$, т.е., начиная с достаточно больших значений $n \geq N$, выполняется неравенство $\frac{u_{n+1}}{u_n} > 1$, или $u_{n+1} > u_n$ Таким образом, члены ряда возрастают с увеличением номера члена n. Поэтому $\lim_{n\to\infty} u_n \neq 0$, следовательно, ряд расходится).

Если $d = 1$, то ответа о сходимости ряда признак Даламбера не дает, и при $x = -4$ и $x = 0$ ряд нужно исследовать особо.

При $x = -4$ из ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+2)^n}{n \cdot 2^n}$ получим числовой ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-4+2)^n}{n \cdot 2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-2)^n}{n \cdot 2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot 2^n}{n \cdot 2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n},$$

который сходится (см. пример 1.12, *а*).

При $x = 0$ из ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+2)^n}{n \cdot 2^n}$ получим

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n \cdot 2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ - гармонический ряд, который расходится.

Таким образом, областью сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+2)^n}{n \cdot 2^n}$ будет промежуток $[-4; 0)$.

г) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!(x+2)^{2n}}$

Ряд является знакоположительным, т.к. $n!(x+2)^{2n} > 0$ для любого $x \neq -2$

Для определения области сходимости воспользуемся признаком Даламбера:

$$u_n(x) = \frac{1}{n!(x+3)^{2n}}, \qquad u_{n+1}(x) = \frac{1}{(n+1)!(x+3)^{2(n+1)}},$$

$$d = \lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)} = \lim_{n\to\infty} \frac{n!(x+3)^{2n}}{(n+1)!(x+3)^{2n+2}} =$$

$$= \frac{1}{(x+3)^2} \lim_{n\to\infty} \frac{1}{(n+1)} = 0 < 1,$$

следовательно, ряд сходится на $(-\infty;+\infty)$. ♦

2.2. Степенные ряды

Степенным рядом называется функциональный ряд вида

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n, \qquad (2.2)$$

т.е. ряд, членами которого являются степенные функции.

Более общий вид степенного ряда:

$$a_0 + a_1(x-x_0) + \ldots + a_n(x-x_0)^n + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n. \qquad (2.3)$$

Замечание. Так как $n \in N$, то ряды

$$\frac{x}{1!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!} + \ldots \quad \text{и} \quad 1 - \frac{(x-3)^2}{2!} + \frac{(x-3)^4}{4!} - \ldots$$

являются степенными, а ряды

$$1+\sqrt{x}+\sqrt{x^2}+\sqrt{x^3}+\ldots \quad \text{и} \quad x-1-\frac{1}{x-1}+\frac{1}{(x-1)^3}-\ldots$$

функциональные, но не являются степенными.

Теорема 2.1 (Абеля).

Если степенной ряд (2.2)

$$\sum_{n-0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n + \ldots$$

сходится в некоторой точке $x = x_0$,

то он сходится (*причем абсолютно*) **при всех значениях** x, удовлетворяющих условию $|x| < |x_0|$.

Доказательство

Так как $x = x_0$ точка сходимости ряда (2.2), то числовой ряд

$$\sum_{n-0}^{\infty} a_n {x_0}^n = a_0 + a_1 x_0 + a_2 x_0^2 + \ldots + a_n x_0^n + \ldots \qquad (2.4)$$

сходится. Тогда $\lim\limits_{n\to\infty} a_n x_0^n = 0$. Следовательно, можно найти такое положительное число M, чтобы для любого номера n выполнялось условие

$$\left| a_n x_0^n \right| < |M|. \qquad (2.5)$$

Ряд (2.2) является в общем случае знакопеременным, поэтому, чтобы исследовать его сходимость, возьмем ряд из абсолютных величин его членов

$$|a_0| + |a_1 x| + \left|a_2 x^2\right| + \ldots + \left|a_n x^n\right| + \ldots , \qquad (2\,6)$$

который перепишем в виде

$$|a_0| + |a_1 x_0|\left|\frac{x}{x_0}\right| + |a_2 x_0^2|\left|\frac{x}{x_0}\right|^2 + \ldots + |a_n x_0^n|\left|\frac{x}{x_0}\right|^n + \ldots \qquad (2.7)$$

Возьмем для сравнения ряд

$$M + M\left|\frac{x}{x_0}\right| + M\left|\frac{x}{x_0}\right|^2 + \ldots + M\left|\frac{x}{x_0}\right|^n + \ldots, \qquad (2.8)$$

являющийся при $|x| < |x_0|$ абсолютно сходящимся (ряд геометрической прогрессии со знаменателем $q = \left|\frac{x}{x_0}\right| < 1$). Используя неравенство (2.5), будем иметь

$$|a_n x_0^n| \cdot \left|\frac{x}{x_0}\right|^n < M\left|\frac{x}{x_0}\right|^n.$$

По признаку сравнения ряд (2.7) **сходится,** тогда и ряд (2.6) сходится при $|x| < |x_0|$.

Следовательно, при указанных значениях аргумента ряд (2.2) сходится абсолютно. #

Следствие. Если степенной ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n + \ldots$$

расходится в точке x_1, то он расходится и при всех x, для **которых** $|x| > |x_1|$.

Действительно, *если бы ряд сходился в точке* $x = x_2$, для которой $|x_2| > |x_1|$, то по теореме Абеля он сходился бы при **всех** x, для которых $|x| > |x_2|$, следовательно, и в точке x_1, что **противоречит** условию.

Из теоремы Абеля следует:

Существует такое неотрицательное число R, что при всех $|x| > R$ ряд (2.2) расходится, а при $-R < x < R$ – сходится абсолютно.

Множество значений переменной x, удовлетворяющих соотношению $-R < x < R$, называется ***интервалом сходимости*** степенного ряда.

Число R $(R \geq 0)$ ***называется радиусом сходимости степенного ряда*** (2.2).

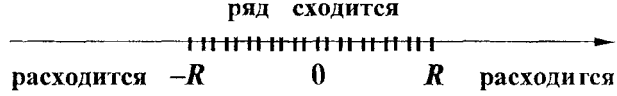


Рис. 2

Возможны случаи:

1^0. Если $R = 0$, то ряд (2.4) сходится только в точке $x = 0$.

2^0. Если $R = \infty$, то ряд (2.4) сходится на всей числовой оси.

3^0. Если $0 < R < \infty$, то интервалом сходимости является конечный интервал с центром в точке $x = 0$, т.е. $(-R; R)$.

Замечание. Сходимость степенного ряда (2.2) на концах интервала сходимости, т.е. в точках $x = R$ и $x = -R$ исследуется отдельно непосредственной подстановкой значений в степенной ряд.

Областью сходимости степенного ряда (2.2) называют промежуток

$$[-R; R), \text{ или } (-R; R], \text{ или } [-R; R].$$

Теорема Абеля была доказана для ряда, записанного по степеням x.

Степенной ряд общего вида (2.3):

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n = a_0 + a_1 (x - x_0) + \ldots + a_n (x - x_0)^n + \ldots$$

может быть приведен к виду ряда (2.2), если принять $x - x_0 = t$.

Геометрически это соответствует перенесению начала координат на числовой оси из точки $x = 0$ в точку $x = x_0$. Соответственно интервал сходимости ряда (2.3) будет иметь вид

$$x_0 - R < x < x_0 + R.$$

Интервал сходимости ряда (2.3) симметричен относительно точки $x = x_0$.

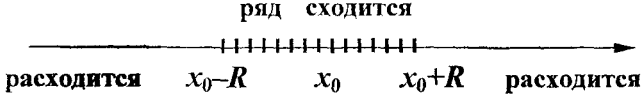


Рис. 3

2.2.1. Определение радиуса сходимости степенного ряда

Рассмотрим степенной ряд (2.2)

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n + \ldots$$

и воспользуемся приведенными в п.2.1 рассуждениями.

Ряд (2.2) является знакопеременным, поэтому, чтобы исследовать его сходимость, составим ряд из абсолютных величин его членов (2.6)

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left| a_n x^n \right|.$$

Обозначим $a_n x^n = u_n(x)$.

1⁰. По признаку Даламбера, для сходимости ряда должно выполняться условие

$$d = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right| < 1,$$

т.е.

$$d = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}x^{n+1}}{a_n x^n}\right| =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}x}{a_n}\right| = |x| \cdot \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < 1,$$

откуда получим $|x| < \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$.

Обозначим

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = R, \qquad (2.9)$$

где R – радиус сходимости степенного ряда (2.6), тогда $(-R;R)$ – интервал сходимости степенного ряда (2.2).

2⁰. По радикальному признаку Коши, для сходимости ряда должно выполняться условие

$$k = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|u_n(x)|} < 1,$$

т.е. $$k = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|u_n(x)|} = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n x^n|} =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|\cdot|x|^n} = |x| \cdot \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|} < 1,$$

откуда получим $|x| < \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}}$.

Таким образом

$$R = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}} \tag{2.10}$$

является радиусом сходимости степенного ряда (2.2).

Радиус сходимости степенного ряда

$$R = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|$$

$$R = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}}$$

Пример 2.2. Найти область сходимости степенного ряда:

$$а)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{(2n+1)5^n};$$

$$б)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{3^n}.$$

Решение.

$$а)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{(2n+1)5^n}$$

Определим радиус сходимости ряда, используя формулу (2.9)

$$a_n = \frac{1}{(2n+1)5^n}; \qquad a_{n+1} = \frac{1}{(2n+3)5^{n+1}},$$

тогда $$R = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{(2n+3)5^{n+1}}{(2n+1)5^n} = 5.$$

Следовательно, интервал сходимости ряда $(-R; R) = (-5; 5)$.

Исследуем ряд в граничных точках интервала сходимости

1. При $x = 5$ исходный степенной ряд примет вид

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n}{(2n+1)5^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n+1}.$$

Полученный знакоположительный ряд исследуем по предельному признаку сравнения. Сравним его с расходящимся гармоническим рядом $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$.

Вычислим $$\lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{2n+1} = \frac{1}{2},$$

тогда, согласно предельному признаку сравнения, и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n+1}$ – расходится. Следовательно, при $x = 5$ степенной ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{(2n+1)5^n}$ расходится.

2. При $x = -5$ получим числовой ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-5)^n}{(2n+1)5^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}.$$

Это знакочередующийся ряд, для исследования сходимости применим признак Лейбница:

1) $\frac{1}{3} > \frac{1}{5} > \frac{1}{7} > \ldots;$ 2) $\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{(2n+1)} = 0,$

оба условия теоремы выполнены, следовательно, ряд сходится.

Исследуем характер сходимости, для чего составим ряд из абсолютных величин

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{(-1)^n}{2n+1}\right| = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n+1}.$$

Ряд расходится (показано выше).

Таким образом, знакочередующийся ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}$ сходится, а ряд из абсолютных величин его членов – расходится, следовательно, знакочередующийся ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}$ – сходится условно, а $x=-5$ – точка условной сходимости степенного ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{(2n+1)5^n}$.

Итак, область сходимости данного степенного ряда $[-5;5)$.

б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-2)^n}{3^n}$

Определим радиус сходимости степенного ряда, используя формулу (2.10).

$$a_n = \frac{1}{3^n}, \quad \text{тогда} \qquad R = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{1/3^n}} = 3.$$

Так как $x_0 = 2$, $R = 3$, то интервал сходимости будет иметь вид

$$(x_0 - R;\ x_0 + R) = (2-3;\ 2+3) = (-1;\ 5).$$

Рассмотрим сходимость степенного ряда в граничных точках интервала сходимости ряда.

При $x=-1$, получается расходящийся числовой ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-3)^n}{3^n} = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n.$$

При $x=5$ также получается расходящийся **числовой** ряд:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{3^n}=\sum_{n=1}^{\infty}1^n.$$

Окончательно, область сходимости исходного степенного ряда – $(-1;\ 5)$, совпадает с интервалом сходимости ряда. ♦

Пример 2.3. Найти область сходимости степенного ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-4)^{2n}}{n^3}.$$

Р е ш е н и е.

Данный ряд является неполным степенным рядом, так как отсутствуют слагаемые с нечетными степенями, поэтому интервал сходимости находят, непосредственно применяя признак Даламбера (или Коши), для ряда, составленного из абсолютных величин членов данного ряда:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{(x-4)^{2n}}{n^3}\right|=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-4)^{2n}}{n^3}.$$

По признаку Даламбера:

$$u_n(x)=\frac{(x-4)^{2n}}{n^3},\qquad u_{n+1}(x)=\frac{(x-4)^{2n+2}}{(n+1)^3},$$

$$d=\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}=\lim_{n\to\infty}\frac{(x-4)^{2n+2}\cdot n^3}{(n+1)^3\cdot(x-4)^{2n}}=$$

$$=\frac{(x-4)^2}{1}\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^3=(x-4)^2.$$

Знакоположительный ряд будет сходиться, если

$$d=(x-4)^2<1,$$

т.е. $(x-4)^2<1 \Rightarrow |x-4|<1 \Rightarrow -1<x-4<1,$

$$3<x<5.$$

Тогда и исходный ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(x-4)^{2n}}{n^3}$ будет сходиться, и притом абсолютно в интервале $(3;\ 5)$.

Исследуем сходимость степенного ряда в граничных точках.

1. При $x=5$ получим числовой ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(5-4)^{2n}}{n^3}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1^{2n}}{n^3}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3},$$

который сходится – обобщенный гармонический ряд, $p=3>1$. (см. стр.21). Следовательно, $x=5$ – точка сходимости степенного ряда.

2. При $x=3$ из ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(x-4)^{2n}}{n^3}$ получим

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(3-4)^{2n}}{n^3}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{2n}}{n^3}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3},$$

т.е. $x=3$ – точка сходимости степенного ряда.

Таким образом, областью сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(x-4)^{2n}}{n^3}$ будет отрезок $[3;\ 5]$. ♦

2.2.2. Основные свойства степенных рядов

1^0. Степенной ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n x^n$ сходится в точке $x=0$. (Чтобы убедиться в этом, достаточно подставить в ряд $x=0$.)

2^0. Сумма степенного ряда

$$S(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n + \ldots$$

есть функция, непрерывная в интервале сходимости этого ряда.

3^0. Степенные ряды $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} b_n x^n$, имеющие радиусы сходимости соответственно R_1 и R_2, можно почленно складывать, вычитать и умножать. Радиус сходимости суммы, разности и произведения рядов не меньше, чем меньшее из чисел R_1 и R_2.

4^0. Ряд (2.2) можно почленно дифференцировать в каждой точке x его интервала сходимости сколько угодно раз, при этом радиус сходимости ряда не меняется.

$$S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \quad \Rightarrow \quad S'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n x^n)' = \sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^{n-1}$$

5^0. Степенной ряд (2.4) можно почленно интегрировать на любом отрезке $[a,b] \subset (-R,R)$.

$$S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \quad \Rightarrow \quad \int_a^b S(x)dx = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\int_a^b a_n x^n dx \right).$$

Пример 2.4. Найти сумму ряда

$$x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \ldots + \frac{x^n}{n} + \ldots$$

Р е ш е н и е.

Обозначим сумму этого ряда через $S(x)$:

$$S(x) = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \ldots + \frac{x^n}{n} + \ldots$$

Интервал сходимости этого ряда $(-1;\ 1)$. На основании свойства 4^0 его можно почленно дифференцировать в каждой точке данного интервала:

$$S'(x) = 1 + x + x^2 + \ldots + x^{n-1} + \ldots$$

Справа в этом равенстве – сумма геометрической прогрессии

Если $|q| = |x| < 1$, то $S'(x) = \frac{1}{1-x}$,

откуда $S(x) = \int \frac{dx}{1-x} = -\ln(1-x) + C$ при $x \in (-1;1)$

Зная, что $S(0) = 0$, имеем

$$0 = -\ln(1-x) + C \quad \Rightarrow \quad C = 0.$$

Тогда $S(x) = -\ln(1-x)$. ♦

2.3. Разложение функций в степенные ряды. Ряд Тейлора и Маклорена

Для приложений важно уметь заданную функцию $f(x)$ представлять в виде разложения в степенной ряд.

2.3.1. Ряд Тейлора и Маклорена

Пусть функция $y = f(x)$ имеет в точке x_0 и некоторой ее окрестности производные любого порядка.

Ряд

$$f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \ldots$$

или

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n \qquad (2.11)$$

называется ***рядом Тейлора*** для функции $f(x)$.

Если же для всех значений x из некоторой окрестности точки x_0 ряд сходится и имеет суммой $f(x)$, то есть

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n = f(x),$$

то $f(x)$ называется ***разложимой в ряд Тейлора*** в окрестности точки x_0 (или по степеням $x - x_0$).

Если $x = 0$, то ряд Тейлора имеет вид

$$f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n \quad (2.12)$$

и называется ***рядом Маклорена***.

Теорема 2.2. Для того чтобы функция $y=f(x)$ была разложима в ряд Тейлора в окрестности точки x_0, необходимо и достаточно, чтобы

$$\lim_{n\to\infty} R_n(x)=0.$$

$R_n(x)$ – остаточный член ряда Тейлора.

Записанный в форме Лагранжа, он имеет вид

$$R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}, \qquad \xi=x_0+\theta\cdot(x-x_0),\ 0<\theta<1.$$

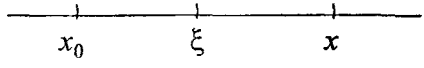


Рис. 4

Теорема 2.3. Если $f(x)$ имеет в некотором промежутке, содержащем точку x_0, производные всех порядков, для которых $\left|f^{(n)}(x)\right|\le M$, то $R_n(x)\to 0$ при $n\to\infty$ и, значит, функция $f(x)$ разложима в этом промежутке в ряд Тейлора.

Теорема 2.4. Если функция $f(x)$ может быть разложена в ряд Тейлора, то это разложение единственно.

2.3.2. Разложение основных элементарных функций в ряд Тейлора (Маклорена)

При разложении функции $f(x)$ в ряд Тейлора применяют следующие приемы.

I. Непосредственное разложение функции $f(x)$ в ряд Тейлора, которое состоит из трех этапов:

a) формально составляют ряд Тейлора, для чего находят $f^{(n)}(x)$ для любых n, вычисляют $f^{(n)}(x_0)$ и подставляют найденные значения в (2.11);

b) находят область сходимости ряда (2.11);

c) выясняют, для каких значений x из области сходимости ряда $\lim\limits_{n\to\infty} R_n(x) = 0$, т.е., для каких x имеет место равенство

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n .$$

II. Использование готовых разложений.

Найдем разложение в степенной ряд некоторых функций.

1. $f(x) = e^x$, $x_0 = 0$.

Последовательно дифференцируя функцию $f(x) = e^x$, получим:

$$f'(x) = e^x, \quad f''(x) = e^x, \ \ldots, \ f^{(n)}(x) = e^x, \ \ldots$$

Вычислим значения функции и ее производных при $x = 0$:

$$f'(0) = e^0 = 1, \ f''(0) = e^0 =, \ \ldots, \ f^{(n)}(0) = e^0 = 1, \ \ldots ,$$

$n = 1, 2, \ldots$

Подставив значения производных в ряд (2.12), получим

$$1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}+\ldots$$

Найдем радиус сходимости полученного степенного ряда:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{n!}{(n+1)!}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1} = 0.$$

Следовательно, ряд сходится при всех значениях $x \in (-\infty, +\infty)$

Рассмотрим остаточный член ряда в форме Лагранжа:

$$R_n(x) = \frac{e^{\xi}}{(n+1)!}x^{n+1},\ \xi \in (0,\ x).$$

Так как e^{ξ} есть величина ограниченная, а второй сомножитель $\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$ стремится к нулю при $n \to \infty$, то

$$\lim_{n\to\infty} R_n(x) = \lim_{n\to\infty}\frac{x^{n+1}e^{\xi}}{(n+1)!} = e^{\xi}\lim_{n\to\infty}\frac{x^{n+1}}{(n+1)!} = 0,$$

а, следовательно, ряд сходится к функции e^x для любого x.

Итак, при $x \in (-\infty, +\infty)$

$$e^x = 1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}+\ldots \qquad (2.13)$$

2. $f(x) = e^{-x},\ x_0 = 0.$

Заменив в формуле (2.13) x на $(-x)$, получим ряд

$$e^{-x} = 1-\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}-\ldots+(-1)^n\frac{x^n}{n!}+\ldots, \qquad (2.14)$$

также сходящийся на $(-\infty,+\infty)$.

3. $f(x) = \sin x,\ x_0 = 0.$

Вычислим значения функции и ее производных при $x_0 = 0$

$$f(x)=\sin x, \qquad f(0)=0;$$

$$f'(x)=\cos x=\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right), \qquad f'(0)=1;$$

$$f''(x)=-\sin x=\sin\left(x+\frac{2\pi}{2}\right), \qquad f''(0)=0;$$

$$f'''(x)=-\cos x=\sin\left(x+\frac{3\pi}{2}\right), \qquad f'''(0)=-1;$$

$$\ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots$$

$$f^{(n)}(x)=\sin\left(x+\frac{\pi n}{2}\right), \qquad f^{(n)}(0)=\sin\frac{\pi n}{2}.$$

Подставляя найденные значения в (2.12), получим степенной ряд

$$x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\ldots+(-1)^k\frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}+\ldots$$

Так как $\left|\sin\left(x+\frac{\pi n}{2}\right)\right|\le 1$ при всех $x\in R$, $n\in N$, то остаточный член $R_n(x)$ будет стремиться к нулю для любого $x\in R$:

$$\left|R_n(x)\right|=\left|\frac{\sin\left(\Theta x+\frac{\pi(n+1)}{2}\right)}{(n+1)!}x^{n+1}\right|\le\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}\to 0.$$

Определим интервал сходимости ряда.

$$u_n(x)=(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!},$$

$$u_{n+1}(x)=(-1)^{n+1}\frac{x^{2(n+1)+1}}{(2(n+1)+1)!}.$$

Вычислим

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{x^{2n+3}(2n+1)!}{x^{2n+1}(2n+3)!}\right| =$$

$$= \left|x^2\right|\lim_{n\to\infty}\frac{1}{(2n+2)(2n+3)} = x^2\cdot 0 = 0 < 1 \quad \Rightarrow \quad x\in R.$$

Таким образом, при $x\in(-\infty,+\infty)$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots + (-1)^k\frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + \ldots \qquad (2.15)$$

4. $f(x)=\cos x$, $x_0=0$.

Ряд для функции $f(x)=\cos x$ можно получить почленным дифференцированием ряда Маклорена для функции $f(x)=\sin x$:

$$(\sin x)' = \left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots + (-1)^k\frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + \ldots\right)'.$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots + (-1)^k\frac{x^{2k}}{(2k)!} + \ldots \qquad (2.16)$$

Область сходимости полученного ряда $(-\infty;\ +\infty)$.

5. Рассмотрим ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + x^2 + \ldots x^n + \ldots,$$

который при $|x|<1$ представляет собой **сходящийся ряд** геометрической прогрессии.

Для бесконечно убывающей геометрической прогрессии со знаме-

нателем $q = x$, $|q| = |x| < 1$ **сумма** $S(x) = \dfrac{1}{1-x}$.

Тогда, при $x \in (-1;\ 1)$

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots + x^n + \ldots \qquad (2.17)$$

Заменив в формуле (2.17) x на $(-x)$, получим ряд

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \ldots + (-1)^n x^n + \ldots \qquad (2.18)$$

Область сходимости полученных рядов $(-1;\ 1)$.

6. $f(x) = ln(1+x)$, $x_0 = 0$.

Рассмотрим следующее тождество: $ln(1+x) = \int\limits_0^x \dfrac{dt}{1+t}$.

Разложим подынтегральную функцию $\dfrac{1}{1+t}$ в степенной ряд по формуле (2.18):

$$\frac{1}{1+t} = 1 - t + t^2 - \ldots + (-1)^n t^n + \ldots,$$

который сходится для значений t, удовлетворяющих неравенству $|t| < 1$.

Так как в интервале сходимости степенной ряд можно почленно интегрировать, то для $|x| < 1$ имеем

$$ln(1+x) = \int_0^x (1 - t + t^2 - \ldots + (-1)^n t^n + \ldots)dt =$$

$$= t\Big|_0^x - \frac{t^2}{2}\Big|_0^x + \frac{t^3}{3}\Big|_0^x - \ldots + (-1)^{n+1}\frac{t^n}{n}\Big|_0^x + \ldots =$$

$$= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots + (-1)^{n+1}\frac{x^n}{n} + \ldots$$

При $x=1$ получим **условно сходящийся знакочередующийся** числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}$.

Таким образом, если $-1<x\le 1$, то

$$ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\ldots+(-1)^{n+1}\frac{x^n}{n}+\ldots. \qquad (2.19)$$

7. $f(x)=arctgx$, $x_0=0$.

Предварительно разложим **в ряд Маклорена** функцию $f(x)=\frac{1}{1+x^2}$, для чего в разложении (2.18) заменим x на $(-x^2)$:

$$\frac{1}{1+x^2}=1-x^2+x^4-\ldots+(-1)^n x^{2n}+\ldots, \quad |x|<1. \qquad (2.20)$$

Тогда

$$arctgx=\int_0^x\frac{1}{1+x^2}dx=\int_0^x(1-x^2+x^4-\ldots+(-1)^n x^{2n}+\ldots)dx=$$

$$=\int_0^x dx-\int_0^x x^2dx+\int_0^x x^4dx-\ldots+\int_0^x(-1)^n x^{2n}dx+\ldots=$$

$$=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\ldots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}+\ldots, \quad |x|\le 1,$$

(**получившийся** ряд сходится и в **граничных** точках).

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots, \quad x \in (-\infty; +\infty)$$

$$e^{-x} = 1 - \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} - \ldots + (-1)^n \frac{x^n}{n!} + \ldots, \quad x \in (-\infty; +\infty)$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots + (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + \ldots, x \subset (-\infty; +\infty)$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots + (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + \ldots, \quad x \in (-\infty; +\infty)$$

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \ldots + x^n + \ldots, \quad x \in (-1;1)$$

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \ldots + (-1)^n x^n + \ldots, \quad x \in (-1;1)$$

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \ldots + (-1)^n x^{2n} + \ldots, \quad x \in (-1;1)$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + \ldots, \quad x \in (-1;1]$$

$$arctgx = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+.1}}{2n+1} + \ldots, \quad x \in [-1;1]$$

$$\arcsin x = x + \frac{1}{2} \cdot \frac{x^3}{3} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \cdot \frac{x^5}{5} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \cdot \frac{x^7}{7} + \ldots +$$

$$+ \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \ldots \cdot 2n} \cdot \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \ldots, \quad x \in [-1;1]$$

$$(1+x)^m = 1 + \frac{m}{1!}x + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{n!}x^n + \ldots,$$

$$x \in (-1;1)$$

2.4. Приложения степенных рядов

2.4.1. Приближенное вычисление интегралов

Степенные ряды применяются для приближенного вычисления неопределенных и определенных интегралов в тех случаях, когда первообразная не выражается через элементарные функции или нахождение первообразной сложно.

Пусть требуется вычислить $\int_a^b f(x)dx$ с точностью до $\varepsilon>0$. Если подынтегральную функцию можно разложить в ряд по степеням x и интервал сходимости $(-R;R)$ включает в себя отрезок $[a;b]$, то для вычисления заданного интеграла можно воспользоваться свойством почленного интегрирования этого ряда. При нахождении определенного интеграла сумма ряда заменяется его частичной суммой с последующей оценкой ошибки.

Пример 2.5. Вычислить интеграл $\int_0^1 e^{-x^2}dx$ с точностью ε=0,005.

Р е ш е н и е Это – известный " интеграл вероятности".

Воспользуемся разложением функции e^x в ряд Маклорена:

$$e^x = 1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}+\ldots$$

Заменяя x на $(-x^2)$, получим

$$e^{-x^2} = 1-\frac{x^2}{1!}+\frac{x^4}{2!}-\frac{x^6}{3!}+\ldots, \quad x\in(-\infty;\infty).$$

Проинтегрируем обе части равенства на отрезке $[0;1]$, лежащем внутри интервала сходимости ряда:

$$\int_0^1 e^{-x^2}dx = \int_0^1 (1-\frac{x^2}{1!}+\frac{x^4}{2!}-\frac{x^6}{3!}+\frac{x^8}{4!}+\ldots)dx =$$

$$= (x-\frac{x^3}{1!\cdot 3}+\frac{x^5}{2!\cdot 5}-\frac{x^7}{3!\cdot 7}+\frac{x^9}{4!\cdot 9}+\ldots)\Big|_0^1 = 1-\frac{1}{3}+\frac{1}{10}-\frac{1}{42}+\frac{1}{216}-\ldots$$

Получили знакочередующийся ряд. Так как $1/216 < 0.005$ (заданной точности вычислений), достаточно взять три слагаемых в последнем равенстве, чтобы получить результат с заданной точностью ε.

$$\int_0^1 e^{-x^2}dx = 1-\frac{1}{3}+\frac{1}{10}-\frac{1}{42} = \frac{78}{105} \approx 0{,}748 \quad \blacklozenge$$

Пример 2.6. Вычислить интегральный синус $\int_0^x \frac{\sin x}{x}dx$.

Р е ш е н и е.

Воспользуемся разложением функции $\sin x$ в ряд Маклорена:

$$\sin x = x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\ldots+(-1)^k\frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}+\ldots$$

Поделим все выражение почленно на x. Тогда разложение в ряд функции $\frac{\sin x}{x}$ будет иметь вид

$$\frac{\sin x}{x} = 1-\frac{x^2}{3!}+\frac{x^4}{5!}-\frac{x^6}{7!}+\ldots$$

Интегрируем последнее равенство:

$$\int_0^x \frac{\sin x}{x}dx = \int_0^x \left(1-\frac{x^2}{3!}+\frac{x^4}{5!}-\frac{x^6}{7!}+\ldots\right)dx = x-\frac{x^3}{3!\cdot 3}+\frac{x^4}{5!\cdot 5}-\frac{x^7}{7!\cdot 7}+\ldots \blacklozenge$$

Пример 2.7. Вычислить $\int_0^{0,1} \cos\sqrt{x}\,dx$.

Р е ш е н и е.

Воспользуемся разложением функции $\cos x$ в ряд Маклорена:

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots + (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + \ldots$$

Заменим в данном равенстве x на $\sqrt{x}$ и проинтегрируем на отрезке $[0;\, 0,1]$, лежащем внутри области сходимости ряда:

$$\int_0^{0,1} \cos\sqrt{x}\,dx = \int_0^{0,1} \left(1 - \frac{x}{2!} + \frac{x^2}{4!} - \frac{x^3}{6!} + \ldots\right) dx =$$

$$= \left(1 - \frac{x^2}{2!\cdot 2} + \frac{x^3}{4!\cdot 3} - \frac{x^4}{6!\cdot 4} + \ldots\right)\Bigg|_0^{0,1} = 1 - \frac{0,01}{2!\cdot 2} + \frac{0,001}{4!\cdot 3} - \frac{0,0001}{6!\cdot 4} + \ldots$$

Так как ряд знакочередующийся и $\frac{0,001}{3\cdot 4!} < 0,001$, то достаточно ограничиться двумя первыми слагаемыми.

Получим

$$\int_0^{0,1} \cos\sqrt{x}\,dx \approx 1 - \frac{0,01}{2\cdot 2!} = 1,0000 - 0,0025 = 0,9975 \approx 0,998 \quad \blacklozenge$$

2.4.2. Интегрирование дифференциальных уравнений

Если решение дифференциального уравнения не выражается через элементарные функции или способ его решения слишком сложен, то для решения дифференциальных уравнений используются степенные ряды.

Рассмотрим два способа решения дифференциальных уравнений с помощью степенных рядов.

Пусть требуется решить задачу Коши для уравнения

$$y^{(n)} = f(x, y, y', ..., y^{(n-1)}),$$

при заданных начальных условиях

$$y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y_0', \quad ..., \quad y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}$$

▫Способ последовательного дифференцирования

Поясним на конкретном примере.

Пример 2.8. Найти три первых члена разложения в степенной ряд частного решения дифференциального уравнения $y'' = 2xy' + 4y$, удовлетворяющего заданным начальным условиям $y(0) = 0, \quad y'(0) = 1$

Р е ш е н и е.

Так как $x_0 = 0$, то решение уравнения $y(x)$ будем искать в виде разложения в ряд Маклорена:

$$y(x) = y(0) + \frac{y'(0)}{1!} \cdot x + \frac{y''(0)}{2!} x^2 + \frac{y'''(0)}{3!} x^3 + ... + \frac{y^{(n)}(0)}{n!} x^n ...$$

Подставив начальные условия $y(0) = 0, \quad y'(0) = 1$ в исходное дифференциальное уравнение, найдем

$$y''(0) = 2 \cdot 0 \cdot 1 + 4 \cdot 0 = 0, \text{ т.е. } \quad y''(0) = 0.$$

Продифференцируем исходное уравнение $y'' = 2xy' + 4y$, получим

$$y''' = 2y' + 2xy'' + 4y',$$

используя начальные условия, вычислим

$$y'''(0) = 2 \cdot 1 + 2 \cdot 0 \cdot 0 + 4 \cdot 1 = 6, \quad y'''(0) = 6.$$

Продолжая процесс дифференцирования, получим:

$$y^{IV} = 2y'' + 2y'' + 2xy''' + 4y'' = 8y'' + 2xy''', \quad y^{IV}(0) = 0.$$
$$y^{V} = 8y''' + 2y''' + 2xy^{IV} = 10y''' + 2xy^{IV}, \quad y^{V}(0) = 60.$$

Тогда решение уравнения будет иметь вид

$$y(x) = x + \frac{6}{3!}x^3 + \frac{60}{5!}x^5 + \ldots = x + x^3 + 0{,}5x^5 + \ldots \ \blacklozenge$$

▫Способ неопределенных коэффициентов

Для иллюстрации данного метода возьмем то же самое дифференциальное уравнение

$$y'' = 2xy' + 4y, \quad y(0) = 0, \ y'(0) = 1.$$

Так как $x_0 = 0$, решение уравнения будем искать в виде ряда с неопределенными коэффициентами следующего вида:

$$y(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 + a_5 x^5 + \ldots \qquad (2.25)$$

Продифференцируем равенство (2.25)

$$y'(x) = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + 4a_4 x^3 + 5a_5 x^4 + \ldots$$

Используя начальные условия, получим:

$$y(0) = a_0 = 0, \ \text{т.е.} \quad a_0 = 0.$$

$$y'(0) = a_1 = 1, \ \text{т.е.} \quad a_1 = 1.$$

Для определения остальных коэффициентов дифференцируем ряд (2.25) дважды (так как уравнение второго порядка):

$$y'' = 2a_2 + 6a_3x + 12a_4x^2 + 20a_5x^3 + \ldots$$

Полученные выражения для $y(x)$, $y'(x)$, $y''(x)$ подставим в исходное уравнение:

$$\begin{aligned} 2a_2 + 6a_3x + 12a_4x^2 + 20a_5x^3 + \ldots = \\ = 2x(a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + 4a_4x^3 + 5a_5x^4 + \ldots) + \\ + 4(a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 + a_5x^5 + \ldots). \end{aligned}$$

Приравниваем коэффициенты при одинаковых степенях x в обеих частях равенства, имеем:

$$x^0: \quad 2a_2 = 4a_0, \quad 2a_2 = 0, \quad a_2 = 0,$$

$$x: \quad 6a_3 = 2a_1 + 4a_1 = 6a_1, \quad a_3 = a_1, \quad a_3 = 1,$$

$$x^2: \quad 12a_4 = 4a_2 + 4a_2 = 8a_2, \quad 12a_4 = 0, \quad a_4 = 0,$$

$$x^3: \quad 20a_5 = 6a_3 + 4a_3 = 10a_3, \quad 2a_5 = a_3, \quad a_5 = \frac{1}{2}a_3 = \frac{1}{2}.$$

Тогда решение уравнения будет иметь вид:

$$y(x) = x + x^3 + \frac{x^5}{2} + \ldots \quad \blacklozenge$$

3. Ряды Фурье

Многие процессы, происходящие в природе и технике, обладают свойством повторяться через определенные промежутки времени. Такие процессы называют периодическими. Изучение периодических процессов математически описывается периодическими функциями.

Функция $f(x)$, определенная в области D, называется *периодической*, если существует такое число T $(T\neq 0)$, что при любом значении $x\in D$ выполняется равенство

$$f(x+T)=f(x).$$

Число T называется *периодом* функции.

Простейшими периодическими функциями являются тригонометрические функции $sinx$ и $cosx$ с периодом $T=2\pi$.

Простейший периодический процесс – гармоническое колебание $y=A\,sin(\omega x+\alpha)$ – описывается периодическими функциями $cos\,\omega x$ и $sin\,\omega x$. Более сложные периодические процессы описываются функциями, составленными из конечного или бесконечного числа слагаемых вида $cos\,\omega x$ и $sin\,\omega x$.

3.1. Тригонометрический ряд Фурье для функций с периодом 2π

Функциональный ряд вида

$$\frac{a_0}{2}+a_1\cos x+b_1\sin x+\cdots+a_n\cos nx+b_n\sin nx+\cdots \qquad (3.1)$$

называется ***тригонометрическим рядом.***

Числа $a_0, a_1, b_1, \ldots, a_n, b_n, \ldots$ **называются коэффициентами** тригонометрического ряда.

Ряд (3.1) часто записывается также следующим образом:

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx).$$

Каждое слагаемое $a_n \cos nx + b_n \sin nx$ (n=1,2,...) тригонометрического ряда – периодическая функция периода 2π. Если тригонометрический ряд сходится на отрезке длины периода 2π, то он сходится на всей числовой оси, и его сумма также является периодической функцией с периодом $T = 2\pi$. Если функция $f(x)$ является суммой тригонометрического ряда, т.е.

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx),$$

то говорят, что функция $f(x)$ разлагается в тригонометрический ряд.

Пусть $f(x)$ – периодическая функция периода 2π, непрерывная на отрезке $[-\pi; +\pi]$ или имеющая на этом отрезке конечное число точек разрыва первого рода.

Рядом Фурье функции $f(x)$ называется тригонометрический ряд

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx), \qquad (3.2)$$

коэффициенты которого определяются по формулам:

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx, \tag{3.3}$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nxdx, \tag{3.4}$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nxdx. \tag{3.5}$$

Коэффициенты тригонометрического ряда, определённые по формулам (3.3), (3.4) и (3.5), называются ***коэффициентами Фурье*** функции $f(x)$.

Если ряд Фурье функции $f(x)$ сходится к ней во всех ее точках непрерывности, то говорят, что ***функция $f(x)$ разлагается в ряд Фурье***

Сходимость ряда Фурье к заданной функции имеет место для довольно широкого класса функций. Однако нельзя утверждать, что ряд Фурье функции $f(x)$ сходится к этой функции. Этот ряд может для некоторых значений x оказаться расходящимся, но если даже он и сходится, то это еще не означает, что его сумма равна $f(x)$.

Достаточные условия сходимости ряда Фурье и, следовательно, возможность разложения функций в ряд Фурье даются теоремой Дирихле. Прежде чем формулировать эту теорему, введём два определения.

Функция $f(x)$ называется *кусочно – монотонной* на отрезке $[a; b]$, если этот отрезок можно разделить на конечное число интервалов, внутри каждого из которых функция либо только возрастает, либо только убывает, либо постоянна.

Функция $f(x)$ называется ***удовлетворяющей условиям Дирихле***

на отрезке $[a; b]$, если:

1) $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a; b]$ или имеет на нём **конечное** число точек разрыва первого рода;

2) $f(x)$ кусочно – монотонна на отрезке $[a; b]$.

Теорема Дирихле (достаточные условия разложимости функции $f(x)$ в ряд Фурье).

Теорема 3.1.

Пусть периодическая функция $f(x)$ с периодом 2π удовлетворяет на отрезке $[-\pi; +\pi]$ условиям Дирихле.

Тогда **ряд Фурье, составленный для этой функции, сходится во всех точках числовой оси.**

При этом:

1) в каждой точке непрерывности функции $f(x)$ сумма ряда $S(x)$ равна значению функции в этой точке:

$$S(x) = f(x);$$

2) в каждой точке x_0 разрыва функции сумма ряда равна среднему арифметическому значению пределов функции $f(x)$ при $x \to x_0$ слева и справа, т.е.

$$S(x_0) = \frac{f(x_0 - 0) + f(x_0 + 0)}{2};$$

3) в точках $x = -\pi$ и $x = \pi$ (на концах отрезка) сумма ряда равна

$$S(-\pi) = S(\pi) = \frac{f(-\pi + 0) + f(\pi - 0)}{2}.$$

Пример 3.1. Разложить в ряд Фурье функцию $f(x)$ периода $T = 2\pi$, заданную на интервале $(-\pi;\pi)$ формулой

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \in (-\pi;0], \\ x, & x \in [0;\pi). \end{cases}$$

Решение.

График функции имеет вид

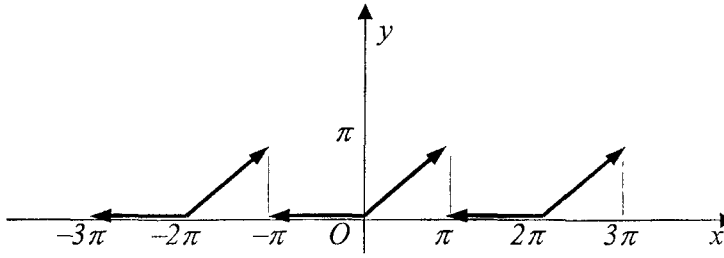


Рис. 5

Эта функция удовлетворяет условиям Дирихле и, следовательно, может быть разложена в ряд Фурье. Применяя формулы (3.3), (3.4), (3.5), вычислим коэффициенты Фурье:

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0} 0dx + \int_{0}^{\pi} xdx\right) = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} xdx = \frac{1}{\pi}\cdot\frac{x^2}{2}\Big|_0^{\pi} = \frac{\pi}{2},$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nxdx = \frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0} 0\cdot\cos nxdx + \int_{0}^{\pi} x\cos nxdx\right) =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} x\cos nxdx.$$

Для вычисления последнего интеграла применим метод интегрирования по частям

$$\int_a^b udv = uv\Big|_a^b - \int_a^b vdu.$$

Обозначим $\left\{ \begin{array}{c|c} u = x & du = (x)'dx = dx \\ dv = \cos nx\, dx & v = \int \cos nx dx = \frac{1}{n}\sin nx \end{array} \right\}$.

Тогда

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} x\cos nx\, dx = \frac{1}{\pi}\left[\frac{x}{n}\sin nx\Big|_0^{\pi} - \frac{1}{n}\int_0^{\pi}\sin nx\, dx\right] =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(\frac{x\sin nx}{n}\Big|_0^{\pi} + \frac{1}{n^2}\cos nx\Big|_0^{\pi}\right) =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\frac{\pi}{n}\sin n\pi + \frac{1}{n^2}\cos n\pi - \frac{1}{n^2}\cos 0\right] = \frac{1}{\pi n^2}\left[(-1)^n - 1\right] = \frac{(-1)^n - 1}{n^2\pi}$$

(т.к. $\sin n\pi = 0$, $\cos n\pi = (-1)^n$, $\cos 0 = 1$).

Вычислим $b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} x\sin nx dx =$

$$= \left\{ \begin{array}{c|c} u = x & du = dx \\ dv = \sin nx\, dx & v = \int \sin nx dx = -\frac{1}{n}\cos nx \end{array} \right\} =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[-\frac{x}{n}\cos nx\Big|_0^{\pi} + \frac{1}{n}\int_0^{\pi}\cos nx\, dx\right] = \frac{1}{\pi}\left(-\frac{x\cos nx}{n}\Big|_0^{\pi} + \frac{1}{n^2}\sin nx\Big|_0^{\pi}\right) =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[-\frac{\pi}{n}\cos n\pi + \frac{1}{n^2}\sin n\pi - \frac{1}{n^2}\sin 0\right] = -\frac{1}{n}(-1)^n = \frac{(-1)^{n+1}}{n}.$$

Таким образом, ряд Фурье имеет вид

$$f(x) = \frac{\pi}{4} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n - 1}{\pi n^2}\cos nx + \frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin nx \quad \text{или}$$

$$f(x)=\frac{\pi}{4}-\frac{2}{\pi}\cos x+\sin x-\frac{\sin 2x}{2}-\frac{2}{9\pi}\cos 3x+\frac{\sin 3x}{3}-\frac{\sin 4x}{4}+\cdots$$

Функция $f(x)$ непрерывна во всех внутренних точках интервала $(-\pi;\pi)$, поэтому, согласно теореме Дирихле, для всех этих точек сумма полученного ряда $S(x)=f(x)$.

В точках разрыва $x=\pm\pi$ сумма ряда $S(x)$ равна

$$\frac{f(-\pi+0)+f(\pi-0)}{2}=\frac{0+\pi}{2}=\frac{\pi}{2}. \blacklozenge$$

3.2. Ряды Фурье для чётных и нечётных функций

В некоторых случаях формулы для вычисления коэффициентов Фурье могут быть упрощены. Это имеет место для чётных и нечётных функций.

Допустим, что нужно разложить в ряд Фурье **чётную функцию** $f(x)$

Так как $\cos nx$ – функция чётная, а $\sin nx$ – функция нечётная, то произведение $f(x)\cos nx$ будет функцией чётной, а $f(x)\sin nx$ – функцией нечётной.

На основании свойств определенного интеграла от четных и нечетных функций на симметричном отрезке $[-\pi;+\pi]$ получим:

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi}f(x)dx,$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nxdx=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi}f(x)\cos nxdx, \qquad (3.6)$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nxdx=0.$$

Соответственно этому ряд Фурье для чётной функции содержит только четные функции – косинусы и имеет вид

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos nx. \qquad (3.7)$$

Если требуется разложить в ряд Фурье **нечётную функцию**, то произведение $f(x)\cos nx$ будет функцией нечётной, $f(x)\sin nx$ - функцией чётной.

Поэтому

$$a_0=a_n=0, \qquad b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nxdx=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi}f(x)\sin nxdx. \qquad (3.8)$$

Ряд Фурье для нечётной функции будет иметь вид

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin nx. \qquad (3.9)$$

Таким образом, чётная функция разлагается в ряд только по косинусам, а нечётная функция – только по синусам.

$f(x)$ - чётная функция

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos nx,$$

где

$$a_0=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi}f(x)dx,$$

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi}f(x)\cos nxdx,$$

$f(x)$ - **нечётная функция**

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx,$$

где $$b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin nx\,dx.$$

Пример 3.2. Разложить в ряд Фурье функцию периода 2π, заданную в интервале $(-\pi;\pi)$ формулой $f(x)=|x|$.

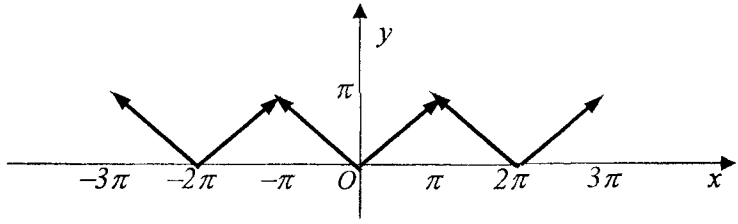


Рис.6

Решение.

Функция $f(x)$ - **чётная**, поэтому коэффициенты ряда определяются по формулам (3.6):

$$a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\,dx=\frac{2}{\pi}\cdot\frac{x^2}{2}\Big|_0^{\pi}=\pi,$$

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\cos nx\,dx=\frac{2}{\pi}\left(\frac{x\sin nx}{n}\Big|_0^{\pi}-\frac{1}{n}\int_0^{\pi}\sin nx\,dx\right)=$$

$$=\frac{2}{\pi n^2}\cos nx\Big|_0^{\pi}=\frac{2[(-1)^n-1]}{\pi n^2}.$$

Таким образом,

$$a_0 = \pi,\ \ a_1 = -\frac{4}{\pi},\ \ a_2 = 0,\ \ a_3 = -\frac{4}{9\pi},\ \ a_4 = 0,\ \ a_5 = -\frac{4}{25\pi},\cdots$$

Разложение в ряд Фурье функции $f(x) = |x|$ имеет вид

$$f(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\left(\cos x + \frac{\cos 3x}{9} + \frac{\cos 5x}{25} + \cdots + \frac{\cos(2n-1)x}{(2n-1)^2} + \cdots\right).$$

Функция $f(x) = |x|$ удовлетворяет условиям теоремы Дирихле, следовательно, ряд сходится на всей числовой оси и имеет своей суммой данную функцию, причем $S(\pm\pi) = \frac{\pi + \pi}{2} = \pi$.

3.3. Разложение в ряд Фурье функций произвольного периода $2l$

Пусть функция $f(x)$, удовлетворяющая условиям Дирихле, задана на промежутке $[-l; l]$ и имеет период $2l$:

$$f(x \pm 2l) = f(x).$$

Тогда тригонометрический ряд Фурье для $f(x)$ имеет вид

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{n\pi x}{l} + b_n \sin\frac{n\pi x}{l}, \qquad (3.10)$$

где

$$a_0 = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)dx, \qquad (3.11)$$

$$a_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}dx, \qquad (3.12)$$

$$b_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx. \qquad (3.13)$$

Пример 3.3. Разложить в ряд Фурье функцию $f(x)=2x+1$, заданную на отрезке $[-1;1]$.

Р е ш е н и е.

График функции имеет вид

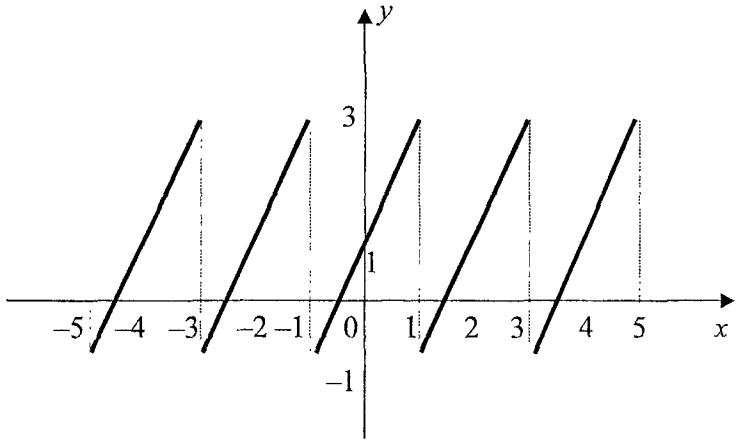


Рис. 7

Эта функция удовлетворяет условиям Дирихле и, следовательно, может быть разложена в ряд Фурье. Применяя формулы (3.11) – (3.13), вычислим коэффициенты Фурье при $l=1$:

$$a_0=\frac{1}{1}\int_{-1}^{1}f(x)dx=\int_{-1}^{1}(2x+1)dx=\left(\frac{2x^2}{2}+x\right)\Bigg|_{-1}^{1}=2,$$

$$a_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}dx=\int_{-1}^{1}(2x+1)\cos n\pi x dx=$$

$$=\left\{\begin{array}{c|c} u=2x+1 & du=(2x+1)'dx=2dx \\ dv=\cos n\pi x\,dx & v=\int\cos n\pi x dx=\dfrac{1}{\pi n}\sin n\pi x \end{array}\right\}=$$

$$= \left[\frac{2x+1}{\pi n} \sin n\pi x \Big|_{-1}^{1} - \frac{2}{\pi n} \int_{-1}^{1} \sin n\pi x \, dx \right] =$$

$$= \left(\frac{2x+1}{\pi n} \sin n\pi x \Big|_{-1}^{1} + \frac{2}{\pi^2 n^2} \cos n\pi x \Big|_{-1}^{1} \right) =$$

$$= \left[\frac{3}{\pi n} \sin n\pi - \frac{-1}{\pi n} \sin(-n\pi) + \frac{2}{\pi^2 n^2} \cos n\pi - \frac{2}{\pi^2 n^2} \cos(-n\pi) \right] =$$

$$= \left[\frac{3}{\pi n} \sin n\pi - \frac{1}{\pi n} \sin n\pi + \cancel{\frac{2}{\pi^2 n^2} \cos n\pi} - \cancel{\frac{2}{\pi^2 n^2} \cos n\pi} \right] = 0$$

$(\sin n\pi = 0)$.

Вычислим коэффициент b_n при $l = 1$:

$$b_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^{l} f(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx = \int_{-1}^{1} (2x+1) \sin n\pi x dx =$$

$$= \left\{ \begin{array}{c|c} u = 2x+1 & du = (2x+1)' dx = 2dx \\ dv = \sin n\pi x \, dx & v = \int \sin n\pi x dx = -\frac{1}{\pi n} \cos n\pi x \end{array} \right\} =$$

$$= \left[-\frac{2x+1}{\pi n} \cos n\pi x \Big|_{-1}^{1} + \frac{2}{\pi n} \int_{-1}^{1} \cos n\pi x \, dx \right] =$$

$$= \left(-\frac{2x+1}{\pi n} \cos n\pi x \Big|_{-1}^{1} + \frac{2}{\pi^2 n^2} \sin n\pi x \Big|_{-1}^{1} \right) =$$

$$= \left[-\frac{3}{\pi n} \cos n\pi + \frac{-1}{\pi n} \cos(-n\pi) + \frac{2}{\pi^2 n^2} \sin n\pi - \frac{2}{\pi^2 n^2} \sin(-n\pi) \right] =$$

$$= \left[-\frac{3}{\pi n}\cos n\pi - \frac{1}{\pi n}\cos \pi n + \frac{2}{\pi^2 n^2}\sin n\pi + \frac{2}{\pi^2 n^2}\sin n\pi \right] =$$

$$= -\frac{4}{\text{p}n}\cos n\pi = -\frac{4(-1)^n}{\pi n} = \frac{4(-1)^{n+1}}{\pi n}.$$

Таким образом, ряд Фурье функции $f(x) = 2x + 1$ имеет вид

$$f(x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4(-1)^{n+1}}{\pi n}\sin n\pi x$$

или

$$f(x) = 1 + \frac{4}{\pi}\sin \pi x - \frac{4}{2\pi}\sin 2\pi x + \frac{4}{3\pi}\sin 3\pi x - \frac{4}{4\pi}\sin 4\pi x + \cdots =$$

$$= 1 + \frac{4}{\pi}\sin \pi x - \frac{2}{\pi}\sin 2\pi x + \frac{4}{3\pi}\sin 3\pi x - \frac{1}{\pi}\sin 4\pi x + \cdots$$

Функция $f(x)$ непрерывна во всех внутренних точках отрезка $[-1; 1]$, поэтому, согласно теореме Дирихле, для всех этих точек сумма полученного ряда $S(x) = f(x)$.

В точках разрыва $x = \pm 1$ сумма ряда $S(x)$ равна

$$\frac{f(-1+0) + f(1-0)}{2} = \frac{-1+3}{2} = 1. \ \blacklozenge$$

3.3. Разложение в ряд Фурье функций, заданных на $(0; l)$

Функцию $f(x)$, удовлетворяющую условиям Дирихле в интервале $(0; l)$, можно разложить в ряд Фурье только по косинусам или по синусам. Для этого достаточно продолжить $f(x)$ четным или соответственно нечетным образом на интервал $(-l; 0)$ и для полученной

на $(-l; l)$ функции составить ряд Фурье. Коэффициенты Фурье будут при этом вычисляться по формулам соответственно (3.6), (3.7) или (3.8), (3.9).

Пример 3.4. Разложить в ряд Фурье по косинусам $f(x) = sin\frac{x}{2}$ на отрезке $[0; 2]$.

Р е ш е н и е.

График функции имеет вид

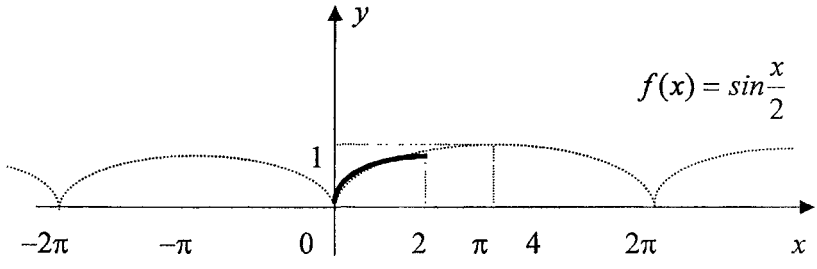


Рис.8

Продолжим $f(x)$ четным образом на $[-2; 0]$ (рис.8а), а затем построим периодическое продолжение функции, заданной на $[-2; 2]$ на всю ось Ox (рис.8б).

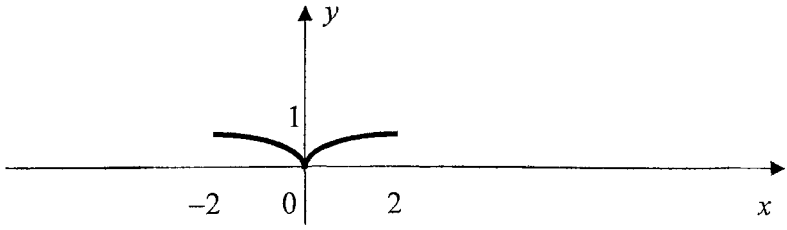


Рис.8а

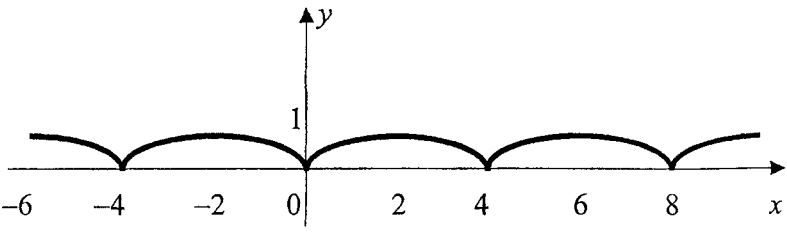


Рис.8б

Получим непрерывную на $(-\infty; +\infty)$ функцию; $l = 2$.

Ряд Фурье имеет вид

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{n\pi x}{2},$$

где $$a_0 = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)dx = \frac{2}{2}\int_0^2 \sin\frac{x}{2}dx = 2\cos\frac{x}{2}\Big|_0^2 = 2(\cos 1 - 1),$$

$$a_n = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}dx = \frac{2}{2}\int_0^2 \sin\frac{x}{2}\cos\frac{n\pi x}{2}dx =$$

$$= \left(-\frac{\cos\frac{1+n\pi}{2}x}{2\cdot\frac{1+\pi n}{2}} - \frac{\cos\frac{1-\pi n}{2}x}{\frac{2(1-\pi n)}{2}} \right)\Bigg|_0^2 =$$

$$= -\frac{\cos(1+n\pi)}{1+n\pi} - \frac{\cos(1-n\pi)}{1-n\pi} + \frac{1}{1+n\pi} + \frac{1}{1-n\pi} =$$

$$= -\frac{\cos 1\cdot(-1)^n}{1+n\pi} - \frac{\cos 1\cdot(-1)^n}{1-n\pi} + \frac{1}{1+n\pi} + \frac{1}{1-n\pi} =$$

$$= \frac{2-2(-1)^n\cos 1}{1-n^2\pi^2}.$$

Ряд Фурье имеет вид

$$\sin\frac{x}{2} = \cos 1 - 1 + 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1-(-1)^n\cos 1}{1-n^2\pi^2}\cos\frac{n\pi x}{2}, \qquad 0 \le x \le 2. \ \blacklozenge$$

В ряд Фурье можно разложить и непериодическую функцию, заданную лишь в интервале $(-l; l)$, вычисляя коэффициенты a_0, a_n, b_n по формулам (3.10) – (3.13). Полученный ряд будет сходиться на всей числовой оси, а его суммой будет $F(x)$- периодическое продолжение $f(x)$ на ось Ox.

Ряд Фурье $f(x), \quad [-\pi; +\pi]$

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos nx + b_n \sin nx\right)$$

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx,$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nxdx,$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nxdx.$$

Ряд Фурье $f(x), \quad [-l; l]$

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{n\pi x}{l} + b_n \sin\frac{n\pi x}{l}$$

$$a_0 = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)dx$$

$$a_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}dx$$

$$b_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx$$

Вопросы для самоконтроля

1. Определение числового ряда. Общий член ряда, сумма ряда.
2. Определение сходящегося и расходящегося рядов. Примеры.
3. Необходимый признак сходимости ряда. Приведите пример, показывающий, что он не является достаточным.
4. Достаточные признаки сходимости числовых знакоположительных рядов:
   - Интегральный признак Коши
   - Признак Даламбера
   - Признаки сравнения
   - Радикальный признак Коши.
5. Сходимость обобщенного гармонического ряда.
6. Определение знакопеременных и знакочередующихся числовых рядов. Абсолютная и условная сходимость.
7. Признак Лейбница о сходимости знакочередующихся рядов.
8. Оценка остатка сходящегося знакочередующегося ряда.
9. Функциональный ряд. Примеры.
10. Область сходимости функционального ряда.
11. Степенной ряд. Теорема Абеля о сходимости степенных рядов.
12. Радиус сходимости и область сходимости степенного ряда.
13. Свойства степенных рядов.
14. Ряды Тейлора, Маклорена функции $y = f(x)$. Условия разложимости функции в степенной ряд.
15. Разложение в ряд основных элементарных функций. Укажите интервалы, в которых данные разложения имеют место.
16. Приложения степенных рядов в приближенных вычислениях. Решение дифференциальных уравнений с помощью степенных рядов.

17. Тригонометрический ряд Фурье. Условия разложимости функций в ряд Фурье. Теорема Дирихле.

18. Ряд и коэффициенты Фурье периодической функции с периодом 2π и $2l$.

19. Ряды Фуре для четных и нечетных функций.

20. Разложение в ряд Фурье функций, заданных на половине периода.

Задания для контрольной работы

Вариант №1

1. **Исследовать** на сходимость числовые ряды:

а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n5^n}{n+2}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt[5]{\frac{n+1}{4n-1}} \right)^n$;

в) $\frac{1}{2}+\frac{3}{5}+\frac{5}{10}+\frac{7}{17}+\ldots$; г) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n^3+1}}$.

2. **Найти** области сходимости функциональных рядов:

а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2(x-2)^n}{3^n}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)!}{(2n+1)x^{2n}}$.

3. **Разложить в** ряд Маклорена функцию $f(x) = x \cdot \sin \frac{x^2}{4}$.

4. **Вычислить** приближенно $\int_0^{1/8} \frac{dx}{1+x^4}$ с точностью $\varepsilon = 0{,}001$.

5. Найти 4 первых отличных от нуля члена разложения в степенной ряд частного решения дифференциального уравнения $y' + xy^2 = x$ при заданном начальном условии $y(1) = 2$.

6. Разложить в тригонометрический ряд Фурье функцию

$$f(x) = \begin{cases} x-1, & -\pi \le x < 0; \\ 1, & 0 \le x \le \pi. \end{cases}$$

Вариант №2

1. Исследовать на сходимость числовые ряды:

а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+3n+2}{n^5+2}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+1}{n+3}\right)^{n^2}$;

в) $\frac{2\cdot 4}{1}+\frac{4\cdot 5}{2}+\frac{8\cdot 6}{3}+\frac{16\cdot 7}{4}+\ldots$; г) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n\cdot \ln^2 n}$.

2. Найти области сходимости функциональных рядов.

а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-2)^n}{(n^2+1)}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{nx^{2n}}{4^n(3n+5)}$.

3 Разложить в ряд Маклорена функцию $y=x^2\cdot e^{\frac{x}{5}}$.

4. Вычислить приближенно $\int_0^{\frac{1}{3}}\cos x^3\,dx$ с точностью $\varepsilon=0{,}001$

5. Найти 4 первых отличных от нуля члена разложения в степенной ряд частного решения дифференциального уравнения $y'+xy'+y=0$ при заданном начальном условии $y(1)=1$.

6. Найти разложение в тригонометрический ряд Фурье функции

$$f(x)=\begin{cases}x+1, & -\pi\le x<0;\\ 1, & 0\le x\le\pi.\end{cases}$$

Вариант №3

1. Исследовать на сходимость числовые ряды:

а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+4n}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n^3+2n}{5n^3-11}\right)^n$;

в) $1+\frac{1}{4}+\frac{1}{7}+\frac{1}{10}+\ldots$; г) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}3^n}{n!}$.

2. Найти области сходимости функциональных рядов:

а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2(x-3)^n}{2^n}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+10)!}{(3n+1)x^{2n}}$.

3. Разложить в ряд Маклорена функцию $f(x)=x^2\cdot\cos\frac{x}{3}$

4. Вычислить приближенно $\int_0^1\sqrt{x}\sin x dx$ с точностью $\varepsilon=0{,}001$.

5. Найти 4 первых отличных от нуля члена разложения в степенной ряд частного решения дифференциального уравнения $y'=y^3-x+1$ при заданном начальном условии $y(1)=1$.

6. Найти разложение в тригонометрический ряд Фурье функции

$$f(x)=\begin{cases}2x-1, & -\pi\le x<0;\\ 1, & 0\le x\le\pi.\end{cases}$$

Вариант №4

1. Исследовать на сходимость числовые ряды:

а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2 2^n}{n+2}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n+1}{3n+1}\right)^{n/2}$;

в) $\frac{1}{3}+\frac{2}{5}+\frac{3}{7}+\frac{4}{9}+\ldots$; г) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n n}{\sqrt{n^4+5}}$.

2. Найти области сходимости функциональных рядов:

а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^3(x-4)^n}{5^n}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)!}{(3n-21)x^{2n}}$.

3. Разложить в ряд Маклорена функцию $f(x)=\frac{x^2}{\sqrt{1+x^2}}$.

4. Вычислить приближенно $\int_0^{1/2} e^{-x^3}dx$ с точностью $\varepsilon=0{,}001$.

5. Найти 4 первых отличных от нуля члена разложения в степенной ряд частного решения дифференциального уравнения $y'=\ln(x+y)+2$ при заданном начальном условии $y(0)=1$.

6. Найти разложение в тригонометрический ряд Фурье функции

$$f(x)=\begin{cases} x+1, & -\pi\le x<0; \\ 2, & 0\le x\le\pi. \end{cases}$$

Вариант №5

1. **Исследовать** на **сходимость** числовые **ряды:**

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n3^n}{n+7}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{n+13}{16n+3}\right)^{n/4}$;

в) $\dfrac{1}{4}+\dfrac{4}{5}+\dfrac{9}{6}+\ldots$; г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{4^n+1}}$.

2. **Найти** области сходимости функциональных **рядов:**

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n^2(x-1)^n}{2^n}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(n+8)!}{(5n+1)x^{2n}}$.

3. **Разложить в** ряд Маклорена функцию $f(x)=xe^{\frac{x}{4}}$.

4. **Вычислить** приближенно $\int\limits_0^{\frac{1}{2}}\ln(1+x^2)dx$ с точностью $\varepsilon=0{,}001$.

5. Найти 4 первых отличных от нуля члена разложения в степенной ряд частного решения дифференциального уравнения $y'=y^2\cos x$ при заданном начальном условии $y(0)=2$.

6. Найти разложение в тригонометрический ряд Фурье функции

$$f(x)=\begin{cases}0, & -\pi\le x<0;\\ x, & 0\le x\le\pi.\end{cases}$$

Вариант №6

1. Исследовать на сходимость числовые ряды:

а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{27n+1}}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+2}{7n+1}\right)^{n/2}$;

в) $\frac{1}{3}+\frac{3}{3^2}+\frac{5}{3^3}+\ldots$; г) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}2^n}{\sqrt{5^n}}$.

2. Найти области сходимости функциональных рядов:

а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2(x+2)^n}{3^n}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n+1)!}{(7n+1)x^{2n}}$.

3. Разложить в ряд Маклорена функцию $f(x)=x\ln(1+x^3)$.

4. Вычислить приближенно $\int_0^{\frac{1}{2}} \sqrt[3]{1+x^3}\,dx$ с точностью $\varepsilon = 0{,}001$.

5. Найти 4 первых отличных от нуля члена разложения в степенной ряд частного решения дифференциального уравнения $y' = 2e^{x-y}$ при заданном начальном условии $y(1)=1$.

6. Найти разложение в тригонометрический ряд Фурье функции

$$f(x)=\begin{cases} 2, & -\pi \le x < 0; \\ -2x, & 0 \le x \le \pi. \end{cases}$$

Вариант №7

1. Исследовать на сходимость числовые ряды:

а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n3^n}{n+4}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+2}{3n+4}\right)^n$;

в) $\frac{2}{5}+\frac{5}{8}+\frac{8}{11}+\ldots$; г) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n(n+3)}$.

2. **Найти** области сходимости функциональных рядов:

а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\ (x+3)^n}{5^n}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3n+1)!}{(5n+1)x^{2n}}$.

3. **Разложить в ряд** Маклорена функцию $f(x) = x^2 \cdot sin\frac{x}{3}$.

4. **Вычислить** приближенно $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{1-x^3}$ с точностью $\varepsilon = 0{,}001$.

5. Найти 4 первых отличных от нуля члена разложения в степенной ряд частного решения дифференциального уравнения $y' + y = \cos x$, удовлетворяющего заданному начальному условию $y(0) = 1$.

6. Найти разложение в тригонометрический ряд Фурье функции

$$f(x) = \begin{cases} 2x, & -\pi \le x < 0; \\ -1, & 0 \le x \le \pi. \end{cases}$$

Вариант №8

1. Исследовать на сходимость числовые ряды:

а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n7^n}{n+6}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3n+1}{4n+5} \right)^n$;

в) $\frac{1}{6} + \frac{2}{13} + \frac{3}{20} + \ldots$; г) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2+3n+2}$.

2. **Найти** области сходимости функциональных рядов:

а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2(x+4)^n}{7^n}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)!}{(7n+1)x^{2n}}$.

3. **Разложить в ряд** Маклорена функцию $f(x) = x^3 \cdot arcsin\frac{x^2}{4}$.

4. **Вычислить приближенно** $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{\sqrt{1+x^4}}$ с точностью $\varepsilon = 0{,}001$.

5. Найти 4 первых отличных от нуля члена разложения в степенной ряд частного решения дифференциального уравнения $y' = 1 - y^2 + e^x$, удовлетворяющего заданному начальному условию $y(0) = 0$.

6. Найти разложение в тригонометрический ряд Фурье функции

$$f(x) = \begin{cases} x+2, & -\pi \le x < 0; \\ 2, & 0 \le x \le \pi. \end{cases}$$

Вариант №9

1. **Исследовать на сходимость** числовые ряды:

а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(n+2)3^n}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}3^{-n}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}$;

в) $\frac{1}{7}+\frac{3}{9}+\frac{5}{11}+\ldots$; г) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}n}{n(n+2)}$.

2. Найти области сходимости функциональных рядов:

а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2(x-4)^n}{5^n}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(4n+1)!}{(3n+1)x^{2n}}$.

3. **Разложить в ряд** Маклорена функцию $f(x)=\sqrt{x}\cdot e^{x^2}$.

4. **Вычислить приближенно** $\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{1-\cos x}{x^2}dx$ с точностью $\varepsilon=0{,}001$.

5. Найти 4 первых отличных от нуля члена разложения в степенной ряд частного решения дифференциального уравнения $y'=y-x^2$, удовлетворяющего заданному начальному условию $y(1)=2$.

6. Найти разложение в тригонометрический ряд Фурье функции

$$f(x)=\begin{cases}2x, & -\pi\le x<0;\\ -1, & 0\le x\le\pi.\end{cases}$$

Вариант №10

1. **Исследовать** на сходимость числовые ряды:

а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n5^n}{n+2}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3n+2}{n^2+1}\right)^n$;

в) $\frac{3}{4}+\frac{5}{9}+\frac{7}{16}+\ldots$; г) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 2n}{\sqrt{n^2+5}}$.

2. **Найти области** сходимости функциональных рядов:

а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2(x-10)^n}{2^n}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(7n+1)!}{(5n+1)x^{2n}}$.

3. Разложить в ряд Маклорена функцию $f(x) = x^2 \cdot arctg\frac{x}{3}$.

4. Вычислить приближенно $\int_0^{\frac{1}{5}} \frac{1-\sin x}{x} dx$ с точностью $\varepsilon = 0{,}001$.

5. Найти 4 первых отличных от нуля члена разложения в степенной ряд частного решения дифференциального уравнения $y' + xy = x^2$, удовлетворяющего заданному начальному условию $y(1) = 1$.

6. Найти разложение в тригонометрический ряд Фурье функции

$$f(x) = |x-1|, \quad -\pi \le x \le \pi.$$

Библиографический список

1. Бугров Я.С., Никольский С.М. Дифференциальные уравнения. Кратные интегралы. Ряды. Функции комплексного переменного.– М.: Наука, 1981. – 448 с.
2. Бермант А.Ф. Краткий курс математического анализа.– М.: Наука, 1976. – 733 с.
3. Воробьев Н.Н. Теория рядов.– М.: Наука, 1973. – 208 с.
4. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисление.– М.: Наука, 1978. – Т.2.– 456 с.
5. Щипачев В.С. Высшая математика.– М.: Высшая школа, 2000. – 479 с.
6. Данко Е.П., Попов А.Г., Кожевникова Т.Я. Высшая математика в упражнениях и задачах.– М.: Высшая школа, 1999. – Ч.2.– 479 с.
7. Минорский В.П. Сборник задач по высшей математике.– М.: Наука, 1987. – 352 с.

Оглавление

1. Числовые ряды..... 3

1.1. Основные определения..... 3

1.2. Необходимый признак сходимости ряда..... 13

1.3. Свойства сходящихся рядов..... 15

1.4. Достаточные признаки сходимости знакоположительных рядов..... 18

1.4.1. Интегральный признак Коши..... 18

1.4.2. Признак сравнения..... 26

1.4.3. Предельный признак сравнения..... 29

1.4.4. Признак Даламбера..... 32

1.4.5. Радикальный признак Коши..... 36

1.5.Знакопеременные ряды. Абсолютная и условная сходимость... 39

1.6. Знакочередующиеся ряды. Признак Лейбница..... 42

1.7. Вычисление суммы знакочередующегося ряда..... 47

2. Функциональные ряды..... 49

2.1.Функциональный ряд. Область сходимости функционального ряда..... 49

2.2. Степенные ряды..... 54

2.2.1. Определение радиуса сходимости степенного ряда..... 58

2.2.2. Основные свойства степенных рядов..... 64

2.3. Разложение функций в степенные ряды..... 67

2.3.1. Ряд Тейлора и Маклорена..... 67

2.3.2. Разложение основных элементарных функций в ряд Тейлора (Маклорена)..... 69

2.4. Приложения степенных рядов..... 76

2.4.1. Приближенное вычисление интегралов..... 76

2.4.2. Интегрирование дифференциальных уравнений..... 78

3. Ряды Фурье..... 82

3.1.Тригонометрический ряд Фурье для функций с периодом 2π... 82

3.2. Ряды Фурье для четных и нечетных функций..... 88

3.3. Разложение в ряд Фурье функций произвольного периода $2l$..... 91

3.4. Разложение в ряд Фурье функций, заданных на $(0; l)$..... 94

Вопросы для самоконтроля..... 99

Задания для контрольной работы..... 101

Библиографический список..... 111

Учебное пособие

Медведева Ирина Петровна

Багдуева Ханда Нимаевна

Ряды

Учебное пособие
для студентов заочной формы обучения
всех специальностей

Редактор Л. И. Рубанова
Компьютерная верстка И.П Медведевой, Х.Н. Багдуевой

Подписано в печать 17 04 06
Формат 60×84/16. Печать плоская
Усл. печ. л. – 6,8. Уч -изд. л. – 7
План 2006 г
Заказ 389
Тираж 800 экз.

Типография ИрГУПСа, г. Иркутск, ул. Чернышевского, 15