Министерство транспорта Российской Федерации
Федеральное агентство железнодорожного транспорта
Федеральное государственное бюджетное
образовательное учреждение высшего образования
«Дальневосточный государственный университет путей сообщения»

Кафедра «Высшая математика»

РЯДЫ
ПРИЛОЖЕНИЯ РЯДОВ

Методическое пособие
по решению задач курса «Теория рядов»

Составители:
М.А. Городилова, Г.В. Костина

Хабаровск
Издательство ДВГУПС
2016

УДК 517.521(075.8)

ББК В161.3 я 73
Р 988

Рецензент – кандидат физико-математических наук,
доцент кафедры «Высшая математика» ДВГУПС
В.И. Жукова

Составители:
М.А. Городилова, Г.В. Костина

Р 988 Ряды. Приложения рядов : методическое пособие по решению задач курса «Теория рядов» / сост. М.А. Городилова, Г.В. Костина. – Хабаровск : Изд-во ДВГУПС, 2016. – 54 с. : ил.

Методическое пособие соответствует рабочей программе дисциплин «Математика», «Высшая математика».

Содержит основные положения из теории рядов, рекомендации по решению задач, а также варианты индивидуальных заданий.

Предназначены для студентов 1-го и 2-го курсов очной формы обучения по направлениям подготовки бакалавров 01.03.02 «Прикладная математика и информатика», 11.03.02 «Инфокоммуникационные технологии и системы связи», магистров 38.04.06 «Торговое дело», по специальностям 23.05.05 «Системы обеспечения движения поездов», 23.05.01 «Наземные транспортно-технологические средства», 21.03.01 «Нефтегазовое дело», 23.05.03 «Подвижной состав железных дорог».

УДК 517.521(075.8)
ББК В161.3 я 73

© ДВГУПС, 2016

ВВЕДЕНИЕ

Методическое пособие разработано в соответствии с профессиональной образовательной программой. В пособии изложены общие теоретические положения по теме «Числовые и степенные ряды. Ряды Фурье».

Подробно рассмотрены примеры исследования числовых и степенных рядов, рядов Фурье, их применение к приближенным вычислениям и решению дифференциальных уравнений. Даны варианты индивидуальных заданий.

Курс теории рядов является одним из основных разделов высшей математики, который изучают студенты всех специальностей технических вузов. Целью изучения дисциплины является формирование у студентов необходимых компетенций:

ОК: способность к обобщению, анализу, восприятию информации, постановке цели и выбору путей её достижения;

ПК: способность приобретать новые математические и естественнонаучные знания, используя современные образовательные и информационные технологии.

В результате освоения темы студент должен:

знать: основные понятия и методы математического анализа, дифференциального и интегрального исчисления.

уметь: использовать основные законы естественнонаучных дисциплин в профессиональной деятельности; применять математические методы, использовать возможности вычислительной техники;

владеть: математическим аппаратом для разработки математических моделей процессов и явлений и решения практических задач профессиональной деятельности.

Пособие рекомендуется к использованию на практических занятиях и для самостоятельной работы студентов.

1. РЯД И ЕГО СУММА

Числовым рядом называется выражение вида

$$u_1 + u_2 + u_3 ... + ... u_n + ... = \sum_{n=1}^{\infty} u_n \ , \qquad (1.1)$$

где $u_1, u_2, u_3 .... u_n$ образуют бесконечную числовую последовательность; u_n – общий член ряда.

Сумма n первых членов ряда называется n-й частичной суммой ряда и обозначается S_n.

$$S_n = u_1 + u_2 + u_3 ... + ... u_n \ .$$

Если существует конечный предел $S = \lim\limits_{n\to\infty} S_n$, то ряд называется сходящимся, а S – суммой ряда.

Ряд называется расходящимся, если $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ не существует (в частности, если $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \infty$).

Пример 1. Доказать, что ряд $\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + ... + \frac{1}{n\cdot(n+1)} + ...$ сходится, и найти его сумму.

$$S_n = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + ... + \frac{1}{n\cdot(n+1)}.$$

Представим дробь $\frac{1}{n\cdot(n+1)}$ в виде суммы простейших дробей.

$$\frac{1}{n\cdot(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}.$$

$$S_n = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{5}\right) + ... + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = 1 - \frac{1}{n+1}.$$

Так как $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = 1$, то ряд сходится и его сумма равна 1.

Особое значение имеет задача об исследовании ряда на сходимость.

Пример 2. Доказать, что ряд $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + ... + \frac{1}{2^{n-1}} + ...$ сходится, найти его сумму.

Члены ряда образуют геометрическую прогрессию с первым членом $a = 1$ знаменателем $q = 0{,}5$.

Сумма n первых членов геометрической прогрессии равна

$$S_n = \frac{a - a \cdot q^n}{1-q} = \frac{1-0{,}5^n}{1-0{,}5} = 2(1-0{,}5^n) \Rightarrow S = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} 2(1-0{,}5^n) = 2.$$

Ряд сходится, и его сумма равна 2.

Теорема (необходимый признак сходимости ряда)
Если ряд (1.1) сходится, то предел его общего члена равен нулю:

$$\lim_{n\to\infty} u_n = 0.$$

Отсюда вытекает, что если $\lim_{n\to\infty} u_n \neq 0$, то ряд расходится. Если же $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$, то о сходимости ряда еще ничего сказать нельзя.

Пример 3. Можно ли с помощью необходимого признака решить вопрос о сходимости ряда?

а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n}{3n+1}$

$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{2n}{3n+1} = \left|\frac{\infty}{\infty}\right| = {}^{2}\!/_{3} \neq 0$ – значит, данный ряд расходится;

б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n + 2}$

$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{3^n+2} = \left|\frac{1}{\infty}\right| = 0$ – т. е. о сходимости данного ряда еще ничего сказать нельзя.

2. СХОДИМОСТЬ РЯДОВ С ПОЛОЖИТЕЛЬНЫМИ ЧЛЕНАМИ

Если необходимый признак сходимости ряда не дает ответа на вопрос о сходимости числового ряда с положительными членами (1.1), то следует применить достаточные признаки сходимости.

Первый признак сравнения

Пусть даны ряды $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ с положительными членами, причем начиная с некоторого номера n, будет выполнено неравенство $u_n \le v_n$. Тогда из сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ следует сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$; из расходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ следует расходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$.

Другими словами, пусть дан ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$, сходимость или расходимость которого надо определить. Выбираем ряд $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ с положительными членами, сходимость или расходимость которого известна, причем начиная с некоторого номера n, будет выполнено неравенство $u_n \le v_n$. Тогда, если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ сходится, то и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ сходится (если сходится ряд с большими членами, то с меньшими тем более сходится). И, если $u_n \ge v_n$ и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ расходится, то и данный ряд – расходится (если ряд с меньшими членами расходится, то с большими тем более расходится).

Сравнение исследуемых рядов производится обычно с некоторыми стандартными рядами:

а) $\sum_{n=1}^{\infty} aq^n$, $a \ne 0$ (геометрическая прогрессия, сходящаяся при $|q| < 1$ и расходящаяся при $|q| > 1$);

б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$ (обобщенный гармонический ряд, сходящийся при $\alpha > 1$ и расходящийся при $\alpha \le 1$).

Пример 4. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\ln(n+1)}$.

Сравнивая общий член данного ряда с общим членом расходящегося гармонического ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$, убеждаемся, что $\frac{1}{\ln(n+1)} \ge \frac{1}{n}$ при всех n, следовательно, исследуемый ряд расходится.

Второй признак сравнения. Если $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ – ряды с положительными членами и существует конечный, отличный от нуля предел $\lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = A > 0$, то рассматриваемые ряды одновременно сходятся или расходятся. Если же $\lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = 0$, то из сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ следует сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$.

Пример 5. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n}{3n^3+n+1}$. Сравним данный ряд со сходящимся рядом $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n}{3n^3+n+1}\right):\frac{1}{n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{2n^3}{3n^3+n+1}=\frac{2}{3}\neq 0,$$

т.е. ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n}{3n^3+n+1}$ тоже сходится.

Признак Даламбера. Если существует предел $\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\rho$, то при $\rho<1$ ряд сходится, а при $\rho>1$ – расходится. При $\rho=1$ ряд может сходиться или расходиться.

Пример 6. Исследовать ряд на сходимость с помощью признака Даламбера.

а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^{n+2}}{(2n+1)!}$

$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{3^{n+3}(2n+1)!}{(2n+3)!\cdot 3^{n+2}}=\lim_{n\to\infty}\frac{3}{(2n+3)(2n+2)}=0<1$; следовательно, ряд сходится;

б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n+1}{n^2}$

$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(3^{n+1}+1)n^2}{(n+1)^2(3^n+1)}=3>1$; значит, ряд расходится.

Признак Коши (радикальный).

Если существует предел $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=\rho$, то при $\rho<1$ ряд $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ сходится, а при $\rho>1$ – расходится. При $\rho=1$ ряд может сходиться или расходиться.

Замечание. Если применение одного из признаков (Даламбера или Коши) не дает ответа о сходимости ряда, то применение другого признака тоже бесполезно.

Пример 7. Исследовать ряд на сходимость с помощью признака Коши.

а) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n}{n+3}\right)^{2n-1}$

$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{2n}{n+3}\right)^{2n-1}}\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n}{n+3}\right)^{\frac{2n-1}{n}}=4>1$, ряд расходится;

б) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}$

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-n}=e^{-1}<1.$$

Значит, ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}$ сходится.

Пример 8. Исследовать ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3n}{3n+1}\right)^{2n}$ на сходимость.

Так как $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{3n}{3n+1}\right)^{2n}}=1$, применение признака Коши результата не дает.

Воспользуемся необходимым признаком.

$$\lim_{n\to\infty}u_n=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{3n}{3n+1}\right)^{2n}=\left|1^{\infty}\right|=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{3n+1}\right)^{2n}=e^{-\frac{2}{3}}\neq 0.$$

Ряд расходится.

Интегральный признак Коши.

Пусть общий член ряда (1) $u_n=f(n)$. Если непрерывная положительная функция $f(x)$, принимающая в точках $x=n$ $(n=1,2,3,...)$ значения $f(x)$, монотонно убывает на промежутке $1\le x<\infty$, то ряд (1) сходится, если сходится несобственный интеграл $\int_1^{\infty}f(x)dx$.

Пример 9. С помощью интегрального признака исследовать на сходимость ряды.

а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n^2+3}$

Так как $f(n)=\frac{n}{n^2+3}$, то $f(x)=\frac{x}{x^2+1}$. Данная функция непрерывна на промежутке $1\le x<\infty$ и монотонно убывает на нем.

Вычислим $\int_1^{\infty}\frac{xdx}{x^2+3}=\lim_{b\to\infty}\int_1^{b}\frac{xdx}{x^2+3}=\lim_{b\to\infty}\frac{1}{2}\ln\left(x^2+3\right)\Big|_1^{b}=\lim_{b\to\infty}\frac{1}{2}\left(\ln\left(b^2+3\right)-\ln 4\right)=\infty$.

Интеграл расходится, следовательно, ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n^2+3}$ тоже расходится

б) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^2-1}$, $f(x)=\frac{1}{x^2-1}$

$$\int_2^{\infty}\frac{dx}{x^2-1}=\lim_{b\to\infty}\int_2^{\infty}\frac{dx}{x^2-1}=\lim_{b\to\infty}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|\Bigg|_2^b=\lim_{b\to\infty}\left(\ln\left|\frac{b-1}{b+1}\right|-\ln\frac{1}{3}\right)=\ln 3.$$

Несобственный интеграл $\int_2^{\infty}\frac{dx}{x^2-1}$ сходится, значит, ряд $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^2-1}$ тоже сходится.

3. ЗНАКОЧЕРЕДУЮЩИЕСЯ РЯДЫ

Знакочередующимся называется ряд вида

$$u_1-u_2+u_3-u_4...+...-u_n(-1)^{n-1}+...=\sum_{n=1}^{\infty}u_n(-1)^{n-1}, \qquad (3.1)$$

где $u_0,u_1,u_2,u_3....u_n$ – положительные числа.

Теорема Лейбница. Если члены знакочередующегося ряда (3.1) удовлетворяют условиям $u_1>u_2>u_3>....>u_n>...$ и $\lim_{n\to\infty}u_n=0$, то такой ряд сходится.

Остаток данного ряда $r_n=u_{n+1}(-1)^n+u_{n+2}(-1)^{n+1}...$ имеет знак своего первого члена и меньше его по абсолютной величине, т. е. $|r_n|<u_{n+1}$.

Это неравенство используется для оценки погрешности, получаемой при замене суммы ряда её частичной суммой, при этом погрешность не превышает модуля первого из отброшенных членов ряда.

Ряд (3.1) называется абсолютно сходящимся, если сходится ряд $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$, составленный из модулей членов данного ряда.

Ряд (3.1) называется условно сходящимся, если он сходится, а ряд из модулей расходится. Исследование сходимости знакочередующихся рядов удобно начинать с исследований абсолютной сходимости, так как это часто быстрее приводит к цели, чем применение признака Лейбница с последующим исследованием абсолютной сходимости ряда.

Пример 10. Исследовать на сходимость знакочередующиеся ряды.

а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2+1}$

Составим ряд из модулей членов данного ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+1}$. Он сходится как обобщенный гармонический ряд с показателем $\alpha = 2 > 1$. Следовательно сходится и данный ряд, причем абсолютно.

б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5^n(-1)^n}{n}$

Ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5^n}{n}$, составленный из модулей членов данного ряда, расходится по признаку Даламбера, так как $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{5^{n+1}n}{(n+1)5^n} = 5 > 1$.

Условия теоремы Лейбница для данного знакочередующегося ряда не выполняются, т. е. с возрастанием n модуль n-го члена ряда не стремится к нулю $\left(\lim\limits_{n\to\infty}\frac{5^n}{n}=\infty\right)$. Отсюда следует, что данный знакочередующийся ряд – расходящийся.

4. СТЕПЕННЫЕ РЯДЫ

Функциональным рядом называется ряд вида

$$u_1(x)+u_2(x)+u_3(x)...+...u_n(x)+...=\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x),$$

где $u_1(x), u_2(x), u_3(x), ... u_n(x) ...$ – последовательность функций, имеющих общую область определения.

При каждом значении x_0 из этой области функциональный ряд обращается в числовой ряд.

Область сходимости функционального ряда – это множество значений аргумента, при которых он сходится. В области сходимости ряда определена функция $S(x)$, называемая суммой ряда. Чаще всего используют функциональные ряды двух типов: степенные и тригонометрические.

Степенным рядом называется функциональный ряд вида

$$\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^n = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + ... \text{ или}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + ..., \text{ если } x_0 = 0.$$

Теорема Абеля. Если ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ сходится в некоторой точке x_0, то он абсолютно сходится при любом x, таком, что $|x| < |x_0|$.

Следствие. Если ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ расходится в некоторой точке x_0, то он расходится во всех точках x, таких, что $|x| > |x_0|$.

Областью сходимости всякого степенного ряда является интервал числовой оси, симметричный относительно точки $x = x_0$, который может быть закрытым, открытым или полуоткрытым.

Половина длины интервала сходимости называется радиусом сходимости степенного ряда R.

В частных случаях радиус сходимости ряда R может быть равен нулю или бесконечности. Если $R = 0$, то степенной ряд сходится лишь при $x = x_0$ если же $R = \infty$, то ряд сходится на всей числовой оси Ox.

Одним из способов определения интервала сходимости степенного ряда является применение признаков Даламбера или Коши. На концах интервала сходимости степенной ряд может как сходиться, так и расходиться, внутри же интервала ряд сходится абсолютно.

Пример 11. Определить интервал сходимости степенного ряда.

а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{5^{n-1}\sqrt{n}}$

По известному члену ряда u_n, заменяя в нем n через $n + 1$, находим следующий за ним член u_{n+1}

$$u_n = \frac{x^n}{5^{n-1}\sqrt{n}}, \quad u_{n+1} = \frac{x^{n+1}}{5^n\sqrt{n+1}}$$

Далее, используя признак Даламбера, ищем предел

$$\rho = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{x^{n+1}5^{n-1}\sqrt{n}}{5^n\sqrt{n+1}x^n}\right| = \frac{|x|}{5}\lim\sqrt{\frac{n}{n+1}} = \frac{|x|}{5}$$

и определяем, при каких значениях x этот предел будет меньше единицы, т. е. решаем неравенство

$$\frac{|x|}{5} < 1; \quad |x| < 5; \quad -5 < x < 5.$$

Согласно признаку Даламбера, при любом значении x из найденного интервала данный ряд сходится, а при $|x| > 5$ расходится.

Граничные точки $x = \pm 5$ этого интервала, для которых $\rho = 1$ и признак Даламбера не решает вопроса о сходимости ряда, исследуем особо.

При $x=-5$ получим числовой знакочередующийся ряд $\sum\limits_{n\to\infty}^{\infty}\frac{(-1)^n 5}{\sqrt{n}}$, который сходится согласно признаку Лейбница.

При $x=5$ получим числовой ряд с положительными членами $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{5}{\sqrt{n}}$, который расходится (по интегральному признаку сходимости).

Следовательно, интервалом сходимости ряда является полуоткрытый интервал $[-5;5)$.

б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(x+4)^{2n}}{n^2}$.

Здесь $u_n=\frac{(x+4)^{2n}}{n^2}$, $u_{n+1}=\frac{(x+4)^{2n+2}}{(n+1)^2}$.

$$\rho=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|=\lim\left|\frac{n^2(x+4)^{2n+2}}{(n+1)^2(x+4)^{2n}}\right|=|x+4|^2\lim\left(\frac{n^2}{(n+1)^2}\right)^2=|x+4|^2.$$

$$|x+4|^2<1 \;\Rightarrow\; |x+4|<1\Rightarrow \quad -5<x<-3.$$

Границы найденного интервала исследуем особо.

При $x=-5$ получим ряд с положительными членами $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$.

Используя интегральный признак, выясняем, что ряд сходится.

$$\int_1^{\infty}\frac{dx}{x^2}=\lim_{\beta\to\infty}\int_1^{\beta}x^{-2}dx=\lim_{\beta\to\infty}\left(-\frac{1}{x}\right)\Bigg|_1^{\beta}=\lim_{\beta\to\infty}\left(1-\frac{1}{\beta}\right)=1.$$

При $x=-3$ получаем такой же ряд, следовательно, интервал сходимости $-5\le x\le -3$ или $[-5;-3]$.

в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(3x-4)^{n-1}$

$$u_n=(3x-4)^{n-1},\qquad u_{n+1}=(3x-4)^n,$$

$$\rho=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(3x-4)^n}{(3x-4)^{n-1}}\right|=|3x-4|,$$

$$|3x-4|<1\Rightarrow \quad 1<x<\frac{5}{3}.$$

Исследуем концы интервала:

$x=1$, $\qquad \sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}=1-1+1-1+\ldots,$ $\qquad x=\frac{5}{3}$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}1=1+1+1+1+\ldots.$

Оба ряда расходятся, так как не выполняется необходимое условие сходимости $\left(\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0\right)$. Следовательно, интервал сходимости $1 < x < \frac{5}{3}$ или $\left(1; \frac{3}{5}\right)$.

г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(x+5)^{2n+1}}{(n+1)!}$

$$u_n = \frac{(x+5)^{2n+1}}{(n+1)!},\ u_{n+1} = \frac{(x+5)^{2n+3}}{(n+2)!},$$

$$\rho = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(x+5)^{2n+3}(n+1)!}{(n+2)!(x+5)^{2n+1}}\right| = (x+5)^2 \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+2} = (x+5)^2 0 = 0 < 1.$$

Следовательно, интервал сходимости есть $-\infty < x < \infty$, т. е. вся числовая ось.

д) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} n! x^n$

$$u_n = n! x^n, \qquad u_{n+1} = (n+1)! x^{n+1},$$

$\rho = \lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{(n+1)! x^{n+1}}{n! x^n}\right| = |x| \lim\limits_{n\to\infty}(n+1) = \infty > 1$ при любом x, кроме $x = 0$.

Ряд сходится при $x = 0$.

е) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n n^n}{n!}$

$$u_n = \frac{x^n n^n}{n!} \qquad u_{n+1} = \frac{x^{n+1}(n+1)^{n+1}}{(n+1)!}.$$

$$\rho = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{x^{n+1}(n+1)^{n+1} n!}{(n+1)! x^n n^n}\right| =$$

$$= |x| \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)n^n} = |x| \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^n}{n^n} = |x| \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^n = |x| \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = |x| e.$$

$$|x| e < 1; \qquad -\frac{1}{e} < x < \frac{1}{e}.$$

Исследуем ряд на границах интервала:

$$x = \frac{1}{e}, \quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^n}{n! e^n}.$$

При больших значениях n можно применить формулу Стирлинга

$$n! \approx \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n.$$

Получим $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(\frac{1}{e}\right)^n n^n e^n}{n^n \sqrt{2\pi n}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi n}}$. Данный ряд расходится, как обобщенный гармонический ряд с показателем $\alpha = \frac{1}{2} < 1$.

$$x = \left(-\frac{1}{e}\right)$$

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{2\pi n}}$. Ряд сходится условно, так как $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi n}} = 0$.

Следовательно, интервал сходимости $-\frac{1}{e} \le x < \frac{1}{e}$.

Отметим следующее свойство степенных рядов: ряды, полученные дифференцированием и интегрированием степенного ряда, имеют тот же интервал сходимости и их сумма внутри интервала сходимости равна соответственно производной и интегралу от суммы первоначального ряда.

Таким образом, если $S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-a)^n$, то $S'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} n \cdot a_n (x-a)^{n-1}$,

$\int_a^x S(x)dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n (x-a)^{n+1}}{n+1}$, где $-R \le x - a < R.$

Операцию почленного дифференцирования и интегрирования можно производить над степенным рядом сколько угодно раз. Следовательно, сумма степенного ряда внутри его интервала сходимости является бесконечно дифференцируемой функцией.

Пример 12. Найти сумму ряда.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(n+1)x^{n-1}}{2^{n+1}}.$$

Найдем интервал сходимости ряда:

$$u_n = \frac{n(n+1)x^{n-1}}{2^{n+1}}, \quad u_{n+1} = \frac{(n+1)(n+2)x^n}{2^{n+2}},$$

$$\rho = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{(n+1)(n+2)x^n 2^{n+1}}{n(n+1)x^{n-1}2^{n+2}} \right| = \frac{|x|}{2} < 1.$$

Ряд сходится при $-2 < x < 2$. На границах интервала ряд расходится.

Проинтегрируем почленно дважды искомый ряд, обозначив за $S(x)$ его сумму.

$$S_1(x)=\int_0^x S(x)dx=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)x^n}{2^{n+1}},\quad S_2(x)=\int_0^x S_1(x)dx=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{x}{2}\right)^{n+1}.$$

В интервале $-2<x<2,$ получим бесконечно убывающую геометрическую прогрессию. Так как $S=\frac{a_1}{1-q}$, где $a_1=\left(\frac{x}{2}\right)^2, q=\frac{x}{2},$ то

$$S_2(x)=\frac{\left(\frac{x}{2}\right)^2}{1-\frac{x}{2}}=\frac{1}{2}\cdot\frac{x^2}{2-x}.$$

Продифференцировав почленно дважды эту сумму, получим

$$S_2'(x)=S_1(x)=\frac{1}{2}\cdot\frac{2x(2-x)+x^2}{(2-x)^2}=\frac{x}{2}\cdot\frac{4-2x+x}{(2-x)^2}=\frac{4x-x^2}{2(2-x)^2}.$$

$$S(x)=S_1'(x)=\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{4x-x^2}{(2-x)^2}\right)'=\frac{1}{2}\cdot\frac{(4-2x)(2-x)^2+2(4x-x^2)(2-x)}{(2-x)^4}=\frac{4}{(2-x)^3}.$$

Итак, $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n(n+1)x^{n-1}}{2^{n+1}}=\frac{4}{(2-x)^3}$. Этот ряд сходится при $-2<x<2.$

5. РЯД ТЕЙЛОРА. ПРИЛОЖЕНИЯ СТЕПЕННЫХ РЯДОВ

Рядом Тейлора для функции $f(x)$ в окрестности точки a называется степенной ряд относительно двучлена $(x-a)$ вида

$$f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n+\ldots \qquad (5.1)$$

При $a=0$ ряд Тейлора есть степенной ряд относительно переменной x:

$$f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\ldots, \qquad (5.2)$$

который называется рядом Маклорена.

Пусть функция $f(x)$ имеет на отрезке $[a-\delta;a+\delta]$ производные до $(n+1)$ порядка включительно, причем $f^{(n+1)}(x)$ непрерывна на этом отрезке. Тогда для любого X из этого отрезка имеет место формула Тейлора.

$$f(x)=f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n+r_n(x),$$

где $r_n(x)$ – остаточный член ряда.

В форме Лагранжа остаточный член ряда имеет вид

$$r_n(x)=\frac{(x-a)^n}{n!}f^{(n)}(a+\theta(x-a)),\quad 0<\theta<1.$$

Ряд Тейлора можно записать для любой функции $f(x)$, которая в окрестности точки $x=a$ имеет производные любого порядка. Однако этот ряд представляет данную функцию $f(x)$ только тогда, когда остаточный член ряда будет стремиться к нулю.

При решении многих задач рекомендуется пользоваться следующими разложениями элементарных функций:

$$e^x=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}+\ldots,\ x\in R;$$

$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\ldots+(-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}+\ldots,\ x\in R;$$

$$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\ldots+(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}+\ldots,\ x\in R;$$

$$arctgx=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{7}+\ldots+(-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)}+\ldots,\quad |x|<1;$$

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\ldots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+\ldots,\quad |x|<1;$$

$$(1+x)^m=1+\frac{mx}{1!}+\frac{m(m-1)x^2}{2!}+\frac{m(m-1)(m-2)x^3}{3!}+\ldots+\frac{m(m-1)..(m-n+1)x^n}{n!}+\ldots;$$
$$|x|<1.$$

$$\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+x^3+\ldots+x^{n+1}+\ldots,\quad |x|<1.$$

$$\arcsin x=x+\frac{1}{2}\frac{x^3}{3}+\frac{1\cdot3}{2\cdot4}\frac{x^5}{5}+\frac{1\cdot3\cdot5}{2\cdot4\cdot6}\frac{x^7}{7}+\ldots=x+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\frac{x^{2n+1}}{2n+1}\quad |x|<1$$

$$\arccos x=\frac{\pi}{2}-\arcsin x;\quad arcctgx=\frac{\pi}{2}-arctgx$$

Пример 13. Разложить функцию в ряд Маклорена, используя разложения элементарных функций.

а) $e^{\sqrt{x}}$

Воспользуемся разложением функции $e^x=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}++\ldots+\frac{x^n}{n!}+\ldots$,

тогда $e^{\sqrt{x}}=1+\frac{\sqrt{x}}{1!}+\frac{x}{2!}+\frac{x\sqrt{x}}{3!}+\ldots+\frac{(\sqrt{x})^n}{n!}+\ldots$

Ряд сходится к данной функции при всех значениях x.

б) $\sin^2 x$

$$\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2};$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \ldots,\ x \in R;$$

$$\sin^2 x = \frac{(2x)^2}{2\cdot 2!} - \frac{(2x)^4}{2\cdot 4!} + \frac{(2x)^6}{2\cdot 6!} + \ldots + (-1)^n \frac{(2x)^{2n}}{2\cdot(2n)!} + \ldots.$$

Ряд сходится при всех значениях x.

в) $\ln(3+x)$

Преобразуем аргумент функции.

$$\ln(3+x) = \ln\left[3\cdot\left(1+\frac{x}{3}\right)\right] = \ln 3 + \ln\left(1+\frac{x}{3}\right).$$

Воспользуемся разложением функции $\ln(1+t)$, полагая $t = \frac{x}{3}$.

$$\ln(3+x) = \ln 3 + x/3 - \frac{(x/3)^2}{2} + \frac{(x/3)^3}{3} - \ldots + (-1)^{n+1}\frac{(x/3)^n}{n} + \ldots$$

Так как разложение $\ln(1+t)$ имеет место при $|t|<1$, то исходное разложение будет иметь место при $|\frac{x}{3}|<1$, т. е. $|x|<3$.

Рассмотрим применение степенных рядов для вычисления значений функций при различных значениях x и определенных интегралов.

Пример 14. Пользуясь соответствующими разложениями элементарных функций в ряд, вычислить с точностью до 0,0001.

а) $\sqrt[4]{17}$

$$\sqrt[4]{17} = \sqrt[4]{16+1} = 2\left(1+\frac{1}{16}\right)^{\frac{1}{4}}$$

Применим биномиальный ряд, полагая $x = \frac{1}{16}$, $m = \frac{1}{4}$:

$$2\left(1+\frac{1}{16}\right)^{\frac{1}{4}} = 2\left(1 + \frac{1}{4\cdot 16} - \frac{1\cdot 3}{4\cdot 8\cdot 16^2} + \frac{1\cdot 3\cdot 7}{4\cdot 8\cdot 12\cdot 16^3} - \ldots\right).$$

Чтобы определить, сколько взять первых членов этого знакочередующегося ряда для вычисления $\sqrt[4]{17}$ с точностью до 0,0001, вычислим $a_1 = 1$; $a_2 \approx 0{,}01562$; $a_3 \approx -0{,}00037$; $a_4 \approx 0{,}00001$.

Ошибка искомого приближенного значения корня будет меньше 0,0001. Значит

$$\sqrt[4]{17} \approx 2(1 + 0{,}01562 - 0{,}00037) \approx 2{,}0305.$$

б) $\int_0^1 \cos\sqrt{x}dx$;

Так как

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \ldots,\ x \in R,$$

то

$$\int_0^1 \cos\sqrt{x}dx = \int_0^1 (1 - \frac{x}{2!} + \frac{x^2}{4!} - \frac{x^3}{6!} + \ldots)dx = (x - \frac{x^2}{2 \cdot 2!} + \frac{x^3}{3 \cdot 4!} - \frac{x^4}{4 \cdot 6!} + \ldots)\Big|_0^1 =$$

$$= 1 - \frac{1}{2 \cdot 2!} + \frac{1}{3 \cdot 4!} - \frac{1}{4 \cdot 6!} + . \frac{1}{5 \cdot 8!} + \ldots$$

Пятый член этого знакочередующегося ряда меньше 0,0001. Поэтому для вычисления искомого приближенного значения достаточно взять сумму первых четырех первых членов ряда, т. е. $\int_0^1 \cos\sqrt{x}dx; \approx 0{,}7635$.

6. ИНТЕГРИРОВАНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ПОМОЩЬЮ РЯДОВ

Пусть требуется найти решение уравнения

$$y' = f(x, y), \tag{6.1}$$

удовлетворяющее начальному условию $y(x_0) = y_0$. Будем искать решение уравнения в виде:

$$y = y(x_0) + \frac{y'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{y''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \ldots \tag{6.2}$$

Свободный член $y(x_0)$ этого разложения известен: он равен y_0. Подставив в (6.1) значение $x = x_0$, найдем и $y'(x_0) = f(x_0, y_0)$.

Далее, дифференцируя (6.1), получаем $y'' = f'_x(x, y) + f'_y(x, y)y'$ (6.3), откуда находим $y''(x_0)$.

Аналогично этому, дифференцируя (6.3), найдем $y'''(x_0)$ и т. д.

Пример 15. Найти шесть первых отличных от нуля члена разложения в степенной ряд решения дифференциального уравнения $y' = x - y^2$, удовлетворяющего начальному условию $y(1) = 1$.

Последовательно дифференцируя исходное уравнение, находим

$$y'' = 1 - 2y \cdot y',$$
$$y''' = -2y \cdot y'' - 2(y')^2,$$
$$y^{IV} = -6y' \cdot y'' - 2y \cdot y'',$$
$$y^{V} = -6(y'')^2 - 8y' \cdot y''' - 2y \cdot y^{IV},$$
$$y^{VI} = -20y'' \cdot y''' - 10y' \cdot y^{IV} - 2y \cdot y^{V},$$

Вычислим значения производных с учетом начального условия.

$$y'(1) = 0,\ y''(1) = 1,\ y'''(1) = -2,\ y^{IV}(1) = 4,\ y^{V}(1) = -14,\ y^{VI}(1) = 68.$$

Значит, $y = 1 + \frac{(x-1)^2}{2} - \frac{(x-1)^3}{3} + \frac{(x-1)^4}{6} - \frac{7(x-1)^5}{60} + \frac{17(x-1)^6}{180} + \ldots.$

7. РЯДЫ ФУРЬЕ

Рядом Фурье для функции $f(x)$ на интервале $[-l;l]$ называется тригонометрический ряд вида:

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos\frac{n\pi x}{l} + b_n \sin\frac{n\pi x}{l}\right),$$

если его коэффициенты a_n и b_n вычисляются по формулам Фурье:

$$a_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{\pi n x}{l}dx, \quad n = 1, 2, \ldots, \qquad a_0 = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)dx,$$

$$b_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\sin\frac{\pi n x}{l}dx, \quad n = 1, 2, \ldots,$$

Если в интервале $[-l;l]$ функция $f(x)$ имеет конечное число точек разрыва первого рода (или непрерывна) и конечное число точек экстремума (или не имеет их вовсе), то ее ряд Фурье сходится, т. е. имеет сумму $S(x)$ во всех точках этого интервала.

При этом:

а) в точках непрерывности функции $f(x)$ он сходится к самой функции $S(x) = f(x)$;

б) в каждой точке разрыва функции – ряд сходится к полусумме односторонних пределов функции слева и справа.

Если функция четная, т.е. $f(x) = f(-x)$, все коэффициенты $b_n = 0$, и ряд имеет вид:

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos\frac{\pi nx}{l},$$

где $a_n=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)\cos\frac{\pi nx}{l}dx, \quad n=0,1,2,...$

Если функция нечетная, т. е. $f(x)=-f(-x)$, все коэффициенты $a_n=0$, и ряд имеет вид:

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin\frac{\pi nx}{l}, \quad \text{где} \quad b_n=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\frac{\pi nx}{l}dx, \quad n=1,2,...$$

Замечания

1. Функция $f(x)$, заданная в интервале $[0;l]$, может быть разложена в зависимости от требований либо только в ряд косинусов, либо только в ряд синусов. Для этого она должна быть продолжена в интервале $[-l;0]$ либо как четная, либо как нечетная.

2. Если функция $f(x)$ задана несколькими различными формулами на разных частях интервала $[-l;l]$, то при вычислении интегралов для коэффициентов ряда, следует разбить интервал интегрирования точками, в которых меняется аналитическое выражение функции, на части и затем вычислять указанные интегралы как сумму интегралов по составляющим частям.

Пример 16. Разложить в ряд Фурье данную функцию в указанном интервале.

а) $f(x)=\frac{x}{2}, \qquad 0<x>4, \quad T=4.$

Поскольку интервал (0,4) не симметричен относительно нуля и имеет длину равную 4, то формулы для коэффициентов Фурье принимают вид:

$$a_0=\frac{1}{2}\int_0^4\frac{x}{2}dx, \qquad a_n=\frac{1}{2}\int_0^4\frac{x}{2}\cos\frac{\pi nx}{2}dx, \qquad b_n=\frac{1}{2}\int_0^4\frac{x}{2}\sin\frac{\pi nx}{2}dx.$$

Вычислим интегралы.

$$a_0=\frac{1}{2}\int_0^4\frac{x}{2}dx=\left.\frac{x^2}{8}\right|_0^4=2,$$

$$a_n=\frac{1}{2}\int_0^4\frac{x}{2}\cos\frac{\pi nx}{2}dx=\left|\begin{matrix}u=x,\ dv=\cos\dfrac{\pi nx}{2}dx\\ du=dx,\ v=\dfrac{2}{\pi n}\sin\dfrac{\pi nx}{2}\end{matrix}\right|=\frac{1}{4}\left(\frac{2x}{\pi n}\sin\frac{\pi nx}{2}dx\Big|_0^4-\int_0^4\frac{2}{\pi n}\sin\frac{\pi nx}{2}dx\right)=$$

$$\frac{1}{\pi^2n^2}\cos\frac{\pi nx}{2}\Big|_0^4=0.$$

$$b_n=\frac{1}{2}\int_0^4\frac{x}{2}\sin\frac{\pi nx}{2}dx=\left|\begin{matrix}u=x,\ dv=\sin\dfrac{\pi nx}{2}dx\\ du=dx,\ v=-\dfrac{2}{\pi n}\cos\dfrac{\pi nx}{2}\end{matrix}\right|=\frac{1}{4}\left(-\frac{2x}{\pi n}\cos\frac{\pi nx}{2}dx\Big|_0^4+\int_0^4\frac{2}{\pi n}\cos\frac{\pi nx}{2}dx\right)=$$

$$\frac{1}{4}\left(-\frac{8}{\pi n}+\frac{4}{\pi^2n^2}\sin\frac{\pi nx}{2}\Big|_0^4\right)=-\frac{2}{\pi n}.$$

Следовательно,

$$\frac{x}{2}=1+\sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{2}{\pi n}\right)\sin\frac{\pi nx}{2}=1-\frac{2}{\pi}\sin\frac{\pi x}{2}-\frac{1}{\pi}\sin\pi x-\frac{2}{3\pi}\sin\frac{3\pi x}{2}-\ldots$$

Это разложение справедливо, т. е. полученный ряд сходится к данной функции во всех точках ее области определения $0<x<4$. В граничных точках $x=0$ и $x=4$ сумма ряда равна 1, в этих точках все члены ряда, кроме первого, обращаются в 0. График суммы ряда изображен на рис. 1.

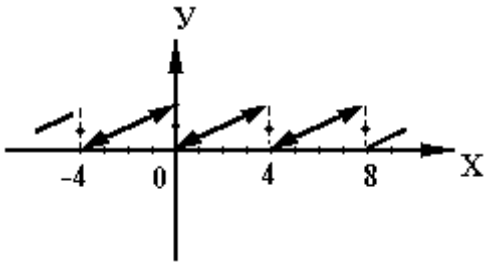

Рис. 1

б) $f(x)=x\cdot\sin\ x,\quad 0<x<\pi$ в ряд по косинусам.

Функция, разлагаемая в ряд по косинусам, должна быть четная, следовательно, нужно построить ее четное продолжение на интервале $(-\pi;0)$. Тогда $b_n=0$.

$$a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x\sin xdx=\left|\begin{matrix}u=x,\ dv=\sin xdx\\ du=dx,\ v=-\cos x\end{matrix}\right|=\frac{2}{\pi}(-x\cos x\Big|_0^{\pi}+\int_0^{\pi}\cos xdx)=$$

$$=2+\frac{2}{\pi}x\sin x\Big|_0^{\pi}=2;$$

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\sin x\cos nx dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{x}{2}\left(\sin(1-n)x + \sin(1+n)x\right)dx =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} x\left(\sin(n+1)x - \sin(n-1)x\right)dx = \left|\begin{matrix} u = x, \quad dv = \left(\sin(n+1)x - \sin(n-1)x\right)dx \\ du = dx,\ v = -\frac{1}{n+1}\cos(n+1)x + \frac{1}{n-1}\cos(n-1)x \end{matrix}\right| =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(-\frac{x}{n+1}\cos(n+1)x\Big|_0^{\pi} + \frac{x}{n-1}\cos(n-1)x\Big|_0^{\pi} + \int_0^{\pi}\left(\frac{\cos(n+1)x}{n+1} - \frac{\cos(n-1)x}{n-1}\right)dx\right) =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(\frac{-\pi\cos(n+1)\pi}{n+1} + \frac{\pi\cos(n-1)x}{n-1}\Big|_0^{\pi} + \frac{\sin(n+1)x}{(n+1)^2}\Big|_0^{\pi} - \frac{\sin(n-1)x}{(n-1)^2}\Big|_0^{\pi}\right) =$$

$$= \left(\frac{\cos(n-1)\pi}{n-1} - \frac{\cos(n+1)\pi}{n+1}\right) =$$

$$= \frac{n\cos(n-1)\pi + \cos(n-1)\pi - n\cos(n+1)\pi + \cos(n+1)\pi}{n^2-1} =$$

$$= \frac{-2n\sin n\pi\sin(-\pi) + 2\cos n\pi\cos(-\pi)}{n^2-1} = \frac{-2\cos\pi n}{n^2-1} = \frac{2(-1)^{n-1}}{n^2-1}, \qquad n \neq 1.$$

При $n = 1$

$$a_1 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\sin x\cos x dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} x\sin 2x dx = \left|\begin{matrix} u = x,\ dv = \sin 2x dx \\ du = dx,\ v = -\frac{1}{2}\cos 2x \end{matrix}\right| =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(\frac{-x}{2}cos2x\Big|_0^{\pi} + \frac{1}{2}\int_0^{\pi}\cos 2x dx\right) = \frac{1}{\pi}\left(-\frac{\pi}{2}\cos 2\pi + \frac{1}{4}\sin 2x\frac{1}{4}\sin 2x\Big|_0^{\pi}\right) = -\frac{1}{2}.$$

Следовательно, $x\sin x = 1 - \frac{\cos x}{2} + 2\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{\cos nx}{n^2-1}$. Это разложение данной периодической и всюду непрерывной функции справедливо при любом значении x, т. е. полученный ряд Фурье сходится к данной функции на всей числовой оси.

ВАРИАНТЫ ИНДИВИДУАЛЬНЫХ ЗАДАНИЙ

Вариант 1

1. Найти u_{n+1} и u_{2n-1} члены ряда $3+\frac{4}{2^2}+\frac{5}{3^2}+\frac{6}{4^2}+\ldots$.

2. Найти сумму ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^{2n-2}}$.

3. Можно ли решить вопрос о сходимости ряда с помощью необходимого признака?

а) $1+\frac{4}{3}+\frac{6}{4}+\frac{8}{5}+\ldots$; *b)* $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^n}$.

4. Исследовать ряды на сходимость:

а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{4\cdot\sqrt[n]{n+1}}$; *б)* $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n+3}}$; *в)* $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^n}$; *г)* $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3}{(2n-1)^2}$.

5. Выяснить, сходится ряд абсолютно или условно:

а) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n^2+1}$ *б)* $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}\ln n}{n}$.

6. Определить интервал сходимости ряда и исследовать сходимость на концах интервала:

а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-1)^n}{2^n(2n-1)}$; *б)* $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n 2^{n-1}}{n!}$; *в)* $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+3)^{n+1}}{4^n\sqrt{n+1}}$.

7. Разложить по степеням x в ряд указанной функции. Указать интервал сходимости:

а) $y=e^{-x^2}$; *б)* $y=\frac{x}{3+x}$; *в)* $y=\sin^2\sqrt{x}$.

8. Найти сумму ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}$.

9. Используя разложение функции в степенной ряд, вычислить ее значения с точностью до 10^{-4}:

а) $\sqrt{e}$; *б)* $\sin 2^0$; *в)* $\sqrt[3]{30}$; *г)* $\ln 3$.

10. Найти с точностью до 0,001 значение интеграла $\int_0^1 e^{-x^{2/3}}dx$.

11. Разложить функцию $f(x)=\ln x$ в ряд Тейлора в окрестности точки $x_0=2$.

12. Найти три первых отличных от нуля члена разложения в степенной ряд решения дифференциального уравнения $y'=\cos x+y^2$, удовлетворяющего начальному условию $y(0)=1$.

13. Разложить функцию в ряд Фурье в заданном интервале.

а) $f(x)=2+|x|,\quad -\pi<x<\pi$; *б)* $\begin{cases}3, & -1<x\le 0\\ -1, & 0<x<1.\end{cases}$

Вариант 2

1. Найти u_{n+1} и u_{2n-1} члены ряда $\frac{1}{2\cdot 7}+\frac{1}{7\cdot 12}+\frac{1}{12\cdot 17}+\cdots$.

2. Найти сумму ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n+2^n}{6^n}$.

3. Можно ли решить вопрос о сходимости ряда с помощью необходимого признака?

$a)\quad \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1+n}{n}\right)^n \qquad b)\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{2n-1}}{n+1}$.

4. Исследовать ряды на сходимость

$a)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n\cdot 5^n}$; $\quad б)\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{n^2}}$; $\quad в)\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3n-1}{4n+1}\right)^n$; $\quad г)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n+3}$.

5. Выяснить, сходится ряд абсолютно или условно:

$a)\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{2n+1}} \quad б)\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}3^n}{4^n(n+1)}$.

6. Определить интервал сходимости ряда и исследовать сходимость на концах интервала

$a)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+1)^{n+1}}{4^n\sqrt{n}}$; $\quad б)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n}3^n}{2n-1}$; $\quad в)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+2)^n}{(2n)!}$.

7. Разложить по степеням x в ряд указанной функции. Указать интервал сходимости:

$a)\ y=3^x$; $\quad б)\ y=\frac{x}{1+x}$; $\quad в)\ y=\cos^2(\pi+x)$.

8. Найти сумму ряда $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}$.

9. Используя разложение функции в степенной ряд, вычислить ее значения с точностью до 10^{-4}:

$a)\ e^{-0,2}$; $\quad б)\ \sin 9^0$; $\quad в)\ \sqrt[4]{17}$; $\quad г)\ \ln 0,2$.

10. Найти с точностью до 0,001 значение интеграла $\int_0^{0,5} x\,arctgx\,dx$.

11. Разложить функцию $f(x)=\frac{1}{x}$ в ряд Тейлора в окрестности точки $x_0=-1$.

12. Найти три первых отличных от нуля члена разложения в степенной ряд решения дифференциального уравнения $y'=x+y^2$ удовлетворяющего начальному условию $y(0)=1$.

13. Разложить функцию в ряд Фурье в заданном интервале.

$a)\quad f(x)=10-x,\quad -5<x<15$; $\qquad б)\ f(x)=\begin{cases}0, & -\pi<x\le 0\\ x, & 0<x<\pi\end{cases}$.

Вариант 3

1. Найти u_{n+1} и u_{2n-1} члены ряда $1+\frac{2}{2}+\frac{3}{4}+\frac{4}{8}+\ldots$.

2. Найти сумму ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n+5^n}{10^n}$.

3. Можно ли решить вопрос о сходимости ряда с помощью необходимого признака? *а)* $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3n-1}{n+3}\right)^2$ *b)* $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{3^n}$

4. Исследовать ряды на сходимость

а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4^n}{n!}$; *б)* $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3n+1}$; *в)* $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+1}{2n+3}\right)^{2n}$; *г)* $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3n+1}{2n-1}$

.

5.Выяснить, сходится ряд абсолютно или условно

а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt[3]{n^2}}$; *б)* $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{3^n(n+1)}$.

6. Определить интервал сходимости ряда и исследовать сходимость на концах интервала:

а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-1)^n}{2^n n^2}$; *б)* $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{2^n n^2}$; *в)* $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+5)^n}{(n+1)!}$.

7. Разложить по степеням x в ряд указанной функции. Указать интервал сходимости:

а) $y=2^x$; *б)* $y=\sqrt{1-x^2}$; *в)* $y=x\cos\frac{x}{2}$.

8. Найти сумму ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{4n-1}}{4n-1}$.

9. Используя разложение функции в степенной ряд, вычислить ее значения с точностью до 10^{-4}.

а) $e^{-0,5}$; *б)* $\cos 1$; *в)* $arctg\ \ 0{,}1$; *г)* $\ln 5$.

10. Найти с точностью до 0,001 значение интеграла $\int_0^{0,5} x\ln(1-x^2)dx$.

11. Разложить функцию $f(x)=\frac{1}{x^2+3x+2}$ в ряд Тейлора в окрестности точки $x_0=-4$.

12. Найти три первых отличных от нуля члена разложения в степенной ряд решения дифференциального уравнения $y'=x^2-xy$, удовлетворяющего начальному условию $y(0)=0{,}1$.

13. Разложить функцию в ряд Фурье в заданном интервале:

а) $f(x)=x-1,\ -1<x<1$; *б)* $f(x)=x, 0<x<\pi$ *в ряд по косинусам.*

.

Вариант 4

1. Найти u_{n+1} и u_{2n-1} члены ряда $1+\frac{1\cdot 3}{1\cdot 4}+\frac{1\cdot 3\cdot 5}{1\cdot 4\cdot 7}+\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7}{1\cdot 4\cdot 7\cdot 10}+\cdots$.

2. Найти сумму ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{3^n}$.

3. Можно ли решить вопрос о сходимости ряда с помощью необходимого признака?

а) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n+1}{2n-1}\right)^n$; *b)* $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n+1}{5^n}$.

4. Исследовать ряды на сходимость:

а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{\sqrt{3^n}\cdot(n+1)}$; *б)* $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n^2+3}$; *в)* $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{3n-1}\right)^n$; *г)* $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}$.

5.Выяснить, сходится ряд абсолютно или условно:

а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n\cdot(n+1)}$; *б)* $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{3^n\cdot n\cdot\sqrt{n}}$.

6. Определить интервал сходимости ряда и исследовать сходимость на концах интервала:

а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+2)^{n+1}}{3^n(n+1)}$; *б)* $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n n^5}{n!(2^n+1)}$; *в)* $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-3)^n}{\sqrt{n+2}}$.

7. Разложить по степеням x в ряд указанной функции. Указать интервал сходимости:

а) $y=2^x$; *б)* $y=\sqrt{1-x^2}$; *в)* $y=x\cos\frac{x}{2}$.

8. Найти сумму ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n-1}}{2n-1}$.

9. Используя разложение функции в степенной ряд, вычислить ее значения с точностью до 10^{-4}.

а) $\sqrt[4]{80}$; *б)* $\sin 0{,}1$; *в)* $\ln 20$; *г)* $e^{-0,25}$.

10. Найти с точностью до 0,001 значение интеграла $\int_0^{0,5} arctgx^2\,dx$.

11. Разложить функцию $f(x)=\ln x$ в ряд Тейлора в окрестности точки $x_0=1$.

12. Найти три первых отличных от нуля члена разложения в степенной ряд решения дифференциального уравнения $y'=xy+y^2$, удовлетворяющего начальному условию $y(0)=0{,}1$.

13. Разложить функцию в ряд Фурье в заданном интервале:

а) $f(x)=x^2,\quad -2<x<2$; *б)* $f(x)=\begin{cases}3, 0<x\le\pi\\ -2,\quad \pi<x<2\pi\end{cases}$.

Вариант 5

1. Найти u_{n+1} и u_{2n-1} члены ряда $\frac{3}{4}+\frac{4}{9}+\frac{5}{16}+\frac{6}{25}+\ldots$.

2. Найти сумму ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4^{n-1}}$.

3. Можно ли решить вопрос о сходимости ряда с помощью необходимого признака?

а) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n+1}{3n+1}\right)^{n/2}$; *b)* $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n+1}$.

4. Исследовать ряды на сходимость:

а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{7^n}{2^n\cdot\sqrt{n}}$; *б)* $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{n^2+2}}$; *в)* $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+3}{4n-1}\right)^n$; *г)* $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{2n+1}$.

5. Выяснить, сходится ряд абсолютно или условно:

а) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}tg\frac{1}{n\sqrt{n}}$; *б)* $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt[3]{n+1}}$.

6. Определить интервал сходимости ряда и исследовать сходимость на концах интервала:

а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-3)^n}{\sqrt[3]{n}}$; *б)* $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{5^n\cdot\sqrt{2n+1}}$; *в)* $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+2)^n 8^n}{n!}$.

7. Разложить по степеням x в ряд указанной функции. Указать интервал сходимости:

а) $y=x4^x$; *б)* $y=\frac{1}{(1-x)(1+2x)}$; *в)* $y=\sin^2 3x$.

8. Найти сумму ряда $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{2n-1}$.

9. Используя разложение функции в степенной ряд, вычислить ее значения с точностью до 10^{-4}.

а) $\arcsin 1$; *б)* $e^{-0,5}$; *в)* $\sqrt[3]{1,018}$; *г)* $\ln 128$.

10. Найти с точностью до 0,001 значение интеграла $\int_0^1\cos\sqrt{x}dx$.

11. Разложить функцию $f(x)=\frac{1}{x^2}$ в ряд Тейлора в окрестности точки $x_0=2$.

12. Найти три первых отличных от нуля члена разложения в степенной ряд решения дифференциального уравнения $y'=e^x+y^2$, удовлетворяющего начальному условию $y(0)=0$.

13. Разложить функцию в ряд Фурье в заданном интервале:

а) $f(x)=|x|,\quad -2<x<2$; *б)* $f(x)=x,\quad 0<x<3$ *в ряд по косинусам*.

Вариант 6

1. Найти u_{n+1} и u_{2n-1} члены ряда $1-\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}-\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}+\cdots$.

2. Найти сумму ряда $\frac{1}{3}+\frac{1}{12}+\frac{1}{48}+\ldots$.

3. Можно ли решить вопрос о сходимости ряда с помощью необходимого признака?

а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1+n}{2+n^2}$; *б)* $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+3}{n+2}\right)^{3n}$.

4. Исследовать ряды на сходимость:

а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{7^n\cdot n}$; *б)* $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n+5}$; *в)* $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{2n+1}\right)^n$; *г)* $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3n-1}{5n-2}$.

5. Выяснить, сходится ряд абсолютно или условно:

а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}n^3}{2^n}$; *б)* $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{2n+1}}$.

6. Определить интервал сходимости ряда и исследовать сходимость на концах интервала:

а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+1)^{n+1}}{5^n n^2}$; *б)* $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n}}{4^n(n+1)}$; *в)* $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-7)^n}{n^2+1}$.

7. Разложить по степеням x в ряд указанной функции. Указать интервал сходимости:

а) $y=2^{-x}$; *б)* $y=\sqrt{3-x^2}$; *в)* $y=x\sin x^2$.

8. Найти сумму ряда $\sum_{n=1}^{\infty}(n+1)\cdot x^n$ $y=x\sin x^2$.

9. Используя разложение функции в степенной ряд, вычислить ее значения с точностью до 10^{-4}.

а) $\sqrt[10]{1026}$; *б)* $\sin 0{,}5$; *в)* $\ln 16$; *г)* $arctg\frac{1}{5}$.

10. Найти с точностью до 0,001 значение интеграла $\int_0^{0,5}\frac{\ln(1+x^2)}{x}dx$.

11. Разложить функцию $f(x)=\frac{1}{x^2+4x+7}$ в ряд Тейлора в окрестности точки $x_0=-2$.

12. Найти три первых отличных от нуля члена разложения в степенной ряд решения дифференциального уравнения $y'=x+x^2+y^2$, удовлетворяющего начальному условию $y(0)=5$.

13. Разложить функцию в ряд Фурье в заданном интервале:

а) $f(x)=x-1,\quad -\pi<x<\pi$; *б)* $f(x)=\begin{cases}x, & 0<x\le 1\\ 1, & 1<x<2\end{cases}$.

Вариант 7

1. Найти u_{n+1} и u_{2n-1} члены ряда $\frac{1}{\sqrt{1\cdot 2}}+\frac{1}{\sqrt{2\cdot 3}}+\frac{1}{\sqrt{3\cdot 4}}+\cdots$.

2. Найти сумму ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)(n+2)}$.

3. Можно ли решить вопрос о сходимости ряда с помощью необходимого признака?

а) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{3n-1}\right)^2$; *b)* $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^{n+2}}{n^2+1}$.

4. Исследовать ряды на сходимость:

а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{2^n\sqrt{n}}$; *б)* $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n^2+n+1}}$; *в)* $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3n-1}{5n+2}\right)^{3n}$; *г)* $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2n+1}$.

5. Выяснить, сходится ряд абсолютно или условно:

а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)\ln(n+1)}$; *б)* $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}n}{2^n}$.

6. Определить интервал сходимости ряда и исследовать сходимость на концах интервала:

а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-2)^n}{3n!}$; *б)* $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n n!}{2^n}$; *в)* $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+5)^n}{10^n(n+1)}$.

7. Разложить по степеням x в ряд указанной функции. Указать интервал сходимости:

а) $y=\frac{x}{3^x}$; *б)* $y=\frac{1}{1+x^2}$; *в)* $y=x\cos\sqrt{x}$.

8. Найти сумму ряда $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}(2n-1)x^{2n-2}$.

9. Используя разложение функции в степенной ряд, вычислить ее значения с точностью до 10^{-4}:

а) $arctg\ \ 0{,}2$; *б)* $\sqrt[5]{250}$; *в)* $\cos 0{,}3$; *г)* $e^{0,3}$.

10. Найти с точностью до 0,001 значение интеграла $\int_0^{0,5}\frac{\sin x^2}{x^2}dx$.

11. Разложить функцию $f(x)=\cos x$ в ряд Тейлора в окрестности точки $x_0=\pi/4$.

12. Найти три первых отличных от нуля члена разложения в степенной ряд решения дифференциального уравнения $y'=x^2+y$, удовлетворяющего начальному условию $y(0)=0{,}1$.

13. Разложить функцию в ряд Фурье в заданном интервале:

а) $f(x)=|x|-1,\quad -1<x<1$; *б)* $f(x)=\begin{cases}-1, & 0<x\le\pi\\ 2, & \pi<x<2\pi\end{cases}$.

Вариант 8

1. Найти u_{n+1} и u_{2n-1} члены ряда $\frac{4}{5}+\frac{7}{10}+\frac{10}{15}+\ldots$.

2. Найти сумму ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$.

3. Можно ли решить вопрос о сходимости ряда с помощью необходимого признака? *а)* $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n!}{(n+1)!+n!}\right)$; *b)* $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3n-1}{n+2}\right)^{3n}$.

4. Исследовать ряды на сходимость:

а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5^n}{\sqrt{2}^n(n+1)}$; *б)* $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3+1}$; *в)* $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+2}{5n-1}\right)^{2n}$; *г)* $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)\ln(n+1)}$.

5. Выяснить, сходится ряд абсолютно или условно:

а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{(3n-1)^2}$; *б)* $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt[3]{n+1}}$.

6. Определить интервал сходимости ряда и исследовать сходимость на концах интервала: *а)* $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+1)^n}{3^n\sqrt{n+1}}$; *б)* $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{4^n n^2}$; *в)* $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-4)^{n+1}}{9^n\sqrt{n^3}}$.

7. Разложить по степеням x в ряд указанной функции. Указать интервал сходимости: *а)* $y=\ln\left((1-x)(1+1x)\right)$; *б)* $y=\frac{1}{x^2+3x+2}$; *в)* $y=\cos\frac{x}{2}$.

8. Найти сумму ряда $\sum_{n=1}^{\infty}n(n+1)x^{n-1}$.

9. Используя разложение функции в степенной ряд, вычислить ее значения с точностью до 10^{-4}: *а)* $\frac{1}{\sqrt[3]{65}}$; *б)* $\ln 9$; *в)* $\sin 0{,}4$; *г)* $e^{0{,}1}$.

10. Найти с точностью до 0,001 значение интеграла $\int_0^1 \sin x^2 dx$.

11. Разложить функцию $f(x)=\sqrt{x}$ в ряд Тейлора в окрестности точки $x_0=4$.

12. Найти три первых отличных от нуля члена разложения в степенной ряд решения дифференциального уравнения $y'=2x+0{,}1y^2$, удовлетворяющего начальному условию $y(0)=0{,}2$.

13. Разложить функцию в ряд Фурье в заданном интервале:

а) $f(x)=x^2, \quad 0<x<\pi;$
в ряд по синусам

б) $f(x)=\begin{cases}-\frac{1+x}{3}0, & -1<x\le 0\\ \frac{1-x}{3}, & 0<x<1\end{cases}$

Вариант 9

1. Найти u_{n+1} и u_{2n-1} члены ряда $1+\frac{3}{4}+\frac{1}{9}+\frac{3}{16}+\frac{1}{25}+\ldots$.

2. Найти сумму ряда $\frac{1}{\ln 2}+\frac{1}{\ln 4}+\frac{1}{\ln 16}+\frac{1}{\ln 256}$.

3. Можно ли решить вопрос о сходимости ряда с помощью необходимого признака?

$a)\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n3^n}$; $b)\quad \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n+3}{n+1}\right)^{n/2}$.

4. Исследовать ряды на сходимость:

$a)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{6^n}{5^n\sqrt{n+1}}$; $б)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n^2+2n+3}}$; $в)\ \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+3}{2n-1}\right)^{2n}$; $г)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{3n-1}$

.

5. Выяснить, сходится ряд абсолютно или условно:

$a)\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}3^n}{2^n\sqrt{n}}$; $б)\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n+1}$.

6. Определить интервал сходимости ряда и исследовать сходимость на концах интервала:

$a)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-3)^n}{4^n(n^2+1)}$; $б)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{10^n\sqrt{n}}$; $в)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+1)^n}{3^n n!}$.

7. Разложить по степеням x в ряд указанной функции. Указать интервал сходимости:

$a)\ y=\ln(9-x)$; $б)\ y=\frac{1}{\sqrt{1-2x}}$; $в)\ y=\sin^2 x$.

8. Найти сумму ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{4n-3}}{4n-3}$.

9. Используя разложение функции в степенной ряд, вычислить ее значения с точностью до 10^{-4}:

$a)\ \sqrt[3]{e}$; $б)\ \sqrt[3]{500}$; $в)\ \sin 0{,}2$; $г)\ \ln 32$.

10. Найти с точностью до 0,001 значение интеграла $\int_0^{0,5}\sqrt{1+x^2}\,dx$.

11. Разложить функцию $f(x)=\frac{1}{x^2-6x+10}$ в ряд Тейлора в окрестности точки $x_0=3$.

12. Найти три первых отличных от нуля члена разложения в степенной ряд решения дифференциального уравнения $y'=x^2-2y$, удовлетворяющего начальному условию $y(0)=1$.

13. Разложить функцию в ряд Фурье в заданном интервале.

а) $f(x)=|1-x|, \quad 0<x<2;$ *б)* $f(x)=\begin{cases}2+x, & -2<x\le 0\\ 3, & 0<x<2\end{cases}$.

Вариант 10

1. Найти u_{n+1} и u_{2n-1} члены ряда $\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{14}+\ldots$.

2. Найти сумму ряда $\frac{1}{\ln 3}+\frac{1}{\ln 9}+\frac{1}{\ln 81}+\frac{1}{\ln 6561}$.

3. Можно ли решить вопрос о сходимости ряда с помощью необходимого признака?

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n-1}$; *b)* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2n+3}{3n-2}$.

4. Исследовать ряды на сходимость:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{7^n\sqrt{n+1}}$; *б)* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{5n+2}$; *в)* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3n-1}{3n+1}\right)^n$; *г)* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}tg\frac{1}{n\sqrt{n}}$.

5. Выяснить, сходится ряд абсолютно или условно:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{3n+1}}$; *б)* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2^n\sqrt{n+1}}$.

6. Определить интервал сходимости ряда и исследовать сходимость на концах интервала:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(x-5)^n}{2^n n!}$; *б)* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{n^2+1}$; *в)* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(x+2)^{n+1}}{\sqrt{n+1}}$.

7. Разложить по степеням x в ряд указанной функции. Указать интервал сходимости:

а) $y=x5^x$; *б)* $y=\sqrt{1+x^3}$; *в)* $y=\sin^2\frac{3x}{2}$.

8. Найти сумму ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$.

9. Используя разложение функции в степенной ряд, вычислить ее значения с точностью до 10^{-4}:

а) $\sqrt[5]{250}$; *б)* $\cos 10^0$; *в)* $\ln 27$; *г)* $e^{-1,5}$.

10. Найти с точностью до 0,001 значение интеграла $\int_0^1 x\sin x^2 dx$.

11. Разложить функцию $f(x)=\frac{1}{x^2+2x+4}$ в ряд Тейлора в окрестности точки $x_0=-1$.

12. Найти три первых отличных от нуля члена разложения в степенной ряд решения дифференциального уравнения $y'=y+y^2$, удовлетворяющего начальному условию $y(0)=3$.

13. Разложить функцию в ряд Фурье в заданном интервале:

а) $f(x)=x+2,\quad 0<x<\pi;$ *в ряд по синусам*

б) $f(x)=\begin{cases}1+x, & -1<x\le 0\\ 1, & 0<x<1\end{cases}$.

Вариант 11

1. Найти u_{n+1} и u_{2n-1} члены ряда $\frac{1}{7}+\frac{1}{13}+\frac{1}{19}+\ldots$.

2. Найти сумму ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+5)(n+6)}$.

3. Можно ли решить вопрос о сходимости ряда с помощью необходимого признака? *а)* $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{3n+2}$; *b)* $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3n-1}{3n^3-1}$.

4. Исследовать ряды на сходимость:

а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5^n}{\sqrt{3}^n(n+2)}$; *б)* $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n+1}$; *в)* $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+2}{5n-1}\right)^{2n}$; *г)* $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{2n-1}$.

5. Выяснить, сходится ряд абсолютно или условно:

а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)!}$; *б)* $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{3n+8}$.

6. Определить интервал сходимости ряда и исследовать сходимость на концах интервала: *а)* $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+3)^n}{\sqrt{2n-1}}$; *б)* $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{3^n(n+1)}$; *в)* $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-5)^n}{n!\cdot 10^n}$.

7. Разложить по степеням x в ряд указанной функции. Указать интервал сходимости: *а)* $y=7^x$; *б)* $y=\sqrt[3]{8+x}$; *в)* $y=\sin^2\frac{x}{2}\cos^2\frac{x}{2}$.

8. Найти сумму ряда $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n)!}$.

9. Используя разложение функции в степенной ряд, вычислить ее значения с точностью до 10^{-4}: *а)* $\sqrt[3]{129}$; *б)* $e^{-\frac{2}{3}}$; *в)* $\cos 18^0$; *г)* $\ln 0{,}25$.

10. Найти с точностью до 0,001 значение интеграла $\int_0^{0,5}\sqrt{x}e^{-x}dx$.

11. Разложить функцию $f(x)=\sqrt[3]{x}$ в ряд Тейлора в окрестности точки $x_0=1$.

12. Найти три первых отличных от нуля члена разложения в степенной ряд решения дифференциального уравнения $y'=x^2+0{,}2y^2$, удовлетворяющего начальному условию $y(0)=0{,}2$.

13. Разложить функцию в ряд Фурье в заданном интервале.

$а)\quad f(x)=|x|,\quad -\pi<x<\pi;\qquad б)\ f(x)=\begin{cases}-1, & -1<x\le -0{,}5\\ 0, & -0{,}5<x\le 0{,}5\\ 1, & 0{,}5<x<1\end{cases}$

Вариант 12

1. Найти u_{n+1} и u_{2n-1} члены ряда $\frac{1}{4}+\frac{1}{10}+\frac{1}{28}+\frac{1}{82}+\dots$.

2. Найти сумму ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1+2^n}{3^n}$.

3. Можно ли решить вопрос о сходимости ряда с помощью необходимого признака? $а)\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{n^2};\qquad b)\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{3^n}$.

4. Исследовать ряды на сходимость:

$а)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{4^n}{3^n\cdot n};\qquad б)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n+1}};\qquad в)\ \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3n+1}{2n-1}\right)^n;\qquad г)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n^2+4}$.

5. Выяснить, сходится ряд абсолютно или условно:

$а)\ \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n tg\frac{1}{n};\qquad б)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2+n}$.

6. Определить интервал сходимости ряда и исследовать сходимость на концах интервала: $а)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+2)^{n-1}}{(n+1)10^n};\quad б)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{(2n+1)!};\qquad в)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-1)^n 3^n}{2n+1}$.

7. Разложить по степеням x в ряд указанной функции. Указать интервал сходимости:

$а)\ y=x4^{\frac{x}{2}};\qquad б)\ y=x4^{\frac{x}{2}};\qquad в)\ y=\int_0^x x^3 arctgxdx$.

8. Найти сумму ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$.

9. Используя разложение функции в степенной ряд, вычислить ее значения с точностью до 10^{-4}:

$а)\ \sqrt[3]{130};\qquad б)\ \sin 18^0;\qquad в)\ e^{\frac{1}{3}};\qquad г)\ arctg0{,}3$.

10. Найти с точностью до 0,001 значение интеграла $\int_0^{0,5}x^2\ln(1+\sqrt{x})dx$.

11. Разложить функцию $f(x)=\sin\frac{\pi x}{4}$ в ряд Тейлора в окрестности точки $x_0=2$.

12. Найти три первых отличных от нуля члена разложения в степенной ряд решения дифференциального уравнения $y' = x^2 + 2y$, удовлетворяющего начальному условию $y(0) = 0{,}1$.

13. Разложить функцию в ряд Фурье в заданном интервале:

а) $f(x) = x^2, \quad 0 < x < 2\pi;$ *б)* $f(x) = e^{2x}, \quad 0 < x < 1$ *в ряд по синусам*

Вариант 13

1. Найти u_{n+1} и u_{2n-1} члены ряда $\frac{1}{2} + \frac{2}{5} + \frac{3}{8} + \ldots$.

2. Найти сумму ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+6)(n+7)}$.

3. Можно ли решить вопрос о сходимости ряда с помощью необходимого признака? *а)* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n-1}{4n+5}$; *b)* $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{4n-3} \right)^{n^2}$.

4. Исследовать ряды на сходимость:

а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{8^n}{n+1}$; *б)* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n+3}$; *в)* $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{3n-1} \right)^n$; *г)* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n}{5n+1}$.

5. Выяснить, сходится ряд абсолютно или условно:

а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(n+2)\ln(n+2)}$; *б)* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{3^n \sqrt{n+1}}$.

6. Определить интервал сходимости ряда и исследовать сходимость на концах интервала:

а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-4)^n n}{n^2+1}$; *б)* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n 3^n}{\sqrt{n+1}}$; *в)* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+1)^n}{3^n n!}$.

7. Разложить по степеням x в ряд указанной функции. Указать интервал сходимости:

а) $y = \ln(1+2x)$; *б)* $y = \frac{1}{\sqrt{1-x^3}}$; *в)* $y = x \sin 2x$.

8. Найти сумму ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n!}$.

9. Используя разложение функции в степенной ряд, вычислить ее значения с точностью до 10^{-4}:

а) $\sqrt[10]{1030}$; *б)* $\sin 10^0$; *в)* $e^{0,75}$; *г)* $\ln 0{,}5$.

10. Найти с точностью до 0,001 значение интеграла $\int_0^1 \cos \sqrt[3]{x}\, dx$.

11. Разложить функцию $f(x) = \cos \frac{\pi x}{4}$ в ряд Тейлора в окрестности точки $x_0 = 2$.

12. Найти три первых отличных от нуля члена разложения в степенной ряд решения дифференциального уравнения $y' = x^2 + xy$, удовлетворяющего начальному условию $y(0) = 0{,}2$.

13. Разложить функцию в ряд Фурье в заданном интервале:

а) $f(x) = x^2, \quad -1 < x < 1;$ *б)* $f(x) = \begin{cases} 0, & -\pi < x \le 0 \\ 5, & 0 < x < \pi \end{cases}$.

Вариант 14

1. Найти u_{n+1} и u_{2n-1} члены ряда $\frac{3}{1} + \frac{9}{2} + \frac{27}{6} + \frac{81}{24} + \frac{243}{120} + \cdots$.

2. Найти сумму ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4^{n-1}}$.

3. Можно ли решить вопрос о сходимости ряда с помощью необходимого признака?

а) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{n+2} \right)^n$; *b)* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+2}{n^2+1}$.

4. Исследовать ряды на сходимость:

а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{8^n}{n!}$; *б)* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+7}$; *в)* $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{7n+1} \right)^{2n}$; *г)* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{\sqrt{n+2}}$.

5. Выяснить, сходится ряд абсолютно или условно:

а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{3^n n!}$; *б)* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+2}}$.

6. Определить интервал сходимости ряда и исследовать сходимость на концах интервала:

а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-3)^n}{(n+1)2^n}$; *б)* $\sum_{n=1}^{\infty} x^n \cdot n!$; *в)* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+2)^n}{\sqrt{n+1}}$.

7. Разложить по степеням x в ряд указанной функции. Указать интервал сходимости:

а) $y = xe^{-x^2}$; *б)* $y = \frac{1}{(1+x)(1-3x)}$; *в)* $y = \cos x^2$.

8. Найти сумму ряда $\sum_{n=1}^{\infty} (n+1) \cdot x^n$.

9. Используя разложение функции в степенной ряд, вычислить ее значения с точностью до 10^{-4}:

а) $\sqrt[3]{1{,}012}$; *б)* $arctg\, 0{,}2$; *в)* $e^{0{,}25}$; *г)* $\ln\left(\frac{1}{9}\right)$.

10. Найти с точностью до 0,001 значение интеграла $\int_0^1 \sqrt{x} \cos x dx$.

11. Разложить функцию $f(x) = \ln(1+x)$ в ряд Тейлора в окрестности точки $x_0 = 3$.

12. Найти три первых отличных от нуля члена разложения в степенной ряд решения дифференциального уравнения $y' = 2e^{y} - xy$, удовлетворяющего начальному условию $y(0) = 0$.

13. Разложить функцию в ряд Фурье в заданном интервале:

а) $f(x) = 1 + 2x, \quad -1 < x < 1;$ *б)* $f(x) = \begin{cases} 0, & -\pi < x \le 0 \\ x, & 0 < x < \pi \end{cases}.$

Вариант 15

1. Найти u_{n+1} и u_{2n-1} члены ряда $\frac{3}{4 \cdot 2!} + \frac{9}{8 \cdot 3!} + \frac{27}{16 \cdot 4!} + \cdots$.

2. Найти сумму ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n + 7^n}{21^n}$.

3. Можно ли решить вопрос о сходимости ряда с помощью необходимого признака? *а)* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+2}{n^2+1}$; *b)* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^n}{n^3}$.

4. Исследовать ряды на сходимость:

а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{8^n}{5^n \cdot n}$; *б)* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3 + 2n}$; *в)* $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{5n+2} \right)^n$; *г)* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2n+1}}$.

5. Выяснить, сходится ряд абсолютно или условно:

а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt[3]{n+4}}$; *б)* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{5^n (n+1)}$.

6. Определить интервал сходимости ряда и исследовать сходимость на концах интервала: *а)* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+4)^n}{n! \cdot 3^n}$; *б)* $\sum_{n=1}^{\infty} x^n 10^n$; *в)* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-5)^n}{2^n n}$.

7. Разложить по степеням x в ряд указанной функции. Указать интервал сходимости:

а) $y = \frac{e^x}{x}$; *б)* $y = \frac{1}{x^2 + 3x - 4}$; *в)* $y = \cos^2 \sqrt{x}$.

8. Найти сумму ряда $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} (2n-1) x^{2n-2}$.

9. Используя разложение функции в степенной ряд, вычислить ее значения с точностью до 10^{-4}:

а) $\cos 2^{\circ}$; *б)* $\frac{1}{\sqrt[4]{620}}$; *в)* $arctg\, 0{,}1$; *г)* $\lg 0{,}5$.

10. Найти с точностью до 0,001 значение интеграла $\int_0^{0.8} \ln(1 + x^2) dx$.

11. Разложить функцию $f(x) = \sqrt{x}$ в ряд Тейлора в окрестности точки $x_0 = 5$.

12. Найти три первых отличных от нуля члена разложения в степенной ряд решения дифференциального уравнения $y' = \sin x + y^2$, удовлетворяющего начальному условию $y(0) = 1$.

13. Разложить функцию в ряд Фурье в заданном интервале:

$$а)\quad f(x) = \frac{\pi}{4} - \frac{x}{2},\quad 0 < x < \pi; \qquad б)\ f(x) = \begin{cases} x, & 0 < x \le 1 \\ 1, & 1 < x \le 2 \\ 3 - x, & 2 < x < 3. \end{cases}$$

Вариант 16

1. Найти u_{n+1} и u_{2n-1} члены ряда $\frac{\ln 2}{1} + \frac{\ln 3}{27} + \frac{\ln 4}{125} + \ldots$.

2. Найти сумму ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$.

3. Можно ли решить вопрос о сходимости ряда с помощью необходимого признака? $а)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{e^n}$; $b)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n}{4n-1}$.

4. Исследовать ряды на сходимость:

$а)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{6^n}{7^n \cdot \sqrt{n}}$; $б)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + n}$; $в)\ \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3n}{2n+3}\right)^n$; $г)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n+5}}$

.

5. Выяснить, сходится ряд абсолютно или условно:

$а)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} n^2}{2^n}$; $б)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(n+3)\ln(n+3)}$.

6. Определить интервал сходимости ряда и исследовать сходимость на концах интервала: $а)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{3^n \cdot n!}$; $б)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n 2^n}{(2n+1)}$; $в)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+3)^n}{4^n \cdot \sqrt{n}}$

.

7. Разложить по степеням x в ряд указанной функции. Указать интервал сходимости: $а)\ y = 5^{-x^2}$; $б)\ y = \int_0^x \sqrt{1 + x^3}\, dx$; $в)\ y = \sin^2 \frac{x}{2}$.

8. Найти сумму ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n-1}}{4^n (2n-1)}$.

9. Используя разложение функции в степенной ряд, вычислить ее значения с точностью до 10^{-4}.

$а)\ \cos 10^0$; $б)\ \ln 0{,}25$; $в)\ \sqrt[4]{80}$; $г)\ e^{\frac{1}{3}}$.

10. Найти с точностью до 0,001 значение интеграла $\int_0^1 \sqrt[3]{x^2} \cos x dx$.

11. Разложить функцию $f(x)=\dfrac{1}{x^2-8x+5}$ в ряд Тейлора в окрестности точки $x_0=4$.

12. Найти три первых отличных от нуля члена разложения в степенной ряд решения дифференциального уравнения $y'=y^2-x^2$, удовлетворяющего начальному условию $y(0)=2$.

13. Разложить функцию в ряд Фурье в заданном интервале:

а) $f(x)=x, \quad 0<x<2;$ *в ряд по синусам*

б) $f(x)=\begin{cases}-2, & 0<x\le\pi\\ 1, & \pi<x<2\pi\end{cases}.$

Вариант 17

1. Найти u_{n+1} и u_{2n-1} члены ряда $\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{4\sqrt{3}}+\dfrac{1}{4\sqrt{5}}+\ldots$.

2. Найти сумму ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{(4n-1)(4n+3)}$.

3. Можно ли решить вопрос о сходимости ряда с помощью необходимого признака?

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2n}{5n-1};$ *b)* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n}{n^4+1}.$

4. Исследовать ряды на сходимость:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{7^n}{8^n(n+1)};$ *б)* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n}{\sqrt{n^2+2n}};$ *в)* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{n}{n+1}\right)^{2n};$ *г)* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}tg\dfrac{1}{n^2}.$

5. Выяснить, сходится ряд абсолютно или условно:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n^3}};$ *б)* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n+1}n}{4^n}.$

6. Определить интервал сходимости ряда и исследовать сходимость на концах интервала:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(x-6)^n}{4^n\cdot n!};$ *б)* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^n4^n}{n+1};$ *в)* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(x+2)^n}{3^n\cdot n}.$

7. Разложить по степеням x в ряд указанной функции. Указать интервал сходимости:

а) $y=xe^{-x};$ *б)* $y=\sqrt[3]{1-2x};$ *в)* $y=\cos\sqrt{x}.$

8. Найти сумму ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{16^n\cdot(2n+1)}\cdot x^{2n+2}.$

9. Используя разложение функции в степенной ряд, вычислить ее значения с точностью до 10^{-4}:

а) $\sqrt[10]{1028};$ *б)* $arctg\,0{,}25;$ *в)* $\ln 0{,}2;$ *г)* $e^{\frac{2}{3}}.$

10. Найти с точностью до 0,001 значение интеграла $\int_0^{0.5} \ln(1+\sqrt{x})dx$.

11. Разложить функцию $f(x)=\dfrac{1}{x^2-3x+2}$ в ряд Тейлора в окрестности точки $x_0=2$.

12. Найти три первых отличных от нуля члена разложения в степенной ряд решения дифференциального уравнения $y'=x^2+2y$, удовлетворяющего начальному условию $y(0)=0{,}1$.

13. Разложить функцию в ряд Фурье в заданном интервале:

а) $f(x)=x^2+1, \quad -2<x<2;$ *б)* $f(x)=\begin{cases}0, & -\pi<x\le 0\\ 3, & 0<x<\pi\end{cases}$.

Вариант 18

1. Найти u_{n+1} и u_{2n-1} члены ряда $\dfrac{1}{51}+\dfrac{2}{101}+\dfrac{3}{151}+\ldots$.

2. Найти сумму ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{5^n-3^n}{15^n}$.

3. Можно ли решить вопрос о сходимости ряда с помощью необходимого признака?

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{4n+5}{2n^2+1}$; *b)* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{3^n}{n^2+3}$.

4. Исследовать ряды на сходимость:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{8^n}{7^n(n+3)}$; *б)* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{3}{n^2+n+2}$; *в)* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{2n}{5n-1}\right)^n$; *г)* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{\sqrt[3]{n+1}}$.

5. Выяснить, сходится ряд абсолютно или условно:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n+1}}{2^n n!}$; *б)* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n+1}}$.

6. Определить интервал сходимости ряда и исследовать сходимость на концах интервала:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(x+1)^n}{\sqrt{n+2}}$; *б)* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^{2n+1}3^n}{2n-1}$; *в)* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(x-1)^n 8^n}{(n+1)!}$.

7. Разложить по степеням x в ряд указанной функции. Указать интервал сходимости:

а) $y=x^3e^x$; *б)* $y=\dfrac{1}{x^2-4x+3}$; *в)* $y=\sin^2 6x$.

8. Найти сумму ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^{2n-1}}{3n-2}$.

9. Используя разложение функции в степенной ряд, вычислить ее значения с точностью до 10^{-4}:

а) e^{-1}; *б)* $\ln 1{,}2$; *в)* $\frac{1}{\sqrt{630}}$; *г)* $\cos 0{,}2$.

10. Найти с точностью до 0,001 значение интеграла $\int_0^{0,25}\sqrt{x}(\sin x)^2 dx$.

11. Разложить функцию $f(x)=\sin\frac{\pi x}{2}$ в ряд Тейлора в окрестности точки $x_0=1$.

12. Найти три первых отличных от нуля члена разложения в степенной ряд решения дифференциального уравнения $y'=2e^y+xy$, удовлетворяющего начальному условию $y(0)=0$.

13. Разложить функцию в ряд Фурье в заданном интервале:

а) $f(x)=x+1,\quad -\pi<x<\pi$; *б)* $f(x)=\begin{cases}1, & 3\pi<x\le 4\pi\\ 3, & 4\pi<x<5\pi\end{cases}$.

Вариант 19

1. Найти u_{n+1} и u_{2n-1} члены ряда $\frac{1}{2\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 8}+\frac{1}{8\cdot 11}+\cdots$.

2. Найти сумму ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n-2^n}{6^n}$.

3. Можно ли решить вопрос о сходимости ряда с помощью необходимого признака?

а) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n+1}{2n+3}\right)^{4n}$; *b)* $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{n+2}}{n+4}$.

4. Исследовать ряды на сходимость:

а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{7^n}{6^n\cdot\sqrt{n+2}}$; *б)* $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{n^3+n}}$; *в)* $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{n+2}\right)^{2n}$; *г)* $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln^3 n}$.

5. Выяснить, сходится ряд абсолютно или условно:

а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{4^n n^2}$; *б)* $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{2n+1}}$.

6. Определить интервал сходимости ряда и исследовать сходимость на концах интервала:

а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-7)^n}{(n+2)\cdot 10^n}$; *б)* $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$; *в)* $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+3)^n}{4n+1}$.

7. Разложить по степеням x в ряд указанной функции. Указать интервал сходимости:

а) $y=6^x$; *б)* $y=\frac{1}{4-x^2}$; *в)* $y=x\,\mathrm{arctg}x$.

8. Найти сумму ряда $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\cdot\frac{x^{3n-1}}{5^n\cdot(3n-1)}$.

9. Используя разложение функции в степенной ряд, вычислить ее значения с точностью до 10^{-4}:

а) e^{-2}; *б)* $\ln 81$; *в)* $\sqrt[5]{30}$; *г)* $\sin\frac{\pi}{4}$.

10. Найти с точностью до 0,001 значение интеграла $\int_0^{0,25}\sqrt[3]{1+x^2}\,dx$.

11. Разложить функцию $f(x)=\cos\frac{\pi x}{2}$ в ряд Тейлора в окрестности точки $x_0=1$.

12. Найти три первых отличных от нуля члена разложения в степенной ряд решения дифференциального уравнения $y'=\sin x+0{,}5y^2$, удовлетворяющего начальному условию $y(0)=1$.

13. Разложить функцию в ряд Фурье в заданном интервале:

а) $f(x)=e^x-1,\quad 0<x<\pi$; *б)* $f(x)=x-6,\quad 3<x<9$.

в ряд по косинусам

Вариант 20

1. Найти u_{n+1} и u_{2n-1} члены ряда $\frac{3}{1\cdot 4}+\frac{5}{4\cdot 9}+\frac{7}{9\cdot 16}+\frac{9}{16\cdot 25}+\cdots$.

2. Найти сумму ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4^n-3^n}{12^n}$.

3.Можно ли решить вопрос о сходимости ряда с помощью необходимого признака? *а)* $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3n+1}{8n-1}$; *b)* $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln n}{n}$.

4. Исследовать ряды на сходимость:

а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{8^n\cdot\sqrt{n}}$; *б)* $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n^2+3n}}$; *в)* $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3n-1}{5n+1}\right)^n$; *г)* $\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{\frac{n+1}{n}}$.

5.Выяснить, сходится ряд абсолютно или условно:

а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2+1}$; *б)* $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}tg\frac{1}{\sqrt{n}}$.

6. Определить интервал сходимости ряда и исследовать сходимость на концах интервала: *а)* $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+5)^n}{(2n)!}$; *б)* $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n 2^n}{n!}$; *в)* $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-3)^n}{4^n n^2}$.

7. Разложить по степеням x в ряд указанной функции. Указать интервал сходимости: *а)* $y=x5^x$; *б)* $y=\frac{1}{x^2-3x+2}$; *в)* $y=\int_0^x\frac{arctgx}{x}dx$.

8. Найти сумму ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{3n-2}}{3n-2}$.

9. Используя разложение функции в степенной ряд, вычислить ее значения с точностью до 10^{-4}: *а)* $e^{-\frac{2}{3}}$; *б)* $\ln 64$; *в)* $\sqrt[6]{70}$; *г)* $\cos 1^{\circ}$.

10. Найти с точностью до 0,001 значение интеграла $\int_0^{0,5} \frac{dx}{1+x^3}$.

11. Разложить функцию $f(x)=\sin\frac{\pi x}{8}$ в ряд Тейлора в окрестности точки $x_0=4$.

12. Найти три первых отличных от нуля члена разложения в степенной ряд решения дифференциального уравнения $y'=e^x+y$, удовлетворяющего начальному условию $y(0)=4$.

13. Разложить функцию в ряд Фурье в заданном интервале:

а) $f(x)=x+3, \quad -1<x<1;$ *б)* $f(x)=\begin{cases}0, & \pi<x\le 2\pi\\ 1, & 2\pi<x<3\pi\end{cases}$.

Вариант 21

1. Найти u_{n+1} и u_{2n-1} члены ряда $\frac{1}{5}+\frac{2}{7}+\frac{3}{9}+\frac{4}{11}+\ldots$.

2. Найти сумму ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+3)(n+4)}$.

3. Можно ли решить вопрос о сходимости ряда с помощью необходимого признака?

а) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n-1}{3n-1}\right)^n$; *b)* $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{n}$.

4. Исследовать ряды на сходимость:

а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4^n}{7^n\cdot\sqrt{n}}$; *б)* $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+5n}$; *в)* $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{4n-1}{3n+2}\right)^n$; *г)* $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln(n+1)}{n+1}$.

5. Выяснить, сходится ряд абсолютно или условно:

а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n+12}$; *б)* $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{5^n\cdot n^3}$.

6. Определить интервал сходимости ряда и исследовать сходимость на концах интервала:

а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-1)^n n}{4^n}$; *б)* $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n n}{5!}$; *в)* $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+5)^n}{\sqrt{n+1}}$.

7. Разложить по степеням x в ряд указанной функции. Указать интервал сходимости:

а) $y = 3^x$; *б)* $y = \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$; *в)* $y = \sin x \cdot \cos x$.

8. Найти сумму ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(2n+2)\cdot x^{2n+1}$.

9. Используя разложение функции в степенной ряд, вычислить ее значения с точностью до 10^{-4}:

а) $\sin 1^0$; *б)* $\sqrt[7]{130}$; *в)* $e^{0,25}$; *г)* $\ln 64$.

10. Найти с точностью до 0,001 значение интеграла $\int_0^{0,25} x\cos\sqrt{x}\,dx$.

11. Разложить функцию $f(x) = \sin\dfrac{\pi x}{6}$ в ряд Тейлора в окрестности точки $x_0 = 3$.

12. Найти три первых отличных от нуля члена разложения в степенной ряд решения дифференциального уравнения $y' = 2x - 0{,}1y^2$, удовлетворяющего начальному условию $y(0) = 1$.

13. Разложить функцию в ряд Фурье в заданном интервале:

а) $f(x) = |\cos x|$, $0 < x < \pi$; *б)* $f(x) = x + 2$, $-1 < x < 1$.

в ряд по синусам

Вариант 22

1. Найти u_{n+1} и u_{2n-1} члены ряда $\dfrac{1}{3} + \dfrac{4}{9} + \dfrac{9}{27} + \dfrac{16}{81} + \ldots$.

2. Найти сумму ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{7^n - 2^n}{14^n}$.

3. Можно ли решить вопрос о сходимости ряда с помощью необходимого признака? *а)* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{n}{3n+1}\right)^{3n}$; *b)* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n!}{2^n}$.

4. Исследовать ряды на сходимость:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{4^n}{5^n(n+2)}$; *б)* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n}{n^3+2}$; *в)* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{n}{4n+2}\right)^n$; *г)* $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{1}{n^2-1}$.

5. Выяснить, сходится ряд абсолютно или условно:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n+1}}{(2n+1)^2}$; *б)* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n+1}}{n\cdot 4^n}$.

6. Определить интервал сходимости ряда и исследовать сходимость на концах интервала: *а)* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(x+7)^n}{2^n\cdot\sqrt{n}}$; *б)* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}x^n\,n!$; *в)* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(x-3)^n}{(2n+1)}$.

7. Разложить по степеням x в ряд указанной функции. Указать интервал сходимости: *а)* $y = e^{\sqrt{x}}$; *б)* $y = \dfrac{x^3}{\sqrt{1-x^2}}$; *в)* $y = \sin^2\dfrac{x}{3}\cos^2\dfrac{x}{3}$.

8. Найти сумму ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\dfrac{x^{4n-2}}{4n-1}$.

9. Используя разложение функции в степенной ряд, вычислить ее значения с точностью до 10^{-4}: *а)* $\dfrac{1}{\sqrt[3]{132}}$; *б)* e^{-3}; *в)* $\sin 0{,}3$; *г)* $\ln 2e$.

10. Найти с точностью до 0,001 значение интеграла $\int_0^{0,25}\dfrac{\sin 2x}{x}dx$.

11. Разложить функцию $y = \dfrac{1}{x+2}$ в ряд Тейлора в окрестности точки $x_0 = 1$.

12. Найти три первых отличных от нуля члена разложения в степенной ряд решения дифференциального уравнения $y' = x^2y + y^3$, удовлетворяющего начальному условию $y(0) = 1$.

13. Разложить функцию в ряд Фурье в заданном интервале:

а) $f(x) = |\sin x|, \quad 0 < x < \pi;$ *б)* $f(x) = x - 2, \quad -2 < x < 2$.

в ряд по косинусам

Вариант 23

1. Найти u_{n+1} и u_{2n-1} члены ряда $\dfrac{3}{4} + \left(\dfrac{6}{7}\right)^2 + \left(\dfrac{9}{10}\right)^3 + \left(\dfrac{12}{13}\right)^4 + \ldots$.

2. Найти сумму ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2^n - 5^n}{10^n}$.

3. Можно ли решить вопрос о сходимости ряда с помощью необходимого признака? *а)* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2n}{4n+5}$; *b)* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n+2}{n!}$.

4. Исследовать ряды на сходимость:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{5^n}{7^n n!}$; *б)* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{\sqrt[3]{n^3+2n}}$; *в)* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{7}{n+1}\right)^n$; *г)* $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{1}{n\ln n}$.

5. Выяснить, сходится ряд абсолютно или условно:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{3^n+1}$; *б)* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n+1}}{n+2}$.

6. Определить интервал сходимости ряда и исследовать сходимость на концах интервала: *а)* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(x+5)^n}{(n+1)!}$; *б)* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^n n^2}{3^n}$; *в)* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(x-2)^n}{2^n\sqrt{n}}$.

7. Разложить по степеням x в ряд указанной функции. Указать интервал сходимости: *а)* $y=\ln(2+x)$; *б)* $y=\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$; *в)* $y=\int\limits_0^x \dfrac{\sin x}{x}dx$.

8. Найти сумму ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\cdot\dfrac{x^{3n-2}}{3n-1}$.

9. Используя разложение функции в степенной ряд, вычислить ее значения с точностью до 10^{-4}: *а)* $\dfrac{1}{\sqrt[6]{72}}$; *б)* $e^{0,1}$; *в)* $\cos 0,1$; *г)* $\ln 24$.

10. Найти с точностью до 0,001 значение интеграла $\int\limits_0^{0,25}\sqrt{1+x^4}\,dx$.

11. Разложить функцию $f(x)=\dfrac{1}{x}$ в ряд Тейлора в окрестности точки $x_0=3$.

12. Найти три первых отличных от нуля члена разложения в степенной ряд решения дифференциального уравнения $y'=0,2x+y^2$, удовлетворяющего начальному условию $y(0)=0,1$.

13. Разложить функцию в ряд Фурье в заданном интервале:

а) $f(x)=\begin{cases}\cos\pi x, & 0<x\le 0,5\\ 0, & 0,5<x<1\end{cases}$ *б)* $f(x)=2x, \quad -1<x<1.$

в ряд по синусам

Вариант 24

1. Найти u_{n+1} и u_{2n-1} члены ряда $\left(\dfrac{3}{4}\right)^{\frac{1}{2}}+\dfrac{5}{7}+\left(\dfrac{7}{10}\right)^{3/2}+\ldots$.

2. Найти сумму ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{5^n+4^n}{10^n}$.

3. Можно ли решить вопрос о сходимости ряда с помощью необходимого признака? *а)* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{4n-1}{n^2+2}$; *b)* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2^n}{n+3}$.

4. Исследовать ряды на сходимость:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{3^n}{2^n n!}$; *б)* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2+3n+1}$; *в)* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{2n-1}{n+2}\right)^n$; *г)* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n}{10n+1}$.

5. Выяснить, сходится ряд абсолютно или условно:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{3^n+1}$; *б)* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n+1}}{n+2}$.

6. Определить интервал сходимости ряда и исследовать сходимость на концах интервала: *а)* $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-4)^n n}{5^n\cdot\sqrt{n+1}}$; *б)* $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{x^{2n}}{n5^n\ln n}$; *в)* $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+3)^n 8^n}{n^2+1}$.

7. Разложить по степеням x в ряд указанной функции. Указать интервал сходимости: *а)* $y=xe^{-x^2}$; *б)* $y=\frac{1}{3+x^2}$; *в)* $y=\cos 2x\sin 2x$.

8. Найти сумму ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n+2}}{n+2}$.

9. Используя разложение функции в степенной ряд, вычислить ее значения с точностью до 10^{-4}: *а)* $e^{0,2}$; *б)* $\frac{1}{\sqrt[5]{30}}$; *в)* $\sin 0{,}2$; *г)* $\ln 12$.

10. Найти с точностью до 0,001 значение интеграла $\int_0^{0,5}\frac{dx}{\sqrt[3]{1+x^3}}$.

11. Разложить функцию $f(x)=\frac{1}{x}$ в ряд Тейлора в окрестности точки $x_0=3$.

12. Найти три первых отличных от нуля члена разложения в степенной ряд решения дифференциального уравнения $y'=x+xy$, удовлетворяющего начальному условию $y(0)=1$.

13. Разложить функцию в ряд Фурье в заданном интервале:

а) $f(x)=1-2x,\quad -2<x<2;$ *б)* $f(x)=\begin{cases}x, & 0<x\le 1\\ 2-x, & 1<x<2\end{cases}$ *в ряд по синусам*

Вариант 25

1. Найти u_{n+1} и u_{2n-1} члены ряда $1-\frac{2}{3}+\frac{4}{9}-\frac{8}{27}+\frac{16}{81}-\ldots$.

2. Найти сумму ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1+4^n}{5^n}$.

3. Можно ли решить вопрос о сходимости ряда с помощью необходимого признака?

а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5n}{n^3+4}$; *b)* $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{3n+2}$.

4. Исследовать ряды на сходимость:

а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n\cdot\sqrt{n}}$; *б)* $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+4}$; *в)* $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+1}{3n+2}\right)^n$; *г)* $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{\sqrt{n+1}}$.

5. Выяснить, сходится ряд абсолютно или условно:

а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{3n+1}$; *б)* $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)3^n}$.

6. Определить интервал сходимости ряда и исследовать сходимость на концах интервала:

а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+3)^n}{n!}$; *б)* $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n n!}{n^2}$; *в)* $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-7)^n}{3^n\cdot\sqrt{n}}$.

7. Разложить по степеням x в ряд указанной функции. Указать интервал сходимости:

а) $y=\ln(1+2x)$; *б)* $y=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$; *в)* $y=x\,arctg\ 4x$.

8. Найти сумму ряда $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\cdot(3n-2)\cdot x^{3n-3}$.

9. Используя разложение функции в степенной ряд, вычислить ее значения с точностью до 10^{-4}:

а) $\lg 16$; *б)* $\cos 0{,}2$; *в)* $\sqrt[10]{1032}$; *г)* e^{-2}.

10. Найти с точностью до 0,001 значение интеграла $\int_0^{0,1}\frac{e^x-1}{x}dx$.

11. Разложить функцию $f(x)=\frac{1}{x^2-2x+5}$ в ряд Тейлора в окрестности точки $x_0=1$.

12. Найти три первых отличных от нуля члена разложения в степенной ряд решения дифференциального уравнения $y'=y^2+x^3$, удовлетворяющего начальному условию $y(0)=0{,}5$.

13. Разложить функцию в ряд Фурье в заданном интервале:

а) $f(x)=\pi-x,\quad 0<x<2\pi$; *б)* $f(x)=\begin{cases}x, & 0<x\le 2\\ 4-x, & 4<x<4.\end{cases}$

Вариант 26

1. Найти u_{n+1} и u_{2n-1} члены ряда $1-\frac{2}{3}+\frac{4}{9}-\frac{8}{27}+\frac{16}{81}-\ldots$.

2. Найти сумму ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+2)(n+3)}$.

3. Можно ли решить вопрос о сходимости ряда с помощью необходимого признака? *а)* $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+5}{(n+2)!}$; *b)* $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{n+1}}{n^2+4}$.

4. Исследовать ряды на сходимость:

а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3}{4^n n!}$; *б)* $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3}{\sqrt{n+2}}$; *в)* $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{5n+1}\right)^n$; *г)* $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{5n^2+1}$.

5. Выяснить, сходится ряд абсолютно или условно:

а) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1} tg\frac{1}{4n}$; *б)* $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n^3}}$.

6. Определить интервал сходимости ряда и исследовать сходимость на концах интервала: *а)* $\sum_{n=1}^{\infty}(x-2)^{n+1} n!$; *б)* $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n}}{4^n\cdot\sqrt{n}}$; *в)* $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+1)^n}{2^n n}$.

7. Разложить по степеням x в ряд указанной функции. Указать интервал сходимости: *а)* $y=4^{\frac{x}{2}}$; *б)* $y=\frac{1}{x^2-7x+12}$; *в)* $y=x\cdot ctg\, x\cdot \sin x$.

8. Найти сумму ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{5n-2}}{5n-1}$.

9. Используя разложение функции в степенной ряд, вычислить ее значения с точностью до 10^{-4}:

а) $\ln 27$; *б)* $e^{-\frac{2}{3}}$; *в)* $arctg\frac{1}{3}$; *г)* $\sqrt[10]{1020}$.

10. Найти с точностью до 0,001 значение интеграла $\int_0^{0,25}\sqrt[3]{1+x^3}\,dx$.

11. Разложить функцию $f(x)=\frac{1}{1+x}$ в ряд Тейлора в окрестности точки $x_0=2$.

12. Найти три первых отличных от нуля члена разложения в степенной ряд решения дифференциального уравнения $y'=xy$, удовлетворяющего начальному условию $y(0)=1$.

13. Разложить функцию в ряд Фурье в заданном интервале:

а) $f(x)=x,\quad -\pi<x<\pi$; *б)* $f(x)=\begin{cases}-3, & 0<x\le 1\\ 5, & 1<x<\pi\end{cases}$.

Вариант 27

1. Найти u_{n+1} и u_{2n-1} члены ряда $\frac{1}{3\cdot 7}+\frac{1}{7\cdot 11}+\frac{1}{11\cdot 15}+\cdots$.

2. Найти сумму ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(3n-1)(3n+2)}$.

3. Можно ли решить вопрос о сходимости ряда с помощью необходимого признака? *а)* $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{1+e^n}$; *b)* $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{n+4}$.

4. Исследовать ряды на сходимость:

а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5^n}{\sqrt{n+2}}$; *б)* $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n+3}$; *в)* $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{5n-1}{5n+1}\right)^n$; *г)* $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{n+2}}$.

5. Выяснить, сходится ряд абсолютно или условно:

а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{(3n+1)^2}$; *б)* $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt[3]{n+1}}$.

6. Определить интервал сходимости ряда и исследовать сходимость на концах интервала: *а)* $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-1)^n}{3\cdot n!}$; *б)* $\sum_{n=1}^{\infty}x^n 10^n$; *в)* $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+3)^n}{5^n\cdot\sqrt{n}}$.

7. Разложить по степеням x в ряд указанной функции. Указать интервал сходимости: *а)* $y=\ln(4+x)$; *б)* $y=\frac{1}{x^2+x-2}$; *в)* $y=\sin x^2$.

8. Найти сумму ряда $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{2n-1}\cdot\frac{x^n}{(n+1)}$.

9. Используя разложение функции в степенной ряд, вычислить ее значения с точностью до 10^{-4}: *а)* $\sqrt[3]{e}$; *б)* $\sin\frac{\pi}{100}$; *в)* $\sqrt[3]{8{,}36}$; *г)* $\ln 7$.

10. Найти с точностью до 0,001 значение интеграла $\int_0^{0,25}\frac{dx}{\sqrt[5]{1+x^2}}$.

11. Разложить функцию $y=\frac{1}{x^2+3}$ в ряд Тейлора в окрестности точки $x_0=-1$.

12. Найти три первых отличных от нуля члена разложения в степенной ряд решения дифференциального уравнения $y'=2x^2+xy$, удовлетворяющего начальному условию $y(0)=1$.

13. Разложить функцию в ряд Фурье в заданном интервале:

а) $f(x)=\frac{\pi-x}{2}$, $0<x<\pi$;
в ряд по косинусам

б) $f(x)=\begin{cases}1, & -1<x\le 0\\ 0{,}5, & 0<x\le 0{,}5\\ x, & 0{,}5<x>1\end{cases}$

Вариант 28

1. Найти u_{n+1} и u_{2n-1} члены ряда $\frac{1}{2}+\frac{2}{5}+\frac{3}{10}+\frac{4}{17}+\ldots$.

2. Найти сумму ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n-3^n}{5^n}$.

3. Можно ли решить вопрос о сходимости ряда с помощью необходимого признака? *а)* $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+3}{n+5}\right)^n$; *b)* $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{5^n+3}$.

4. Исследовать ряды на сходимость:

а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{8^n n}$; *б)* $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{n^2+1}}$; *в)* $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+1}{2n+1}\right)^n$; *г)* $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3n-1}{2n+1}$.

5. Выяснить, сходится ряд абсолютно или условно:

а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n n}{5^n+1}$; *б)* $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n+2}}$.

6. Определить интервал сходимости ряда и исследовать сходимость на концах интервала: *а)* $\sum_{n=1}^{\infty}(x+2)^n 8^n$; *б)* $\sum_{n=1}^{\infty}x^n n!$; *в)* $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-4)^n}{2^n(n+1)}$.

7. Разложить по степеням x в ряд указанной функции. Указать интервал сходимости: *а)* $y=\ln(x^2-2x+3)$; *б)* $y=\frac{1}{3-x^2}$; *в)* $y=x\cos\frac{x}{2}$.

8. Найти сумму ряда $\sum_{n=1}^{\infty}(2n+3)\cdot x^{2n+2}$.

9. Используя разложение функции в степенной ряд, вычислить ее значения с точностью до 10^{-4}: *а)* $\frac{1}{\sqrt{e}}$; *б)* $\cos 10^0$; *в)* $\sqrt{1{,}3}$; *г)* $\ln 6$.

10. Найти с точностью до 0,001 значение интеграла $\int_0^{0,5}\frac{dx}{1+x^4}$.

11. Разложить функцию $f(x)=\sqrt[3]{x}$ в ряд Тейлора в окрестности точки $x_0=2$.

12. Найти три первых отличных от нуля члена разложения в степенной ряд решения дифференциального уравнения $y'=x^2+y^2$, удовлетворяющего начальному условию $y(0)=0{,}5$.

13. Разложить функцию в ряд Фурье в заданном интервале:

а) $f(x)=\frac{\pi-x}{2}$, $0<x<\pi$; *в ряд по синусам*

б) $f(x)=e^x$, $0<x<2$ *в ряд по косинусам*

Вариант 29

1. Найти u_{n+1} и u_{2n-1} члены ряда $\frac{3}{8}+\frac{5}{16}+\frac{7}{32}+\frac{9}{64}+$.

2. Найти сумму ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+7)(n+8)}$.

3. Можно ли решить вопрос о сходимости ряда с помощью необходимого признака? *а)* $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5n-1}{n-3}$; *b)* $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{n^2+n-1}$.

4. Исследовать ряды на сходимость:

а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n}{3^n}$; *б)* $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3+2}$; *в)* $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+1}{4n-1}\right)^{2n}$; *г)* $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{n+3}}$.

5. Выяснить, сходится ряд абсолютно или условно:

а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^3+1}$; *б)* $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt[3]{n+2}}$.

6. Определить интервал сходимости ряда и исследовать сходимость на концах интервала: *а)* $\sum_{n=1}^{\infty}(x-4)^n n!$; *б)* $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n}}{9^n\cdot\sqrt{n}}$; *в)* $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+2)^{2n}}{10^n n^2}$.

7. Разложить по степеням x в ряд указанной функции. Указать интервал сходимости: *а)* $y=\ln(5+x)$; *б)* $y=\frac{x}{x^2+3}$; *в)* $y=\sin^2\frac{x}{3}$.

8. Найти сумму ряда $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\cdot\frac{x^{3n+1}}{3n}$.

9. Используя разложение функции в степенной ряд, вычислить ее значения с точностью до 10^{-4}:

а) e^{-1}; *б)* $\sin\frac{\pi}{10}$; *в)* $\sqrt[6]{738}$; *г)* $\ln 32$.

10. Найти с точностью до 0,001 значение интеграла $\int_0^{0,2}\frac{e^{-x}dx}{x^2}$.

11. Разложить функцию $f(x)=\ln(2+x)$ в ряд Тейлора в окрестности точки $x_0=1$.

12. Найти три первых отличных от нуля члена разложения в степенной ряд решения дифференциального уравнения $y'=2\cos x-xy$, удовлетворяющего начальному условию $y(0)=1$.

13. Разложить функцию в ряд Фурье в заданном интервале:

а) $f(x)=\cos\frac{x}{3},\quad -\pi<x<\pi$; *б)* $f(x)=\begin{cases}2, & 0<x\le 2\\ x+2, & 2<x<4.\end{cases}$

Вариант 30

1. Найти u_{n+1} и u_{2n-1} члены ряда $\frac{2}{2}+\frac{5}{6}+\frac{8}{24}+\frac{11}{120}$.

2. Найти сумму ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1+3^n}{9^n}$.

3. Можно ли решить вопрос о сходимости ряда с помощью необходимого признака? *а)* $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n^4+5}$; *b)* $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{7^n}{n+2}$.

4. Исследовать ряды на сходимость:

а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{7^n}{n!}$; *б)* $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+5}$; *в)* $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{3n+1}\right)^{2n}$; *г)* $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{\sqrt[3]{n+5}}$.

5. Выяснить, сходится ряд абсолютно или условно:

а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{5^n+1}$; *б)* $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n tg\frac{1}{3\sqrt{n}}$.

6. Определить интервал сходимости ряда и исследовать сходимость на концах интервала: *а)* $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+1)^n 2^n}{n!}$; *б)* $\sum_{n=1}^{\infty}x^n 5^n$; *в)* $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-4)^n}{n3^n}$

.

7. Разложить по степеням x в ряд указанной функции. Указать интервал сходимости: *а)* $y=x2^{\frac{x}{2}}$; *б)* $y=\sqrt{9-x^2}$; *в)* $y=xtgx\cos x$.

8. Найти сумму ряда $\sum_{n=1}^{\infty}(3n+2)\cdot x^{3n+1}$.

9. Используя разложение функции в степенной ряд, вычислить ее значения с точностью до 10^{-4}:

а) $\sqrt[4]{e}$; *б)* $arctg0{,}2$; *в)* $\frac{1}{\sqrt[7]{136}}$; *г)* $\ln 64$.

10. Найти с точностью до 0,001 значение интеграла $\int_0^{0,5} arctg(x^3)dx$.

11. Разложить функцию $f(x)=\sqrt{x+4}$ в ряд Тейлора в окрестности точки $x_0=1$.

12. Найти три первых отличных от нуля члена разложения в степенной ряд решения дифференциального уравнения $y'=x+y$, удовлетворяющего начальному условию $y(0)=1$.

13. Разложить функцию в ряд Фурье в заданном интервале:

а) $f(x)=|2-x|,\quad 0<x<4;$ *б)* $f(x)=\begin{cases}-2, & -\pi<x\le 0\\ 2, & 0<x<\pi\end{cases}$

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Данко П.Е. Высшая математика в упражнениях и задачах. В 2 ч. Ч. 2 / П.Е. Данко, А.Г. Попов, Т.Я. Кожевникова. – М. : ОНИКС, 2012. – 416 с.

2. Запорожец Г.И. Руководство к решению задач по математическому анализу / Г.И. Запорожец. – Минск : Высш. шк., 2008. – 459 с.

3. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисление. В 2 т. Т. 2 / Н.С. Пискунов. – М. : Интеграл-Пресс, 2005. – 544 с.

4. Крючкович Г.И. Сборник задач по курсу высшей математики / Г.И. Крючкович. – М. : Высш. шк., 1973. – 521 с.

5. Городилова М.А. Числовые и степенные ряды. Ряды Фурье : метод. указания и инд. задания / М.А. Городилова, Г.В. Костина. – Хабаровск : Изд-во ДВГУПС, 2005. – 39 с.

6. Матвеева Е.В. Ряды : учеб. пособие / Е.В. Матвеева. – Хабаровск : Изд-во ДВГУПС, 2012. – 124 с.

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ 3
1. РЯД И ЕГО СУММА 4
2. СХОДИМОСТЬ РЯДОВ С ПОЛОЖИТЕЛЬНЫМИ ЧЛЕНАМИ 5
3. ЗНАКОЧЕРЕДУЮЩИЕСЯ РЯДЫ 9
4. СТЕПЕННЫЕ РЯДЫ 10
5. РЯД ТЕЙЛОРА. ПРИЛОЖЕНИЯ СТЕПЕННЫХ РЯДОВ 15
6. ИНТЕГРИРОВАНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ 18
С ПОМОЩЬЮ РЯДОВ 18
7. РЯДЫ ФУРЬЕ 19
ВАРИАНТЫ ИНДИВИДУАЛЬНЫХ ЗАДАНИЙ 22
БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК 53

Учебное издание

РЯДЫ. ПРИЛОЖЕНИЯ РЯДОВ

Методическое пособие по решению задач курса «Теория рядов»

Составители:
Городилова Марианна Альбертовна
Костина Галина Викторовна

Отпечатано методом прямого репродуцирования

План 2016 г. Поз. 9.2. Подписано в печать 25.04.2016.
Уч.-изд. л. 3,5. Усл. печ. л. 3,2. Зак. 101. Тираж 120 экз. Цена 89 руб.

Издательство ДВГУПС
680021, г. Хабаровск, ул. Серышева, 47.