

6.1.6.

**ФУНКЦИИ НЕСКОЛЬКИХ
ПЕРЕМЕННЫХ**

ВАРИАНТ № 1

1. Найти область определения функции $z = \arcsin(x + y)$. Сделать чертеж.
2. Определить и построить линии уровня функции $z = 2x + y^2$.
3. Дана функция $z = \frac{y}{(x^2 - y^2)^5}$. Показать, что $\frac{1}{x} \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{1}{y} \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{z}{y^2}$.
4. Найти экстремумы функции $z = x^2 + xy + y^2 - 6x - 9y$.
5. Найти экстремумы функции $z = e^{xy}$ при условии, что $x + y = 1$.
6. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z = x^2 - y^2$ в замкнутой области $x^2 + y^2 \leq 1$.
7. Найти приближенное значение функции $z = 3x^2 + 2xy$ в точке $A(1.02, 1.96)$.
8. Найти $\overline{grad} z$ и производную в точке $A(-1; -2)$ по направлению вектора $\bar{a} = (1; -1)$, если $z = 2xy^2 + 4x^2 - 1 + y$.
9. Найти частные производные первого порядка, если
 - а) $xy - e^{xy} + \ln \sqrt{xy} + \sin z = 1$;
 - б) $z = \frac{u^2}{r + 4}$, $u = \operatorname{arcctg} \sqrt{x + y}$, $r = e^{xy}$.

ВАРИАНТ № 2

1. Найти область определения функции $z = \sqrt{x^2 - y^2 - 4}$. Сделать чертеж.
2. Определить и построить линии уровня функции $z = \frac{x^2}{y}$.
3. Дана функция $z = \frac{y^3}{3x + \arcsin xy}$. Показать, что $x^2 \frac{\partial z}{\partial x} - xy \frac{\partial z}{\partial y} + y^2 = 0$.
4. Найти экстремумы функции $z = x\sqrt{y} - x^2 - y^2 + 3$.
5. Найти экстремумы функции $z = e^{xy}$ при условии, что $x + y = 6$.
6. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z = x^3 + y^3 - 3xy$ в замкнутой области $0 \leq x \leq 2, -1 \leq y \leq 2$.
7. Найти приближенное значение функции $z = 3x^2 - xy + x + y$ в точке $A(1.06, 2.92)$.
8. Найти $\overline{grad} z$ и производную в точке $A(-2;4)$ по направлению вектора $\bar{a} = (1; -4)$, если $z = 4x^2 + 1 - y^2 + x + 3xy$.
9. Найти частные производные первого порядка, если
 - а) $z^2 y + x e^z + z \arcsin yx = 1$;
 - б) $z = 2u^2 - \sqrt{r}$, $u = \sin x + y$, $r = \sqrt{y} + \operatorname{arcctg} x$.

ВАРИАНТ № 3

1. Найти область определения функции $z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2 - t^2}$. Сделать чертеж.
2. Определить и построить линии уровня функции $z = \frac{x}{y}$.
3. Дана функция $z = \ln(x^2 + y^2 + 2x + 1)$. Показать, что $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$.
4. Найти экстремумы функции $z = x^3 + xy^2 + 6xy$.
5. Найти экстремумы функции $z = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$ при условии, что $x + y = 2$.
6. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z = x^2 - 2y^2 + 4xy - 6x - 1$ в замкнутой области $x = 0, y = 0, x + y = 3$.
7. Найти приближенное значение функции $z = x^2 + 3xy - 6y$ в точке $A(3.96, 1.03)$.
8. Найти $\overline{grad} z$ и производную в точке $A(-3; 2)$ по направлению вектора $\bar{a} = (4; -1)$, если $z = xy + 4x^2 - 1 + y$.
9. Найти частные производные первого порядка, если
 - а) $z = 2xe^z + \ln(x + \sqrt{y}) + z^2$;
 - б) $z = 2u^2 + \sqrt{r}$, $u = \sin x + y^2$, $r = \sqrt{y} + \operatorname{arcctg} x$.

ВАРИАНТ № 4

1. Найти область определения функции $u = \frac{1}{\ln(1 - x^2 - y^2 - z^2)}$. Сделать чертеж.
2. Определить и построить линии уровня функции $z = \ln \sqrt{\frac{y}{x}}$.
3. Дана функция $z = e^{xy}$. Показать, что

$$x^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - 2xy \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + y^2 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + 2xyz = 0.$$
4. Найти экстремумы функции $z = (x^2 + y) \sqrt{e^y}$.
5. Найти экстремумы функции $z = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$ при условии, что $x + y = 4$.
6. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z = x^2 - xy + y^2 - 4x$ в замкнутой области $x = 0, y = 0, 2x + 3y - 12 = 0$.
7. Найти приближенное значение функции $z = x^2 - y^2 + 6x + 3y$ в точке $A(2.02, 2.97)$.
8. Найти $\overline{grad} z$ и производную в точке $A(-1;2)$ по направлению вектора $\bar{a} = (2;1)$, если $z = x^2 + xy - y^3$.
9. Найти частные производные первого порядка, если
 - а) $z^2 + xyz + e^{xy} - \ln z = 0$;
 - б) $z = u \sqrt{v}, u = \sin^2 x, v = \arcsin x^2$.

ВАРИАНТ № 5

1. Найти область определения функции $z = x + \sqrt{x^2 - y^2}$. Сделать чертеж.
2. Определить и построить линии уровня функции $z = \frac{\sqrt{x}}{y}$.
3. Дана функция $z = \ln(x + e^{-y})$. Показать, что $\frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} - \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 0$.
4. Найти экстремумы функции $z = 3 \ln \frac{x}{6} + 2 \ln y + \ln 12 - x - y$.
5. Найти экстремумы функции $z = xy$ при условии, что $x^2 + y^2 = 1$.
6. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z = xy + x + y$ в замкнутой области $x = 1, x = 2, y = 2, y = 3$.
7. Найти приближенное значение функции $z = x^2 + 2xy + 3y^2$ в точке $A(1.96, 1.04)$.
8. Найти $\overline{grad} z$ и производную в точке $A(3; -1)$ по направлению вектора $\bar{a} = (2; 5)$, если $z = \ln(2x + 3y)$.
9. Найти частные производные первого порядка, если
 - а) $3 \sin \frac{\sqrt{x}}{y} - 2 \cos \frac{\sqrt{y}}{x} + 1 = 2 \operatorname{arctg} xy + 3yz$;
 - б) $z = \ln^2(2u + 3r), u = \sin x \cos y, r = \cos x \sin y$.

ВАРИАНТ № 6

1. Найти область определения функции $z = \arcsin \frac{y}{x}$. Сделать чертеж.
2. Определить и построить линии уровня функции $z = \sqrt{1 - \frac{x^2}{4} - y^2}$.
3. Дана функция $z = \frac{x}{y}$. Показать, что $x \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} - \frac{\partial z}{\partial y} = 0$.
4. Найти экстремумы функции $z = xy^2(1 - x - y)$.
5. Найти экстремумы функции $z = 6 - 4x - 3y$ при условии, что $x^2 + y^2 = 2$.
6. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z = x^2 + 3y^2 + x - y$ в замкнутой области $x = 1, y = 1, x + y = 1$.
7. Найти приближенное значение функции $z = x^2 + y^2 + 2x + y - 1$ в точке $A(1.98, 3.91)$.
8. Найти $\overline{grad} z$ и производную в точке $A(-1; -2)$ по направлению вектора $\bar{a} = (1; -1)$, если $z = 4x^2y + 2xy - 2 + y^2$.
9. Найти частные производные первого порядка, если
 - а) $zxy^3 - 3x^2y^2 + 2y^4e^z = 0$;
 - б) $z = \frac{x^2 + y^2}{x^2 - y^2}, z = \sin(xy)$

ВАРИАНТ № 7

1. Найти область определения функции $z = \sqrt{1+x-y^2} + \sqrt{1-x-y^2}$.
Сделать чертеж.
2. Определить и построить линии уровня функции $z = xy$.
3. Дана функция $z = x^y$. Показать, что $y \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = (1 + y \ln x) \frac{\partial z}{\partial x}$.
4. Найти экстремумы функции $z = x^3 + y^3 - 15xy$.
5. Найти экстремумы функции $z = -10xy^2 + x^2 + 10x + 1$ при условии, что $-\frac{x}{7} + \frac{y}{2} = 1$.
6. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z = x^3 + y^3 - 9xy + 27$ в замкнутой области $0 \leq x \leq 4, 0 \leq y \leq 4$.
7. Найти приближенное значение функции $z = 3x^2 + 2y^2 - xy$ в точке $A(-0.98, 2.97)$.
8. Найти $\overline{grad} z$ и производную в точке $A(-1;-2)$ по направлению вектора $\bar{a} = (1;-1)$, если $z = x^2 - xy + y^2 - 4x$.
9. Найти частные производные первого порядка, если
 - а) $2xyz + \sqrt{x^2 + 2y^2} + xy - \sin xy - \cos 3z = 0$;
 - б) $z = 3u^3 - r, u = \cos y + x, r = \sqrt{y} + \operatorname{arctg} x - 1$.

ВАРИАНТ № 8

1. Найти область определения функции $z = \sqrt{3x} - \frac{5}{\sqrt{y}}$. Сделать чертеж.
2. Определить и построить линии уровня функции $z = x^2 - y^2$.
3. Дана функция $z = xe^{\frac{y}{x}}$. Показать, что $x^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2xy \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + y^2 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$.
4. Найти экстремумы функции $z = x^3 y^2 (6 - x - y)$.
5. Найти экстремумы функции $z = -10xy^2 + x^2 + 10x + 1$ при условии, что $-2x + 7y = 14$.
6. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z = x^2 + y^2 - xy + x + y$ в замкнутой области $x = 0$, $y = 2$, $x + y = -3$.
7. Найти приближенное значение функции $z = x^3 y^2$ в точке $A(1.02, 0.97)$.
8. Найти $\overline{grad} z$ и производную в точке $A(1; -2)$ по направлению вектора $\bar{a} = (4; 7)$, если $z = y^2 + 2x^2 + 3xy$.
9. Найти частные производные первого порядка, если
 - а) $3x^3 y \sqrt{y} - x + y^3 - \operatorname{tg} xz + xyz = 0$;
 - б) $z = \frac{2\sqrt{u}}{r^2 + 6}$, $u = \arccos(x + y) + \sqrt{x} + y^2$, $r = e^{x+y^2}$.

ВАРИАНТ № 9

1. Найти область определения функции $z = \frac{\ln(x^2 y)}{\sqrt{y-x}}$. Сделать
чертеж.
2. Определить и построить линии уровня функции $z = x^2 - y$.
3. Дана функция $z = \sin(x + ay)$. Показать, что $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = a^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$.
4. Найти экстремумы функции $z = x^3 + 8y^3 - 6xy + 5$.
5. Найти экстремумы функции $z = x^2 + y^2$ при условии, что $3x + 4y = 12$.
6. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z = x^3 + y^3 - 9xy + 27$ в замкнутой области $0 \leq x \leq 4$, $0 \leq y \leq 4$.
7. Найти приближенное значение функции $z = 2xy + 3y^2 - 5x$ в точке $A(3.04, 3.95)$.
8. Найти $\overline{grad} z$ и производную в точке $A(1;-2)$ по направлению вектора $\bar{a} = (4;7)$, если $z = 3xy + 2x^2 + y^2$.
9. Найти частные производные первого порядка, если
- а) $\frac{zx + x^3 y^3 - 3xy^5 + y^5}{x} = 0$;
- б) $z = \ln^2 \frac{u}{r}$, $u = \sin^2 x$, $r = \arctg \sqrt{x}$.

ВАРИАНТ № 10

1. Найти область определения функции $z = \sqrt{x+y} \ln(y^2 - x^2)$. Сделать чертеж.
2. Определить и построить линии уровня функции $z = \sqrt{xy}$.
3. Дана функция $z = \cos y + (y - x)\sin y$. Показать, что $(x - y) \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial z}{\partial y}$.
4. Найти экстремумы функции $z = 7x^2 - 6xy + 3y^2 - 4x + 7y - 12$.
5. Найти экстремумы функции $z = x^2 + y^2$ при условии, что $x^2 + y^2 - 2x - 2y + 1 = 0$.
6. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z = x^2 - y^2 + 2a^2$ в замкнутой области $x^2 + y^2 \leq a^2$.
7. Найти приближенное значение функции $z = xy + 2y^2 - 2x$ в точке $A(0.97, 2.03)$.
8. Найти $\overline{grad} z$ и производную в точке $A(1;4)$ по направлению вектора $\bar{a} = (3; -2)$, если $z = y^2 + x^2 - 1 + 4xy$.
9. Найти частные производные первого порядка, если
 - а) $z + xy + \arctgxyz = 0$;
 - б) $z = \ln \frac{x - \sqrt{x^2 - y^2}}{x + \sqrt{x^2 - y^2}}$, $y = x \cos a$.

ВАРИАНТ № 11

1. Найти область определения функции $z = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$. Сделать чертеж.
2. Определить и построить линии уровня функции $z = \frac{y}{x^2}$.
3. Дана функция $z = e^{xy}$. Показать, что $x^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - y^2 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$.
4. Найти экстремумы функции $z = x\sqrt{y} - x^2 - y + 6x + 3$.
5. Найти экстремумы функции $z = x^2 + y^2$ при условии, что $\frac{x}{3} + \frac{y}{4} = 1$.
6. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z = 2x^3 + 4y^2 + y^2 - 2xy$ в замкнутой области $y = x^2$, $y = 4$.
7. Найти приближенное значение функции $z = x^2 + 3xy + y^2$ в точке $A(0.03, 1.97)$.
8. Найти $\overline{grad} z$ и производную в точке $A(4;2)$ по направлению вектора $\bar{a} = (3; -2)$, если $z = y^2 + x^2 + 4xy$.
9. Найти частные производные первого порядка, если
 - а) $\frac{1}{2} \ln(x^2 + y^2) - \arctg \frac{y}{x} = 9xz + e^{-z}$;
 - б) $z = \arctg \frac{y}{\sqrt{x}}$, $x = e^{2t} + 1$, $y = e^{2t} - 1$.

ВАРИАНТ № 12

1. Найти область определения функции $z = \sqrt{x^2 + y} - 3$. Сделать чертеж.
2. Определить и построить линии уровня функции $z = \frac{y}{\sqrt{x}}$.
3. Дана функция $z = e^{-\cos(ax+y)}$. Показать, что $a^2 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$.
4. Найти экстремумы функции $z = x^3 + xy^2 + 6xy$.
5. Найти экстремумы функции $z = 1 - x^2 - y^2$ при условии, что $(x-1)^2 + (y-1)^2 = 1$.
6. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z = x^3 + 8y^3 - 6xy + 1$ в замкнутой области $x = 0$, $x = 2$, $-1 \leq y \leq 1$.
7. Найти приближенное значение функции $z = xy + y^2 - 2x$ в точке $A(2.03, 0.96)$.
8. Найти $\overline{grad} z$ и производную в точке $A(3; -1)$ по направлению вектора $\bar{a} = (2; 5)$, если $z = \ln(4x - 5y)$.
9. Найти частные производные первого порядка, если
 - а) $3 \cos \frac{\sqrt{x}}{y} - 2 \sin \frac{\sqrt{y}}{x} + 1 = \cos xz$;
 - б) $z = \sqrt[3]{x^3 + y^3 + 3xy}$, $r = \sin x \cos y$, $u = \cos x \sin y$.

ВАРИАНТ № 13

1. Найти область определения функции $z = \sqrt{1-x+y^2} + \sqrt{1-x^2-y^2}$.
Сделать чертеж.
2. Определить и построить линии уровня функции $z = x + y^2$.
3. Дана функция $z = \frac{y}{(x^2 - y^2)^5}$. Показать, что $\frac{1}{x} \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{1}{y} \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{z}{y^2}$.
4. Найти экстремумы функции $z = (x - y^2)\sqrt{e^y}$.
5. Найти экстремумы функции $z = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$ при условии, что $x - y = 4$.
6. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z = x^2 + y^2 - xy + x + y$ в замкнутой области $x = 0$, $y = 2$, $x + y = -3$.
7. Найти приближенное значение функции $z = x^2 - y^2 + 3x - 2y + 1$ в точке $A(1.98, 3.91)$.
8. Найти $\overline{grad} z$ и производную в точке $A(3; -1;)$ по направлению вектора $\bar{a} = (2; 5)$, если $z = \ln(5x - 3y)$.
9. Найти частные производные первого порядка, если
 - а) $zy + x^2 y + y^2 x - x + y^2 + \arcsin(x - y) = 0$;
 - б) $z = 3u^3 + \sqrt{r}$, $r = \sin y + x$, $u = \sqrt{x} + \operatorname{arctg} y$.

ВАРИАНТ № 14

1. Найти область определения функции $z = \ln(x^2 + y)$. Сделать чертеж.
2. Определить и построить линии уровня функции $z = x^2 + 2x + y^2$.
3. Дана функция $z = \sin^2(y - ax)$. Показать, что $a^2 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$.
4. Найти экстремумы функции $z = y\sqrt{x} - y^2 - x + 6y$.
5. Найти экстремумы функции $z = 3xy$ при условии, что $x^2 + y^2 = 2$.
6. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z = x^2 - y^2$ в замкнутой области $x^2 + y^2 \leq 4$.
7. Найти приближенное значение функции $z = 2x^2 + 2xy - y^2$ в точке $A(0.95, 2.94)$.
8. Найти $\overline{grad} z$ и производную в точке $A(4;1)$ по направлению вектора $\bar{a} = (7;2)$, если $z = x^2y + xy^2$.
9. Найти частные производные первого порядка, если
 - а) $x^2 - x2^{y+1} + 4^y - zyx + 2^y + 2 = 0$;
 - б) $z = \frac{u^2}{r}$, $u = x - 2y$, $r = x + 2y$.

ВАРИАНТ № 15

1. Найти область определения функции $z = \sqrt{x^2 - 4} + \sqrt{1 - y^2}$. Сделать чертеж.
2. Определить и построить линии уровня функции $z = \ln(x^2 + y)$.
3. Дана функция $z = \frac{y}{x}$. Показать, что $x^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2xy \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + y^2 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$.
4. Найти экстремумы функции $z = x^3 + 8y^3 - 6xy + 1$.
5. Найти экстремумы функции $z = xy$ при условии, что $2x + 3y - 5 = 0$.
6. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z = x^2 + y^2$ в замкнутой области $x^2 + y^2 \leq 25$.
7. Найти приближенное значение функции $z = x^2 + 3xy - y^2$ в точке $A(0.96, 2.95)$.
8. Найти $\overline{grad} z$ и производную в точке $A(4;1)$ по направлению вектора $\bar{a} = (7;2)$, если $z = 2x^2y + y^2x$.
9. Найти частные производные первого порядка, если
 - а) $zyx^2 - x + \operatorname{arctg} \frac{y}{z-x} = 0$;
 - б) $z = \frac{u^2 + r^2}{2}$, $u = xy$, $r = \frac{x}{y}$.

ВАРИАНТ № 16

1. Найти область определения функции $z = \sqrt{x^2 - y^2 - 4}$. Сделать чертеж.
2. Определить и построить линии уровня функции $z = x^2 + y^2 + 2y$.
3. Дана функция $z = y\sqrt{\frac{y}{x}}$. Показать, что $x^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - y^2 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$.
4. Найти экстремумы функции $z = e^{\frac{x}{2}}(x + y^2)$.
5. Найти экстремумы функции $z = xy$ при условии, что $3x + 4y - 5 = 0$.
6. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z = x^2 - y^2 - x + y$ в замкнутой области $x = 2, x = 0, y = 0, y = 1$.
7. Найти приближенное значение функции $z = xy + 2x - y$ в точке $A(1.93, 2.05)$.
8. Найти $\overline{grad} z$ и производную в точке $A(4;-3)$ по направлению вектора $\bar{a} = (2;-1)$, если $z = \frac{x}{y^2}$.
9. Найти частные производные первого порядка, если
 - а) $xe^y + ye^x + ze^{xz} = 0$;
 - б) $z = u^2 r^2, u = x^2 - y^2, r = x^2 - y^2$.

ВАРИАНТ № 17

1. Найти область определения функции $z = \frac{1}{\sqrt{x-1}} + \frac{1}{y}$. Сделать чертеж.
2. Определить и построить линии уровня функции $z = \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9}$.
3. Дана функция $z = \sqrt{\frac{x}{y}}$. Показать, что $x^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - \frac{\partial}{\partial y} \left(y^2 \frac{\partial z}{\partial y} \right) = 0$.
4. Найти экстремумы функции $z = 3x + 6y - x^2 - xy - y^2$.
5. Найти экстремумы функции $z = x^2 - xy + y^2 - 4x$ при условии, что $2x + 3y - 12 = 0$.
6. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z = x^2 + 2xy - 4x + 8y$ в замкнутой области $x = 0, y = 0, 5x - 3y + 45 = 0$.
7. Найти приближенное значение функции $z = 3y^2 - 9xy + y$ в точке $A(1.07, 2.94)$.
8. Найти $\overline{grad} z$ и производную в точке $A(1;2)$ по направлению вектора $\bar{a} = (-2;1)$, если $z = x^2 + xy + y^2$.
9. Найти частные производные первого порядка, если
- а) $x - y \operatorname{tg} z = 0$;
- б) $z = \frac{x^2 - y}{x^2 + y}, y = 3x + 1$.

ВАРИАНТ № 18

1. Найти область определения функции $z = \ln(x^2 - y + 5)$. Сделать чертеж.
2. Определить и построить линии уровня функции $z = \frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4}$.
3. Дана функция $z = \operatorname{arctg} \frac{x}{y}$. Показать, что $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$.
4. Найти экстремумы функции $z = x^2 + y^2 - 2x - 2y + 8$.
5. Найти экстремумы функции $z = x^2 - xy + y^2 - 4x$ при условии, что $\frac{x}{6} + \frac{y}{4} = 1$.
6. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z = 2xy - 3x^2 - 2y^2 + 5$ в замкнутой области $x = -1, y = -1, x + y = 5$.
7. Найти приближенное значение функции $z = xy + x - y$ в точке $A(1.43, 2.35)$.
8. Найти $\overline{\operatorname{grad}} z$ и производную в точке $A(-1; -2)$ по направлению вектора $\bar{a} = (1; -1)$, если $z = 4xy^2 - 2yx^2 - 3 + y^2$.
9. Найти частные производные первого порядка, если
 - а) $\operatorname{arcsin} xz + 2x^2 + \operatorname{arcctg} \frac{y^2}{y-x}$;
 - б) $z = 2u^2 - \sqrt{r}, \quad u = \sin x - y^2, \quad r = \sqrt{y} - \operatorname{arctg} x^2$.

ВАРИАНТ № 19

1. Найти область определения функции $z = \arcsin(2x + 3y)$. Сделать чертеж.
2. Определить и построить линии уровня функции $z = \frac{y^2}{4} - \frac{x^2}{9}$.
3. Дана функция $z = e^{\frac{y}{x}}$. Показать, что $\frac{\partial}{\partial x} \left(x^2 \frac{\partial z}{\partial x} \right) - y^2 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$.
4. Найти экстремумы функции $z = 3x^2 - 2x\sqrt{y} + y - 8x + 8$.
5. Найти экстремумы функции $z = x^2 + 3y^2 + x - y$ при условии, что $x + y = 1$.
6. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z = -3x^2 + 2y^2 + 12x - 4y$ в замкнутой области $x = 0, y = 0, 3x + 4y = 12$.
7. Найти приближенное значение функции $z = x^2 + y^2 - x - y$ в точке $A(1.08, -2.94)$.
8. Найти $\overline{grad} z$ и производную в точке $A(3;5)$ по направлению вектора $\bar{a} = (1; -1)$, если $z = \arcsin \frac{x}{y}$.
9. Найти частные производные первого порядка, если
 - а) $\sin(xy) - e^{xy} - x^2 y + \sin xz + yz^2 = 0$;
 - б) $z = u^2 + r^2, \quad u = x + y, \quad r = x - y$.

ВАРИАНТ № 20

1. Найти область определения функции $z = \arccos(x - y)$. Сделать чертеж.
2. Определить и построить линии уровня функции $z = x^2 + \frac{y^2}{4}$.
3. Дана функция $z = \frac{\sin(x - y)}{x}$. Показать, что $\frac{\partial}{\partial x} \left(x^2 \frac{\partial z}{\partial x} \right) - x^2 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$.
4. Найти экстремумы функции $z = 2x^3 - xy^2 + 5x^2 + y^2$.
5. Найти экстремумы функции $z = x^2 y(2 - x - y)$ при условии, что $x + y = 6$.
6. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z = 3xy - 6x^2 + 6y^2 + 15x$ в замкнутой области $x = 0, x = 2, y = 0, y = 1$.
7. Найти приближенное значение функции $z = y^2 - xy - x^2$ в точке $A(-3.91, 5.06)$.
8. Найти $\overline{\text{grad}} z$ и производную в точке $A(-1; 2)$ по направлению вектора $\bar{a} = (3; 4)$, если $z = 2x^2 + xy$.
9. Найти частные производные первого порядка, если
 - а) $x^2 + xy^2 + zy^2 + z^3 \sin x = z$;
 - б) $z = \ln(u^2 + r^2), \quad u = xy, \quad r = \frac{x}{y}$.

ВАРИАНТ № 21

1. Найти область определения функции $z = \sqrt{\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9}} - 1$. Сделать чертеж.
2. Определить и построить линии уровня функции $z = \frac{y}{\sqrt{x}}$.
3. Дана функция $z = xy + xe^{\frac{y}{x}}$. Показать, что $x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = xy + z$.
4. Найти экстремумы функции $z = 1 + 6x - x^2 - xy + y^2$.
5. Найти экстремумы функции $z = xy^2(2 - 3x + 4y)$ при условии, что $\frac{x}{4} + \frac{y}{6} = 1$.
6. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z = xy - 2x - y$ в замкнутой области $0 \leq x \leq 3$, $0 \leq y \leq 4$.
7. Найти приближенное значение функции $z = \ln(x^2 + y^2)$ в точке $A(1.96, 2.03)$.
8. Найти $\overline{grad} z$ и производную в точке $A(2; -2)$ по направлению вектора $\bar{a} = (1; 4)$, если $z = \operatorname{arctg} \frac{x}{y}$.
9. Найти частные производные первого порядка, если
 - а) $2x^2 + 2y^2 + z^2 - 8xz - zy + 8z = 0$;
 - б) $u = \frac{e^{yx}(y-z)}{a^2+1}$, $y = \arcsin x$, $z = \cos x$.

ВАРИАНТ № 22

1. Найти область определения функции $z = \sqrt{1 - \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16}}$. Сделать чертеж.
2. Определить и построить линии уровня функции $z = \frac{y}{x^2}$.
3. Дана функция $u = (x - y)(y - z)(z - x)$. Показать, что $\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z} = 0$.
4. Найти экстремумы функции $z = x^2 + xy + y^2 - 2x - y$.
5. Найти экстремумы функции $z = x + y$ при условии, что $x^2 + y^2 = 1$.
6. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z = x^3 + y^2 - 3xy$ в замкнутой области $x = 0, y = 0, 3x + 2y - 6 = 0$.
7. Найти приближенное значение функции $z = x^3 y^2$ в точке $A(1.02, 0.97)$.
8. Найти $\overline{grad} z$ и производную в точке $A(0;3)$ по направлению вектора $\bar{a} = (1; -2)$, если $z = \ln(5x^2 + 4y^2)$.
9. Найти частные производные первого порядка, если
 - а) $y^x + x^y - zxy + \arccos z = 0$;
 - б) $z = \frac{1}{2} \ln \frac{u}{r}, \quad u = \operatorname{tg}^2 x, \quad r = \operatorname{ctg}^2 x$.

ВАРИАНТ № 23

1. Найти область определения функции $z = x + \sqrt{x^2 - y^2}$. Сделать чертеж.
2. Определить и построить линии уровня функции $z = \sqrt{xy}$.
3. Дана функция $z = x + \frac{x-y}{y-z}$. Показать, что $\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z} = 1$.
4. Найти экстремумы функции $z = x^3 + y^2 - 6xy - 39x + 18y + 20$.
5. Найти экстремумы функции $z = x^2 - y^2$ при условии, что $x^2 + y^2 = 1$.
6. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z = \frac{1}{2}x^2 - xy$ в замкнутой области $y = \frac{x^2}{3}$, $y = 3$.
7. Найти приближенное значение функции $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ в точке $A(4.05, 2.93)$.
8. Найти $\overline{grad} z$ и производную в точке $A(2;0)$ по направлению вектора $\bar{a} = (2;4)$, если $z = xe^y$.
9. Найти частные производные первого порядка, если
 - а) $x^3 + 2y^3 + z^3 - 3xyz - 2y - 3 = 0$;
 - б) $z = e^{u-2r}$, $u = \sin x$, $r = x^3 + y^3$.

ВАРИАНТ № 24

1. Найти область определения функции $u = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2 - z^2}$. Сделать чертеж.
2. Определить и построить линии уровня функции $z = \frac{x}{\sqrt{y}}$.
3. Дана функция $z = e^{\frac{y}{x}}$. Показать, что $\frac{\partial}{\partial x} \left(x^2 \frac{\partial z}{\partial x} \right) - y^2 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$.
4. Найти экстремумы функции $z = 3x^3 - x^2y + 5y^2 + x^2$.
5. Найти экстремумы функции $z = x^2 - 2y^2 + 4xy - 6x - 1$ при условии, что $x + y = 3$.
6. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z = 3xy - 6x^2 + 6y^2 + 15x$ в замкнутой области $x = 0, x = 2, y = 0, y = 1$.
7. Найти приближенное значение функции $z = xy + x - y$ в точке $A(1.47, 2.53)$.
8. Найти $\overline{grad} z$ и производную в точке $A(2;1)$ по направлению вектора $\bar{a} = (3; -1)$, если $z = 2x^2 + 3xy + y^2$.
9. Найти частные производные первого порядка, если
 - а) $x = z \cdot \ln z \cdot y$;
 - б) $z = e^{x-2y}, x = \sin t, y = t^3$.

ВАРИАНТ № 25

1. Найти область определения функции $z = \arcsin(2x - y)$. Сделать чертеж.
2. Определить и построить линии уровня функции $z = x^2 + y^2 + 2x - 4y$.
3. Дана функция $z = \frac{y^2}{3x} + \arcsin(xy)$. Показать, что

$$x^2 \frac{\partial z}{\partial x} - xy \frac{\partial z}{\partial y} + y^2 = 0.$$
4. Найти экстремумы функции $z = y\sqrt{x} - x^2 + 3x + 8y$.
5. Найти экстремумы функции $z = 2x^2 + 2y^2 - 4xy - 3x - 1$ при условии, что $\frac{x}{2} + \frac{y}{2} = 1$.
6. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z = x^2 - y^2$ в замкнутой области $x^2 + y^2 \leq 4$.
7. Найти приближенное значение функции $z = 2x^2 + 2y^2 - x - y$ в точке $A(-2.02, 2.95)$.
8. Найти $\overline{grad} z$ и производную в точке $A(3;5)$ по направлению вектора $\bar{a} = (1; -1)$, если $z = \arcsin \frac{x}{y}$.
9. Найти частные производные первого порядка, если
 - а) $z^2 y^2 - x^2 e^z - z \arcsin y^2 x = 1$;
 - б) $z = 4u^2 + \sqrt{r}$, $u = \cos y + x$, $r = y^2 + \arctg x$.

ВАРИАНТ № 26

1. Найти область определения функции $z = \sqrt{1 + \frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16}}$. Сделать чертеж.
2. Определить и построить линии уровня функции $z = \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4}$.
3. Дана функция $z = \cos y + (y - x)\sin y$. Показать, что $(x - y)\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial z}{\partial y}$.
4. Найти экстремумы функции $z = (x^2 + 5xy + y)\sqrt{e^y}$.
5. Найти экстремумы функции $z = 1 - x^2 - y^2$ при условии, что $(x + 1)^2 + (y + 1)^2 = 1$.
6. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z = xy + x + y$ в замкнутой области $x = 1, x = 2, y = 2, y = 3$.
7. Найти приближенное значение функции $z = x^2 - y^2 + 6x + 3y$ в точке $A(2.02, 2.97)$.
8. Найти $\overline{grad} z$ и производную в точке $A(3; -1;)$ по направлению вектора $\bar{a} = (2; 5)$, если $z = \ln(4x - 3y)$.
9. Найти частные производные первого порядка, если
- а) $z \arcsin yx = xy^2 z^2 - 3x - 4y + 2z$;
- б) $z = 5u^2 - r^2, u = \cos x + y, r = y^3 + \arcsin x$.

ВАРИАНТ № 27

1. Найти область определения функции $z = \sqrt{x+y} \ln(y^2 - x^2)$. Сделать чертеж.
2. Определить и построить линии уровня функции $z = x^2 + y - 1$.
3. Дана функция $z = \frac{y^2}{3x} + \arcsin(xy)$. Показать, что
$$x^2 \frac{\partial z}{\partial x} - xy \frac{\partial z}{\partial y} + y^2 = 0.$$
4. Найти экстремумы функции $z = x^2 + xy + y^2 - 6x - 9y$.
5. Найти экстремумы функции $z = x^2 y(2 + x + y)$ при условии, что $x - y = 6$.
6. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z = x^3 + y^2 - 3xy$ в замкнутой области $x = 0, y = 0, 3x + 2y - 6 = 0$.
7. Найти приближенное значение функции $z = x^3 y^2$ в точке $A(1.02, 0.97)$.
8. Найти $\overline{grad} z$ и производную в точке $A(-1;2)$ по направлению вектора $\bar{a} = (2;1)$, если $z = x^2 + ux - y^3$.
9. Найти частные производные первого порядка, если
 - а) $zxy^2 + \cos z \frac{y}{x} - \arccos \frac{x}{y} = 0$;
 - б) $z = r^2 \sqrt{u}, u = \arcsin x^2, r = \cos^2 x$.

ВАРИАНТ № 28

1. Найти область определения функции $z = \sqrt{1 + x^2 + y^2} + \sqrt{1 - x + y^2}$. Сделать чертеж.
2. Определить и построить линии уровня функции $z = \sqrt{xy + 1}$.
3. Дана функция $z = x^y$. Показать, что $y \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = (1 + y \ln x) \frac{\partial z}{\partial x}$.
4. Найти экстремумы функции $z = x\sqrt{y} + x^2 + y + 6x + 3$.
5. Найти экстремумы функции $z = x^2 - y^2$ при условии, что $3x + 4y = 12$.
6. Найти приближенное значение функции $z = x^2 + 2xy + 3y^2$ в точке $A(1.96, 1.04)$.
7. Найти приближенное значение функции $z = x^2 + 3xy - y^2$ в точке $A(0.96, 2.95)$.
8. Найти $\overline{grad} z$ и производную в точке $A(-2;4)$ по направлению вектора $\bar{a} = (1; -4)$, если $z = 4x^2 + 6 - y^2 + 2x + 5xy$.
9. Найти частные производные первого порядка, если
 - а) $zxe^{\sqrt{xy}} + \frac{x}{y} + \sqrt{\cos(xy)^3} = 0$;
 - б) $z = 5u^2 + \sqrt{r}$, $u = y - \sin^2 x$, $r = x + \arctg y$.

ВАРИАНТ № 29

1. Найти область определения функции $z = \sqrt{8x} - \frac{5}{\sqrt{y-1}}$. Сделать чертеж.
2. Определить и построить линии уровня функции $z = \frac{\sqrt{x}}{y}$.
3. Дана функция $z = xe^{-\frac{y}{x}}$. Показать, что $x^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2xy \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + y^2 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$.
4. Найти экстремумы функции $z = 1 + 6x - x^2 - xy + y^2$.
5. Найти экстремумы функции $z = x^2 + 2y^2 + 4xy - 6x - 1$ при условии, что $x - y = 3$.
6. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z = 2xy - 3x^2 - 2y^2 + 5$ в замкнутой области $x = -1, y = -1, x + y = 5$.
7. Найти приближенное значение функции $z = xy + y^2 - 2x$ в точке $A(2.03, 0.96)$.
8. Найти $\overline{grad} z$ и производную в точке $A(2;1)$ по направлению вектора $\bar{a} = (3; -1)$, если $z = 2x^2 + 3xy + y^2$.
9. Найти частные производные первого порядка, если
 - а) $tgzy + x^2 yz + xy \sin(ax + by) = 0$;
 - б) $z = u^3 - r^3, u = x - y, r = x + y$.

ВАРИАНТ № 30

1. Найти область определения функции $z = \arccos \frac{y^2}{x}$. Сделать чертеж.
2. Определить и построить линии уровня функции $z = \frac{y}{\sqrt{x}}$.
3. Дана функция $z = \sin(x + ay)$. Показать, что $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = a^2 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$.
4. Найти экстремумы функции $z = 3x + 6y + x^2 + xy - y^2$.
5. Найти экстремумы функции $z = 6 + 4x + 3y$ при условии, что $x^2 + y^2 = 1$.
6. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z = -3x^2 + 2y^2 + 12x - 4y$ в замкнутой области $x = 0, y = 0, 3x + 4y = 12$.
7. Найти приближенное значение функции $z = xy + y^2 - 2x$ в точке $A(2.03, 0.96)$.
8. Найти $\overline{grad} z$ и производную в точке $A(1; -2)$ по направлению вектора $\bar{a} = (4; 7)$, если $z = 5xy + 3x^2 + 4y^2$.
9. Найти частные производные первого порядка, если
 - а) $4 \sin \frac{\sqrt{x}}{y^2} - 3 \cos \frac{\sqrt{y}}{x^2} + z^3 x^4 + \ln zy = 0$;
 - б) $z = \ln^2(4u - 5r), \quad u = \sin^2 x \cos y, \quad r = \cos^2 y \sin x$.