

Министерство транспорта Российской Федерации
Федеральное агентство железнодорожного транспорта
федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Дальневосточный государственный университет путей сообщения»

Кафедра «Высшая математика»

ФУНКЦИИ КОМПЛЕКСНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

Методическое пособие по решению задач

Составители:

В.И. Жукова, М.И. Якунина

Хабаровск
Издательство ДВГУПС
2014

УДК 517.53 (075.8)
ББК В 161.55я73
Ф 947

Рецензент – кандидат физико-математических наук,
доцент кафедры «Высшая математика» ДВГУПС
Е.И. Рукавишникова

Составители:
В.И. Жукова, М.И. Якунина

Ф 947 Функции комплексной переменной : метод. пособие / сост. В.И. Жукова, М.И. Якунина. – Хабаровск : Изд-во ДВГУПС, 2014. – 59 с.

Методическое пособие соответствует ФГОС ВО по специальностям 23.05.05 «Системы обеспечения движения поездов», 08.05.02 «Строительство железных дорог, мостов и транспортных тоннелей», 23.05.03 «Подвижной состав железных дорог», 23.05.01 «Наземные транспортно-технологические средства» и по направлению подготовки бакалавриата 11.03.02 «Инфокоммуникационные технологии и системы связи».

Содержит методические рекомендации по решению задач, а также варианты контрольной работы.

Предназначено для студентов 2-го курса очной формы обучения, изучающих дисциплину «Математика».

УДК 517.53 (075.8)
ББК В 161.55я73

ВВЕДЕНИЕ

Современное развитие общества привело к тому, что к инженерам в наше время стали предъявляться новые высокие профессиональные требования: хорошо развитые производственные функции, способность проектировать, принимать решения, анализировать, прогнозировать, находить компромиссы в решении профессиональных задач. Значительное развитие технологий потребовало специалистов высокого интеллектуального и профессионального уровня, обладающих системным, критическим и аналитическим мышлением, умеющих принимать оперативные и стратегические решения в ходе организации и осуществления технологического процесса. Данное методическое пособие направлено на организацию обучения студентов в рамках реализации компетентностного подхода в образовании.

Курс теории функции комплексной переменной является одним из основных разделов высшей математики, который изучают студенты ряда специальностей технических вузов. Целью изучения дисциплины является формирование у студентов необходимых компетенций:

ОК-1: способность к обобщению, анализу, восприятию информации, постановке цели и выбору путей ее достижения;

ОК-9: способность к саморазвитию, повышению своей квалификации и мастерства.

В результате освоения темы «Теория функций комплексного переменного» дисциплины «Математический анализ» студент должен:

– **знать** основные понятия и методы математического анализа, дифференциального и интегрального исчисления, гармонического анализа;

– **уметь** использовать основные законы естественно-научных дисциплин в профессиональной деятельности; применять методы математического анализа; применять математические методы для решения практических задач;

– **владеть** методами математического описания физических явлений и процессов, определяющих принципы работы различных технических устройств.

Настоящее методическое пособие является приложением к учебному пособию «Теория функций комплексного переменного» [1] и состоит из трех разделов. Первый раздел содержит рекомендации по решению задач по теме «Функции комплексной переменной» [2, 5], второй раздел представляет собой сборник задач по основным разделам теории функции комплексного переменного [3, 4]: комплексным числам, дифференцированию и интегрированию функции комплексного переменного, рядам Тейлора и Лорана, особым точкам и применению вычетов. Все эти понятия используются в естественно-научных дисциплинах, таких как теоретические основы электротехники, радиотехника, электродинамика, аэродинамика и др. В пособии представлено тридцать различных вариантов с заданиями. Третий раздел содержит варианты контрольного теста по теме «Теория функций комплексного переменного».

Задания методически подобраны таким образом, чтобы помочь студенту выйти на уровень самоорганизации, самообразования и самовоспитания при подготовке к экзамену или зачету. В пособии предлагаются задания, направленные на развитие профессиональных компетенций студентов.

Авторы надеются, что рассмотренные примеры и задачи помогут студентам овладеть некоторыми важными разделами данного курса, а также организовать самостоятельную работу при выполнении домашних и расчетно-графических заданий, при подготовке к контрольным работам и экзаменам. Пособие может быть рекомендовано для использования на практических занятиях по изучению данного курса.

Овладение теорией и практикой курса «Теория функций комплексного переменного» поможет формированию инженерного мышления у будущего специалиста.

1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ КОМПЛЕКСНОГО АНАЛИЗА

1.1. Комплексные числа

Теоретические вопросы:

- понятие комплексного числа;
- геометрическое и тригонометрическое представление комплексного числа;
- показательная форма комплексного числа;
- операции над комплексными числами в алгебраической, тригонометрической и показательной формах.

Примеры

Пример 1. Вычислить $z = \frac{i^3(1-i)}{4+i}$.

Решение

Вычисление выполним по действиям:

$$1) i^3 = i^2 i = (-1) \cdot i = -i;$$

$$2) \frac{1-i}{4+i} = \frac{(1-i)(4-i)}{(4+i)(4-i)} = \frac{4-i-4i+i^2}{4^2-i^2} = \frac{4-i-4i-1}{16+1} = \frac{3-5i}{17} = \frac{3}{17} - \frac{5}{17}i;$$

$$3) z = -i \left(\frac{3}{17} - \frac{5}{17}i \right) = -\frac{3}{17}i + \frac{5}{17}i^2 = -\frac{3}{17}i - \frac{5}{17} = -\frac{5}{17} - \frac{3}{17}i.$$

Пример 2. Вычислить $z = (1 + \sqrt{3}i)^9$.

Решение

Представим число в тригонометрической форме и воспользуемся формулой Муавра $z^n = r^n (\cos n\varphi + i \sin n\varphi)$:

$$r = |1 + \sqrt{3}i| = \sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2} = 2; \quad \varphi = \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{3}}{1} = \sqrt{3} = \frac{\pi}{3};$$

$$1 + \sqrt{3}i = 2 \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right),$$

тогда

$$(1 + \sqrt{3}i)^9 = 2^9 \left(\cos 9 \frac{\pi}{3} + i \sin 9 \frac{\pi}{3} \right) = 512 (\cos 3\pi + i \sin 3\pi) = -512.$$

Пример 3. Найти все значения комплексного числа $w = \sqrt[3]{-8}$.

Решение

Чтобы извлечь корень n -й степени из комплексного числа, воспользуемся формулой

$$w = \sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r} \left(\cos \frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i \sin \frac{\varphi + 2\pi k}{n} \right), k = 0; 1; \dots; n-1.$$

Для этого представим число (-8) в тригонометрической форме:

$$r = |-8 + 0i| = \sqrt{(-8)^2 + (0)^2} = 8; \quad \varphi = \operatorname{arctg} \frac{0}{-8} = \pi; \quad -8 = 8(\cos \pi + i \sin \pi).$$

Значит,

$$w_k = \sqrt[3]{8} \left(\cos \frac{\pi + 2\pi k}{3} + i \sin \frac{\pi + 2\pi k}{3} \right), k = 0; 1; 2.$$

Следовательно

$$\begin{aligned} w_0 &= \sqrt[3]{8} \left(\cos \frac{\pi + 2\pi \cdot 0}{3} + i \sin \frac{\pi + 2\pi \cdot 0}{3} \right) = 2 \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right) = \\ &= 2 \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i \right) = (1 + \sqrt{3}i); \end{aligned}$$

$$w_1 = \sqrt[3]{8} \left(\cos \frac{\pi + 2\pi \cdot 1}{3} + i \sin \frac{\pi + 2\pi \cdot 1}{3} \right) = 2 \left(\cos \frac{3\pi}{3} + i \sin \frac{3\pi}{3} \right) = 2(-1 + 0i) = -2;$$

$$\begin{aligned} w_2 &= \sqrt[3]{8} \left(\cos \frac{\pi + 2\pi \cdot 2}{3} + i \sin \frac{\pi + 2\pi \cdot 2}{3} \right) = 2 \left(\cos \frac{5\pi}{3} + i \sin \frac{5\pi}{3} \right) = \\ &= 2 \left(\cos \left(2\pi - \frac{\pi}{3} \right) + i \sin \left(2\pi - \frac{\pi}{3} \right) \right) = 2 \left(\cos \frac{\pi}{3} - i \sin \frac{\pi}{3} \right) = \\ &= 2 \left(\frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = (1 - \sqrt{3}i). \end{aligned}$$

1.2. Линии и области в комплексной плоскости

Теоретические вопросы:

- уравнение окружности;
- уравнение прямых, параллельных координатным осям;
- неравенство, определяющее множество точек круга;
- определение множества точек прямоугольника с центром в начале координат;
- определение множества точек окружности с центром в начале координат и со смещённым центром.

Примеры

Пример 1. Дать геометрическое описание множества точек комплексной плоскости, удовлетворяющих следующим неравенствам:

1) $|z - 1 - 2i| = 2$;

2) $\arg(x + yi) = \frac{\pi}{4}$.

Решение

1. Чтобы построить линию (область) в комплексной плоскости, нужно в уравнении (неравенстве) $|z - 1 - 2i| = 2$, определяющем эту линию (область), заменить комплексную переменную z действительными переменными x, y , т.е. $z = x + yi$.

Тогда получим

$$|x + yi - 1 - 2i| = 2.$$

Приведем подобные, группируя действительную и мнимую части:

$$|(x - 1) + (y - 2)i| = 2.$$

Согласно формуле $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ имеем $\sqrt{(x - 1)^2 + (y - 2)^2} = 2$, т.е. $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 4$. Множество точек, удовлетворяющих условию $|z - 1 - 2i| = 2$, есть круг $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 4$ с радиусом 2 и с центром в точке $z_0 = 1 + 2i$ (рис. 1).

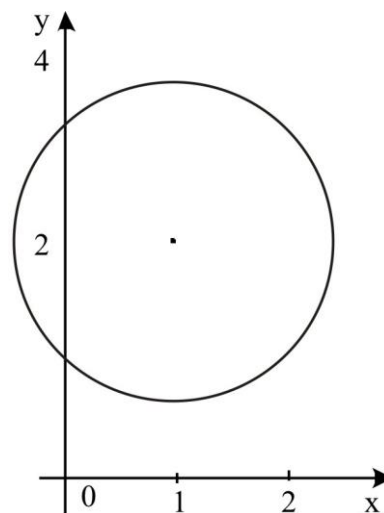


Рис. 1

2. Точки $\arg(x + yi) = \frac{\pi}{4}$ лежат на луче, выходящем из точки $O(0;0)$ под углом $\frac{\pi}{4}$ к действительной оси.

Пример 2. Найти все точки $z = x + iy$ комплексной плоскости, принадлежащие множеству D (рис. 2).

Решение

Множество D , изображенное на рисунке, ограничено прямыми $y = x$, $x = -y$ и $x = 1$. Для комплексного числа $z = x + iy$ угол наклона прямой $y = x$ к оси Ox равен $\frac{\pi}{4}$, а угол наклона прямой $x = -y$ равен $\left(-\frac{\pi}{4}\right)$. Следовательно, комплексные числа $z = x + iy$, принадлежащие множеству D , должны удовлетворять условиям $-\frac{\pi}{4} \leq \arg \leq \frac{\pi}{4}$, $0 \leq \operatorname{Re} z \leq 1$.

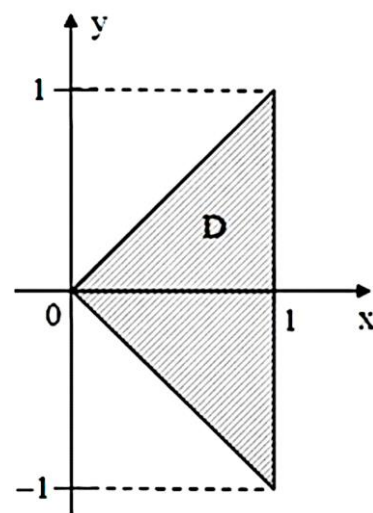


Рис. 2

1.3. Функция комплексного переменного

Теоретические вопросы:

- определение однозначной и многозначной функции комплексного переменного;
- определение элементарных функций комплексного переменного.

Пример

Вычислить значения заданных функций:

1) $\ln(-i)$;

2) 1^{-i} .

Решение

1. Для вычисления значения $\ln(-i)$ воспользуемся формулой

$$\ln z = \ln|z| + i \arg z.$$

Вычислим модуль и аргумент числа $z = -i$:

$$|z| = |-i| = \sqrt{0^2 + (-1)^2} = 1; \quad \arg z = \operatorname{arctg} \frac{(-1)}{0} = -\frac{\pi}{2}.$$

Подставив в формулу, получим

$$\ln(-i) = \ln 1 + i \left(-\frac{\pi}{2} \right) = -\frac{\pi}{2} i.$$

2. Представим (1^{-i}) , согласно формуле $a^z = e^{z \operatorname{Ln} a}$, в виде $1^{-i} = e^{-i \operatorname{Ln} 1}$.

Найдем значение $\operatorname{Ln} 1$ по формуле

$$\operatorname{Ln} z = \ln|z| + i (\arg z + 2\pi k), \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Для чего вычислим модуль и аргумент числа $z = 1$, получим:

$$|z| = |1| = 1; \quad \arg 1 = \operatorname{arctg} \frac{0}{1} = 0,$$

отсюда имеем

$$\operatorname{Ln} 1 = \ln 1 + i (0 + 2\pi k) = 2\pi k i, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Используя последнее выражение, найдем

$$(1^{-i}) = e^{-i \cdot 2\pi k i} = e^{2\pi k}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

1.4. Дифференцирование функции комплексного переменного

Теоретические вопросы:

- определение функции комплексного переменного;
- условие Коши – Римана;
- определение аналитической функции комплексного переменного;
- определение аналитической функции комплексного переменного по её действительной и мнимой части.

Пример

Определить, в каких точках комплексной плоскости функция $f(z) = z \operatorname{Re} z$ имеет производную, и вычислить производную в каждой из этих точек. Будет ли функция аналитична в точке $z = 0$.

Решение

1. Найдем действительную и мнимую части для заданной функции $f(z) = z \operatorname{Re} z$:

$$f(z) = (x + yi)x = x^2 + xyi,$$

тогда

$$u(x, y) = x^2, \quad v(x, y) = xy.$$

2. Найдем частные производные функций $u(x, y)$ и $v(x, y)$:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x; \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 0; \quad \frac{\partial v}{\partial x} = y; \quad \frac{\partial v}{\partial y} = x.$$

3. Проверим условие Коши – Римана

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \\ \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}. \end{cases}$$

Для нашей функции $\begin{cases} 2x = x, \\ 0 = -y. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0, \\ y = 0. \end{cases} \Rightarrow z_0 = 0$ – точка, в которой функция имеет производную.

4. Запишем выражение производной в точке дифференцируемости по формуле $f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x}$, получим:

$$f'(z) \Big|_{z=z_0} = (2x + iy) \Big|_{x=0, y=0} = 0.$$

Функция $f(z) = z \operatorname{Re} z$ дифференцируема только в одной точке $z = 0$. Поэтому в этой точке функция не является аналитической.

1.5. Интегрирование функции комплексного переменного

Теоретические вопросы:

- вычисление интеграла от функции комплексного переменного вдоль незамкнутой кривой;
- интегральная теорема Коши;
- интегральная формула Коши;
- вычисление интеграла от аналитической функции через её первообразную.

Примеры

Пример 1. Вычислить интеграл $\int_{\Gamma} (2z + \bar{z} + i) dz$, где Γ – дуга параболы $y = x^2$, соединяющая точки $z = 0$ и $z = 1 + i$.

Решение

Воспользуемся формулой вычисления интеграла функции комплексного переменного по дуге через криволинейный интеграл второго рода:

$$\int_{\Gamma} f(z) dz = \int_{\Gamma} u(x, y) dx - v(x, y) dy + i \int_{\Gamma} v(x, y) dx + u(x, y) dy.$$

Выделим в подынтегральной функции $f(z) = 2z + \bar{z} + i$ действительную $u(x, y)$ и мнимую $v(x, y)$ части:

$$f(z) = f(x + yi) = 2(x + yi) + (x - yi) + i = 3x + i(y + 1),$$

где

$$u(x, y) = 3x; \quad v(x, y) = y + 1.$$

Подставив в формулу, получим:

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} (2z + \bar{z} + i) dz &= \int_{\Gamma} 3x dx - (y + 1) dy + i \int_{\Gamma} (y + 1) dx + 3x dy = \left[\begin{array}{l} \Gamma: y = x^2 \\ dy = 2x dx \\ 0 \leq x \leq 1 \end{array} \right] = \\ &= \int_0^1 (3x dx - (x^2 + 1) 2x dx) + i \int_0^1 (x^2 + 1) dx + 6x^2 dx = \int_0^1 (x - 2x^3) dx + i \int_0^1 (7x^2 + 1) dx = \\ &= \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{2} \right) \Big|_0^1 + i \left(\frac{7}{3} x^3 + x \right) \Big|_0^1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + i \left(\frac{7}{3} + 1 \right) = \frac{10}{3} i. \end{aligned}$$

Пример 2. Вычислить интеграл $\int_{\Gamma} \frac{1}{z^2 + 1} dz$, где: 1) $\Gamma: |z - 1| = \frac{1}{2}$; 2) $\Gamma: |z - i| = \frac{1}{2}$.

Решение

1. Подынтегральная функция $f(z) = \frac{1}{z^2 + 1}$ аналитична в круге $|z - 1| \leq \frac{1}{2}$,

поэтому по теореме Коши $\int_{|z-1|=\frac{1}{2}} \frac{1}{z^2 + 1} dz = 0$.

2. В круге $\Gamma: |z - i| = \frac{1}{2}$ подынтегральная функция $f(z) = \frac{1}{z^2 + 1}$ имеет особенность в точке $z_0 = i$ и поэтому не является аналитической. Для вычисления воспользуемся интегральной формулой Коши $f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} \frac{f(z)}{z - z_0} dz$:

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} \frac{1}{z^2 + 1} dz &= \int_{|z-i|=\frac{1}{2}} \frac{1}{z^2 + 1} dz = \int_{|z-i|=\frac{1}{2}} \frac{1}{(z-i)(z+i)} dz = \\ &= \int_{|z-i|=\frac{1}{2}} \frac{1}{(z-i)} \frac{(z+i)}{(z+i)} dz = 2\pi i \frac{1}{z_0 + i} \Big|_{z_0=i} = \pi. \end{aligned}$$

1.6. Ряды функции комплексного переменного

Теоретические вопросы:

- ряд Тейлора, круг сходимости;
- разложение элементарных функций комплексного переменного в ряд Тейлора;
- ряд Лорана, область сходимости;
- разложение функции комплексного переменного в ряд Лорана.

Примеры

Пример 1. Разложить функцию $f(z) = \frac{1}{(z-1)(z-2)}$ в ряд Лорана:

- 1) в круге $|z| < 1$ (рис. 3, а);
- 2) в кольце $1 < |z| < 2$ (рис. 3, б);
- 3) в кольце $2 < |z| < \infty$ (рис. 3, в).

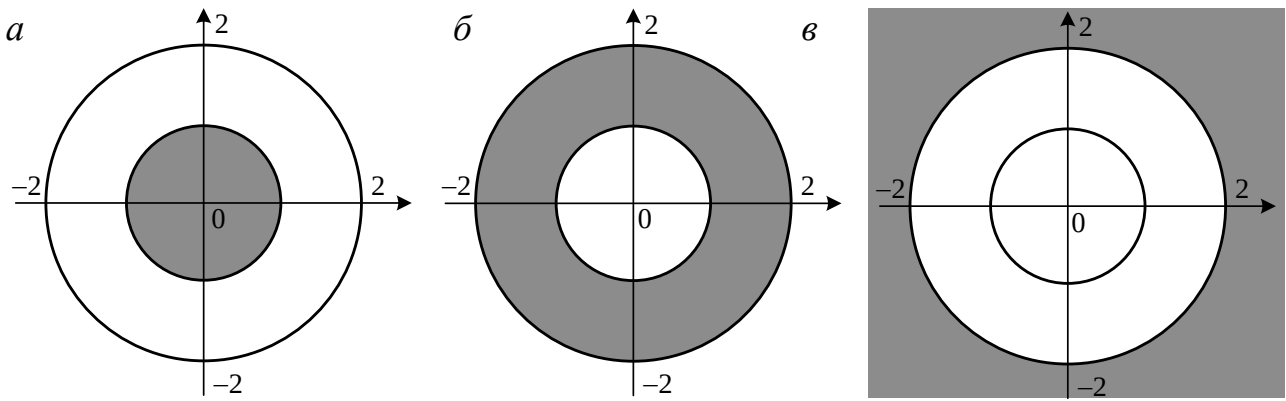


Рис. 3

Решение

Запишем $f(z) = \frac{1}{(z-1)(z-2)}$ в виде суммы простых дробей, так как данная функция представляет собой правильную дробь:

$$f(z) = \frac{1}{(z-1)(z-2)} = -\frac{1}{z-1} + \frac{1}{z-2}.$$

Функция $f(z)$ является аналитичной всюду, кроме точек $z_1 = 1$ и $z_2 = 2$, в частности: в круге $|z| < 1$, в кольце $1 < |z| < 2$ и в окрестности бесконечно удаленной точки $2 < |z| < \infty$ ($|z| > 2$).

1. В круге $|z| < 1$ ряд Лорана совпадает с рядом Тейлора для этой функции. Воспользуемся формулой суммы убывающей геометрической прогрессии:

$$\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n, \quad |z| < 1.$$

Откуда будем иметь

$$-\frac{1}{z-1} = \frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n; \quad \frac{1}{z-2} = -\frac{1}{2} \frac{1}{1-\frac{z}{2}} = -\frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z}{2}\right)^n, \quad \left|\frac{z}{2}\right| < 1.$$

Таким образом,

$$f(z) = \frac{1}{(z-1)(z-2)} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{2^{n+1}}\right) z^n, \quad |z| < 1.$$

2. Для аналитической в круге $|z| < 2$ функции $\frac{1}{(z-2)}$ в кольце $1 < |z| < 2$ справедливо разложение в ряд Тейлора: $\frac{1}{z-2} = -\frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z}{2}\right)^n$, приведенное в предыдущем пункте. А для функции $\frac{1}{1-z}$ будем иметь

$$\frac{1}{1-z} = -\frac{1}{z} \frac{1}{1-\frac{1}{z}} = -\frac{1}{z} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{z^n} = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{z^{n+1}} = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{z^n}, \quad |z| > 1.$$

Окончательно

$$f(z) = \frac{1}{(z-1)(z-2)} = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{2^{n+1}} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{z^n}, \quad 1 < |z| < 2.$$

3. При $|z| > 2$ (или $2 < |z| < \infty$, окрестность бесконечно удаленной точки) дробь $\frac{1}{1-z}$ имеет то же разложение, что и в предыдущем пункте, а дробь $\frac{1}{z-2}$ разлагается следующим образом:

$$\frac{1}{z-2} = \frac{1}{z} \frac{1}{1-\frac{2}{z}} = \frac{1}{z} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2}{z}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{z^{n+1}} = \frac{2^{n-1}}{z^n}.$$

Итак,

$$f(z) = \frac{1}{(z-1)(z-2)} = \sum_{n=0}^{\infty} (2^{n-1} - 1) \frac{1}{z^n}, \quad 2 < |z| < \infty.$$

Пример 2. Функцию $f(z) = \frac{1}{(z^2+4)}$ разложить в ряд Лорана в кольце $0 < |z-2i| < 4$.

Решение

Запишем $f(z)$ в виде суммы простых дробей:

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{(z^2+4)} = -\frac{i}{4(z-2i)} + \frac{1}{4(z+2i)} = -\frac{i}{4(z-2i)} + \frac{i}{4((z-2i)+4i)} = \\ &= -\frac{i}{4(z-2i)} + \frac{1}{16\left(1+\frac{(z-2i)}{4i}\right)}. \end{aligned}$$

Разложим в ряд Тейлора функцию $\frac{1}{16 \left(1 + \frac{(z-2i)}{4i} \right)}$, аналитическую в круге

$$|z - 2i| < 4.$$

Так как $\left| \frac{z-2i}{4i} \right| < 1$ в кольце $0 < |z - 2i| < 4$, то воспользуемся разложением

$$\frac{1}{1+z} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^n, \quad |z| < 1,$$

и получим

$$\frac{1}{16 \left(1 + \frac{(z-2i)}{4i} \right)} = \frac{1}{16} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{(z-2i)}{4i} \right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n}{4^{n+2}} (z-2i)^n.$$

Окончательно имеем

$$f(z) = \frac{1}{(z^2 + 4)} = -\frac{i}{4(z-2i)} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n}{4^{n+2}} (z-2i)^n, \quad 0 < |z - 2i| < 4.$$

1.7. Особые точки и вычеты

Теоретические вопросы:

- классификация изолированных особых точек;
- предел функции комплексного переменного в особых точках;
- изолированные особые точки в бесконечности;
- определение вычета;
- вычисление вычета относительно простого полюса, устранимой особой точки и существенно особой точки;
- вычисление вычета относительно полюса кратности k ;
- вычисление вычета в бесконечно удаленной точке;
- применение вычета к вычислению интегралов.

Примеры

Пример 1. Найти вычеты функций в указанных особых точках:

$$1) f(z) = \frac{\sin 2z}{(z-3)^4}, \quad z = 3;$$

$$2) f(z) = \frac{1 - \cos z}{z^2}, \quad z = 0;$$

$$3) f(z) = \frac{15z^3 - 11z^2 + 4z + 6}{2z^2(z^2 - 1)}, \quad z = \infty.$$

Решение

1. Определим характер особой точки $z=3$, $\lim_{z \rightarrow 3} \frac{\sin 2z}{(z-3)^4} = \infty$ – полюс кратности четыре, тогда по формуле

$$\operatorname{Res}_{z=z_0} f(z) = \frac{1}{(k-1)!} \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{d^{k-1}}{dz^{k-1}} \left[(z-z_0)^k f(z) \right]$$

получим

$$\operatorname{Res}_{z=3} f(z) = \frac{1}{(4-1)!} \lim_{z \rightarrow 3} \left[\frac{\sin 2z}{(z-3)^4} (z-3)^4 \right]''' = \frac{1}{6} \lim_{z \rightarrow 3} (-8 \cos 2z) = -\frac{4}{3} \cos 6.$$

2. Точка $z=0$ является устранимой особой точкой, так как $\lim_{z \rightarrow 0} \frac{1 - \cos z}{z^2} =$
 $= \lim_{z \rightarrow 0} \frac{\sin z}{2z} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{\cos z}{2} = \frac{1}{2}$ (по правилу Лопиталя).

Вычет устранимой особой точки равен нулю, т.е. $\operatorname{Res}_{z=0} f(z) = 0$.

3. Особыми точками функции $f(z) = \frac{15z^3 - 11z^2 + 4z + 6}{2z(z^2 - 1)}$ являются точки

$$z_1 = 0, z_2 = -1, z_3 = 1, z_4 = \infty.$$

Точки $z_1 = 0, z_2 = -1, z_3 = 1$ – полюсы первого порядка.

Найдем их вычеты:

$$\operatorname{Res}_{z=0} f(z) = \lim_{z \rightarrow 0} \left(\frac{15z^3 - 11z^2 + 4z + 6}{2z(z-1)(z+1)} z \right) = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{15z^3 - 11z^2 + 4z + 6}{2(z-1)(z+1)} = -3;$$

$$\operatorname{Res}_{z=1} f(z) = \lim_{z \rightarrow 1} \left(\frac{15z^3 - 11z^2 + 4z + 6}{2z(z-1)(z+1)} (z-1) \right) = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{15z^3 - 11z^2 + 4z + 6}{2z(z+1)} = \frac{7}{2};$$

$$\operatorname{Res}_{z=-1} f(z) = \lim_{z \rightarrow -1} \left(\frac{15z^3 - 11z^2 + 4z + 6}{2z(z-1)(z+1)} (z+1) \right) = \lim_{z \rightarrow -1} \frac{15z^3 - 11z^2 + 4z + 6}{2z(z-1)} = -6.$$

Согласно формуле

$$\operatorname{Res}_{z=z_1} f(z) + \dots + \operatorname{Res}_{z=z_k} f(z) + \operatorname{Res}_{z=\infty} f(z) = 0$$

будем иметь

$$\operatorname{Res}_{z_1=0} f(z) + \operatorname{Res}_{z_1=1} f(z) + \operatorname{Res}_{z_2=-1} f(z) + \operatorname{Res}_{z_3=\infty} f(z) = 0;$$

$$\operatorname{Res}_{z_3=\infty} f(z) = -\operatorname{Res}_{z_1=0} f(z) - \operatorname{Res}_{z_1=1} f(z) - \operatorname{Res}_{z_2=-1} f(z) = -5,5.$$

Пример 2. Вычислить интеграл с помощью вычетов: $\oint_{|z+2|=4} \frac{dz}{(z^2-1)(z+2)}$.

Решение

Подынтегральная функция имеет три особые точки, которые являются простыми полюсами: $z_1=1$; $z_2=-1$; $z_3=-2$. Все особые точки лежат внутри круга, ограниченного окружностью $|z+2|=4$. Тогда этот интеграл можно вычислить по формуле

$$\oint_{\Gamma} f(z) dz = 2\pi i \sum_{n=1}^k \operatorname{Res} f(z).$$

Тогда интеграл

$$\begin{aligned} \oint_{|z+2|=4} \frac{dz}{(z^2-1)(z+2)} &= \operatorname{Res}_{z_1=1} \frac{1}{(z-1)(z+1)(z+2)} + \\ &+ \operatorname{Res}_{z_2=-1} \frac{1}{(z-1)(z+1)(z+2)} + \operatorname{Res}_{z_3=-2} \frac{1}{(z-1)(z+1)(z+2)} = \\ &= \lim_{z \rightarrow 1} \frac{(z-1)}{(z-1)(z+1)(z+2)} + \lim_{z \rightarrow -1} \frac{(z+1)}{(z-1)(z+1)(z+2)} + \\ &+ \lim_{z \rightarrow -2} \frac{(z+2)}{(z-1)(z+1)(z+2)} = \frac{1}{6} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = 0. \end{aligned}$$

Пример 3. Вычислить интеграл с помощью вычетов: $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+4x+20}$.

Решение

Подынтегральная функция имеет две изолированные особые точки, не лежащие на действительной оси, — это точки $z_1=-2+4i$ и $z_2=-2-4i$. Только одна особая точка $z_1=-2+4i$ расположена выше действительной оси. Она является полюсом первого порядка. Точка $z=\infty$ является нулем второго порядка для функции $f(z)$.

Таким образом, все условия, чтобы применить формулу

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 2\pi i \sum_{n=1}^k \operatorname{Res} f(z), \text{ выполнены, поэтому получим}$$

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+4x+20} &= 2\pi i \operatorname{Res}_{z=-2+4i} \frac{1}{z^2+4z+20} = \\ &= 2\pi i \lim_{z \rightarrow -2+4i} \frac{(z+2-4i)}{(z+2-4i)(z+2+4i)} = 2\pi i \frac{1}{8i} = \frac{\pi}{4}. \end{aligned}$$

Пример 4. Вычислить интеграл с помощью вычетов: $\int_{1-i\infty}^{1+i\infty} \frac{e^{2z}}{(z-1)(z^2+4)} dz$.

Решение

Рассмотрим подынтегральную функцию $f(z) = \frac{e^{2z}}{(z-1)(z^2+4)}$. Проверим, удо-

влетворяет ли данная функция всем условиям, чтобы применить формулу для вычисления несобственного интеграла по мнимой оси $\int_{a-i\infty}^{a+i\infty} f(z) e^{tz} dz = 2\pi i \sum_{z=z_i}^n f(z) e^{tz}$,

а именно:

1) функция $f(z) = \frac{e^{2z}}{(z-1)(z^2+4)}$ имеет три особые точки $z_1=1$, $z_2=-2i$,

$z_3=2i$, которые являются простыми полюсами;

2) точка $z=\infty$ является нулем кратности два;

3) функция аналитична в области $Re z \geq 1$, где $a=1$.

В результате имеем

$$\begin{aligned} & \int_{1-i\infty}^{1+i\infty} \frac{e^{2z}}{(z-1)(z^2+4)} dz = \\ &= 2\pi i \left(\operatorname{Res}_{z_2=-2i} \frac{e^{2z}}{(z-1)(z-2i)(z+2i)} + \operatorname{Res}_{z_3=2i} \frac{e^{2z}}{(z-1)(z-2i)(z+2i)} \right) = \\ &= 2\pi i \left(\lim_{z_1=-2i} \frac{e^{2z}(z+2i)}{(z-1)(z-2i)(z+2i)} + \lim_{z_2=2i} \frac{e^{2z}(z-2i)}{(z-1)(z-2i)(z+2i)} \right) = \\ &= 2\pi i \left(\frac{e^{2(-2i)}}{(-2i-1)(-2i-2i)} + \frac{e^{2(2i)}}{(2i-1)(2i+2i)} \right) = \\ &= 2\pi i \left(\frac{e^{2(-2i)}}{(-2i-1)(-2i-2i)} + \frac{e^{2(2i)}}{(2i-1)(2i+2i)} \right) = 2\pi i \left(-\frac{e^{-4i}}{8-4i} - \frac{e^{4i}}{8+4i} \right) = \\ &= -2\pi i \left(\frac{(\cos 4 - i \sin 4)(8+4i) + (\cos 4 + i \sin 4)(8-4i)}{80} \right) = \\ &= -\frac{\pi i}{40} (16 \cos 4 + 8 \sin 4) = -\frac{\pi i}{5} (2 \cos 4 + \sin 4). \end{aligned}$$

2. ВАРИАНТЫ КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ

Вариант № 1

1. Вычислить z и изобразить на комплексной плоскости. Найти $\bar{z}$, $Re z$, $Im z$, $|z|$, $arg z$, $Arg z$:

а) $z = \frac{(i^3 - 3)^2}{2i - 1}$; б) $z = (2i - 2)^4$; в) $z = \sqrt[3]{3 - 5i}$.

2. Решить систему уравнений
$$\begin{cases} u + (1 + 2i)v = 2 - i, \\ u + (2 + i)w = i, \\ iu - 2v - iw = 1. \end{cases}$$

3. Определить и построить линии и области, удовлетворяющие уравнениям и неравенствам:

а) $|z - i| = 2|z + i|$; б) $Im \frac{z - 1}{z + i} = 0$; в) $arg(z - 1 + 2i) = \frac{\pi}{3}$.

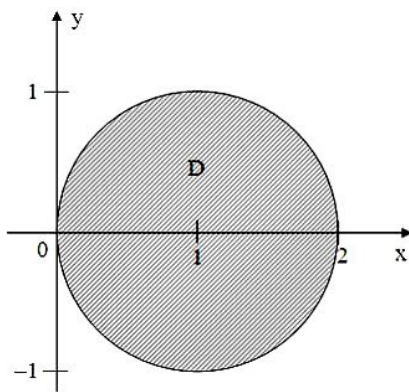


Рис. 4

4. Найти все точки $z = x + iy$ комплексной плоскости, принадлежащие множеству D (рис. 4).

5. Вычислить значения заданных функций в точке, если $a = 1$, $b = 2$:

а) $\ln(a + bi)$; г) $sh(-ai)$;
 б) $\ln\left(\frac{a}{b}i + 1\right)$; д) $(1 + bi)^{(1+ai)}$.
 в) $\cos(b - ai)$;

6. Определить, в каких точках комплексной плоскости указанные функции имеют производную, и вычислить производную в каждой из этих точек. Указать точки, в которых данные функции аналитические:

а) $\omega = z^2 + i|z|^2$; б) $\omega = \sin(iz + 1)$.

7. Найти аналитическую функцию по заданной действительной или мнимой части: $u = e^x \sin y$.

8. Интегрировать функции комплексного переменного:

а) $\int_{\Gamma} |z|^2 dz$; $\Gamma: |z| = 4$, $Im z \geq 0$; б) $\int_{|z|=2} e^{2z} \frac{1}{z} dz$; в) $\int_{2-i}^{2+2i} (2z^3 - z) dz$.

9. Разложить функцию в ряд Тейлора и ряд Лорана в окрестности точки z_0 . Разложить функцию в ряд Лорана в окрестности точек z_1 и $z = \infty$:

$f(z) = \frac{z}{z^2 - z - 2}$; $z_0 = 1$; $z_1 = -1$.

10. Определить вид особых точек функции и относительно каждой особой точки вычислить вычет: $f(z) = \frac{\sin \pi z}{(z-1)(z-2)^3}$.

11. Вычислить интеграл с помощью вычетов:

а) $\int_{|z|=3} \frac{dz}{(z-1)(z+2)(z-4)}$; б) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2+4)^3}$; в) $\int_{4-i\infty}^{4+i\infty} \frac{e^{3z}}{(z+1)(z^2+1)} dz$.

Вариант № 2

1. Вычислить z и изобразить на комплексной плоскости, найти $\bar{z}$, $Re z$, $Im z$, $|z|$, $arg z$, $Arg z$:

а) $z = \frac{(3+2i)^2}{2i-1}$; б) $z = (3-i)^3$; в) $z = \sqrt[4]{1-2i}$.

2. Решить систему уравнений
$$\begin{cases} 2iu + (1+i)v + w = -1+i, \\ -iu + (1-i)w = 1+3i, \\ u + (1-2i)v = 2. \end{cases}$$

3. Определить и построить линии и области, удовлетворяющие уравнениям и неравенствам:

а) $Re z^2 = 9$, б) $|z-2| = |z+i|$, в) $Im \frac{z-1}{z+i} \geq 0$.

4. Найти все точки $z = x + iy$ комплексной плоскости, принадлежащие множеству D , изображенному на рис. 5.

5. Вычислить значения заданных функций в точке, если $a = i$, $b = -2i$:

а) $\ln(a+bi)$; в) $\cos(b-ai)$;

б) $\ln\left(\frac{a}{b}i+1\right)$; г) $sh(-ai)$; д) $(1+bi)^{(1+ai)}$.

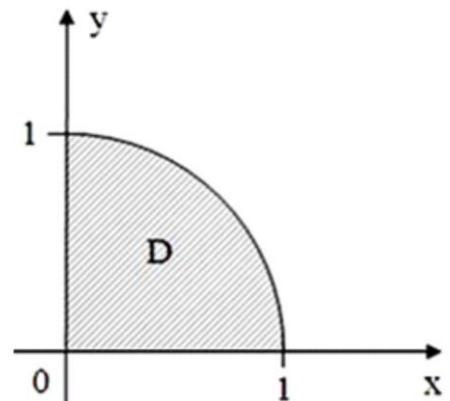


Рис. 5

6. Определить, в каких точках комплексной плоскости указанные функции имеют производную, и вычислить производную в каждой из этих точек. Указать точки, в которых данные функции аналитические:

а) $\omega = x^2 + iy^2$; б) $\omega = z^2 \cos z$.

7. Найти аналитическую функцию по заданной действительной или мнимой части: $v = e^{-2y} \cos 2x$.

8. Интегрирование функции комплексного переменного:

а) $\int_{\Gamma} |z| z dz$, Γ – ломаная с вершинами $z_1 = 0$, $z_2 = 1$, $z_3 = i$;

б) $\int_{|z|=3} \frac{\sin z}{(z-2)^3} dz$; в) $\int_0^{2+i} z \cos z dz$.

9. Разложить функцию в ряд Тейлора и ряд Лорана в окрестности точки z_0 . Разложить функцию в ряд Лорана в окрестности точек z_1 и $z = \infty$:

$f(z) = \frac{z}{z^2 - 3z - 4}$; $z_0 = 2$; $z_1 = -1$.

10. Определить вид особых точек функции и относительно каждой особой точки вычислить вычет: $f(z) = \frac{\sin z}{(z - \pi)(z + 1)^2}$.

11. Вычислить интеграл с помощью вычетов:

а) $\int_{|z|=4} \frac{z^2}{(z-3i)(z-i)} dz$; б) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(5+x^2)}$; в) $\int_{2-i\infty}^{2+i\infty} \frac{e^z}{(z-1)(z^2+1)} dz$.

Вариант № 3

1. Вычислить z и изобразить на комплексной плоскости, найти $\bar{z}$, $\operatorname{Re} z$, $\operatorname{Im} z$, $|z|$, $\arg z$, $\operatorname{Arg} z$.

а) $z = \frac{(-1-i^3)^2}{i-2}$; б) $z = (3i+2)^4$; в) $z = \sqrt[4]{3-i}$.

2. Решить систему уравнений $\begin{cases} 2u + (3+i)v = -4, \\ iu + (2-i)v = 3-i. \end{cases}$

3. Определить и построить линии и области, удовлетворяющие уравнениям и неравенствам:

а) $\arg(z-i) = \frac{\pi}{4}$; б) $\operatorname{Im} \frac{z-1}{z+1} = 0$; в) $|z| - |z-1| < 0$.

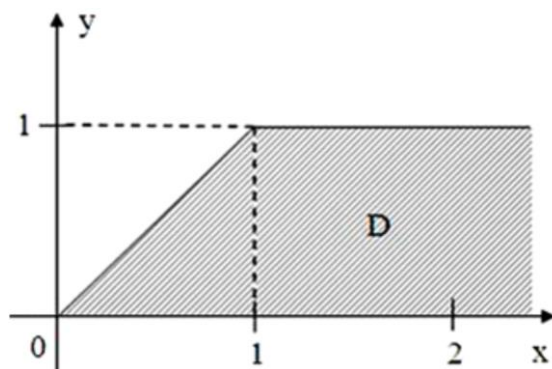


Рис. 6

4. Найти все точки $z = x + iy$ комплексной плоскости, принадлежащие множеству D , изображенному на рис. 6.

5. Вычислить значения заданных функций в точке, если $a = \sqrt{3}$, $b = -2$:

а) $\ln(a + bi)$; г) $\operatorname{sh}(-ai)$;

б) $\ln\left(\frac{a}{b}i + 1\right)$; д) $(1 + bi)^{(1+ai)}$.

в) $\cos(b - ai)$;

6. Определить, в каких точках комплексной плоскости указанные функции имеют производную, и вычислить производную в каждой из этих точек. Указать точки, в которых данные функции аналитические:

а) $\omega = ux + i(x^2 - y^2)$; б) $\omega = \sin(iz)$.

7. Найти аналитическую функцию по заданной действительной или мнимой части $v = x^3 - 3xy^2$.

8. Интегрировать функции комплексного переменного:

а) $\int_{\Gamma} \frac{\bar{z}}{z} dz$; $\Gamma: |z| = 3, \operatorname{Re} z \leq 0$; б) $\int_{|z-1|=2} \frac{dz}{z^2 - 5z + 4}$; в) $\int_{-i}^{2-i} e^{-z} dz$.

9. Разложить функцию в ряд Тейлора и ряд Лорана в окрестности точки z_0 . Разложить функцию в ряд Лорана в окрестности точек z_1 и $z = \infty$:

$f(z) = \frac{z-1}{z(z+1)}$; $z_0 = 2$; $z_1 = 0$.

10. Определить вид особых точек функции и относительно каждой особой точки вычислить вычет: $f(z) = \frac{1 - \cos z}{z(z-1)^2}$.

11. Вычислить интеграл с помощью вычетов:

а) $\int_{|z|=2} \frac{tgz}{(z-i)} dz$; б) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2 + 4x + 5)}$; в) $\int_{1-i\infty}^{1+i\infty} \frac{e^{2z}}{(z+1)(z^2 + 9)} dz$.

Вариант № 4

1. Вычислить z и изобразить на комплексной плоскости. Найти $\bar{z}$, $\operatorname{Re} z$, $\operatorname{Im} z$, $|z|$, $\arg z$, $\operatorname{Arg} z$:

а) $z = \frac{2+i}{(i^2-1)^2}$; б) $z = (1+i)^4$; в) $z = \sqrt[3]{i-4}$.

2. Решить систему уравнений
$$\begin{cases} 2iu + (1-i)v + w = -1 + i, \\ -iu + (1-i)w = 1, \\ iu + (1-2i)v = -2 \end{cases}$$

3. Определить и построить линии и области, удовлетворяющие уравнениям и неравенствам:

а) $|z+i| = |z-2|$; б) $\operatorname{Re} \frac{1}{z} = \frac{1}{3}$; в) $\frac{\pi}{6} \leq \arg(z+i) \leq \frac{\pi}{3}$.

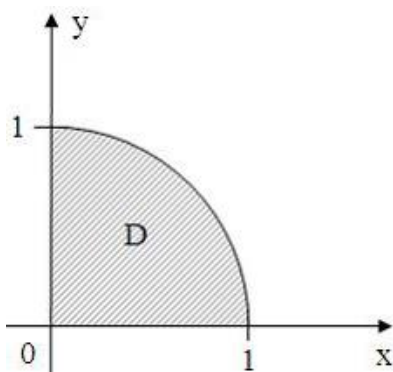


Рис. 7

4. Найти все точки $z = x + iy$ комплексной плоскости, принадлежащие множеству D , изображенному на рис. 7.

5. Вычислить значения функций в точке, если $a = -i$, $b = 3i$:

а) $\ln(a + bi)$; в) $\cos(b - ai)$;

б) $\ln\left(\frac{a}{b}i + 1\right)$; г) $\operatorname{sh}(-ai)$; д) $(1 + bi)^{(1+ai)}$.

6. Определить, в каких точках комплексной плоскости указанные функции имеют производную, и вычислить производную в каждой из этих точек. Указать точки, в которых данные функции аналитические:

а) $\omega = \frac{1}{z}$; б) $\omega = \frac{\cos z}{|z|^2}$.

7. Найти аналитическую функцию по заданной действительной или мнимой части: $u = 3x^2y - y^3$.

8. Интегрировать функции комплексного переменного:

а) $\int_{\Gamma} \operatorname{Im} z dz$, $\Gamma: |z|=1$, $\operatorname{Re} z \geq 0$; б) $\int_{|z-i|=2} \frac{dz}{(z-i)(z+2)}$; в) $\int_{2-i}^{3+i} (z^2 + 2e^z) dz$.

9. Разложить функцию в ряд Тейлора и ряд Лорана в окрестности точки z_0 . Разложить функцию в ряд Лорана в окрестности точек z_1 и $z = \infty$:

$f(z) = \frac{z^3}{(z-1)(z+2)}$; $z_0 = -2$; $z_1 = 1$.

10. Определить вид особых точек функции и относительно каждой особой точки вычислить вычет: $f(z) = \frac{z^2 - z}{z(z+i)^2}$.

11. Вычислить интеграл с помощью вычетов:

а) $\int_{|z-1|=2} \frac{e^z}{(z^2+1)} dz$; б) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2-2x+2)^2}$; в) $\int_{3-i\infty}^{3+i\infty} \frac{e^{2z}}{(z+i)(z^2-4)} dz$.

Вариант № 5

1. Вычислить z и изобразить на комплексной плоскости, найти $\bar{z}$, $\operatorname{Re} z$, $\operatorname{Im} z$, $|z|$, $\arg z$, $\operatorname{Arg} z$:

а) $z = \frac{(i^3 - 3)^2}{3i + 1}$; б) $z = (3i + 1)^4$; в) $z = \sqrt[3]{1-i}$.

2. Решить систему уравнений
$$\begin{cases} iu - (1+i)v = 2 + 3i, \\ (1-i)u + iv = 3 - 2i. \end{cases}$$

3. Определить и построить линии и области, удовлетворяющие уравнениям и неравенствам:

а) $\operatorname{Re}\left(\frac{z-1}{z+2}\right) = 0$; б) $|1+z| = 4|z+i|$; в) $\operatorname{Im} z^2 \leq 0$.

4. Найти все точки $z = x + iy$ комплексной плоскости, принадлежащие множеству D , изображенному на рис. 8.

5. Вычислить значения функций в точке, если $a = 2$, $b = -2$:

а) $\ln(a+bi)$; г) $\operatorname{sh}(-ai)$;

б) $\ln\left(\frac{a}{b}i + 1\right)$; д) $(1+bi)^{(1+ai)}$.

в) $\cos(b-ai)$;

6. Определить, в каких точках комплексной плоскости указанные функции имеют производную, и вычислить производную в каждой из этих точек. Указать точки, в которых данные функции аналитические:

а) $\omega = z^2 + i|z|^2$; б) $\omega = \sin(iz+i)$.

7. Найти аналитическую функцию по заданной действительной или мнимой части: $u = \frac{x^2 + y^2 - x}{x^2 + y^2}$.

8. Интегрировать функции комплексного переменного:

а) $\int_{\Gamma} |z|z dz$, Γ – ломаная с вершинами $z_1 = 0$, $z_2 = i$, $z_3 = 2-i$;

б) $\int_{|z+i|=3} \frac{\sin z}{z+i} dz$; в) $\int_{3i}^{4-i} \frac{z dz}{(z+1)^2}$.

9. Разложить функцию в ряд Тейлора и ряд Лорана в окрестности точки z_0 . Разложить функцию в ряд Лорана в окрестности точек z_1 и $z = \infty$:

$f(z) = \frac{z}{(z+i+1)(z-i)}$; $z_0 = 1$; $z_1 = i$.

10. Определить вид особых точек функции и относительно каждой особой точки вычислить вычет: $f(z) = \frac{(z+1)\sin z}{(z-2)(z-2i)^2}$.

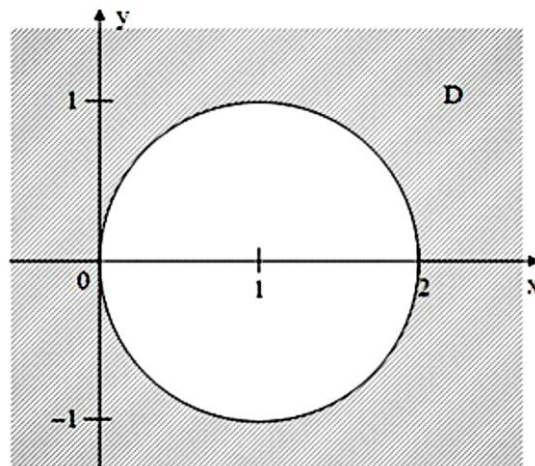


Рис. 8

11. Вычислить интеграл с помощью вычетов:

а) $\int_{|z|=\frac{3}{2}} \frac{z+2}{z(1-\cos z)} dz$; б) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^4+2)}$; в) $\int_{1-i\infty}^{1+i\infty} \frac{e^z}{(z-i)(z^2+2i)(z+4)} dz$.

Вариант № 6

1. Вычислить z и изобразить на комплексной плоскости, найти $\bar{z}$, $Re z$, $Im z$, $|z|$, $arg z$, $Arg z$:

а) $z = \frac{i^3 + 2}{(2-i)^2}$; б) $z = (3+i)^4$; в) $z = \sqrt[3]{2i+2}$.

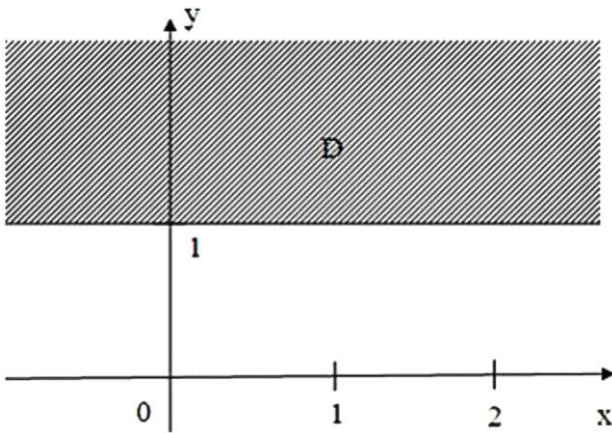


Рис. 9

множеству D , изображенному на рис. 9.

2. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} iu + (1+i)v + w = -1+i, \\ iu + (1-i)w = 1-3i, \\ u + (1+2i)v = 2 \end{cases}$$

3. Определить и построить линии и области, удовлетворяющие уравнениям и неравенствам:

а) $|z-3-i| = 4|z+1|$;

б) $Im \frac{z+1}{z+i} = 0$;

в) $arg \left(\frac{z}{x} \right) < 0$.

4. Найти все точки $z = x+iy$ комплексной плоскости, принадлежащие

5. Вычислить значения функций в точке, если $a = \frac{1}{i}$, $b = 2i$:

а) $\ln(a+bi)$; б) $\ln\left(\frac{a}{b}i+1\right)$; в) $\cos(b-ai)$; г) $sh(-ai)$; д) $(1+bi)^{(1+ai)}$.

6. Определить, в каких точках комплексной плоскости указанные функции имеют производную, и вычислить производную в каждой из этих точек. Указать точки, в которых данные функции аналитические:

а) $\omega = |z| + Re z$; б) $\omega = i e^{z+i}$.

7. Найти аналитическую функцию по заданной действительной или мнимой части: $u = -e^{-2y} + x$.

8. Интегрировать функции комплексного переменного:

а) $\int_{\Gamma} z^2 dz$; $\Gamma: |z|=3, \operatorname{Im} z > 0$; б) $\int_{|z|=5} \frac{dz}{(z-i)(z+6)}$; в) $\int_1^{2+3i} z e^{iz} dz$.

9. Разложить функцию в ряд Тейлора и ряд Лорана в окрестности точки z_0 . Разложить функцию в ряд Лорана в окрестности точек z_1 и $z = \infty$:

$$f(z) = \frac{z^2}{z^2 - z - 6}; \quad z_0 = 0; \quad z_1 = -2.$$

10. Определить вид особых точек функции и относительно каждой особой точки вычислить вычет: $f(z) = \frac{\sin z - 1}{(z + \pi)z^2 \left(z - \frac{\pi}{2}\right)}$.

11. Вычислить интеграл с помощью вычетов:

а) $\int_{|z|=4} \frac{z}{(z-2)(z+1)^2} dz$; б) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{(x^2+1)}{(x^2+2)(x^2+4)} dx$; в) $\int_{5-i\infty}^{5+i\infty} \frac{e^{3z}}{(z+2)(z^2+2)} dz$.

Вариант № 7

1. Вычислить z и изобразить на комплексной плоскости, найти $\bar{z}$, $\operatorname{Re} z$, $\operatorname{Im} z$, $|z|$, $\arg z$, $\operatorname{Arg} z$:

а) $z = \frac{i-2i^2}{(4+i)^2}$; б) $z = (i-1)^4$; в) $z = \sqrt[4]{1-i}$.

2. Решить систему уравнений
$$\begin{cases} (3-i)u - 2v = 2 + 3i, \\ -iu + (1+i)v = 2 + 2i. \end{cases}$$

3. Определить и построить линии и области, удовлетворяющие уравнениям и неравенствам:

а) $\operatorname{Re} \frac{2}{z} = \frac{1}{2}$; б) $\arg |z - 4i| = \frac{\pi}{4}$; в) $|z + 2i - 1| < \sqrt{7}$.

4. Найти все точки $z = x + iy$ комплексной плоскости, принадлежащие множеству D , изображенному на рис. 10.

5. Вычислить значения функций в точке, если $a = 3i$, $b = 2i$:

а) $\ln(a + bi)$; в) $\cos(b - ai)$;

б) $\ln\left(\frac{a}{b}i + 1\right)$; г) $\operatorname{sh}(-ai)$; д) $(1 + bi)^{(1+ai)}$.

6. Определить, в каких точках комплексной плоскости указанные функции имеют производную, и вычислить производную в каждой из этих точек. Указать точки, в которых данные функции аналитические:

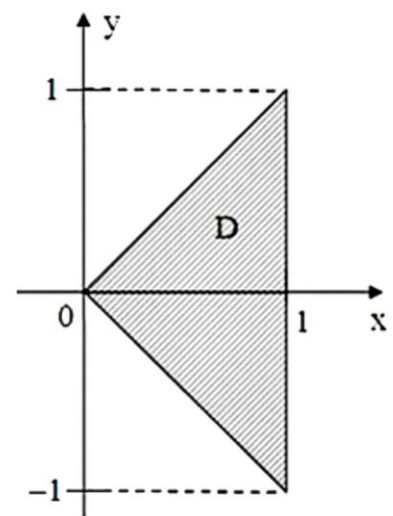


Рис. 10

а) $\omega = |z|z + 1$; б) $\omega = \frac{\cos(z+i)}{i}$.

7. Найти аналитическую функцию по заданной действительной или мнимой части: $u = 5x^2y + y^3$.

8. Интегрировать функции комплексного переменного:

а) $\int_{\Gamma} |z| dz$, Γ – отрезок прямой от $A(1;0)$ до $B(0;1)$;

б) $\int_{|z|=1} \frac{\operatorname{sh} z}{z \left(z + \frac{\pi}{4} i \right)} dz$; в) $\int_0^{2i} (z^2 + 3z - 1) dz$.

9. Разложить функцию в ряд Тейлора и ряд Лорана в окрестности точки z_0 . Разложить функцию в ряд Лорана в окрестности точек z_1 и $z = \infty$:

$f(z) = \frac{z+1}{z(1-z)}$; $z_0 = 2$; $z_1 = 1$.

10. Определить вид особых точек функции и относительно каждой особой точки вычислить вычет: $f(z) = \frac{z+1}{(z^2-1)z^2(z+i)}$.

11. Вычислить интеграл с помощью вычетов:

а) $\int_{|z|=\frac{3}{2}} \frac{dz}{(z^4-2)}$; б) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{(x^2-1)}{(x^4+4x^2+5)} dx$; в) $\int_{8-i\infty}^{8+i\infty} \frac{e^{4z}}{(z-4)(z^2+4)} dz$.

Вариант № 8

1. Вычислить z и изобразить на комплексной плоскости, найти $\bar{z}$, $\operatorname{Re} z$, $\operatorname{Im} z$, $|z|$, $\arg z$, $\operatorname{Arg} z$:

а) $z = \frac{(2+i)^2}{i-1}$; б) $z = (i+1)^3$; в) $z = \sqrt[3]{i-1}$.

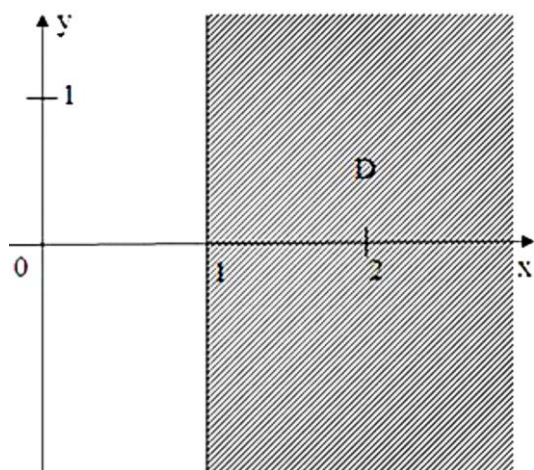


Рис. 11

2. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 3u - 2iv = 5 - i, \\ 2u - iv = 3 + i. \end{cases}$$

3. Определить и построить линии и области, удовлетворяющие уравнениям и неравенствам:

а) $|z-2+i| = |z+3|$; б) $\operatorname{Im} \frac{z}{z-i} = 2$;

в) $0 \leq \operatorname{Re} z^2 \leq 2$.

4. Найти все точки $z = x + iy$ комплексной плоскости, принадлежащие множеству D , изображенному на рис. 11.

5. Вычислить значения функций в точке, если $a = 1 + i$, $b = 2$:

а) $\ln(a + bi)$; б) $\ln\left(\frac{a}{b}i + 1\right)$; в) $\cos(b - ai)$; г) $\operatorname{sh}(-ai)$; д) $(1 + bi)^{(1+ai)}$.

6. Определить, в каких точках комплексной плоскости указанные функции имеют производную, и вычислить производную в каждой из этих точек. Указать точки, в которых данные функции аналитические:

а) $\omega = z^3(1 + i)$; б) $\omega = e^{2z} + \bar{z}$.

7. Найти аналитическую функцию по заданной действительной или мнимой части: $v = \frac{x}{x^2 + y^2}$.

8. Интегрирование функции комплексного переменного

а) $\int_{\Gamma} e^{\bar{z}} dz$, Γ – ломаная с вершинами $z_1 = 0, z_2 = 2i, z_3 = i - 1$;

б) $\int_{|z+i|=2} \frac{\sin z}{(z+i)^{10}} dz$; в) $\int_{-i}^{1+i} \frac{z dz}{\sqrt{1-z^2}}$.

9. Разложить функцию в ряд Тейлора и ряд Лорана в окрестности точки z_0 . Разложить функцию в ряд Лорана в окрестности точек z_1 и $z = \infty$:

$f(z) = \frac{z-1}{(z-i)(z+1)}$; $z_0 = 1$; $z_1 = i$.

10. Определить вид особых точек функции и относительно каждой особой точки вычислить вычет: $f(z) = \frac{\sin(z+1)}{(z+\pi)^2 z(z+1)}$.

11. Вычислить интеграл с помощью вычетов:

а) $\int_{|z|=3} \frac{dz}{(z^2-2)^2(z-4)^2}$; б) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{(x^2+2)}{(x^2+4)} dx$; в) $\int_{2-i\infty}^{2+i\infty} \frac{e^{3z}}{(z+2)(z^2+4)} dz$.

Вариант № 9

1. Вычислить z и изобразить на комплексной плоскости, найти $\bar{z}$, $\operatorname{Re} z$, $\operatorname{Im} z$, $|z|$, $\arg z$, $\operatorname{Arg} z$:

а) $z = \frac{1+2i}{(1-i)(2+i)}$; б) $z = (3i+1)^4$; в) $z = \sqrt[3]{1-i}$.

2. Решить систему уравнений $\begin{cases} 3u + iv = 5 - i, \\ 2iu - v = -3i. \end{cases}$

3. Определить и построить линии и области, удовлетворяющие уравнениям и неравенствам:

а) $\arg \frac{z}{i} = 0$; б) $\operatorname{Im} z + \operatorname{Re}(z-1) = 3$; в) $|z| = |\bar{z} - i|$.

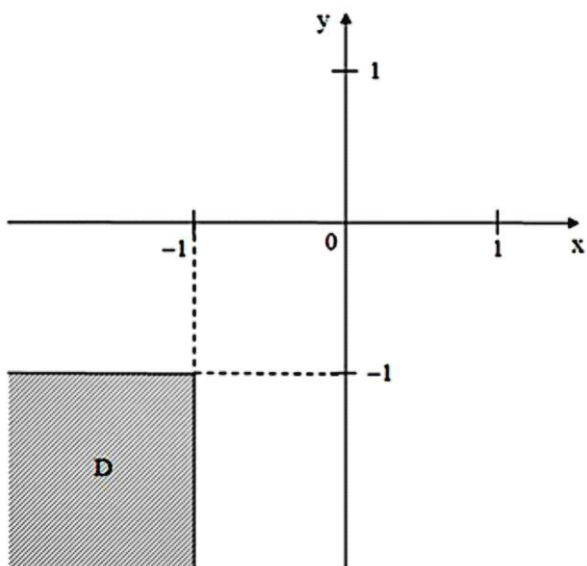


Рис. 12

4. Найти все точки $z = x + iy$ комплексной плоскости, принадлежащие множеству D , изображенному на рис. 12.

5. Вычислить значения функций в точке, если $a = i - 1$, $b = i + 2$:

а) $\ln(a + bi)$; г) $\operatorname{sh}(-ai)$;

б) $\ln\left(\frac{a}{b}i + 1\right)$; д) $(1 + bi)^{(1+ai)}$.

в) $\cos(b - ai)$;

6. Определить, в каких точках комплексной плоскости указанные функции имеют производную, и вычислить производную в каждой из этих точек. Указать точки, в которых данные функции аналитические:

а) $\omega = z^2(2 - i)$; б) $\omega = e^z z^{-1}$.

7. Найти аналитическую функцию по заданной действительной или мнимой части: $v = x + y - 3$.

8. Интегрировать функции комплексного переменного:

а) $\int_{\Gamma} z^2 dz$; $\Gamma: z = (3 + i)t, 0 \leq t \leq 1$; б) $\int_{|z+i|=3} \frac{z^4}{z-i} dz$; в) $\int_i^{2i} z^2 e^{z^3} dz$.

9. Разложить функцию в ряд Тейлора и ряд Лорана в окрестности точки z_0 . Разложить функцию в ряд Лорана в окрестности точек z_1 и $z = \infty$:

$f(z) = \frac{z+2}{z(z-3i)}$; $z_0 = 1$; $z_1 = 3i$.

10. Определить вид особых точек функции и относительно каждой особой

точки вычислить вычет: $f(z) = \frac{e^{z^2}}{(z+1)^2(z^2+2)}$.

11. Вычислить интеграл с помощью вычетов:

а) $\int_{|z|=2} \frac{z^3}{(z^4-1)} dz$; б) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos 2x}{(1+x^2)} dx$; в) $\int_{2-i\infty}^{2+i\infty} \frac{e^{2z}}{(z-1)(z^2+1)} dz$.

Вариант № 10

1. Вычислить z и изобразить на комплексной плоскости, найти $\bar{z}$, $\operatorname{Re} z$, $\operatorname{Im} z$, $|z|$, $\arg z$, $\operatorname{Arg} z$:

а) $z = \frac{(i-2)i^3}{(i-1)^2}$; б) $z = (3-i)^3$; в) $z = \sqrt[4]{2+i}$.

2. Решить систему уравнений
$$\begin{cases} 2iu - (2-i)v + w = i, \\ u - iw = 1 + 3i, \\ u + (1-i)v = 2. \end{cases}$$

3. Определить и построить линии и области, удовлетворяющие уравнениям и неравенствам:

а) $|z+i| - |z+2| = 0$; б) $\operatorname{Re} \frac{z}{z+i} = 0$; в) $\begin{cases} \operatorname{Re} z > 0, \\ \operatorname{Im} z^2 \leq 3. \end{cases}$

4. Найти все точки $z = x + iy$ комплексной плоскости, принадлежащие множеству D , изображенному на рис. 13.

5. Вычислить значения функций в точке, если $a = i$, $b = -i - 2$:

а) $\ln(a + bi)$; в) $\cos(b - ai)$;

б) $\ln\left(\frac{a}{b}i + 1\right)$; г) $\operatorname{sh}(-ai)$; д) $(1 + bi)^{(1+ai)}$.

6. Определить, в каких точках комплексной плоскости указанные функции имеют производную, и вычислить производную в каждой из этих точек. Указать точки, в которых данные функции аналитические:

а) $\omega = z^2 + \frac{1}{z}$; б) $\omega = \frac{e^z + 1}{z}$.

7. Найти аналитическую функцию по заданной действительной или мнимой части: $u = x^2 - y^2 + x$.

8. Интегрировать функции комплексного переменного:

а) $\int_{\Gamma} \operatorname{Im} z \, dz$, Γ – отрезок прямой от $A(0;0)$ до $B(2;1)$;

б) $\int_{|z|=1} \frac{z^2}{(z-2)(z+2i)} dz$; в) $\int_{2+i}^{3-i} e^{3z} dz$.

9. Разложить функцию в ряд Тейлора и ряд Лорана в окрестности точки z_0 . Разложить функцию в ряд Лорана в окрестности точек z_1 и $z = \infty$:

$f(z) = \frac{z-i}{(z+i)(z+2i)}$; $z_0 = 1$; $z_1 = -i$.

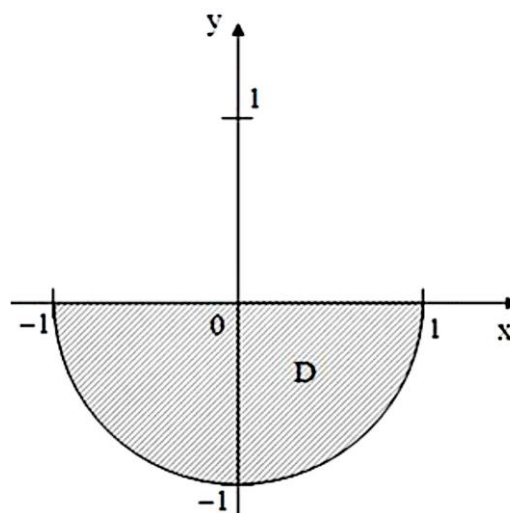


Рис. 13

10. Определить вид особых точек функции и относительно каждой особой точки вычислить вычет: $f(z) = \frac{\cos z}{\left(z - \frac{\pi}{2}\right)(z^2 + 3)z^2}$.

11. Вычислить интеграл с помощью вычетов:

а) $\int_{|z|=2} \frac{z^3 e^{\frac{1}{z}}}{(z+1)} dz$; б) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2 + 3)^2}$; в) $\int_{1-i\infty}^{1+i\infty} \frac{e^z}{(z+1)(z^2 + 4)} dz$.

Вариант № 11

1. Вычислить z и изобразить на комплексной плоскости, найти $\bar{z}$, $Re z$, $Im z$, $|z|$, $arg z$, $Arg z$:

а) $z = \frac{(i+i^2)^2}{1-2i}$; б) $z = (2+i)^4$; в) $z = \sqrt[3]{i-4}$.

2. Решить систему уравнений
$$\begin{cases} iu - (1-i)v + w = 0, \\ u - 2iw = 1 - 3i, \\ u + (1+i)v = -2 + i. \end{cases}$$

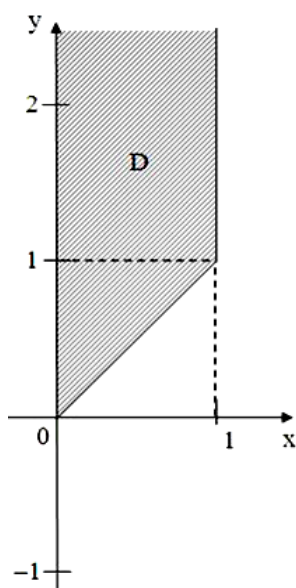


Рис. 14

3. Определить и построить линии и области, удовлетворяющие уравнениям и неравенствам:

а) $|z-3| = 2|z+1|$; б) $arg \frac{z-4i}{i} = 0$; в) $1 \leq Re(z-i) \leq 3$.

4. Найти все точки $z = x + iy$ комплексной плоскости, принадлежащие множеству D , изображенному на рис. 14.

5. Вычислить значения функций в точке, если $a = \frac{i+1}{i}$, $b = 3$:

а) $\ln(a+bi)$; в) $\cos(b-ai)$;

б) $\ln\left(\frac{a}{b}i + 1\right)$; г) $sh(-ai)$; д) $(1+bi)^{(1+ai)}$.

6. Определить, в каких точках комплексной плоскости указанные функции имеют производную, и вычислить производную в каждой из этих точек. Указать точки, в которых данные функции аналитические:

а) $\omega = (z+1)^2 + iz$; б) $\omega = \cos(z+i)$.

7. Найти аналитическую функцию по заданной действительной или мнимой части: $u = y^2 - x^2$.

8. Интегрировать функции комплексного переменного:

а) $\int_{\Gamma} (\bar{z} - \operatorname{Im} z) dz$, Γ – дуга $y = x^2$ от $A(0;0)$ до $B(1;1)$;

б) $\int_{|z-1|=\frac{1}{2}} \frac{e^z}{z(z-1)^2} dz$; в) $\int_{1-i}^{1-i} (z^3 - z) dz$.

9. Разложить функцию в ряд Тейлора и ряд Лорана в окрестности точки z_0 . Разложить функцию в ряд Лорана в окрестности точек z_1 и $z = \infty$:

$$f(z) = \frac{z^2}{(z+1)(z-i)}; \quad z_0 = 1; \quad z_1 = i.$$

10. Определить вид особых точек функции и относительно каждой особой точки вычислить вычет: $f(z) = \frac{z-i}{z^3(z^2+1)}$.

11. Вычислить интеграл с помощью вычетов:

а) $\int_{|z|=4} \frac{ze^{\frac{1}{3z}}}{(z+3)} dz$; б) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2+2)(x^2+1)}$; в) $\int_{3-i\infty}^{3+i\infty} \frac{e^{2z}}{(z-2)(z^2+1)} dz$.

Вариант № 12

1. Вычислить z и изобразить на комплексной плоскости, найти $\bar{z}$, $\operatorname{Re} z$, $\operatorname{Im} z$, $|z|$, $\arg z$, $\operatorname{Arg} z$:

а) $z = \frac{(i+3)(i-4)}{i^2-2i}$; б) $z = (3+3i)^3$; в) $z = \sqrt[4]{3+2i}$.

2. Решить систему уравнений
$$\begin{cases} iu - (1+i)v + w = i, \\ -iu - (1-i)w = 1-3i, \\ u + (1-i)v = 2. \end{cases}$$

3. Определить и построить линии и области, удовлетворяющие уравнениям и неравенствам:

а) $\frac{|z-3|}{|z|} = 4$; б) $\operatorname{Im} \frac{z}{z+i} = 1$; в) $\operatorname{Re} z \leq \operatorname{Im} \bar{z}$.

4. Найти все точки $z = x + iy$ комплексной плоскости, принадлежащие множеству D , изображенному на рис. 15.

5. Вычислить значения функций в точке, если $a=1, b=2-3i$:

а) $\ln(a+bi)$; в) $\cos(b-ai)$;

б) $\ln\left(\frac{a}{b}i+1\right)$; г) $\operatorname{sh}(-ai)$; д) $(1+bi)^{(1+ai)}$.

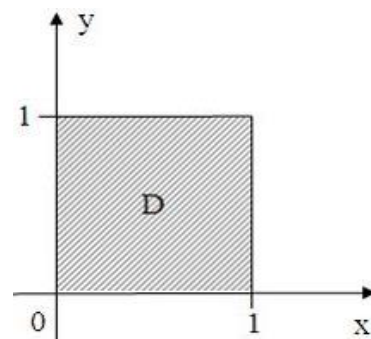


Рис. 15

6. Определить, в каких точках комплексной плоскости указанные функции имеют производную, и вычислить производную в каждой из этих точек. Указать точки, в которых данные функции аналитические:

а) $\omega = y^2 + ix^2$; б) $\omega = z \sin z$.

7. Найти аналитическую функцию по заданной действительной или мнимой части: $v = \arctg \frac{y}{x}, x > 0$.

8. Интегрировать функции комплексного переменного:

а) $\int_{\Gamma} \frac{dz}{Z}$, Γ – отрезок прямой от $z_1 = 3i$ до $z_2 = i - 1$;

б) $\int_{|z-3|=2} \frac{z^2}{(z-2)(z+i)} dz$; в) $\int_{2-i}^{2+3i} \frac{z}{z^4+1} dz$.

9. Разложить функцию в ряд Тейлора и ряд Лорана в окрестности точки z_0 . Разложить функцию в ряд Лорана в окрестности точек z_1 и $z = \infty$:

$f(z) = \frac{z^2+1}{z(z+3i)}$; $z_0 = 1$; $z_1 = 0$.

10. Определить вид особых точек функции и относительно каждой особой точки вычислить вычет: $f(z) = \frac{z^2+1}{(z-i)(z^2+2)z^2}$.

11. Вычислить интеграл с помощью вычетов:

а) $\int_{-2-i\infty}^{-2+i\infty} \frac{e^z}{(z+1)^3(z-i)} dz$; б) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2+3)^2}$; в) $\int_{2-i\infty}^{2+i\infty} \frac{e^{2z}}{(z+1)(z^2+3)} dz$.

Вариант № 13

1. Вычислить z и изобразить на комплексной плоскости, найти $\bar{z}$, $Re z$, $Im z$, $|z|$, $arg z$, $Arg z$:

а) $z = \frac{(i+3)^2}{i-3}$; б) $z = (4-i)^3$; в) $z = \sqrt[4]{2-i}$.

2. Решить систему уравнений
$$\begin{cases} iu - v + iw = 1 + i, \\ u + (2-i)w = -3i, \\ u + (1+i)v = 2. \end{cases}$$

3. Определить и построить линии и области, удовлетворяющие уравнениям и неравенствам:

а) $Re \frac{z+i}{z+2} = 0$; б) $arg \frac{z}{i} = 1$; в) $|z+2| = |z-i|$.

4. Найти все точки $z = x + iy$ комплексной плоскости, принадлежащие множеству D , изображенному на рис. 16.

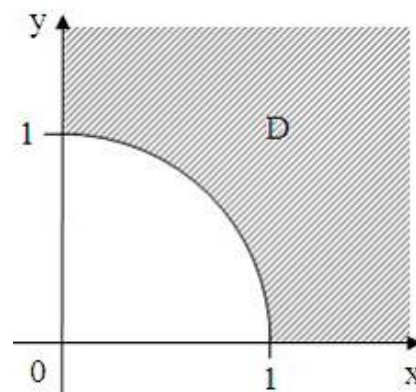


Рис. 16

5. Вычислить значения функций в точке, если

$$a = \frac{i}{i+2}, \quad b = 2:$$

а) $\ln(a + bi)$; в) $\cos(b - ai)$;

б) $\ln\left(\frac{a}{b}i + 1\right)$; г) $\operatorname{sh}(-ai)$; д) $(1 + bi)^{(1+ai)}$.

6. Определить, в каких точках комплексной плоскости указанные функции имеют производную, и вычислить производную в каждой из этих точек. Указать точки, в которых данные функции аналитические:

а) $\omega = x^2 + y^2 - ixy$; б) $\omega = \cos(iz + 1)$.

7. Найти аналитическую функцию по заданной действительной или мнимой части: $u = e^{-2x} \cos 2y$.

8. Интегрировать функции комплексного переменного:

а) $\int_{\Gamma} |z| \bar{z} dz$, Γ – дуга $y = \sqrt{x}$ от $A(1;1)$ до $B(4;2)$;

б) $\int_{|z+i|=2} \frac{z^3 + 1}{z + i} dz$; в) $\int_{i-2}^{4+i} \sqrt{z+3} dz$.

9. Разложить функцию в ряд Тейлора и ряд Лорана в окрестности точки z_0 . Разложить функцию в ряд Лорана в окрестности точек z_1 и $z = \infty$:

$$f(z) = \frac{z^3}{(z-1)(z-3)}; \quad z_0 = -1; \quad z_1 = 1.$$

10. Определить вид особых точек функции и относительно каждой особой точки вычислить вычет: $f(z) = \frac{\cos z}{\left(z + \frac{\pi}{2}\right) z^3 (z - i)}$.

11. Вычислить интеграл с помощью вычетов:

а) $\int_{|z|=1} \frac{z^2}{(3z^4 + 6)} dz$; б) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2 + 3)^2}$; в) $\int_{2-i\infty}^{2+i\infty} \frac{e^{4z}}{(z+2)(z-4i)(1+i)} dz$.

Вариант № 14

1. Вычислить z и изобразить на комплексной плоскости, найти $\bar{z}$, $Re z$, $Im z$, $|z|$, $arg z$, $Arg z$:

а) $z = \frac{(1-i)(2+2i)}{i-3}$; б) $z = (1-i)^4$; в) $z = \sqrt[3]{\frac{1}{i-1}}$.

2. Решить систему уравнений
$$\begin{cases} (1-i)v + w = -1+i, \\ -iu + (1-i)w = 3, \\ u + (1-2i)v = -1+5i. \end{cases}$$

3. Определить и построить линии и области, удовлетворяющие уравнениям и неравенствам:

а) $|z-3+2i| = \sqrt{2}$; б) $Im \frac{z}{2i} = 0$; в) $arg(\overline{z+i}) = \frac{\pi}{3}$.

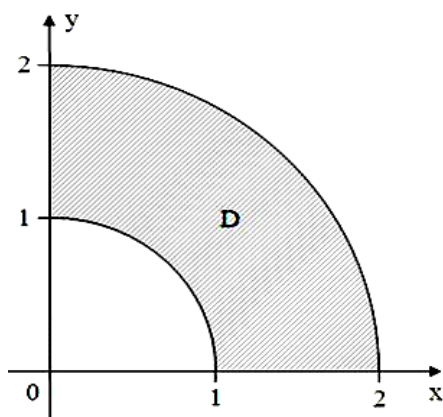


Рис. 17

4. Найти все точки $z = x + iy$ комплексной плоскости, принадлежащие множеству D , изображенному на рис. 17.

5. Вычислить значения функций в точке, если $a = -i$, $b = 1 + 2i$:

а) $\ln(a + bi)$; в) $\cos(b - ai)$;

б) $\ln\left(\frac{a}{b}i + 1\right)$; г) $sh(-ai)$; д) $(1 + bi)^{(1+ai)}$.

6. Определить, в каких точках комплексной плоскости указанные функции имеют производную, и вычислить производную в каждой из этих точек.

Указать точки, в которых данные функции аналитические:

а) $\omega = \frac{1}{\bar{z}}$; б) $\omega = \frac{y \cdot \sin z}{1+i}$.

7. Найти аналитическую функцию по заданной действительной или мнимой части: $v = xy + 1$.

8. Интегрировать функции комплексного переменного:

а) $\int_{\Gamma} (z + 3Re z) dz$, $\Gamma: z = (2-i)t, 1 \leq t \leq 2$; б) $\int_{|z|=2} \frac{e^{2z}}{z} dz$; в) $\int_{\frac{1}{2}i}^{2-i} \sin^2 z dz$.

9. Разложить функцию в ряд Тейлора и ряд Лорана в окрестности точки z_0 . Разложить функцию в ряд Лорана в окрестности точек z_1 и $z = \infty$:

$f(z) = \frac{z}{z^2 + 4}$; $z_0 = 1$; $z_1 = 2i$.

10. Определить вид особых точек функции и относительно каждой особой

точки вычислить вычет: $f(z) = \frac{e^{-z} - 1}{z(z^2 + 4)(z - i)^2}$.

11. Вычислить интеграл с помощью вычетов:

а) $\int_{|z|=3} \frac{z}{(z-1)^3(z^5-4)} dz$; б) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos 2x}{(5+x^2)} dx$; в) $\int_{1-i\infty}^{1+i\infty} \frac{e^z}{(z-2)(z+i)(z-i)} dz$.

Вариант № 15

1. Вычислить z и изобразить на комплексной плоскости, найти $\bar{z}$, $Re z$, $Im z$, $|z|$, $arg z$, $Arg z$:

а) $z = \frac{(3+2i)i}{i-4}$; б) $z = (3+i)^3$; в) $z = \sqrt[3]{\frac{2}{i+2}}$.

2. Решить систему уравнений
$$\begin{cases} iu - (2-i)v - w = 1-i, \\ u + (1+i)w = 1+2i, \\ u + (1+2i)v = 2i. \end{cases}$$

3. Определить и построить линии и области, удовлетворяющие уравнениям и неравенствам:

а) $arg \frac{z-i}{3i} = \frac{\pi}{6}$; б) $Re \frac{z}{i} = 1$; в) $\frac{|z-i|}{|z+i|} = 2$.

4. Найти все точки $z = x + iy$ комплексной плоскости, принадлежащие множеству D , изображенному на рис. 18.

5. Вычислить значения функций в точке, если $a = i - 1$, $b = i + 1$:

а) $\ln(a + bi)$; в) $\cos(b - ai)$;

б) $\ln\left(\frac{a}{b}i + 1\right)$; г) $sh(-ai)$; д) $(1 + bi)^{(1+ai)}$.

6. Определить, в каких точках комплексной плоскости указанные функции имеют производную, и вычислить производную в каждой из этих точек. Указать точки, в которых данные функции аналитические:

а) $\omega = z + Re \bar{z}$; б) $\omega = (i+1)e^{z-i}$.

7. Найти аналитическую функцию по заданной действительной или мнимой части: $v = \ln(x^2 + y^2)$.

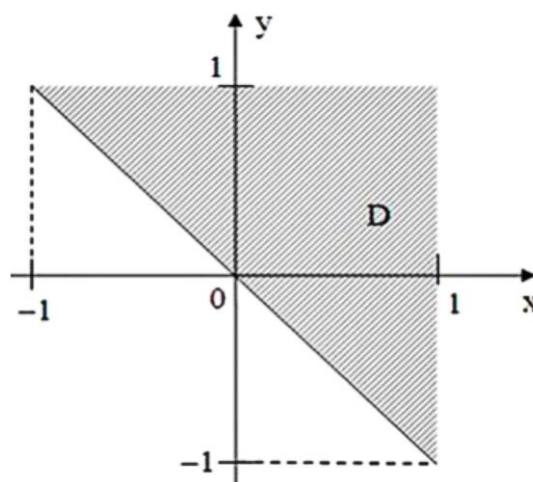


Рис. 18

8. Интегрировать функции комплексного переменного:

а) $\int_{\Gamma} |z| \bar{z} dz$, Γ – дуга $y = 2x^2$ от $A(1;2)$ до $B(-1;2)$;

б) $\int_{|z|=3} \frac{\sin(z+1)}{z+1} dz$; в) $\int_I^{3-i} \cos(z+1) dz$.

9. Разложить функцию в ряд Тейлора и ряд Лорана в окрестности точки z_0 . Разложить функцию в ряд Лорана в окрестности точек z_1 и $z = \infty$:

$f(z) = \frac{z}{z^2 + 2}$; $z_0 = 2$; $z_1 = \sqrt{2}i$.

10. Определить вид особых точек функции и относительно каждой особой точки вычислить вычет: $f(z) = \frac{\cos z + 1}{(z - \pi)z^2(z^2 + 1)}$.

11. Вычислить интеграл с помощью вычетов:

а) $\int_{|z-2i|=4} \frac{dz}{(e^z - 1)(z - 2i)}$; б) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{(x^2 + 2)^2} dx$;

в) $\int_{3-i\infty}^{3+i\infty} \frac{e^{2z}}{(z+1)(z+i)(z-2i)} dz$.

Вариант № 16

1. Вычислить z и изобразить на комплексной плоскости, найти $\bar{z}$, $\operatorname{Re} z$, $\operatorname{Im} z$, $|z|$, $\arg z$, $\operatorname{Arg} z$:

а) $z = \frac{i(i+4)}{(i+1)^2}$; б) $z = (4+i)^3$; в) $z = \sqrt[3]{3+4i}$.

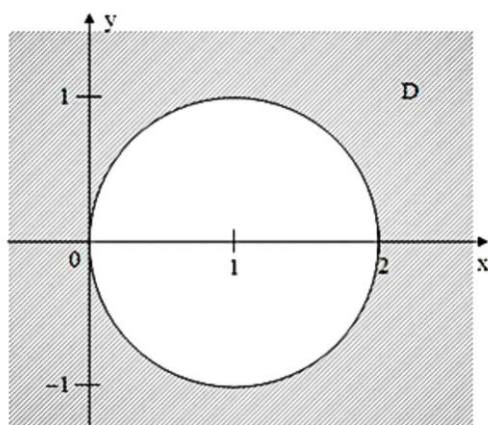


Рис. 19

2. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} iu - w = 1, \\ u + (1+i)v - iw = i, \\ u + (1+2i)v = -2i. \end{cases}$$

3. Определить и построить линии и области, удовлетворяющие уравнениям и неравенствам:

а) $|z - i| = 1 + |z|$;

б) $\arg(z + 2 - i) \geq \frac{\pi}{4}$; в) $0 \leq \operatorname{Im}(z - 1) \leq 3$.

4. Найти все точки $z = x + iy$ комплексной плоскости, принадлежащие множеству D , изображенному на рис. 19.

5. Вычислить значения функций в точке, если $a = i, b = \frac{i+2}{i-1}$:

а) $\ln(a+bi)$; б) $\ln\left(\frac{a}{b}i+1\right)$; в) $\cos(b-ai)$; г) $\operatorname{sh}(-ai)$; д) $(1+bi)^{(1+ai)}$.

6. Определить, в каких точках комплексной плоскости указанные функции имеют производную, и вычислить производную в каждой из этих точек. Указать точки, в которых данные функции аналитические:

а) $\omega = (z+1)^2 - z - i$; б) $\omega = 2ie^{z-i+1}$.

7. Найти аналитическую функцию по заданной действительной или мнимой части: $u = 2^y \sin x$.

8. Интегрировать функции комплексного переменного:

а) $\int_{\Gamma} z^3 dz$, $\Gamma: z = 2 - 3i + ti, 0 \leq t \leq 2$; б) $\int_{|z|=\frac{3}{2}} \frac{dz}{(z-1^2)(z-2)}$; в) $\int_{2i}^{3+i} \sin(3z-i) dz$.

9. Разложить функцию в ряд Тейлора и ряд Лорана в окрестности точки z_0 . Разложить функцию в ряд Лорана в окрестности точек z_1 и $z = \infty$:

$f(z) = \frac{z^2}{(z+i)(z+1)}$; $z_0 = 1$; $z_1 = -i$.

10. Определить вид особых точек функции и относительно каждой особой точки вычислить вычет: $f(z) = \frac{\operatorname{tg} z}{z(z+i)^2(z^2-1)}$.

11. Вычислить интеграл с помощью вычетов:

а) $\int_{|z-3i|=2} \frac{e^{3z}}{(z-4i)z} dz$; б) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \cos x}{(x^2-2x+10)} dx$; в) $\int_{3-i\infty}^{3+i\infty} \frac{e^{3z}}{(z-1)(z-i)(z+2i)} dz$.

Вариант № 17

1. Вычислить z и изобразить на комплексной плоскости, найти $\bar{z}$, $\operatorname{Re} z$, $\operatorname{Im} z$, $|z|$, $\arg z$, $\operatorname{Arg} z$:

а) $z = \frac{4(i+3)}{i+2}$; б) $z = 2(i+3)^4$; в) $z = \sqrt[3]{\frac{3}{i+2}}$.

2. Решить систему уравнений
$$\begin{cases} u^2 - 2v = -2 - 2i, \\ u + v = i. \end{cases}$$

3. Определить и построить линии и области, удовлетворяющие уравнениям и неравенствам:

а) $\operatorname{Im} \frac{z}{i+1} = \operatorname{Re} z$; б) $|z-i| = |z+1|$; в) $\frac{\pi}{6} \leq \arg \frac{\bar{z}}{i} \leq \frac{\pi}{3}$.

4. Найти все точки $z = x + iy$ комплексной плоскости, принадлежащие множеству D , изображенному на рис. 20.

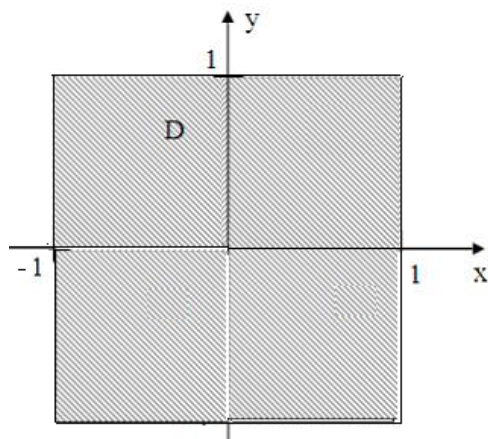


Рис. 20

5. Вычислить значения функций в точке, если $a = \frac{i}{2}, b = \frac{2}{i}$:

а) $\ln(a + bi)$; в) $\cos(b - ai)$;

б) $\ln\left(\frac{a}{b}i + 1\right)$; г) $\operatorname{sh}(-ai)$; д) $(1 + bi)^{(1+ai)}$.

6. Определить, в каких точках комплексной плоскости указанные функции имеют производную, и вычислить производную в каждой из этих точек. Указать точки, в которых данные функции аналитические:

а) $\omega = z\bar{z} + i$; б) $\omega = \sin\frac{(z-i)}{i}$.

7. Найти аналитическую функцию по заданной действительной или мнимой части: $u = e^y \cos x$.

8. Интегрировать функции комплексного переменного:

а) $\int_{\Gamma} \frac{\bar{z}}{z} dz$, $\Gamma: z = 3 + it, 1 \leq t \leq 3$; б) $\int_{|z-2i|=1} \frac{dz}{(z-i)^2(z+2i)}$; в) $\int_{3-i}^{2i} 2^{z+1} dz$.

9. Разложить функцию в ряд Тейлора и ряд Лорана в окрестности точки z_0 . Разложить функцию в ряд Лорана в окрестности точек z_1 и $z = \infty$:

$$f(z) = \frac{z}{(z+1)(z-4)}; \quad z_0 = 0; \quad z_1 = -1.$$

10. Определить вид особых точек функции и относительно каждой особой

точки вычислить вычет: $f(z) = \frac{z^2 - 2}{(z + \sqrt{2})z^3(z - i)}$.

11. Вычислить интеграл с помощью вычетов:

а) $\int_{|z|=2} \frac{\sin^2 z}{(z-1-2i)(z+1)} dz$; б) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{(x^2+3)}{(x^4+2)} dx$; в) $\int_{1-i\infty}^{1+i\infty} \frac{e^z}{(z+2)(z+i)(z-3i)} dz$.

Вариант № 18

1. Вычислить z и изобразить на комплексной плоскости, найти $\bar{z}$, $\operatorname{Re} z$, $\operatorname{Im} z$, $|z|$, $\arg z$, $\operatorname{Arg} z$:

а) $z = \frac{(2+i)(2+3i)}{i(i-1)}$; б) $z = (3+2i)^3$; в) $z = \sqrt[3]{\frac{1}{2i+1}}$.

2. Решить систему уравнений
$$\begin{cases} 2iu - (1+i)v + w = -1+i, \\ -iu + (1-i)w = 1+3i, \\ u + (1-2i)v = 2. \end{cases}$$

3. Определить и построить линии и области, удовлетворяющие уравнениям и неравенствам:

а) $\arg(z-2i) = \frac{\pi}{4}$; б) $\frac{|z|}{|z-3|} = 2$; в) $\operatorname{Re} z \leq \operatorname{Im}(z-1)$.

4. Найти все точки $z = x + iy$ комплексной плоскости, принадлежащие множеству D , изображенному на рис. 21.

5. Вычислить значения функций в точке, если $a = \frac{3}{i-1}$, $b = i+2$:

а) $\ln(a+bi)$; в) $\cos(b-ai)$;

б) $\ln\left(\frac{a}{b}i+1\right)$; г) $\operatorname{sh}(-ai)$; д) $(1+bi)^{(1+ai)}$.

6. Определить, в каких точках комплексной плоскости указанные функции имеют производную, и вычислить производную в каждой из этих точек. Указать точки, в которых данные функции аналитические:

а) $\omega = z^2(1+2i)$; б) $\omega = e^{2\bar{z}} + z$.

7. Найти аналитическую функцию по заданной действительной или мнимой части: $v = e^{-x} \sin 2y$.

8. Интегрировать функции комплексного переменного:

а) $\int_{\Gamma} \operatorname{Re} z dz$; $\Gamma: |z-i|=1, \operatorname{Re} z > 0$; б) $\int \frac{e^z}{|z-1|=\frac{1}{2}} z(1-z)^3 dz$; в) $\int_i^{3+i} \frac{dz}{2+z^2}$.

9. Разложить функцию в ряд Тейлора и ряд Лорана в окрестности точки z_0 . Разложить функцию в ряд Лорана в окрестности точек z_1 и $z = \infty$:

$f(z) = \frac{z-i}{(z^2+9)}$; $z_0 = 1$; $z_1 = 3i$.

Определить вид особых точек функции и относительно каждой особой

10. точки вычислить вычет: $f(z) = \frac{e^{z-1} - 1}{(z-1)(z+1)^3 z}$.

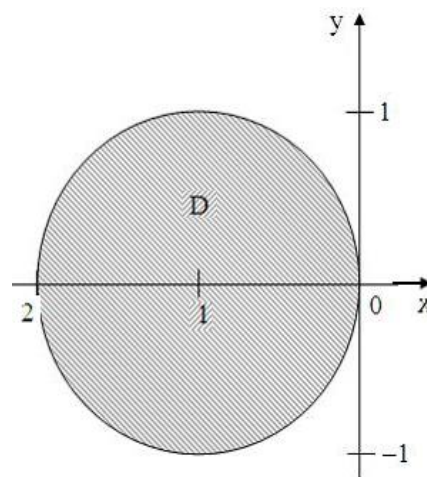


Рис. 21

11. Вычислить интеграл с помощью вычетов:

а) $\int_{|z|=6} \frac{e^z}{(z^2 + 4)} dz$; б) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(2 + x^2)^3}$; в) $\int_{1-i\infty}^{1+i\infty} \frac{e^z}{(z^2 + 2)\left(z - \frac{1}{2}\right)} dz$.

Вариант № 19

1. Вычислить z и изобразить на комплексной плоскости, найти $\bar{z}$, $Re z$, $Im z$, $|z|$, $arg z$, $Arg z$:

а) $z = \frac{(3+2i)i}{i-4}$; б) $z = (3-2i)^4$; в) $z = \sqrt[3]{\frac{i}{2+i}}$.

2. Решить систему уравнений
$$\begin{cases} (1+i)v + w = -1+i, \\ -iu + v(1-i) - w = 1+3i, \\ u + (1-2i)v = 2i. \end{cases}$$

3. Определить и построить линии и области, удовлетворяющие уравнениям и неравенствам:

а) $|z+2| = |z+1-2i|$; б) $Im \frac{z}{2+i} = 2$; в) $arg \frac{z+i}{i} \leq \frac{\pi}{4}$.

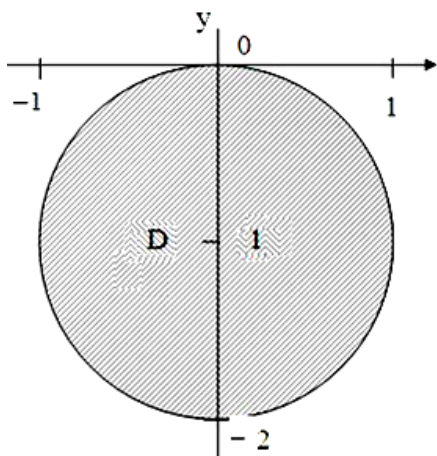


Рис. 22

4. Найти все точки $z = x + iy$ комплексной плоскости, принадлежащие множеству D , изображенному на рис. 22.

5. Вычислить значения функций в точке, если $a = 2i$, $b = 1 - 2i$:

а) $\ln(a + bi)$; в) $\cos(b - ai)$;

б) $\ln\left(\frac{a}{b}i + 1\right)$; г) $sh(-ai)$; д) $(1 + bi)^{(1+ai)}$.

6. Определить, в каких точках комплексной плоскости указанные функции имеют производную, и вычислить производную в каждой из этих точек. Указать точки, в которых данные функции

аналитические:

а) $\omega = z^3(i-2)$; б) $\omega = e^{\bar{z}+1} \bar{z}$.

7. Найти аналитическую функцию по заданной действительной или мнимой части: $u = \frac{x^2 - y^2 + x}{x^2 - y^2}$.

8. Интегрировать функции комплексного переменного:

а) $\int_{\Gamma} |z| dz$, Γ — дуга $y = 2x^2$ от $A(1;1)$ до $B(2;4)$; б) $\int_{|z|=5} \frac{\cos z}{z^2 - \pi^2} dz$; в) $\int_{i+1}^{1-i} \frac{\ln z}{z} dz$.

9. Разложить функцию в ряд Тейлора и ряд Лорана в окрестности точки z_0 . Разложить функцию в ряд Лорана в окрестности точек z_1 и $z = \infty$:

$$f(z) = \frac{z}{3z^2 - z + 4}; \quad z_0 = 1; \quad z_1 = -1.$$

10. Определить вид особых точек функции и относительно каждой особой точки вычислить вычет: $f(z) = \frac{\cos^2 z}{\left(z - \frac{\pi}{2}\right)(z+i)^3(z-i)}.$

11. Вычислить интеграл с помощью вычетов:

$$\text{а) } \int_{|z|=7} \frac{\cos z}{(z^2 + 9)} dz; \quad \text{б) } \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos 3x}{(3 + x^2)} dx; \quad \text{в) } \int_{2-i\infty}^{2+i\infty} \frac{e^z}{(z^2 + 9)(z + 4)} dz.$$

Вариант № 20

1. Вычислить z и изобразить на комплексной плоскости, найти $\bar{z}$, $\operatorname{Re} z$, $\operatorname{Im} z$, $|z|$, $\arg z$, $\operatorname{Arg} z$:

$$\text{а) } z = \frac{(i-4)i}{2i-1}; \quad \text{б) } z = \left(\frac{4}{i-3}\right)^4; \quad \text{в) } z = \sqrt[3]{4+2i}.$$

$$2. \text{ Решить систему уравнений } \begin{cases} iv - w = -1 + i, \\ (1+i)u + iv - w = 1 + 2i, \\ u + (1+2i)v = 2i. \end{cases}$$

3. Определить и построить линии и области, удовлетворяющие уравнениям и неравенствам:

$$\text{а) } \operatorname{Im} z + \operatorname{Re}(z+i) = 2; \quad \text{б) } \arg \frac{2}{z} = \frac{\pi}{3};$$

$$\text{в) } |z-i| \leq |z+3|.$$

4. Найти все точки $z = x + iy$ комплексной плоскости, принадлежащие множеству D , изображенному на рис. 23.

5. Вычислить значения функций в точке, если $a = i - 2$, $b = 2$:

$$\text{а) } \ln(a+bi) \quad \text{в) } \cos(b-ai);$$

$$\text{б) } \ln\left(\frac{a}{b}i + 1\right); \quad \text{г) } \operatorname{sh}(-ai); \quad \text{д) } (1+bi)^{(1+ai)}.$$

6. Определить, в каких точках комплексной плоскости указанные функции имеют производную, и вычислить производную в каждой из этих точек. Указать точки, в которых данные функции аналитические:

$$\text{а) } \omega = \bar{z}^2 + \frac{1}{z}; \quad \text{б) } \omega = \frac{e^z + i}{\bar{z}}.$$

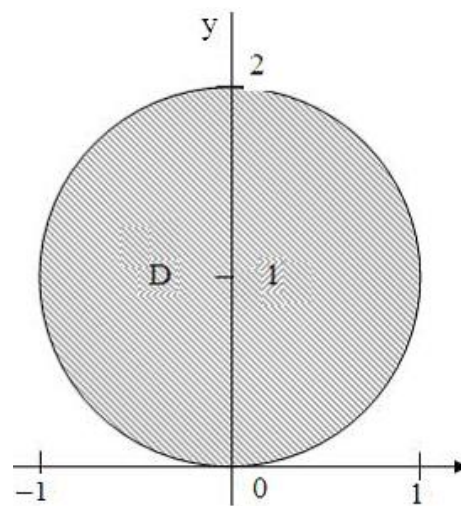


Рис. 23

7. Найти аналитическую функцию по заданной действительной или мнимой части: $v = e^x \sin y$.

8. Интегрировать функции комплексного переменного:

а) $\int_{\Gamma} \frac{\bar{z}}{z} dz$, Γ – отрезок прямой от $z_1 = 2 - i$ до $z_2 = 1$;

б) $\int_{z=\frac{1}{2}} \frac{1}{z(z-1)} dz$; в) $\int_{2i}^{3-i} \cos^2 z dz$.

9. Разложить функцию в ряд Тейлора и ряд Лорана в окрестности точки z_0 . Разложить функцию в ряд Лорана в окрестности точек z_1 и $z = \infty$:

$$f(z) = \frac{z}{z^2 + 2z - 14}; z_0 = 0; z_1 = 3.$$

10. Определить вид особых точек функции и относительно каждой особой точки вычислить вычет: $f(z) = \frac{z - 2i}{(z^2 + 4)z^3(z - i)}$.

11. Вычислить интеграл с помощью вычетов:

а) $\int_{|z+1|=2} \frac{\sin z}{(z+1)^3} dz$; б) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{(4+x^2)^2} dx$; в) $\int_{7-i\infty}^{7+i\infty} \frac{e^{2z}}{(z^2+6)(z-5)} dz$.

Вариант № 21

1. Вычислить z и изобразить на комплексной плоскости, найти $\bar{z}$, $Re z$, $Im z$, $|z|$, $arg z$, $Arg z$:

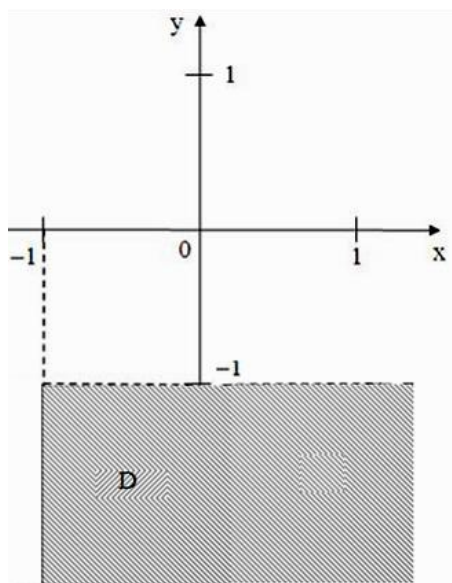


Рис. 24

а) $z = \frac{i-2}{(i+2)(i-1)}$; б) $z = \left(\frac{3}{i+2}\right)^4$; в)

$z = \sqrt[3]{1+2i}$.

2. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} u - iv - w = -1 + i, \\ (1+i)u + iv = 1 + 2i, \\ u + (1+2i)w = 2i. \end{cases}$$

3. Определить и построить линии и области, удовлетворяющие уравнениям и неравенствам:

а) $Re(z^2 - 1) = 2$; б) $|\bar{z} - 2i + 1| = 1$;

в) $\frac{Re z}{Im(z+i)} \leq 1$.

4. Найти все точки $z = x + iy$ комплексной плоскости, принадлежащие множеству D , изображенному на рис. 24.

5. Вычислить значения функций в точке, если $a = 3, b = 1 - i$:

а) $\ln(a + bi)$; в) $\cos(b - ai)$;

б) $\ln\left(\frac{a}{b}i + 1\right)$; г) $\operatorname{sh}(-ai)$; д) $(1 + bi)^{(1+ai)}$.

6. Определить, в каких точках комплексной плоскости указанные функции имеют производную, и вычислить производную в каждой из этих точек. Указать точки, в которых данные функции аналитические:

а) $\omega = (z - i)^2 + i|\bar{z}|^2$; б) $\omega = \operatorname{sh}(iz + i)$.

7. Найти аналитическую функцию по заданной действительной или мнимой части: $u = \cos x \cdot \sin y$.

8. Интегрировать функции комплексного переменного:

а) $\int_{\Gamma} \operatorname{Re} z \, dz$, Γ – ломаная, соединяющая точки $z_1 = 2i, z_2 = 3 - i, z_3 = -1 - i$;

б) $\int_{|z-1|=3} \frac{z^2 + 5}{z^2 - 9} dz$; в) $\int_{i-1}^{2+2i} e^{2z+1} dz$.

9. Разложить функцию в ряд Тейлора и ряд Лорана в окрестности точки z_0 . Разложить функцию в ряд Лорана в окрестности точек z_1 и $z = \infty$:

$$f(z) = \frac{z+i}{z(z+2)}; z_0 = 1; z_1 = -2.$$

10. Определить вид особых точек функции и относительно каждой особой точки вычислить вычет: $f(z) = \frac{z^2 + 1}{(z-i)z^3(z+2)}$.

11. Вычислить интеграл с помощью вычетов:

а) $\int_{|z-2i|=1} \frac{e^{z^2} dz}{(z-2i)^3}$; б) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \sin x}{(x^2 - 4x + 8)} dx$; в) $\int_{3-i\infty}^{3+i\infty} \frac{e^{5z}}{(z^2 + 7)(z-1)} dz$.

Вариант № 22

1. Вычислить z и изобразить на комплексной плоскости, найти $\bar{z}$, $\operatorname{Re} z$, $\operatorname{Im} z$, $|z|$, $\arg z$, $\operatorname{Arg} z$:

а) $z = \frac{i(i+3)}{4-i}$; б) $z = \left(\frac{1}{i-1}\right)^4$; в) $z = \sqrt[3]{\frac{1}{i+1}}$.

2. Решить систему уравнений
$$\begin{cases} iu - v + 2iw = -2 + i, \\ iv - 2w = 1 - i, \\ 3iu + (1 - 2i)w = 2 + i. \end{cases}$$

3. Определить и построить линии и области, удовлетворяющие уравнениям и неравенствам:

а) $\frac{\operatorname{Im}(z+i)}{\operatorname{Re} z} = 3$; б) $\arg \frac{z}{i+2} = \frac{\pi}{3}$; в) $|z+2| \geq |z-i|$.

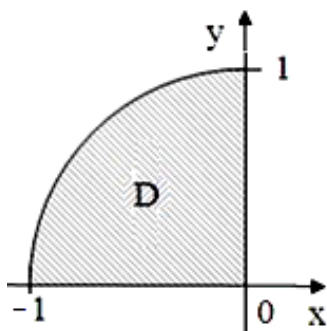


Рис. 25

4. Найти все точки $z = x + iy$ комплексной плоскости, принадлежащие множеству D , изображенному на рис. 25.

5. Вычислить значения функций в точке, если $a = \frac{i}{2-i}$,

$b = 2$:

а) $\ln(a + bi)$; в) $\cos(b - ai)$;

б) $\ln\left(\frac{a}{b}i + 1\right)$; г) $\operatorname{sh}(-ai)$; д) $(1 + bi)^{(1+ai)}$.

6. Определить, в каких точках комплексной плоскости указанные функции имеют производную, и вычислить производную в каждой из этих точек. Указать точки, в которых данные функции аналитические:

а) $\omega = x^2 + iy^2 - xy$; б) $\omega = \sin\left(\frac{z}{i}\right)$.

7. Найти аналитическую функцию по заданной действительной или мнимой части: $v = x - y$.

8. Интегрировать функции комплексного переменного:

а) $\int_{\Gamma} \bar{z} dz$, $\Gamma: z = 2 + i + it$, $1 \leq t \leq 2$; б) $\int_{|z|=2} \frac{\sin z}{z+i} dz$; в) $\int_i^{3-2i} \cos z \sin z dz$.

9. Разложить функцию в ряд Тейлора и ряд Лорана в окрестности точки z_0 . Разложить функцию в ряд Лорана в окрестности точек z_1 и $z = \infty$:

$f(z) = \frac{z-i}{z^2+6}$; $z_0 = 1$; $z_1 = \sqrt{6}i$.

10. Определить вид особых точек функции и относительно каждой особой

точки вычислить вычет: $f(z) = \frac{e^z - 1}{z(z+2)^2(z^2+3)}$.

11. Вычислить интеграл с помощью вычетов:

а) $\int_{|z|=2} \frac{e^z}{(z+1)^3(z-i)} dz$; б) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{(x^2+1)}{(x^4+2x^2+9)} dx$; в) $\int_{3-i\infty}^{3+i\infty} \frac{e^z}{(z^2+1)(z+1)} dz$.

Вариант № 23

1. Вычислить z и изобразить на комплексной плоскости, найти $\bar{z}$, $Re z$, $Im z$, $|z|$, $arg z$, $Arg z$:

а) $z = \frac{i^3(1+i)}{1-4i}$; б) $z = (3+4i)^3$; в) $z = \sqrt[3]{\frac{2}{2+3i}}$.

2. Решить систему уравнений:
$$\begin{cases} iu - 2iw = -2 + i, \\ (2-i)v - 2iw = 1 + i, \\ 3iu + v - (1+2i)w = 2 + i. \end{cases}$$

3. Определить и построить линии и области, удовлетворяющие уравнениям и неравенствам:

а) $|z - i + 2| \leq 3$; б) $\frac{Im(z-i)}{Re(z+i)} = 3$; в) $arg(z+i) \leq \frac{\pi}{3}$.

4. Найти все точки $z = x + iy$ комплексной плоскости, принадлежащие множеству D , изображенному на рис. 26.

5. Вычислить значения функций в точке, если $a = i - 2$, $b = i$:

а) $\ln(a + bi)$; в) $\cos(b - ai)$;

б) $\ln\left(\frac{a}{b}i + 1\right)$; г) $sh(-ai)$; д) $(1 + bi)^{(1+ai)}$.

6. Определить, в каких точках комплексной плоскости указанные функции имеют производную, и вычислить производную в каждой из этих точек. Указать точки, в которых данные функции аналитические:

а) $\omega = x - i + i(y+1)^2$; б) $\omega = zch\bar{z}$.

7. Найти аналитическую функцию по заданной действительной или мнимой части: $v = x - y + 3$.

8. Интегрировать функции комплексного переменного:

а) $\int_{\Gamma} |z| \bar{z} dz$, Γ – отрезок прямой от $A(1;0)$ до $B(2;1)$;

б) $\int_{|z|=3} \frac{\cos(z+2)}{(z+2i)} dz$; в) $\int_{2i}^{2+3i} \sqrt{z+1} dz$.

9. Разложить функцию в ряд Тейлора и ряд Лорана в окрестности точки z_0 . Разложить функцию в ряд Лорана в окрестности точек z_1 и $z = \infty$:

$f(z) = \frac{z^2}{z^2 + 1}$; $z_0 = 0$; $z_1 = -i$.

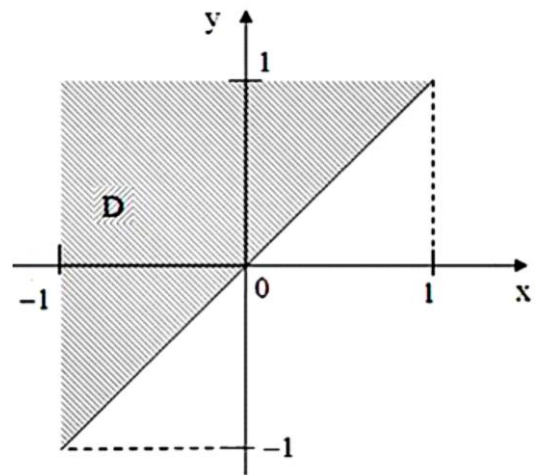


Рис. 26

10. Определить вид особых точек функции и относительно каждой особой точки вычислить вычет: $f(z) = \frac{z+i}{z^2(z^2+1)(z-2)}$.

11. Вычислить интеграл с помощью вычетов:

а) $\int_{|z|=3} \frac{\operatorname{tg} \pi z}{(z-1)} dz$; б) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \sin 3x}{(1+x^2)} dx$; в) $\int_{5-i\infty}^{5+i\infty} \frac{e^{4z}}{(z^2+4)(z+8)} dz$.

Вариант № 24

1. Вычислить z и изобразить на комплексной плоскости, найти $\bar{z}$, $\operatorname{Re} z$, $\operatorname{Im} z$, $|z|$, $\arg z$, $\operatorname{Arg} z$:

а) $z = \frac{i(i+1)}{(i+2)^2}$; б) $z = \left(2 + \frac{i}{2}\right)^4$; в) $z = \sqrt[3]{\sqrt{3}-i}$.

2. Решить систему уравнений:
$$\begin{cases} u + 3iv - 2iw = -2 + i, \\ v - iw = 1, \\ 3iu + iv + w = 2. \end{cases}$$

3. Определить и построить линии и области, удовлетворяющие уравнениям и неравенствам:

а) $\frac{|z+2|}{|z-i|} = 3$; б) $\arg z^2 = 0$; в) $\operatorname{Im} z^2 \leq \operatorname{Re} z$.

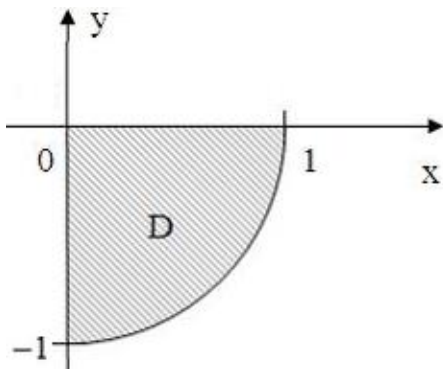


Рис. 27

4. Найти все точки $z = x + iy$ комплексной плоскости, принадлежащие множеству D , изображенному на рис. 27.

5. Вычислить значения функций в точке, если $a = 3$, $b = i - 2$:

а) $\ln(a + bi)$; в) $\cos(b - ai)$;

б) $\ln\left(\frac{a}{b}i + 1\right)$; г) $\operatorname{sh}(-ai)$; д) $(1 + bi)^{(1+ai)}$.

6. Определить, в каких точках комплексной плоскости указанные функции имеют производную, и вычислить производную в каждой из этих точек. Указать точки, в которых данные функции аналитические:

а) $\omega = \frac{z}{\bar{z}}$; б) $\omega = \frac{z \operatorname{sh} z}{1+i}$.

7. Найти аналитическую функцию по заданной действительной или мнимой части: $u = xy - x$.

8. Интегрировать функции комплексного переменного:

а) $\int_{\Gamma} e^{\bar{z}} dz$, $\Gamma: z = 2i + 3t$, $0 \leq t \leq 2$; б) $\int_{|z|=3} \frac{\sin^2 z}{z+1} dz$; в) $\int_{2+i}^{3-i} z \cos z dz$.

9. Разложить функцию в ряд Тейлора и ряд Лорана в окрестности точки z_0 . Разложить функцию в ряд Лорана в окрестности точек z_1 и $z = \infty$:

$$f(z) = \frac{z+i}{(z-i)(z+2i)}; \quad z_0 = -1; \quad z_1 = -2i.$$

10. Определить вид особых точек функции и относительно каждой особой

точки вычислить вычет: $f(z) = \frac{e^{z^2} - 1}{z^2(z-i)^2(z+2)}.$

11. Вычислить интеграл с помощью вычетов:

а) $\int_{|z-3i|=4} \frac{dz}{(e^z - 1)(z-3i)}$; б) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \sin x}{(x^2 + 1)^2} dx$; в) $\int_{6-i\infty}^{6+i\infty} \frac{e^z}{(z^2 + 8)(z-5)} dz.$

Вариант № 25

1. Вычислить z и изобразить на комплексной плоскости, найти $\bar{z}$, $Re z$, $Im z$, $|z|$, $arg z$, $Arg z$:

а) $z = \frac{i(2+2i)}{i^3(1-i)}$; б) $z = (3+3i)^3$; в) $z = \sqrt[3]{\frac{i}{2+i}}.$

2. Решить систему уравнений
$$\begin{cases} u + iv - iw = -i, \\ v + iw = 2, \\ 3iu - iv = 2. \end{cases}$$

3. Определить и построить линии и области, удовлетворяющие уравнениям и неравенствам:

а) $Re z - Im(z+i) = 2$; б) $\frac{Re z}{Im(z-i)} \leq 2$; в) $\frac{|z-1|}{|z+1|} = 2.$

4. Найти все точки $z = x + iy$ комплексной плоскости, принадлежащие множеству D , изображенному на рис. 28.

5. Вычислить значения функций в точке, если $a = i$, $b = 2 - i$:

а) $\ln(a+bi)$; в) $\cos(b-ai)$;

б) $\ln\left(\frac{a}{b}i+1\right)$; г) $sh(-ai)$; д) $(1+bi)^{(1+ai)}.$

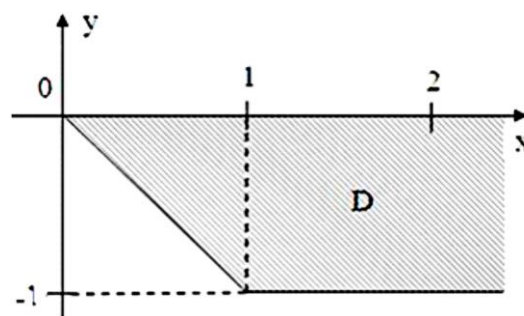


Рис. 28

6. Определить, в каких точках комплексной плоскости указанные функции имеют производную, и вычислить производную в каждой из этих точек. Указать точки, в которых данные функции аналитические:

а) $\omega = \overline{(z-1)} + \operatorname{Re}(z+1)$; б) $\omega = (i-1)e^{\bar{z}-1}$.

7. Найти аналитическую функцию по заданной действительной или мнимой части: $u = x^2 + (y-1)^2$.

8. Интегрировать функции комплексного переменного:

а) $\int_{\Gamma} z^2 dz$, Γ – дуга $y = x^3$ от $A(0;1)$ до $B(-1;0)$; б) $\int_{|z|=4} \frac{\cos z}{z - \pi^2} dz$; в) $\int_{i-1}^{2i} \operatorname{tg} z dz$.

9. Разложить функцию в ряд Тейлора и ряд Лорана в окрестности точки z_0 . Разложить функцию в ряд Лорана в окрестности точки z_1 и $z = \infty$:

$f(z) = \frac{z}{z^2 + 5}$; $z_0 = 1$; $z_1 = \sqrt{5}i$.

10. Определить вид особых точек функции и относительно каждой особой точки вычислить вычет: $f(z) = \frac{z-1}{(z^2-1)(z+1)^2 z}$.

11. Вычислить интеграл с помощью вычетов:

а) $\int_{|z|=2} \frac{dz}{z^3(z^{10}-3)}$; б) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos 3x}{(9+x^2)} dx$; в) $\int_{4-i\infty}^{4+i\infty} \frac{e^{2z}}{(z^2-4)(z+3i)} dz$.

Вариант № 26

1. Вычислить z и изобразить на комплексной плоскости, найти $\bar{z}$, $\operatorname{Re} z$, $\operatorname{Im} z$, $|z|$, $\arg z$, $\operatorname{Arg} z$:

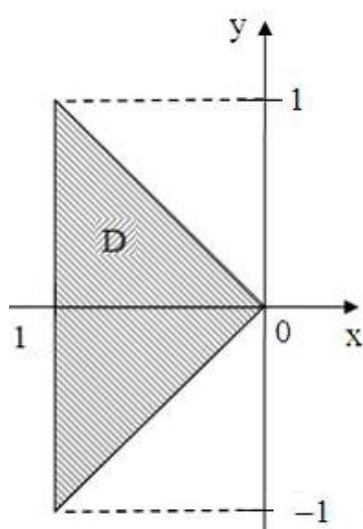


Рис. 29

а) $z = \frac{(3i-2)^2}{i+4}$; б) $z = (1+3i)^4$; в) $z = \sqrt[4]{i-3}$.

2. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} iu + (2-i)v + w = 1+i, \\ iu + (1+i)w = 2i, \\ u + (1-2i)v = 2. \end{cases}$$

3. Определить и построить линии и области, удовлетворяющие уравнениям и неравенствам:

а) $\operatorname{Im} \frac{z}{i+1} = \operatorname{Re} z$; б) $|z-1+3i| = \sqrt{5}$; в) $\frac{\pi}{6} \leq \arg \frac{\bar{z}}{i} \leq \frac{\pi}{3}$.

4. Найти все точки $z = x+iy$ комплексной плоскости, принадлежащие множеству D , изображенному на рис. 29.

5. Вычислить значения функций в точке, если $a = i + 1, b = i - 2$:

а) $\ln(a + bi)$; б) $\ln\left(\frac{a}{b}i + 1\right)$; в) $\cos(b - ai)$; г) $\operatorname{sh}(-ai)$; д) $(1 + bi)^{(1+ai)}$.

6. Определить, в каких точках комплексной плоскости указанные функции имеют производную, и вычислить производную в каждой из этих точек. Указать точки, в которых данные функции аналитические:

а) $\omega = z^2 - \bar{z} + i$; б) $\omega = (1 + 3i)e^{iz-i}$.

7. Найти аналитическую функцию по заданной действительной или мнимой части: $u = \frac{x - y}{x + y}$.

8. Интегрировать функции комплексного переменного:

а) $\int_{\Gamma} 2|z + 1| dz$, Γ – дуга $y = x^2 + 2$ от $A(1; 2)$ до $B(-2; 6)$;

б) $\int_{|z+3i|=1} \frac{dz}{z^2 + 9}$; в) $\int_{3-i}^{2+i} \frac{dz}{1 - z^2}$.

9. Разложить функцию в ряд Тейлора и ряд Лорана в окрестности точки z_0 . Разложить функцию в ряд Лорана в окрестности точек z_1 и $z = \infty$:

$$f(z) = \frac{z^2}{(z - 2i)(z - 3)}; \quad z_0 = 1; \quad z_1 = 2i.$$

10. Определить вид особых точек функции и относительно каждой особой точки вычислить вычет: $f(z) = \frac{z + 1}{(z^2 - 1)(z + 2)^2(z - i)}$.

11. Вычислить интеграл с помощью вычетов:

а) $\int_{|z|=1} \frac{z^3}{(2z^4 + 1)} dz$; б) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2 + 1)^2}$; в) $\int_{5-i\infty}^{5+i\infty} \frac{e^z}{(z^2 - 9)(z + i)} dz$.

Вариант № 27

1. Вычислить z и изобразить на комплексной плоскости, найти $\bar{z}$, $\operatorname{Re} z$, $\operatorname{Im} z$, $|z|$, $\arg z$, $\operatorname{Arg} z$:

а) $z = \frac{(5i - 2)i^3}{3 - 2i}$; б) $z = \left(\frac{1}{3 - i}\right)^4$; в) $z = \sqrt[3]{3 + 2i}$.

2. Решить систему уравнений
$$\begin{cases} u + (2 + i)v - iw = 1 + i, \\ u + (3 + i)w = 1 + 2i, \\ u + 2iv = 2. \end{cases}$$

3. Определить и построить линии и области, удовлетворяющие уравнениям и неравенствам:

а) $|z - 2i + 4| \geq 1$; б) $\operatorname{Im} \frac{z}{i} = 3$; в) $0 \leq \arg \left(\frac{z+i}{i} \right) \leq \frac{\pi}{4}$.

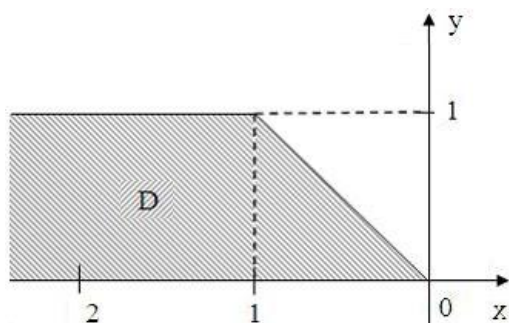


Рис. 30

4. Найти все точки $z = x + iy$ комплексной плоскости, принадлежащие множеству D , изображенному на рис. 30.

5. Вычислить значения функций в точке, если $a = i - 1, b = i$:

а) $\ln(a + bi)$; в) $\cos(b - ai)$;

б) $\ln\left(\frac{a}{b}i + 1\right)$; г) $\operatorname{sh}(-ai)$; д) $(1 + bi)^{(1+ai)}$.

6. Определить, в каких точках комплексной плоскости указанные функции имеют производную, и вычислить производную в каждой из этих точек. Указать точки, в которых данные функции аналитические:

а) $\omega = z\bar{z} + i$; б) $\omega = \frac{\sin(z + i)}{1 + i}$.

7. Найти аналитическую функцию по заданной действительной или мнимой части: $v = e^x \sin(y - 1)$.

8. Интегрировать функции комплексного переменного:

а) $\int_{\Gamma} (z + \bar{z}) dz$, Γ – ломаная, соединяющая точки $z_1 = i, z_2 = 2 + i, z_3 = 1 - i$;

б) $\int_{|z|=2} \frac{\operatorname{sh} z}{z^2(z + 3i)} dz$; в) $\int_{2i-1}^{1-i} e^{2z-i} dz$.

9. Разложить функцию в ряд Тейлора и ряд Лорана в окрестности точки z_0 . Разложить функцию в ряд Лорана в окрестности точки z_1 и $z = \infty$:

$f(z) = \frac{(z-1)^2}{z(z+i)}$; $z_0 = 1$; $z_1 = -i$.

10. Определить вид особых точек функции и относительно каждой особой точки вычислить вычет: $f(z) = \frac{e^{z+2} - 1}{(z+2)(z+i)^2(z+3)}$.

11. Вычислить интеграл с помощью вычетов:

а) $\int_{|z|=2} \frac{dz}{(z^2-1)^2(z-3)^2}$; б) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{(x^2+1)}{(x^4+1)} dx$; в) $\int_{4-i\infty}^{4+i\infty} \frac{e^z}{(z^2-1)(z+2i)} dz$.

Вариант № 28

1. Вычислить z и изобразить на комплексной плоскости, найти $\bar{z}$, $Re z$, $Im z$, $|z|$, $arg z$, $Arg z$:

а) $z = \frac{(2-3i)i^3}{1-i}$; б) $z = \left(\frac{3}{1-i}\right)^4$; в) $z = \sqrt[3]{\frac{i}{i+2}}$.

2. Решить систему уравнений
$$\begin{cases} (1-i)u + v - iw = 1+i, \\ u + (3+i)v - iw = 1+2i, \\ u + 2iv = 2. \end{cases}$$

3. Определить и построить линии и области, удовлетворяющие уравнениям и неравенствам:

а) $Im(z+i) = Re(z-1)+1$; б) $|z| = |z+2i|$; в) $0 \leq arg\left(\frac{\bar{z}-i}{2i}\right) \leq \frac{\pi}{4}$.

4. Найти все точки $z = x+iy$ комплексной плоскости, принадлежащие множеству D , изображенному на рис. 31.

5. Вычислить значения функций в точке, если $a = 2i$, $b = 2i-1$:

а) $\ln(a+bi)$; б) $\cos(b-ai)$,

в) $\ln\left(\frac{a}{b}i+1\right)$; г) $sh(-ai)$; д) $(1+bi)^{(1+ai)}$.

6. Определить, в каких точках комплексной плоскости указанные функции имеют производную, и вычислить производную в каждой из этих точек. Указать точки, в которых данные функции аналитические:

а) $\omega = z^2(2-i)$; б) $\omega = \sin(i+z) - e^z$.

7. Найти аналитическую функцию по заданной действительной или мнимой части: $u = x^2y$.

8. Интегрировать функции комплексного переменного:

а) $\int_{\Gamma} Im z dz$, $\Gamma: |z|=1$, $Re z < 0$; б) $\int_{|z-i|=2} \frac{dz}{(z-3)^2 z^2}$; в) $\int_I \frac{dz}{e^z}$.

9. Разложить функцию в ряд Тейлора и ряд Лорана в окрестности точки z_0 . Разложить функцию в ряд Лорана в окрестности точек z_1 и $z = \infty$:

$f(z) = \frac{z+i}{z(z+2)}$; $z_0 = 1$; $z_1 = 0$.

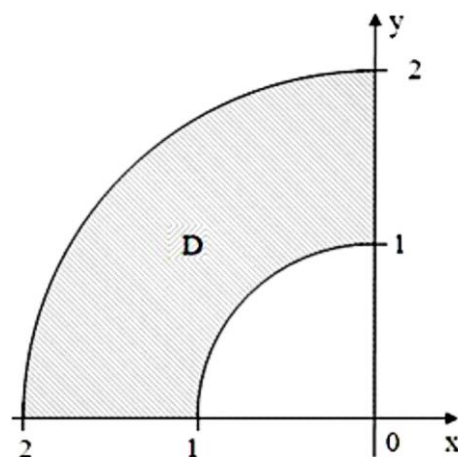


Рис. 31

10. Определить вид особых точек функции и относительно каждой особой точки вычислить вычет: $f(z) = \frac{z^2 - 1}{(z-1)(z+2)^2(z-i)}$.

11. Вычислить интеграл с помощью вычетов:

а) $\int_{|z|=2} \frac{dz}{(z^4 - 1)}$; б) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{(x^2 - x + 2)}{(x^4 + 10x^2 + 9)} dx$; в) $\int_{1-i\infty}^{1+i\infty} \frac{e^{8z}}{(z^2 + 16)(z + 4)} dz$.

Вариант № 29

1. Вычислить z и изобразить на комплексной плоскости, найти $\bar{z}$, $Re z$, $Im z$, $|z|$, $arg z$, $Arg z$:

а) $z = \frac{(i+2)(2-i)^2}{4+3i}$; б) $z = (1-4i)^4$; в) $z = \sqrt[3]{2+4i}$.

2. Решить систему уравнений
$$\begin{cases} u + 2iv - w = 1 - 2i, \\ u + 3iv - iw = i, \\ u + 2iv = 2. \end{cases}$$

3. Определить и построить линии и области, удовлетворяющие уравнениям и неравенствам:

а) $\frac{|z-3|}{|z+2|} = 3$; б) $arg \frac{2i-z}{i} \leq \frac{\pi}{3}$; в) $Im(z+1) \leq Re \frac{z}{i}$.

4. Найти все точки $z = x + iy$ комплексной плоскости, принадлежащие множеству D , изображенному на рис. 32.

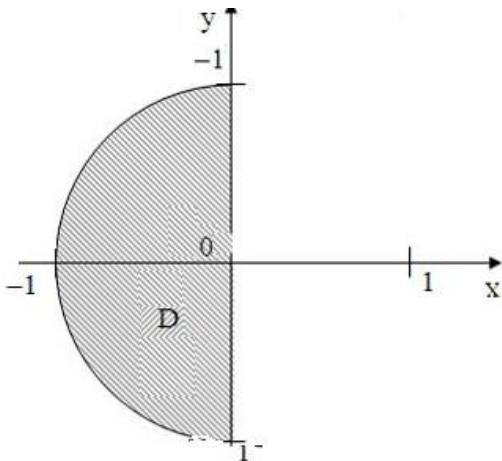


Рис. 32

5. Вычислить значения функций в точке, если $a = -i$, $b = -2i + 1$:

а) $\ln(a + bi)$; в) $\cos(b - ai)$;

б) $\ln\left(\frac{a}{b}i + 1\right)$; г) $sh(-ai)$; д) $(1 + bi)^{(1+ai)}$.

6. Определить, в каких точках комплексной плоскости указанные функции имеют производную, и вычислить производную в каждой из этих точек. Указать точки, в которых данные функции аналитические:

а) $\omega = z(z + i)$; б) $\omega = \bar{z}e^{2\bar{z}} + i$.

7. Найти аналитическую функцию по заданной действительной или мнимой части: $v = e^x \sin(y-1)$.

8. Интегрировать функции комплексного переменного:

а) $\int_{\Gamma} (z + \bar{z}) dz$, $\Gamma: |z| = 2$, $\operatorname{Im} z < 0$; б) $\int_{|z+i|=3} \frac{z^3}{2z-i} dz$; в) $\int_{i-1}^{2+i} ze^{z^2} dz$.

9. Разложить функцию в ряд Тейлора и ряд Лорана в окрестности точки z_0 .
Разложить функцию в ряд Лорана в окрестности точек z_1 и $z = \infty$:

$$f(z) = \frac{z^2}{z^2 + 3}; z_0 = 1; z_1 = \sqrt{3}i.$$

10. Определить вид особых точек функции и относительно каждой особой

точки вычислить вычет: $f(z) = \frac{e^{2z} - 1}{z(z+i)^3(z-4)}$.

11. Вычислить интеграл с помощью вычетов:

а) $\int_{|z|=3} \frac{z}{(z-1)(z-2)^2} dz$; б) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2 dx}{(x^2+1)(x^2+9)}$; в) $\int_{5-i\infty}^{5+i\infty} \frac{e^{10z}}{(z^2+3)(z-4)} dz$.

Вариант № 30

1. Вычислить z и изобразить на комплексной плоскости, найти $\bar{z}$, $\operatorname{Re} z$, $\operatorname{Im} z$, $|z|$, $\arg z$, $\operatorname{Arg} z$:

а) $z = \frac{(i+1)(1-i)^2}{4+3i}$; б) $z = (1+5i)^4$; в) $z = \sqrt[3]{3-6i}$.

2. Решить систему уравнений
$$\begin{cases} u + 2iv - w = i, \\ u - 3iv + (1+i)w = 2 - i, \\ u - 2iv = 2. \end{cases}$$

3. Определить и построить линии и области, удовлетворяющие уравнениям и неравенствам:

а) $\arg(z-1)^2 = 0$; б) $\frac{\operatorname{Im} z}{\operatorname{Re}(z-1)} = 3$; в) $\frac{|z+i|}{|z|} = 3$.

4. Найти все точки $z = x + iy$ комплексной плоскости, принадлежащие множеству D , изображенному на рис. 33.

5. Вычислить значения функций в точке, если $a = 3 - i$, $b = 3$:

а) $\ln(a + bi)$; в) $\cos(b - ai)$;

б) $\ln\left(\frac{a}{b}i + 1\right)$; г) $\operatorname{sh}(-ai)$; д) $(1 + bi)^{(1+ai)}$.

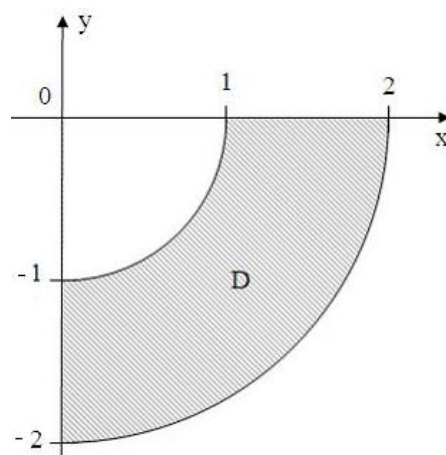


Рис. 33

6. Определить, в каких точках комплексной плоскости указанные функции имеют производную, и вычислить производную в каждой из этих точек. Указать точки, в которых данные функции аналитические:

а) $\omega = z + \frac{1}{z^2}$; б) $\omega = z \operatorname{ch}(z + 1)$.

7. Найти аналитическую функцию по заданной действительной или мнимой части: $u = x^2 y$.

8. Интегрировать функции комплексного переменного:

а) $\int_{\Gamma} z(z-i) dz$, Γ – ломаная, соединяющая точки $z_1 = 0$, $z_2 = 2 + i$, $z_3 = 2 + i$;

б) $\int_{|z|=\frac{1}{2}} \frac{e^{2\bar{z}}}{z(1-z)^3} dz$; в) $\int_{\frac{1}{2}+i}^{2-i} 3^z z dz$.

9. Разложить функцию в ряд Тейлора и ряд Лорана в окрестности точки z_0 . Разложить функцию в ряд Лорана в окрестности точек z_1 и $z = \infty$:

$f(z) = \frac{z^2 - 1}{z^2 + 1}$; $z_0 = 0$; $z_1 = -i$.

10. Определить вид особых точек функции и относительно каждой особой точки вычислить вычет: $f(z) = \frac{z+1}{(z^2-1)(z-1)^2(z+i)}$.

11. Вычислить интеграл с помощью вычетов:

а) $\int_{|z|=2} \frac{(z+1)}{(z-1)\sin z} dz$; б) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^4+1)}$; в) $\int_{5-i\infty}^{5+i\infty} \frac{e^{\sqrt{7}z}}{(z^2+7)(z+4)} dz$.

3. ТЕСТОВЫЕ ЗАДАНИЯ

Вариант № 1

1. Если z_1 и z_2 – корни квадратного уравнения $2z^2 + zi + 1 = 0$, то $z_1 + z_2$ равно:

а) $-0,5$; б) $0,5i$; в) $-i$; г) i .

2. Если $f(z) = (i+1)z^2$, то $f'(1-i)$ равно:

а) 4 ; б) 0 ; в) $2(1+i)$; г) $2(1-i)$.

3. Если u_0 и v_0 являются решением системы линейных уравнений

$$\begin{cases} iu - (1+i)v = 2 + 3i, \\ iu + (2-i)v = 3 - i, \end{cases} \text{ то } 2u_0 - 3v_0 \text{ равно:}$$

а) 13 ; б) $13+12i$; в) $-5+12i$; г) $6i$.

4. Если $z = 3 + 2i$, то действительная часть функции $\cos(z)$ равна ____.

5. Все точки $z = x + iy$ комплексной плоскости, принадлежащие множеству D , изображенному на рис. 34, удовлетворяют условию:

- а) $|z| \leq 1; \pi \leq \arg \leq 2\pi$;
- б) $0 \leq \operatorname{Im} z \leq 1; \pi \leq \arg \leq 2\pi$;
- в) $0 \leq \operatorname{Re} z \leq 1; \pi \leq \arg \leq 2\pi$;
- г) $|z| \leq 1; -1 \leq \arg \leq 0$.

6. Для функции $f(z) = \cos \frac{z+2}{z-1}$ точка $z = 1$

является:

- а) полюсом первого порядка; в) полюсом третьего порядка;
- б) полюсом второго порядка; г) существенно особой точкой.

7. Комплексное число $z = 3 \left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{2} \right)$, тогда z^6 равно:

- а) 3; б) -3 ; в) $3i$; г) $-3i$.

Вариант № 2

1. Если u_0 и v_0 являются решением системы линейных уравнений

$$\begin{cases} (3-i)u - 2v = 4i, \\ -iu + (1+i)v = 2 + 2i, \end{cases} \text{ то } u_0 + v_0 \text{ равно:}$$

- а) $1+3i$; б) $-1+i$; в) $4+12i$; г) 4.

2. Все точки $z = x + iy$ комплексной плоскости, принадлежащие множеству D изображенному на рис. 35, удовлетворяют условию:

- а) $-\frac{\pi}{4} \leq \arg \leq \frac{3\pi}{4}$;
- б) $-\frac{\pi}{4} \leq \arg \leq \frac{3\pi}{4}, \operatorname{Im} z \geq 0$;
- в) $-\frac{\pi}{4} \leq \arg \leq \frac{\pi}{4}$;
- г) $-\frac{\pi}{4} \leq \arg \leq \frac{3\pi}{4}, \operatorname{Re} z \geq 0$.

3. Если $f(z) = (3i+1)z^3$, то $\operatorname{Im}(f'(2i))$ равно:

- а) $36i$; б) $-36i$; в) 36; г) -36 .

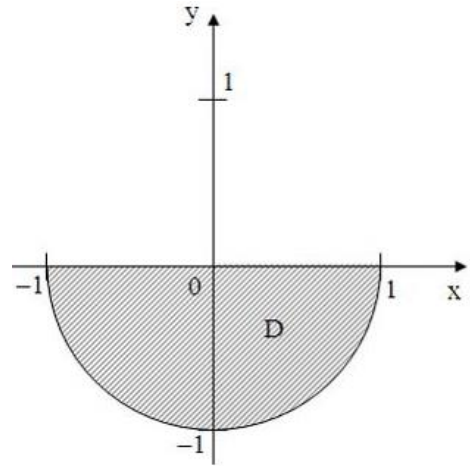


Рис. 34

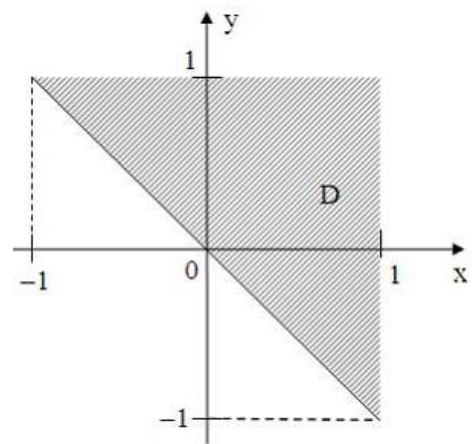


Рис. 35

4. Если $z = 3 - 4i$, то действительная часть логарифма $\operatorname{Ln}(z)$ равна ____.

5. Мнимая часть комплексного числа $\frac{z_2}{z_1}$ при $z_1 = i^4 + 2i$ и $z_2 = 3i - 4$ равна:

а) $\frac{11}{5}i$; б) 11; в) $\frac{11}{5}$; г) 11.

6. Алгебраическая форма комплексного числа $z = 1 + \sqrt{3}i$, тогда соответствующая ему тригонометрическая форма имеет вид:

а) $z = 2 \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right)$; в) $z = 2 \left(\cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4} \right)$;

б) $z = 2 \left(\cos \frac{2\pi}{3} - i \sin \frac{2\pi}{3} \right)$; г) $z = 2 \left(\cos \frac{5\pi}{6} + i \sin \frac{5\pi}{6} \right)$.

7. Особыми точками функции $f(z) = \frac{2}{(z^2 - 5z + 6)(z - 2)}$ является:

а) $z = 2, z = 3$; б) $z = 2i, z = 3i$; в) $z = 2$; г) $z = 2, z = 6$.

Вариант № 3

1. Значение производной $f'(z)$ комплекснозначной функции $f(z) = z^3 + 4z - z^2 + 3$ в точке $(-i; 1)$ равно:

а) 0; б) $-i$; в) 4; г) i .

2. Обратная матрица A^{-1} для матрицы A системы линейных уравнений $\begin{cases} x + iy = 2 + i, \\ 3ix - 5y = 4, \end{cases}$ имеет вид:

а) $\begin{pmatrix} 2,5 & 0,5i \\ 1,5i & -0,5 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 2,5 & -0,5i \\ -1,5i & -0,5 \end{pmatrix}$; в) $\begin{pmatrix} 0,5 & 0,5i \\ 1,5i & -2,5 \end{pmatrix}$; г) $\begin{pmatrix} 0,5 & -0,5i \\ -1,5i & -2,5 \end{pmatrix}$.

3. Число особых точек функции $f(z) = \frac{z^3 + 1}{z^2 - 4}$ равно:

а) 2; б) 1; в) 0; г) 3.

4. Если $z_1 = 2i$ и $\bar{z}_2 = 1 - 3i$, где $\bar{z}_2$ – комплексно-сопряженное числу z_2 , причем z_1 и z_2 – корни квадратного уравнения, тогда уравнение имеет вид:

а) $z^2 - 5iz - 6 = 0$; в) $z^2 - (1 + 5i)z - 6 + 2i = 0$;

б) $z^2 - (1 - 5i)z - 6 + 2i = 0$; г) $z^2 - (1 + 5i)z + 6 + 2i = 0$.

5. Все точки $z = x + iy$ комплексной плоскости, принадлежащие множеству D , изображенному на рис. 36, удовлетворяют условию:

а) $|z - 1| \geq 1$; в) $|z + 1| \geq 1$;

б) $|z| \geq 1$; г) $|z - 1| \leq 1$.

6. Если $z = 3 + 2i$, то действительная часть функции $\sin(z)$ равна ____.

7. Если комплексные числа $z_1 = 2e^{i\frac{\pi}{6}}$

и $z_2 = 3e^{i\frac{\pi}{2}}$, то произведение $z_1 \cdot z_2$ равно:

а) $6e^{i\frac{2\pi}{3}}$; б) $6e^{\frac{2\pi}{3}}$; в) $6e^{-i\frac{2\pi}{3}}$; г) $5e^{i\frac{2\pi}{3}}$.

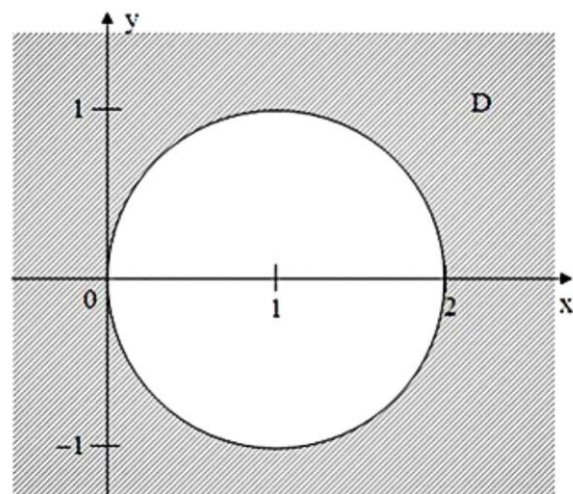


Рис. 36

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Жукова, В.И. Теория функций комплексного переменного : учеб. пособие / В.И. Жукова, Н.Л. Ющенко, М.И. Якунина. – Хабаровск : Изд-во ДВГУПС, 2009. – 52 с.
2. Курош, А.Г. Курс высшей алгебры : учеб. для вузов / А.Г. Курош. – СПб. : Лань, 2008. – 432 с.
3. Сборник задач по высшей математике. В 2 ч. Ч. 2 / К.Н. Лунгу [и др.]. – М. : Айрис-пресс, 2008. – 576 с.
4. Пантелеев, А.В. Теория функций комплексного переменного и операционное исчисление в примерах и задачах : учеб. пособие / А.В. Пантелеев, А.С. Якимова. – М. : Высш. шк., 2001. – 445 с.
5. Понарин, Я.П. Алгебра комплексных чисел в геометрических задачах / Я.П. Понарин. – М. : МЦНМО, 2004. – 160 с.

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ	3
1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ КОМПЛЕКСНОГО АНАЛИЗА	5
1.1. Комплексные числа	5
1.2. Линии и области в комплексной плоскости	6
1.3. Функция комплексного переменного	8
1.4. Дифференцирование функции комплексного переменного	9
1.5. Интегрирование функции комплексного переменного	10
1.6. Ряды функции комплексного переменного	11
1.7. Особые точки и вычеты	14
2. ВАРИАНТЫ КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ	18
3. ТЕСТОВЫЕ ЗАДАНИЯ	54
БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК	58

Учебное издание

ФУНКЦИИ КОМПЛЕКСНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

Методическое пособие по решению задач

Составители:

Жукова Валентина Ивановна,
Якунина Маргарита Ивановна

Редактор *Т.М. Яковенко*

Технический редактор *Н.В. Ларионова*

План 2014 г. Поз. 9.3. Подписано в печать 12.03.2014.

Гарнитура Times New Roman. Печать RISO.

Усл. печ. л. 3,4. Уч.-изд. л. 3,8. Зак. 47. Тираж 250 экз. Цена 81 р.

Издательство ДВГУПС

680021, г. Хабаровск, ул. Серышева, 47.

Кафедра «Высшая математика»

ФУНКЦИИ КОМПЛЕКСНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

Методическое пособие по решению задач

Составители:

В.И. Жукова, М.И. Якунина

Хабаровск
2014