Министерство транспорта Российской Федерации
Федеральное агентство железнодорожного транспорта
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Дальневосточный государственный университет путей сообщения»

Кафедра «Высшая математика»

М. И. Якунина, Т. А. Богомякова

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИИ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

Методическое пособие

Хабаровск
2020

УДК 517.2(075.8)
ББК В 161.54 я 73
Я 496

Рецензент:
кандидат физико-математических наук,
доцент кафедры «Высшая математика» Дальневосточного государственного университета путей сообщения
Е. В. Матвеева

Якунина М.И., Богомякова Т.А.
Дифференциальное исчисление функции одной переменной: методическое пособие / М.И. Якунина. Т.А. Богомякова, – Хабаровск, ДВГУПС, 2020. – 89 стр.

Методическое пособие рекомендовано для всех специальностей ДВГУПС. В методическом пособии изложены краткие теоретические сведения по дифференциальному исчислению функции одной переменной, рассмотрены примеры нахождения производных и построения графиков функций с помощью методов дифференциального исчисления. Пособие содержит большое количество примеров с подробным анализом решения. Даны варианты индивидуальных заданий.

Предназначены для студентов первого курса очной формы обучения, изучающих дисциплины «Математический анализ», «Математика», «Высшая математика».

УДК 517.2(075.8)

ББК В 161.54 я 73

ВВЕДЕНИЕ

Данное методическое пособие по математическому анализу разработано для студентов очной формы обучения на основе Федерального государственного образовательного стандарта для всех специальностей ДВГУПС.

Производная – одно из самых важных понятий математического анализа. Знание производной позволяет решать многочисленные технические задачи, задачи экономической теории, физики, алгебры и геометрии. Тема «Дифференциальное исчисление функции одной переменной» изучается студентами первого курса разных направлений.

Данное пособие написано авторами на основе опыта чтения лекций, ведения практических занятий по математике для студентов очной формы обучения. Пособие содержит минимальный объем теоретического материала с подробным разбором решения типовых задач по темам:

– производная и дифференциал функции;

– применение производной к исследованию функций.

В начале каждой темы кратко излагаются основные теоретические сведения (определения, теоремы, формулы), необходимые для решения задач, приводятся решения типовых задач. На основе данных тем составлена вторая часть пособия, где содержатся индивидуальные задания по вариантам для самостоятельного выполнения студентами. При подборе задач были использованы различные сборники задач, которые указаны в библиографическом списке. Пособие может быть использовано также для изучения перечисленных тем на практических занятиях под руководством преподавателя.

Авторы надеются, что данное методическое пособие поможет студентам в изучении основ высшей математики и выполнении индивидуальных заданий.

Для более глубокого изучения данного раздела математики можно воспользоваться литературой, список которой приводится в конце издания.

§1. ПОНЯТИЕ ПРОИЗВОДНОЙ, ЕЁ ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ И ФИЗИЧЕСКИЙ СМЫСЛ

1.1. Понятие производной

Пусть функция $y=f(x)$ определена на интервале (a,b). Возьмем какое-либо значение переменной $x_0 \in (a,b)$. Найдем значение функции $y=f(x)$ в этой точке, т.е. $f(x_0)$. Затем, проделаем следующие операции:

-придавая первоначальному значению аргумента x_0 **приращение** Δx (положительное или отрицательное), выберем новое значение аргумента $x_0+\Delta x \in (a,b)$;

-сопоставим новому значению аргумента новое значение функции $f(x_0+\Delta x)$;

- запишем изменение функции $\Delta y(x_0) = f(x_0+\Delta x) - f(x_0)$, которое называется **приращением функции**;

- составим отношение приращение функции к приращению аргумента в точке x_0

$$\frac{\Delta y(x_0)}{\Delta x} = \frac{f(x_0+\Delta x) - f(x_0)}{\Delta x},$$

которое является функцией от Δx;

-перейдем к пределу этого отношения при $\Delta x \to 0$: $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$.

Если этот предел существует, то его называют производной функции $f(x)$ в точке x_0.

Определение 1.1.1. Предел отношения приращения функции Δy в точке x_0 к приращению аргумента Δx, когда приращение аргумента стремится к нулю
$\Delta x \to 0$, называется производной функции $y=f(x)$ в точке x_0

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0+\Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}. \tag{1}$$

Производную функции $y=f(x)$ в произвольной точке x обозначается

$y',\ f'(x),\ \frac{dy}{dx},\ \frac{df}{dx},\ \frac{d}{dx}f(x),\ \dot{y}=\frac{dy}{dx},\ y'_x.$

Действие нахождения производной функции называется **дифференцированием.**

Функция $y=f(x)$, имеющая производную в каждой точке интервала $(a;b)$, называется **дифференцируемой** в этом интервале.

Производная функции в точке есть число. Но, если производная функции $f(x)$ существует в любой точке некоторого интервала (в частности, на множестве R), она определяет некоторую новую функцию.

Задача 1.1.1. Найти производную функции $y=c, c=const$ по определению.

Решение. Для нахождения производной надо:
- значению x задаем приращение Δx: $x+\Delta x$;
- найдем значение функции $f(x+\Delta x)=c$;
- находим приращение функции Δy: $\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x) = C - C = 0$;
- составляем отношение $\frac{\Delta y}{\Delta x}$: $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{0}{\Delta x} = 0$;
- следовательно, $y' = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} 0 = 0$, т.е. $(c)' = 0$.

Т.е. производная от числа равна нулю.

Задача 1.1.2. Найти производную функции $y = x^2$ по определению.

Решение: Для нахождения производной надо:
- значению x задаем приращение $\Delta x : x+\Delta x$;
- находим приращение функции Δy: $\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x) =$

$= (x+\Delta x)^2 - x^2 = x^2 + 2x\cdot\Delta x + (\Delta x)^2 - x^2 = 2x\cdot\Delta x + (\Delta x)^2$;
- снайдем отношение $\frac{\Delta y}{\Delta x} : \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2x\cdot\Delta x + (\Delta x)^2}{\Delta x} = \frac{\Delta x(2x+\Delta x)}{\Delta x} = 2x + \Delta x$;
- находим предел этого отношения: $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} (2x+\Delta x) = 2x$.

Таким образом, $\left(x^2\right)' = 2x$.

Задача 1.1.3. Вычислить производную функции $y = sinx$ по определению.

Решение. Для нахождения производной выполним следующее:
-значению x задаем приращение $\Delta x : x+\Delta x$;
-составим значение функции $f(x+\Delta x) = sin(x+\Delta x)$;
-находим приращение функции Δy:

$$\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x) = sin(x+\Delta x) - sin\,x =$$

$$= \left[\begin{array}{l}\text{воспользуемся формулой}\\ sin\alpha - sin\beta = 2sin\frac{\alpha-\beta}{2}cos\frac{\alpha+\beta}{2}\end{array}\right] = 2sin\frac{\Delta x}{2}cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right);$$

-составляем отношение $\frac{\Delta y}{\Delta x} : \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2\sin\frac{\Delta x}{2}\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)}{\Delta x} = \frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}\cdot\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)$;

- найдем предел отношения приращения функции к приращению аргумента при $\Delta x \to 0$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}\cdot\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)=$$

$$=\left[\begin{array}{l}\text{по первому замечательному}\\ \text{пределу}\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\sin\Delta x}{\Delta x}=1\end{array}\right]=1\cdot\cos x=\cos x.$$

- следовательно, $(\sin x)'=\cos x.$

Производные элементарных функций представлены в таблице 1.

Таблица 1. Производные основных функций

№ п/п	Функция	Производная
1.	$y=c,\ c=const$	$(c)'=0$
2.	$y=x^{\alpha}$	$\alpha x^{\alpha-1}$
3.	$y=\sin x$	$\cos x$
4.	$y=\cos x$	$-\sin x$
5.	$y=tg\,x$	$\frac{1}{\cos^2 x}$
6.	$y=ctg\,x$	$-\frac{1}{\sin^2 x}$
7.	$y=\arcsin x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
8.	$y=\arccos x$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
9.	$y=arctgx$	$\frac{1}{1+x^2}$
10.	$y=arcctgx$	$-\frac{1}{1+x^2}$
11.	$y=a^x$	$a^x\cdot\ln a$
12.	$y=e^x$	e^x
13.	$y=\log_a x$	$\frac{1}{x\cdot\ln a}$
14.	$y=\ln x$	$\frac{1}{x}$
15.	$y=\sec x$	$\sec x\cdot tgx$
16.	$y=cosec\,x$	$-cosecx\cdot ctgx$

17.	$y = shx$	chx
18.	$y = chx$	shx
19.	$y = thx$	$-\dfrac{1}{ch^2x}$
20.	$y = cthx$	$-\dfrac{1}{sh^2x}$

Замечания:

1. Если функция дифференцируема в некоторой точке, то она непрерывна в ней. Но обратное утверждение неверно: непрерывная функция может не иметь производной. Например, рассмотрим функцию $y=|x|$ (Рис. 1).

Известно, что

$$y = |x| = \begin{cases} x, \text{если } x \geq 0, \\ -x, \text{если } x < 0. \end{cases}$$

Изображенная на рис.1 функция непрерывна в точке $x = 0$, но не дифференцируема в ней. Действительно, по определению производной в точке $x = 0$, имеем

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(0+\Delta x) - f(0)}{\Delta x} = \frac{f(\Delta x)}{\Delta x} = \frac{|\Delta x|}{\Delta x} = \begin{cases} 1, \text{ если } \Delta x>0, \\ -1, \text{ если } \Delta x < 0. \end{cases}$$

Отсюда следует, что $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ не существует, т.е. функция $y = |x|$ не имеет производной в точке $x = 0$.

Существуют односторонние пределы функции $y = |x|$ в точке $x = 0$:

$\lim\limits_{\Delta x \to 0-0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = -1$, $\lim\limits_{\Delta x \to 0+0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = 1$. То есть функция $y=|x|$имеет односторонние производные, в точке $x = 0$.

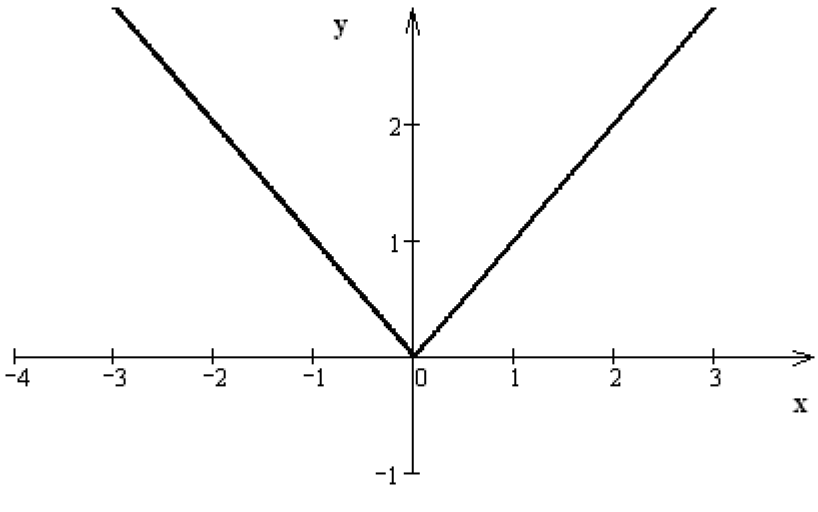


Рис.1. График функции $y=|x|$.

Следовательно, можно сделать вывод, что из непрерывности функции в некоторой точке еще не следует, что в этой точке у функции существует производная.

При определении производной функции в точке способ стремления $\Delta x \to 0$ предполагается произвольным. Поэтому ясно, что если y функции $y = f(x)$ существует производная, то $f'(x_0) = f'_-(x_0) = f'_+(x_0)$, где $f'_-(x_0)$ и $f'_+(x_0)$ - производные слева и справа соответственно. Если $f'_-(x_0) \neq f'_+(x_0)$, то производная в точке не существует.

2. Если для некоторого значения x предел $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = +\infty$ или $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = -\infty$, то говорят, что для этого значения x существует бесконечная производная.
3. Если функция $y = f(x)$ имеет непрерывную производную $y' = f'(x)$ в некотором интервале (a,b), то функция называется **гладкой.**

Геометрический смысл производной

Рассмотрим геометрический смысл производной.

На рис. 2 изображен график непрерывной функции $y = f(x)$. Точка M_0 на графике имеет координаты (x_0, $f(x_0)$). Прямая M_0P является секущей для линии $y = f(x)$.

Определение 1.2.1. Предельное положение секущей M_0P при $P \to M_0$ называется **касательной прямой к** графику функции $y = f(x)$ в точке M_0.

Угол между касательной прямой M_0K и положительным направлением с осью Ох равен α

Геометрическое истолкование производной состоит в том, что угловой коэффициент касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке с абсциссой x_0 равен производной этой функции в точке x_0:

$$f'(x_0) = k = tg\alpha, \tag{2}$$

где k -угловой коэффициент, а α - угол наклона касательной к графику функции $f(x)$ в точке (x_0, $f(x_0)$).

Уравнение касательной M_0K к кривой, заданной уравнением $y = f(x)$, в точке с абсциссой x_0 имеет вид:

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0), \tag{3}$$

где x_0- абсцисса точки касания,

$f(x_0)$ - значение функции в точке с абсциссой x_0 (в точке касания),

$f'(x_0)$ - значение производной в точке касания x_0,

(x,y) -координаты любой точки, лежащей на касательной.

Определение 1.2.2. Прямая, перпендикулярная касательной в точке касания, называется **нормалью к кривой**.

На рис 2. нормалью является прямая MQ. Т.к. нормаль перпендикулярна касательной, то из курса аналитической геометрии нам известно, что ее угловой коэффициент равен

$$k_{норм.} = -\frac{1}{k_{кас.}} = -\frac{1}{f'(x_0)}$$

Поэтому из уравнения (3) можно получить уравнение нормали MQ

$$y = f(x_0) - \frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0). \qquad (4)$$

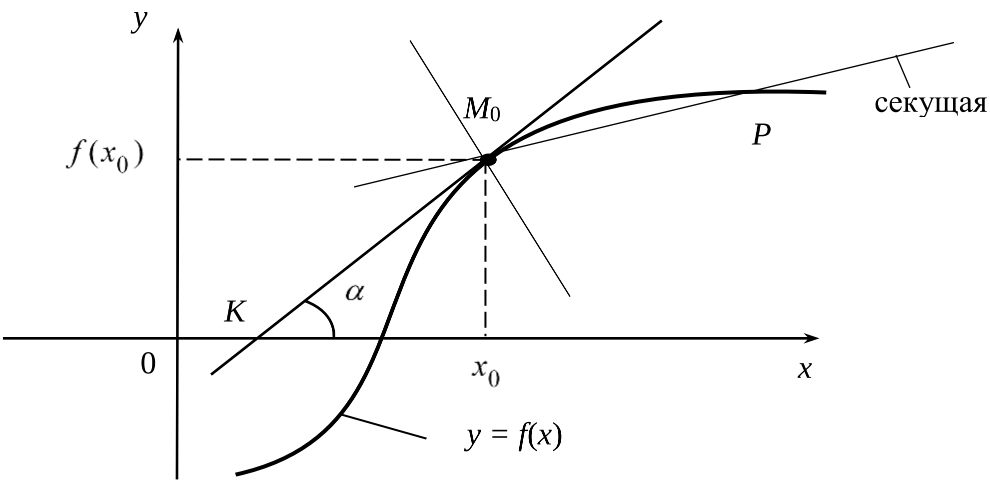


Рис. 2. Геометрический смысл производной

Замечание. Если угол наклона касательной равен $\alpha = 0$, следовательно $f'(x_0) = 0$,т.е. касательная горизонтальна, то её уравнение имеет вид

$$y = y_0,$$

а уравнение нормали

$$x = x_0.$$

В случае, если угол наклона касательной равен

$$\alpha = \frac{\pi}{2} \text{ или } \alpha = \frac{3\pi}{2},$$

то тангенс угла наклона касательной равен бесконечности, т.е функция $f(x)$ имеет бесконечную производную

$$f'(x) = \infty.$$

Тогда уравнение касательной имеет вид

$$x = x_0,$$

а нормали

$$y = y_0.$$

Задача 1.2.1. Составить уравнение касательной к параболе $y = x^2 - 4x$ в точке, где $x_0 = 1$.

Решение. Воспользуемся уравнением (3) $y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$.

Для заданной функции $y = x^2 - 4x$ абсцисса точки к которой надо составить уравнение касательной по условию равна $x_0 = 1$. Подставляя в уравнение параболы заданную абсциссу $x_0 = 1$, найдем её ординату:

$f(x_0) = f(1) = 1^2 - 4 \cdot 1 = -3$.

Для определения значения $f'(x_0)$, углового коэффициента касательной, находим производную от заданной функции $y'(x)$:

$$y' = \left(x^2 - 4x\right)' = \left(x^2\right)' - (4x)' = 2x - 4.$$

Вычисляем значение $y'(x)$ в точке $x_0 = 1$:

$y'(1) = 2 \cdot 1 - 4 = -2$. Таким образом мы нашли $f'(x_0)$.

Подставляя значения x_0, $f(x_0)$ и $f'(x_0)$ в уравнение (3), получим уравнение касательной

$y = -3 - 2(x - 1)$ или $y = -2x - 1$.

Следовательно, уравнение касательной в точке $x_0 = 1$ к графику данной функции имеет вид: $y = -2x - 1$.

Задача 1.2.2. Составить уравнение касательной, проведенной к кривой $y = -\frac{2}{3}x^3 - 2x^2 + 4x + 3$, параллельно прямой $8x + 4y + 11 = 0$.

Решение. По условию, касательная к заданной кривой параллельна прямой $8x + 4y + 11 = 0$, следовательно угловые коэффициенты этих прямых должны быть равны.

Найдем угловой коэффициент касательной заданной кривой, для этого найдем производную:

$y'(x) = -2x^2 - 4x + 4$.

Найдем угловой коэффициент прямой. Для этого сведем уравнение к виду $y = kx + b$, где k - угловой коэффициент прямой.

$$y = -2x - \frac{11}{4}, k = -2.$$

Приравняем угловые коэффициенты и решим полученное квадратное уравнение:

$-2x^2 - 4x + 4 = -2$, $x_1 = 1, x_2 = -3$.

Найденные корни являются абсциссами точек, через которые проходят касательные к графику функции $y = -\frac{2}{3}x^3 - 2x^2 + 4x + 3$. Найдем ординаты этих точек:

$$y(1) = -\frac{2}{3} \cdot 1^3 - 2 \cdot 1^2 + 4 \cdot 1 + 3 = \frac{13}{3},$$

$$y(-3) = -\frac{2}{3} \cdot (-3)^3 - 2 \cdot (-3)^2 + 4 \cdot (-3) + 3 = -9.$$

Составим уравнения касательных по формуле (3) получим:

$y-\frac{13}{3}=-2(x-1),\ y=-2x+\frac{19}{3}$,

$y+9=-2(x+3),\ y=-2x-15$.

1.3 Физический смысл производной

Пусть функция $S=f(t)$ описывает движение материальной точки по прямой как зависимость пути S от времени t. Тогда $\Delta S=f(t+\Delta t)-f(t)$ - это путь, пройденный за интервал времени Δt, а отношение $\frac{\Delta S}{\Delta t}$ - средняя скорость за время Δt. Получаем, что чем меньше Δt, тем лучше средняя скорость характеризует изменение функции. Тогда

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta S}{\Delta t}=f'(t)=v(t), \qquad (5)$$

определяет мгновенную скорость точки в момент времени t как производную пути по времени.

Замечание. Производную функции $y=f(x)$ можно трактовать как скорость изменения функции: чем больше угол наклона касательной к кривой, тем круче график $y=f(x)$ и быстрее растет (убывает) функция.

В зависимости от содержательной сущности функции можно получить широкий круг моделей скорости протекания процессов. Рассмотрим некоторые из них.

1. Пусть $y=v(t)$- функция, описывающая процесс изменения скорости неравномерного движения в зависимости от времени t. Тогда мгновенное ускорение материальной точки в фиксированный момент времени t_0 есть производная от скорости v по времени t: $a=\lim\limits_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta v}{\Delta t}=v'(t)$, где a - ускорение.
2. Пусть $y=Q(T)$- функция, описывающая процесс изменения количества теплоты, сообщаемой телу при нагревании его до температуры T. Тогда теплоемкость тела C есть производная от количества теплоты Q по температуре T: $C=\lim\limits_{\Delta T\to 0}\frac{Q(T)}{\Delta T}=Q'(T)$.
3. Пусть необходимо определить линейную плотность недородного стержня длиной l, где m - масса стержня, концы которого имеют координаты 0 и x_0 (предполагается, что ось Ox направлена по стержню). Масса стержня является функцией от x: $f(x)=m(x)$. Тогда линейная плотность неоднородного тонкого стержня в точке x_0, есть производная от массы m по длине l: $\rho(x_0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta m}{\Delta x}=\mathrm{m}'(x)$.

4. Пусть $y=\Phi(\mathrm{t})$ - функция, описывающая процесс изменения магнитного потока в зависимости от времени t. Тогда мгновенное значение электродвижущей силы индукции ε равно скорости изменения магнитного потока, то есть производной от магнитного потока Φ по времени t: $\varepsilon=\lim\limits_{\Delta t\to 0}\dfrac{\Delta\Phi}{\Delta t}=\Phi'(\mathrm{t})$.
5. Пусть $y=q(\mathrm{t})$ - функция, описывающая процесс изменения заряда в колебательном контуре в зависимости от времени t.Тогда сила тока I в контуре в момент времени м равна производной заряда q по времени t: $I=\lim\limits_{\Delta t\to 0}\dfrac{\Delta q}{\Delta t}=q'(t)$.

   Т. о., из вышесказанного можно сделать вывод, что первая производная от функции показывает *скорость изменения процесса*.

Задача 1.3.1. Тело движется по закону $S(t)=4t^4-10t^3-t^2+11$ (t - в секундах, S - в метрах). Найти скорость движения тела через 2 секунды после начала движения.

Решение. Скорость движения вычисляется по формуле (4) $v(t)=S'(t)$. Получаем

$$v(t)=S'(t)=\left(4t^4-10t^3-t^2+11\right)'=\left(4t^4\right)'-\left(10t^3\right)'-\left(t^2\right)'+(11)'=$$

$$=16t^3-30t^2-2t.$$

Чтобы найти скорость движения через 2 секунды после начала движения, надо вычислить значение скорости в момент времени *t=2* Т.е. $v(2)=16\cdot 2^3-30\cdot 2^2-2\cdot 2=4$(м/с).

§2. ПРАВИЛА ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ. ПРОИЗВОДНАЯ СЛОЖНОЙ И ОБРАТНОЙ ФУНКЦИИ

2.1. Правила дифференцирования

Правила дифференцирования позволяют находить производные суммы (разности), произведения и частного двух функций. Перечислим их.

1. $(C\cdot u(x))'=C\cdot u'(x)$, $C=\mathrm{const}$.
2. $(u(x)\pm v(x))'=u'(x)\pm v'(x)$.
3. $(u(x)v(x))'=u'(x)\cdot v(x)+u(x)\cdot v'(x)$.
4. $\left(\dfrac{u(x)}{v(x)}\right)'=\dfrac{u'(x)\cdot v(x)-u(x)\cdot v'(x)}{v^2(x)}$, $v(x)\neq 0$.

Замечание 1. Правило 2 выполняется для алгебраической суммы любого количества функций.

Замечание 2. Из правила 3 легко вывести формулу для производной от произведения нескольких функций. Например, $(uvw)' = \left[(uv)w\right]' =$
$(uv)'w + (uv)w' = (u'v + uv')w + uvw' = u'vw + uv'w + uvw'$. Аналогичный вид имеет формула для произведения любого числа множителей.

Задача 2.1.1. Пользуясь формулами дифференцирования и таблицей производных, найти производные следующих функций: а) $y = x^2 - 5x + 4$;
б) $y = \sqrt{x} + \dfrac{5}{\sqrt[3]{x}} - \dfrac{1}{x^2} + \dfrac{1}{3x^3}$; в) $y = cos\,x \cdot 5^x$; г) $y = \dfrac{x^2 + x + 1}{2x^3 + 1}$.

Решение. а) Используя таблицу производных, первое и второе правило получим:

$$y' = \left(x^2 - 5x + 4\right)' = \left[\left(u(x) \pm v(x)\right)' = u'(x) \pm v'(x)\right] =$$

$$= \left(x^2\right)' - (5x)' + (4)' = \left[\begin{array}{l} \left(x^{\alpha}\right)' = \alpha x^{\alpha-1} - \text{производная степенной функции} \\ (C \cdot u(x))' = C \cdot u'(x) \text{ - 1 правило} \\ (c)' = 0 - \text{производная от числа} \end{array}\right] =$$

$$= 2x - 5 \cdot 1 + 0 = 2x - 5.$$

б) Вводя дробные и отрицательные показатели, преобразуем данную функцию:

$$y = \sqrt{x} + \frac{5}{\sqrt[3]{x}} - \frac{1}{x^2} + \frac{1}{3x^3} = x^{\frac{1}{2}} + 5x^{\frac{-1}{3}} - x^{-2} + \frac{1}{3}x^{-3}.$$

Тогда, используя производную степенной функции $y' = \left(x^{\alpha}\right)' = \alpha x^{\alpha-1}$, правила 1 и 2 будем иметь:

$$y' = (x^{\frac{1}{2}} + 5x^{\frac{-1}{3}} - x^{-2} + \frac{1}{3}x^{-3})' = (x^{\frac{1}{2}})' + (5x^{\frac{-1}{3}})' - (x^{-2})' + (\frac{1}{3}x^{-3})' =$$

$$= \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} + 5 \cdot (-\frac{1}{3})x^{-\frac{4}{3}} - (-2)x^{-3} + \frac{1}{3}(-3)x^{-4} = \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{5}{3\sqrt[3]{x^4}} + \frac{2}{x^3} - \frac{1}{x^4}.$$

в) Воспользовавшись правилом 3 (производная произведения) распишем:

$$y' = \left(cos\,x \cdot 5^x\right)' = \left[\left(u(x)v(x)\right)' = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x)\right] =$$

$$= (cos\,x)' \cdot 5^x + cos\,x \cdot \left(5^x\right)' = \left[\begin{array}{l} (cos\,x)' = -sin\,x \\ \left(a^x\right)' = a^x \cdot ln\,a \end{array}\right] = -sin\,x \cdot 5^x + cos\,x \cdot 5^x\,ln5.$$

г) Для решения этого примера используем правило 4 (производная частного).

$$y' = \left(\frac{x^2 + x + 1}{2x^3 + 1} \right)' = \left[\left(\frac{u(x)}{v(x)} \right)' = \frac{u'(x) \cdot v(x) - u(x) \cdot v'(x)}{v^2(x)}, \, v(x) \neq 0 \right] =$$

$$= \frac{\left(x^2 + x + 1\right)' \cdot \left(2x^3 + 1\right) - \left(x^2 + x + 1\right) \cdot \left(2x^3 + 1\right)'}{\left(2x^3 + 1\right)^2} =$$

$$= \frac{(2x + 1) \cdot \left(2x^3 + 1\right) - \left(x^2 + x + 1\right) \cdot 6x^2}{\left(2x^3 + 1\right)^2} = \frac{4x^4 + 2x^3 + 2x + 1 - 6x^4 - 6x^3 - 6x^2}{\left(2x^3 + 1\right)^2} =$$

$$= \frac{-2x^4 - 4x^3 - 6x^2 + 2x + 1}{\left(2x^3 + 1\right)^2}.$$

2.2. Производная сложной функции

Рассмотрим дифференцирование сложной функции.

Пусть переменная y зависит от переменой u и эта зависимость задана аналитически выражением $y = f(u)$. Причем переменная u зависит от переменной x, то есть $u = \varphi(x)$. Тогда при изменении x будет меняться u, следовательно, будет меняться y. Таким образом, y является функцией от аргумента x и $y = f(\varphi(x))$ при определенных условиях.

Определение 2.2.1. Если на некотором промежутке X определена функция $u = \varphi(x)$ с множеством значений U, а на множестве значений U определена функция $y = f(u)$, то функция $y = f(\varphi(x))$ называется сложной функцией от x, а переменная u - промежуточной переменной сложной функции.

Пример 2.2.1. Если $y = \cos u$, а $u = x^3$, то функция $y = \cos x^3$ есть сложная функция независимой переменной x. Причем эта функция определена на всей числовой прямой, так как областью определения и множеством значений функции $u = x^3$ является вся числовая прямая.

Для дифференцирования сложной функции применяют следующую теорему.

Теорема 2.2.1. Если функция $u = \varphi(x)$ имеет в точке x производную $u'_x = \varphi'(x)$, а функция $y = f(u)$ имеет производную $y'_u = f'(u)$ в ссоответствующей точке u, то сложная функция $y = f(\varphi(x))$ в данной точке x имеет производную y'_x, которая находится по следующей формуле

$$y'_x = y'_u \cdot u'_x = f'(u) \cdot \varphi'(x). \qquad (6)$$

Иначе, *производная сложной функции равна произведению производной данной функции по промежуточному аргументу на производную промежуточного аргумента.*

Замечание. В данной теореме рассмотрена сложная функция, где y зависит от x через промежуточную переменную u. Возможна и более сложная зависимость - с двумя, тремя и большим числом промежуточных переменных, но правило дифференцирования остается таким же.

Так, например, если $y=f(u)$, где $u=\varphi(v)$, а $v=\psi(w)$ и $w=\chi(x)$, то производная y'_x следует вычислять по формуле

$$y'_x=f'(u)\cdot u'(v)\cdot v'(w)\cdot w'(x). \qquad (7)$$

2.3. Дифференцирование обратной функции

Введем правило для нахождения производной обратной функции.

Для начала рассмотрим понятие обратной функции. Пусть $y=f(x)$ есть функция независимой переменной x. Это означает, что, задавая значение x, мы можем определить значения зависимой переменной y. Поступим наоборот, будем считать независимой переменную y, а зависимой переменную x. Тогда x будет являться функцией переменной y, которая называется функцией, обратной данной. Предполагая, что уравнение $y=f(x)$ разрешимо относительно x, получим явное выражение обратной функции $x=\varphi(y)$. Функция, обратная однозначной функции, может быть многозначной, то есть данному значению y может соответствовать несколько значений переменной x. Однако иногда удается сделать обратную функцию однозначной, вводя дополнительные ограничения на ее значения.

Пример 2.3.1. Для однозначной функции $y=x^2$ обратной является двузначная функция $x=\pm\sqrt{y}$. Если условиться для корня брать только арифметическое значение, то обратная функция будет однозначной.

Функции $y=f(x)$ и $x=\varphi(y)$ являются взаимно обратными.

Иногда придерживаются стандартных обозначений, то есть под x понимают независимую переменную или аргумент, а под y - зависимую переменную или функцию. В этом случае взаимно обратные функции будут иметь вид $y=f(x)$ и $y=\varphi(x)$. Так, например, взаимно обратные функции, рассмотренные в примере 2.3.1 можно задать следующим образом $y=x^2$ и $y=\pm\sqrt{x}$.

Сформулируем теорему, которая позволяет находить производные взаимно обратных функций.

Теорема 2.3.1 Пусть $y=f(x)$ и $x=\varphi(y)$ взаимно обратные функции. Тогда если функция $y=f(x)$ имеет отличную от нуля производную $f'(x)$, то обратная функция имеет производную $\varphi'(y)$, причем справедливо равенство

$$\varphi'(y)=\frac{1}{f'(x)}. \qquad (8)$$

Пользуясь данной теоремой, найдем производные некоторых обратных тригонометрических функций.

Задача 2.3.1. Найти производную функции $y=arcsin\,x$, при $x\in[-1;1]$, $y\in[-\pi/2;\pi/2]$. Функции $y=arcsin\,x$, $x=sin\,y$ являются взаимно обратными. Чтобы найти производную от заданной функции найдем производную от ей обратной, т.е. $x'_y=(sin\,y)'=cos\,y$. Следуя формуле (8)

$$y'(x)=\frac{1}{x'_y}=\frac{1}{cos\,y}.$$

Но, т.к. $-\pi/2<y<\pi/2$ (при этом $-1<x<1$), то $cos\,y>0$, поэтому $cos\,y=+\sqrt{1-sin^2 y}=\sqrt{1-x^2}$.

Тогда будем иметь

$$(arcsin\,x)'=\frac{1}{(sin\,y)'}=\frac{1}{cos\,y}=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}},\ (-1<x<1\ ).$$

Опираясь на таблицу (1), теоремы о дифференцировании сложной и обратной функции, составим таблицу 2 производных сложных функций. В таблицы 2 и в дальнейших вычислениях для удобства переменную x будем не указывать, но помнить, что u-это функция от x.

Таблица 2 Производные сложных функций.

№ п/п	Функция	Производная
1.	$y=c$, $c=const$	$(c)'=0$
2.	$y=u^{\alpha}$	$\alpha u^{\alpha-1}\cdot u'$
3.	$y=sin\,u$	$cos\,u\cdot u'$
4.	$y=cos\,u$	$-sin\,u\cdot u'$
5.	$y=tg\,u$	$\frac{1}{cos^2 u}\cdot u'$
6.	$y=ctg\,u$	$-\frac{1}{sin^2 u}\cdot u'$
7.	$y=arcsin\,u$	$\frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\cdot u'$
8.	$y=arccos\,u$	$-\frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\cdot u'$
9.	$y=arctg\,u$	$\frac{1}{1+u^2}\cdot u'$

10.	$y = arcctg\,u$	$-\dfrac{1}{1+u^2}\cdot u'$
11.	$y = a^u$	$a^u \cdot \ln a \cdot u'$
12.	$y = e^u$	$e^u \cdot u'$
13.	$y = \log_a u$	$\dfrac{1}{u\cdot \ln a}\cdot u'$
14.	$y = \ln u$	$\dfrac{1}{u}\cdot u'$
15.	$y = sec\,u$	$sec\,u \cdot tg\,u \cdot u'$
16.	$y = cosec\,u$	$-cosec\,u \cdot ctg\,u \cdot u'$
17.	$y = sh\,u$	$ch\,u \cdot u'$
18.	$y = ch\,u$	$sh\,u \cdot u'$
19.	$y = th\,u$	$\dfrac{u'}{ch^2 u}$
20.	$y = cth\,u$	$-\dfrac{u'}{sh^2 u}$

Рассмотрим задачи нахождения производной сложной функции, используя правила дифференцирования и таблицу 2.

Задача 2.3.2. Вычислить производную функций: а) $y = \left(3+2x^2\right)^4$;

б) $y = \ln\left[\sin\left(x^5+2x+1\right)\right]$; в) $y = \arcsin\sqrt{1-3x}$; г) $y = \left(e^{arctgx}+\cos^4 x\right)^3$.

Решение. а) Функцию $y = \left(3+2x^2\right)^4$ можно записать как сложную функцию в виде $y = u^4$, где $u = 3+2x^2$. По формуле (6) дифференцирования сложной функции получаем:

$$y'_x = y'_u \cdot u'_x = 4u^3 \cdot u'_x = 4\left(3+2x^2\right)^3 \cdot \left(3+2x^2\right)' =$$

$$= 4\left(3+2x^2\right)^3 \cdot 4x = 16x\left(3+2x^2\right)^3.$$

б) Функцию $y = \ln\left[\sin\left(x^5+2x+1\right)\right]$ можно представить в виде $y = \ln u$, где $u = \sin v$, а $v = x^5+2x+1$. Используя формулу (7) $y'_x = f'(u)\cdot u'(v)\cdot v'(x)$, получаем

$$f'(u) = (\ln u)' = \frac{1}{u},$$

$$u'(v) = (\sin v)' = \cos v,$$

$$v'(x) = \left(x^5+2x+1\right)' = \left(5x^4+2\right).$$

Учитывая обозначения составим производную заданной функции

$$y'_x = = \frac{1}{u} \cdot cosv \cdot \left(5x^4+2\right) =$$

$$= \frac{1}{sinv} \cdot cos\left(x^5+2x+1\right) \cdot \left(5x^4+2\right) =$$

$$= \frac{1}{sin\left(x^5+2x+1\right)} \cdot cos\left(x^5+2x+1\right) \cdot \left(5x^4+2\right) =$$

$$= \frac{cos\left(x^5+2x+1\right)}{sin\left(x^5+2x+1\right)} \cdot \left(5x^4+2\right) =$$

$$= ctg\left(x^5+2x+1\right)\left(5x^4+2\right).$$

в) Функцию $y = arcsin\sqrt{1-3x}$ можно представить в виде $y = arcsinu$, где $u = \sqrt{v}$, а $v = 1-3x$. Используя формулу (7) $y'_x = f'(u) \cdot u'(v) \cdot v'(x)$, получаем

$$f'(u) = \left(arcsinu\right)' = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}},$$

$$u'(v) = \left(\sqrt{v}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{v}},$$

$$v'(x) = \left(1-3x\right)' = -3.$$

Учитывая обозначения составим производную заданной функции

$$y' = \left(arcsin\sqrt{1-3x}\right)' = f'(u) \cdot u'(v) \cdot v'(x) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{v}} \cdot -3 = \frac{1}{\sqrt{1-\left(\sqrt{1-3x}\right)^2}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{1-3x}} \cdot (-3) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1-(1-3x)}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{1-3x}} \cdot (-3) = \frac{1}{\sqrt{3x}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{1-3x}} \cdot (-3) =$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{3x(1-3x)}} \cdot (-3) = -\frac{3}{2\sqrt{3x-9x^2}}.$$

г) $y' = \left(\left(e^{arctgx} + cos^4 x\right)^3\right)' = 3 \cdot \left(e^{arctgx} + cos^4 x\right)^2 \cdot \left(e^{arctgx} + cos^4 x\right)' =$

$$= 3 \cdot \left(e^{arctgx} + cos^4 x\right)^2 \cdot \left(e^{arctgx} \cdot \left(arctgx\right)' + 4cos^3 x \cdot \left(cos\, x\right)'\right) =$$

$$= 3 \cdot \left(e^{arctgx} + cos^4 x\right)^2 \cdot \left(e^{arctgx} \cdot \frac{1}{1+x^2} + 4cos^3 x \cdot \left(-sin\, x\right)\right) =$$

$$= 3 \cdot \left(e^{arctgx} + cos^4 x \right)^2 \cdot \left(\frac{e^{arctgx}}{1 + x^2} - 4 sin x \cdot cos^3 x \right).$$

Задача 2.3.3. Составить уравнение касательной и нормали к функции $y = \sqrt[5]{1 - x}$ в точке $x_0 = 1$.

Решение. Для того, чтобы составить уравнение касательной надо найти производную функции и вычислить её значение в точке касания $x_0 = 1$. Находим:

$$y' = \left(\sqrt[5]{1 - x} \right)' = \left[u = 1 - x \right] = \left((u)^{\frac{1}{5}} \right)' = \frac{1}{5} (u)^{-\frac{4}{5}} \cdot u' =$$

$$= \frac{1}{5} (1 - x)^{-\frac{4}{5}} \cdot (1 - x)' = -\frac{1}{5\sqrt[5]{(1 - x)^4}}.$$

Откуда $f'(x_0) = f'(1) = -\infty$.

Далее, $y_0 = f(x_0) = f(1) = \sqrt[5]{1 - 1} = 0$.

Согласно замечанию в п.1.2 касательная имеет уравнение $x = 1$, а уравнение нормали $y = 0$.

Задача 2.3.4. Показать, что функция $y = 2 + c\sqrt{1 - x^2}$ удовлетворяет уравнению $\left(1 - x^2\right) y' + xy = 2x$.

Решение. Чтобы решить задачу, надо найти производную данной функции и подставить ее вместе с заданной функцией в исходное уравнение и доказать, что оно верное.

Найдем $y' = \left(2 + c\sqrt{1 - x^2} \right)' = \left[c = const \right] = \frac{-xc}{\sqrt{1 - x^2}}$.

Подставим найденную производную y' и y в заданное уравнение:

$$\left(1 - x^2\right) \cdot \left(\frac{-xc}{\sqrt{1 - x^2}} \right) + x \cdot \left(2 + c\sqrt{1 - x^2} \right) = 2x.$$

Преобразуем

$$\left(\sqrt{1 - x^2} \right) \cdot (-xc) + x \cdot \left(2 + c\sqrt{1 - x^2} \right) = 2x,$$

$$\left(\sqrt{1 - x^2} \right) \cdot (-xc) + 2x + cx\sqrt{1 - x^2} = 2x,$$

$$2x = 2x.$$

Данная функция удовлетворяет заданному уравнению.

§3. ДИФФЕРЕНЦИАЛ ФУНКЦИИ

Пусть функция $y=f(x)$ в точке x имеет производную. По определению производной (п.1.1) $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=f'(x)$, поэтому по теореме о связи предела и бесконечно малой функции можно записать $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=f'(x)+\alpha$, где α – некоторая бесконечно малая величина, стремящаяся к нулю при $\Delta x\to 0$. Отсюда

$$\Delta y=f'(x)\Delta x+\alpha\cdot\Delta x. \qquad (9)$$

Проанализируем равенство (9). В нем Δy - приращение функции представлено в виде суммы двух слагаемых. Первое слагаемое при $\Delta x\to 0$ - бесконечно малая величина и является линейной относительно Δx. Второе слагаемое $\alpha\cdot\Delta x$ - произведение двух бесконечно малых, является бесконечно малой более высокого порядка по сравнению с первым слагаемым и поэтому при $\Delta x\to 0$ этим слагаемым можно пренебречь. Таким образом слагаемое $f'(x)\cdot\Delta x$ является ***главной частью*** приращения Δy, линейной относительно Δx (при $f'(x)\neq 0$).

Определение 3.1 Дифференциалом функции $y=f(x)$ в точке x называется главная часть приращения функции и обозначается: dy или $df(x)$. Следовательно,

$$dy=df(x)=f'(x)\cdot\Delta x. \qquad (10)$$

Найдем чему равен дифференциал функции $y=x$.

$$dx=x'\Delta x=1\cdot\Delta x=\Delta x,$$

т.е. дифференциал независимого переменного равен его приращению. Это дает возможность представить формулу (10) в виде

$$dy=df(x)=f'(x)\cdot dx \qquad (11)$$

и с другой стороны, записать производную в виде отношения дифференциалов:

$$y'=\frac{dy}{dx} \text{ или, что } f'(x)=\frac{df(x)}{dx}.$$

Непосредственно из определения дифференциала и правил нахождения производных следуют свойства дифференциала. Рассмотрим функции $u=u(x), v=v(x)$. Тогда:

1) $d(u\pm v)=(u\pm v)'dx=u'dx\pm v'dx=du\pm dv$;

2) $d(u\cdot v)=(u\cdot v)'dx=(u'\cdot v+u\cdot v')dx=v\cdot(u'dx)+u\cdot(v'dx)=$
$=v\cdot du+udv$;

3) $d\left(\dfrac{u}{v}\right)=\left(\dfrac{u}{v}\right)dx=\dfrac{v\cdot u'dx-u\cdot v'dx}{v^2}=\dfrac{vdu-vdv}{v^2}$.

Задача 3.1. Найти дифференциал функции $y=arctg3x$.

Решение. Для нахождения дифференциала используем формулу (11). Найдем производную заданной функции $y'=\left(arctg3x\right)'=\dfrac{3}{1+9x^2}$.

Подставим в формулу $dy=df(x)=f'(x)\cdot dx$ получим:

$$dy=\frac{3}{1+9x^2}\cdot dx.$$

Дифференциал можно использовать в приближенных вычислениях. Запишем равенство (9) в виде:

$$\Delta y=dy+\alpha\cdot\Delta x \qquad (12)$$

Приращение Δy отличается от дифференциала dy на бесконечно малую высшего порядка, по сравнению с Δx, поэтому в приближенных вычислениях пользуются приближенным равенством $\Delta y\approx dy$, если Δx достаточно мало.

Учитывая, что $\Delta y=f\left(x+x_0\right)-f\left(x_0\right)$, получаем приближенную формулу:

$$f\left(x_0+\Delta x\right)\approx f\left(x_0\right)+f'\left(x_0\right)\Delta x \qquad (13)$$

Задача 3.2. Вычислить приближенно $\sqrt{4{,}1}$.

Решение. Введем в рассмотрение фукцию $f\left(x\right)=\sqrt{x}$. Тогда $x_0=4$, $\Delta x=0{,}1$, $x_0+\Delta x=4{,}1$ и Тогда $\sqrt{4{,}1}=f\left(x_0+\Delta x\right)$. Далее, найдем $f'\left(x_0\right)$:

$$f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}},\ f'\left(x_0\right)=f'(4)=\frac{1}{2\sqrt{4}}=\frac{1}{4}=0{,}25$$

$$f\left(x_0\right)=\sqrt{4}=2.$$

Используя формулу (13), получим:

$$\sqrt{4{,}1}\approx 2+0{,}25\cdot 0{,}1\approx 2{,}025$$

§4. Дифференцирование функций, заданных неявно, параметрически. Логарифмическое дифференцирование

4.1. Дифференцирование функций, заданных неявно

Пусть функция $y=f\left(x\right)$ задана уравнением

$$F(x,y)=0. \qquad (14)$$

В этом случае говорят, что функция задана неявно. Так, например, из уравнения $y+x=2\sin y$, которое неявно задает функцию y, нельзя выразить y явно через элементарные функции.

Сформулируем правило для нахождения производной для функции, заданной неявно. Для того чтобы найти производную y' для функции, заданной неявно уравнением (14) надо найти производные по x от обеих частей этого уравнения, помня, что y – функция от x. Получим новое уравнение, содержащее x, y и y'. Разрешая его относительно y', находим производную искомой функции $y = f(x)$ заданной в неявном виде.

Задача 4.1.1. Найти производную функции, заданной неявно уравнением $x^2 + y^2 = a^2$.

Решение. Найдем производную от левой и правой части данного уравнения

$$\left(x^2 + y^2\right)'_x = \left(a^2\right)'_x,$$
$$2x + 2y \cdot y' = 0,$$
$$2y \cdot y' = -2x,$$

Отсюда: $y' = -x / y$.

Задача 4.1.2. Найти y'_x, если переменные x и y связаны соотношением

$$ln\left[cos(xy)\right] = x \cdot tg\left(x^3 + y^2\right).$$

Решение. Явно выразить одну из переменных через другую невозможно, поэтому находим производные левой и правой частей данного равенства и приравниваем их:

$$\frac{cos'(xy)}{cos(xy)} = tg\left(x^3 + y^2\right) + x \cdot tg'\left(x^3 + y^2\right).$$

Далее имеем:

$$\frac{\left[-sin(xy)\right](xy)'}{cos(xy)} = tg\left(x^3 + y^2\right) + \frac{x\left(x^3 + y^2\right)'}{cos^2\left(x^3 + y^2\right)};$$

$$-(y + xy') \cdot tg(xy) = tg\left(x^3 + y^2\right) + \frac{x \cdot \left(3x^2 + 2yy'\right)}{cos^2\left(x^3 + y^2\right)}.$$

Перенесём слагаемые, содержащие y', в одну часть равенства, затем вынесем y' за скобки, а остальные слагаемые – в другую часть. Разделим на коэффициент при y' и получим:

$$y' = -\left(ytg(xy) + tg\left(x^3 + y^2\right) + \frac{3x^3}{cos^2\left(x^3 + y^2\right)}\right) : \left(xtg(xy) + \frac{2xy}{cos^2\left(x^3 + y^2\right)}\right).$$

4.2. Дифференцирование функций, заданных параметрически

Рассмотрим задание линии на плоскости, при котором переменные x, y являются функциями третьей переменной t (называемой параметром):

$$\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t). \end{cases} \qquad (15)$$

Каждому значению t из некоторого интервала соответствуют определенные значения x и y, а, следовательно, определенная точка $M(x, y)$ плоскости. Когда t пробегает все значения из заданного интервала, то точка $M(x, y)$ описывает некоторую линию L. Уравнения (15) называются ***параметрическими*** уравнениями линии L.

Если функция $x = \varphi(t)$ на некотором интервале изменения t имеет обратную функцию $t = t(x)$, то подставляя это выражение в уравнение $y = \psi(t)$, получим $y = \psi\big(t(x)\big)$, которое задает y как функцию от x.

Пусть $x = \varphi(t)$, $y = \psi\big(t(x)\big)$ имеют производные, причем $x'_t \neq 0$. По правилу дифференцирования сложной функции $y'_x = \psi'_t \cdot t'_x$. На основании правила дифференцирования обратной функции $t'_x = \dfrac{1}{\varphi'_t}$, имеем:

$$y'_x = \frac{\psi'_t}{\varphi'_t}. \qquad (16)$$

Полученная формула (16) позволяет находить производные для функций, заданных параметрически.

Задача 4.2.1. Пусть функция y, зависящая от x, задана параметрически:

$$\begin{cases} x = a\cos t, \\ y = b\sin t, \end{cases} \quad 0 \le t \le \pi / 2, \ a, \ b \text{ - постоянные числа.}$$

Найти y'_x.

Решение. Найдем отдельно

$\varphi'(t) = x'_t = (a\cos t)' = -a\sin t,$

и $\psi'(t) = y'_t = (b\sin t)' = b\cos t$.

Подставляем в формулу (16) получим

$$y'_x = \frac{\psi'_t}{\varphi'_t} = \frac{b\cos t}{-a\sin t} = -\frac{b}{a}\ ctgt.$$

Задача 4.2.2. Найти y'_x для функции, заданной параметрически:

$$\begin{cases} x = 3\cos^2 t, \\ y = 3\cos t^2. \end{cases}$$

Решение. Найдём отдельно производные $x'_t(t)$ и $y'_t(t)$:

$$x'_t(t)=\left(3\cos^2 t\right)'=\left[\begin{array}{l}\text{воспользуемся правилом вычисления}\\ \text{ производной сложной функции ,}\\ \text{а именно, сначала табличной производной}\\ \text{сложной степенной функции}\left(u^{\alpha}\right)'=\alpha u^{\alpha-1}\cdot u',\\ \text{а затем формулой } (\cos u)'=-\sin u\cdot u'\end{array}\right]=$$

$$=3\cdot 2(\cos t)(-\sin t)=-3\sin(2t),$$

$$y'_t(t)=\left(3\cos t^2\right)'=\left[\begin{array}{l}\text{воспользуемся правилом вычисления}\\ \text{ производной сложной функции ,}\\ \text{а именно сначала табличной производной}\\ \ (\cos u)'=-\sin u\cdot u',\text{ а затем производной}\\ \text{от степенной функции}\left(u^{\alpha}\right)'=\alpha u^{\alpha-1}\cdot u'\end{array}\right]=$$

$$=3\left(-\sin t^2\right)\left(t^2\right)'=-6t\sin t^2.$$

Тогда

$$y'_x=\frac{y'_t}{x'_t}=\frac{-6t\sin t^2}{-3\sin(2t)}=\frac{2t\sin t^2}{\sin(2t)}.$$

Задача 4.2.3. Написать уравнение касательной к кривой $\begin{cases}x=t\cos t,\\ y=t\sin t\end{cases}$ в точке $t_0=\dfrac{\pi}{4}$.

Решение. Запишем уравнение касательной, для этого воспользуемся уравнением (3) пункта 1.2. $y=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)$. Так как функция задана параметрически, то $f'(x_0)=y'_x(t_0)$.

Вычислим y'_x:

$$y'_x=\frac{y'_t}{x'_t}=\frac{(t\sin t)'}{(t\cos t)'}=\frac{\sin t+t\cos t}{\cos t-t\sin t}.$$

Найдем значение производной функции в заданной точке $t_0=\dfrac{\pi}{4}$:

$$y'_x(t_0)=\frac{\sin\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{4}}{\cos\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{4}\sin\frac{\pi}{4}}=\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}\left(1+\frac{\pi}{4}\right)}{\frac{\sqrt{2}}{2}\left(1-\frac{\pi}{4}\right)}=\frac{4+\pi}{4-\pi}.$$

$$y_0 = y(t_0) = y\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi\sqrt{2}}{8},$$

$$x_0 = x\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi\sqrt{2}}{8}.$$

Уравнение касательной имеет вид

$$y = \frac{\pi\sqrt{2}}{8} + \frac{4+\pi}{4-\pi}\left(x - \frac{\pi\sqrt{2}}{8}\right).$$

4.3. Логарифмическое дифференцирование

Рассмотрим один из способов нахождения производной $f'(x)$ функции, если $f(x)$ очень сложная функция и по обычным правилам дифференцирования найти производную затруднительно.

Идея этого метода заключается в том, что заданная функция предварительно логарифмируется, а затем результат дифференцируется. Отыскание производной с предварительным логарифмированием называется логарифмическим дифференцированием. На практике встречаются два случая, когда используется логарифмическое дифференцирование – это дифференцирование произведения нескольких функций и дифференцирование степенно-показательной функции. Рассмотрим эти два случая.

4.3.1. Дифференцирование произведения нескольких функций

Требуется найти производную произведения нескольких функций.

$$y = u_1(x)\cdot u_2(x)\cdot u_3(x)\cdot\ldots\cdot u_n(x). \qquad (17)$$

Прологарифмируем обе части

$$ln\, y = ln\left(u_1(x)\cdot u_2(x)\cdot u_3(x)\cdot\ldots\cdot u_n(x)\right). \qquad (18)$$

Воспользуемся свойством логарифма произведения $\left(ln(a\cdot b) = ln\, a + ln b\right)$. Тогда равенство (18) запишем следующим образом:

$$ln\, y = ln u_1(x) + ln u_2(x) + ln u_3(x) + \ldots + ln u_n(x). \qquad (19)$$

Продифференцируем обе части, левую - как неявную функцию:

$$\frac{1}{y}y' = \frac{1}{u_1(x)}u_1'(x) + \frac{1}{u_2(x)}u_2'(x) + \frac{1}{u_3(x)}u_3'(x) + \ldots + \frac{1}{u_n(x)}u_n'(x). \qquad (20)$$

Умножая обе части равенства (20) на y и подставляя вместо нее саму функцию, получим:

$$y_x' = y\left[\frac{u_1'(x)}{u_1(x)} + \frac{u_2'(x)}{u_2(x)} + \frac{u_3'(x)}{u_3(x)} + \ldots + \frac{u_n'(x)}{u_n(x)}\right] =$$

$$= u_1(x)\cdot u_1(x)\cdot u_1(x)\cdot\ldots\cdot u_n(x)\cdot\left[\frac{u_1'(x)}{u_1(x)} + \frac{u_2'(x)}{u_2(x)} + \frac{u_3'(x)}{u_3(x)} + \ldots + \frac{u_n'(x)}{u_n(x)}\right]\ldots\ldots\ldots(21)$$

Данный алгоритм немного упрощает нахождение производной, когда функция представляет собой произведение нескольких функций.

Задача 4.3.1.1. Найти производную сложной функции $y = x \cdot \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$.

Решение. Для нахождения y' предварительна прологарифмируем заданную функцию y:

$$ln\, y = ln\left(x \cdot \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} \right).$$

Используя свойства логарифма $ln(a \cdot b) = ln\, a + ln\, b$, $ln\left(\frac{a}{b}\right) = ln\, a - ln\, b$ и $log_a b^n = n\, log_a b$, упростим заданную функцию

$$ln\, y = ln\, x + \frac{1}{2} ln(1-x) - \frac{1}{2} ln(1+x).$$

Найдем производную полученной функции, помня при этом, что производную от функции в левой части равенства находим как от неявной, а от функции в правой части как производную от сложной функции:

$$\frac{1}{y} \cdot y' = \frac{1}{x} + \frac{1}{2} \cdot \frac{(-1)}{1-x} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1+x},$$

$$\frac{1}{y} \cdot y' = \frac{1}{x} - \frac{1}{2(1-x)} - \frac{1}{2(1+x)}.$$

Умножая обе части полученного равенства на y и подставляя вместо нее заданную функцию $y = x \cdot \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$, получим

$$y' = y \cdot \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{2(1-x)} - \frac{1}{2(1+x)} \right),$$

$$y' = \left(x \cdot \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} \right) \cdot \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{2(1-x)} - \frac{1}{2(1+x)} \right).$$

4.3.2. Дифференцирование степенно-показательной функции

Рассмотрим показательно-степенную функцию $y = u(x)^{v(x)}$, где $u(x) > 0$, $u(x), v(x)$ – дифференцируемые функции. Напомним, что для удобства переменную x будем не указывать, но помнить, что u, v – функция от x.

Прологарифмируем равенство $y = u^v$, получим:

$$ln\, y = ln\, u^v. \tag{22}$$

По свойствам логарифмов $log_a b^n = n\, log_a b$ для нашего равенства будем иметь:

$$ln\, y = v\, ln\, u. \tag{23}$$

Дифференцируем обе части полученного равенства как неявную функцию:

$$\frac{1}{y}y' = v'\ln u + v\cdot\frac{1}{u}\cdot u', \tag{24}$$

Откуда

$$y' = y(v'\,ln u + v\cdot\frac{1}{u}\cdot u'\,). \tag{25}$$

Подставляя сюда $y = u^v$, имеем:

$$y' = u^v\,ln u\cdot v' + v\cdot u^{v-1}\cdot u'. \tag{26}$$

Замечание. Таким образом производная степенно-показательной функции равна сумме производных этой функции, если ее рассматривать сначала как показательную, а затем как степенную**.**

Задача 4.3.2.1. Найти производную функции $y = (arcsin\,x)^{tgx}$.

Решение. Прологарифмируем обе части равенства $y = (arcsin\,x)^{tgx}$:

$ln\,y = ln(arcsin\,x)^{tgx}$.

Используя свойства логарифмов $log_a b^n = n\,log_a b$ получим:

$ln\,y = tgx\cdot ln(arcsin\,x)$.

Найдем производные от обеих частей полученного равенства. А именно от левой части как от неявной функции, а от правой как производную произведения двух сложных функций и приравняем их:

$$\frac{y'}{y} = (tgx)'\cdot ln(arcsin\,x) + (tgx)\cdot\left[ln(arcsin\,x)\right]',$$

$$\frac{y'}{y} = \frac{\ln(\arcsin x)}{\cos^2 x} + tgx\cdot\frac{(\arcsin x)'}{\arcsin x},$$

$$\frac{y'}{y} = \frac{ln(arcsin\,x)}{cos^2 x} + \frac{tgx}{\sqrt{1-x^2}\cdot arcsin\,x}.$$

Учитывая, что $y = (arcsin\,x)^{tgx}$, имеем:

$$y' = (arcsin\,x)^{tgx}\cdot\left(\frac{ln(arcsin\,x)}{cos^2 x} + \frac{tgx}{\sqrt{1-x^2}\cdot arcsin\,x}\right).$$

Задача 4.3.2.2. Найти производную функции $y = x^{sin\,x}$, $(x > 0)$.

Решение. Прологарифмировав обе части заданной функции получим $ln\,y = (ln\,x)^{sin\,x}$**.** Воспользуемся свойством логарифмов $ln\,y = sin\,x\cdot ln\,x$**.** Дифференцируя полученное равенство по x будем иметь:

$$(ln\,y)' = (sin\,x\cdot ln\,x)',$$

$$\frac{1}{y}y' = cos\,x\cdot ln\,x + sin\,x\cdot\frac{1}{x},$$

откуда

$$y' = x^{sin\,x}(cos\,x \cdot ln\,x + sin\,x \cdot \frac{1}{x})$$

или

$$y' = x^{sin\,x}\,cos\,x \cdot ln\,x + sin\,x \cdot x^{sin\,x-1}.$$

§5. ПРОИЗВОДНЫЕ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ

5.1. Понятие производной высшего порядка

Пусть функция $y = f(x)$ определена и дифференцируема на некотором промежутке *X*, тогда ее производная $f'(x)$ также является функцией от *x* на этом промежутке. Если $f'(x)$ имеет производную на промежутке *X*, то эта производная называется ***производной второго порядка*** функции $y = f(x)$ и обозначается: y'' или $f''(x)$.

Итак,

$$f''((x)) = \left(f'(x)\right)' \qquad (27)$$

Производная от производной второго порядка называется ***производной третьего порядка*** и обозначается: y''' или $f'''(x)$. После того, как введено понятие второй и третьей производной, можно последовательно ввести понятие четвертой производной и т.д.

Вообще, ***производной n-го порядка*** называется производная от производной $(n-1)$-го порядка и обозначается: $y^{(n)}$ или $f^{(n)}(x)$ или $\frac{d^n y}{dx^n}$. Итак,

$$f^{(n)}(x) = \left(f^{(n-1)}(x)\right)' \qquad (28)$$

Производные y'', y''', ... называются ***производными высших порядков***.

Функцию, имеющую на данном множестве конечную производную n-го порядка, называют n раз дифференцируемой на этом множестве.

Геометрический смысл второй производной связан с понятием выпуклости графика функции, мы обсудим его ниже.

Задача 5.1.1 Для функции $f(x) = \sqrt{x}$ найти $f'''(x)$ и $f'''(4)$.

Решение. Для нахождения производной третьего порядка надо найти производные первого и второго порядка. Итак,

$$f'(x) = \left(x^{1/2}\right)' = \frac{1}{2}\,x^{-1/2},$$

$$f''(x)=\left(\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}\right)'=-\frac{1}{4}x^{-\frac{3}{2}},$$

$$f'''(x)=\left(-\frac{1}{4}x^{-\frac{3}{2}}\right)'=\frac{3}{8}x^{-\frac{5}{2}}=\frac{3}{8\sqrt{x^5}},$$

$$f'''(4)=\frac{3}{8\sqrt{4^5}}=\frac{3}{8\cdot 16\cdot 2}=\frac{3}{256}.$$

Задача 5.1.2. Найти производную *n*-го порядка для функции $y=e^{3x}$.

Решение. Чтобы найти производную *n*-го порядка, надо найти производные первого, второго, третьего, а может, если потребуется, четвертого порядка, затем составить общую формулу производной *n*-го порядка, по которой будут находиться производные любого порядка.

$$y'=3e^{3x},$$

$$y''=\left(3\cdot e^{3x}\right)'=3^2e^{3x},$$

$$y'''=3^3\cdot e^{3x}.$$

Т. о., находим производную *n*-го порядка: $y^{(n)}=3^ne^{3x}$.

5.2. Производные высших порядков от функций, заданных параметрически

Пусть функция *y*, зависящая от *x*, задана параметрически на интервале *T*:

$$\begin{cases} x=\varphi(t), \\ y=\psi(t). \end{cases} t\in T.$$

Найдем $y''_x=\dfrac{d^2y}{dx^2}$. Известно, что $y'_x=\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{y'_t}{x'_t}$ (формула 16.п. 4.2), поэтому

$$\frac{d^2y}{dx^2}=(y'_x)'_x=\frac{\left(y'_x\right)'_t}{x'_t}=\frac{\left(y'_t/x'_t\right)'_t}{x'_t}=\frac{y''_tx'_t-x''_ty'_t}{(x'_t)^3}. \qquad (29)$$

Замечание. На практике для вычисления второй производной можно пользоваться более компактной формулой, а именно:

$$y''_x=\frac{\left(y'_x\right)'_t}{x'_t} \qquad (30)$$

Задача 5.2.1. Найти y'_x и y''_x для функции, заданной параметрически:

$$\begin{cases} x = 3cos^2 t \\ y = 3cos t^2 \end{cases}.$$

Решение. Подробный разбор нахождения производных $x'_t(t)$ и $y'_t(t)$ можно посмотреть в примере 4.2.2.

$$x'_t(t) = 3 \cdot 2(cos t)(-sin t) = -3 sin(2t);$$

$$x''_{tt}(t) = -3[cos(2t)]2 = -6 cos(2t);$$

$$y'_t(t) = 3\left(-sin t^2\right)2t = -6t sin t^2;$$

$$y''_{tt}(t) = -6\left(sin t^2 + t\left(cos t^2\right)2t\right) = -6\left(sin t^2 + 2t^2 cos t^2\right);$$

$$y'_x = \frac{dy}{dx} = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{-6t sin t^2}{-3 sin(2t)} = \frac{2t sin t^2}{sin(2t)};$$

$$y''_x = \frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{y''_{tt} x'_t - y'_t x''_{tt}}{\left[x'_t(t)\right]^3} =$$

$$= \frac{-6\left(sin t^2 + 2t^2 cos t^2\right)\left[-3 sin(2t)\right] - \left(-6t sin t^2\right)\left[-6 cos(2t)\right]}{9 sin^2(2t)} =$$

$$= \frac{18 sin(2t)\left(sin t^2 + 2t^2 cos t^2\right) - 36t sin t^2 cos(2t)}{9 sin^2(2t)} =$$

$$= \frac{2\left[\sin(2t)\left(\sin t^2 + 2t^2 \cos t^2\right) - 2t \sin t^2 \cos(2t)\right]}{\sin^2(2t)}.$$

Задача 5.2.2. Функция *y* от *x* задана параметрически уравнениями:

$$\begin{cases} x = a cos^3 t, \\ y = a sin^3 t. \end{cases} \quad 0 \le t \le \frac{\pi}{2}.$$

Найти $\frac{d^2 y}{dx^2}$.

Решение. Имеем:

$$\frac{dy}{dx} = y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{3a sin^2 t cos t}{-3a cos^2 t sin t} = tgt.$$

Для нахождения $\frac{d^2 y}{dx^2}$ воспользуемся формулой (30)

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{(y'_x)'_t}{x'_t}=\frac{(-tgt)'}{(a\cos^3 t)'}=-\frac{1}{\cos^2 t(-3a\cos^2 t\sin t)}=\frac{1}{3a\cos^4 t\sin t}.$$

§6. ПРАВИЛО ЛОПИТАЛЯ

Рассмотрим новый способ нахождения пределов отношения двух бесконечно малых или бесконечно больших функций, т.е. раскрытия неопределенностей типа $\left(\frac{0}{0}\right)$ и $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$, так называемое ***правило Лопиталя***.

Теорема 6.1 (*раскрытие неопределенностей типа* $\left(\frac{0}{0}\right)$).

Пусть функции $f(x)$, $g(x)$ определены, непрерывны и дифференцируемы в точке x_0 и некоторой ее окрестности, причем $g'(x)\neq 0$ для любого x из этой окрестности, и пусть $f(x_0)=0$, $g(x_0)=0$ (следовательно, $f(x)$, $g(x)$ – бесконечно малые при $x\to x_0$). Если $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ существует, то существует $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}$ и

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}. \tag{31}$$

Задача 6.1. Найти $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{7x}-1}{tg(3x)}$.

Решение. Так как при $x\to 0$ функции $e^{7x}\to 1$ и $tg(3x)\to 0$, то имеем неопределенность типа $\left(\frac{0}{0}\right)$. Числитель и знаменатель данной дроби представляют собой непрерывные дифференцируемые функции в точке $x=0$. Это означает, что можно применить правило Лопиталя, т. е найти производную числителя и знаменателя в отдельности

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{7x}-1}{tg(3x)}=\lim_{x\to 0}\frac{\left(e^{7x}-1\right)'}{\left(tg(3x)\right)'}=\lim_{x\to 0}\frac{7e^{7x}}{\frac{3}{\cos^2 3x}}=$$

$$=\frac{7}{3}\lim_{x\to 0}\cos^2(3x)\cdot e^{7x}=\frac{7}{3}\cdot 1=\frac{7}{3}.$$

Задача 6.2. Найти $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos 3x}{2x}$.

Решение. Поскольку функции $f(x)=1-\cos 3x$ и $g(x)=2x$ удовлетворяют условиям теоремы 6.1, то

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 3x}{2x}=\lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos 3x)'}{(2x)'}=\lim_{x\to 0}\frac{3\sin 3x}{2}=0.$$

Замечание 6.1. Теорема 6.1 справедлива и в том случае, когда функции $f(x)$, $g(x)$ не определены в точке x_0, но $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=0$ и $\lim\limits_{x\to 0} g(x)=0$.
В самом деле, если доопределить $f(x)$, и $g(x)$, положив $f(x_0)=g(x_0)=0$, тогда $f(x)$, $g(x)$ будут непрерывны в точке x_0, а потому теорема Лопиталя будет применима к ним.

Замечание 6.2. Правило Лопиталя применимо и в том случае, когда $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=0$, $\lim\limits_{x\to\infty} g(x)=0$.
Действительно, введя новую переменную $y=1/x$, видим, что $y\to 0$ при $x\to\infty$.

Тогда $$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{y\to 0}\frac{f(1/y)}{g(1/y)}=\lim_{y\to 0}\frac{f'(1/y)\cdot\left(\frac{1}{y^2}\right)}{g'(1/y)\cdot\left(\frac{1}{y^2}\right)}=\lim_{x\to\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Теорема 6.2 (*раскрытие неопределенностей типа* $\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)$).

Пусть функции $f(x)$, и $g(x)$ дифференцируемы в окрестности точке x_0, за исключением самой точки x_0, причем $g'(x)\neq 0$, и пусть $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\infty$, $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=\infty$. Если существует $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ то существует и $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}$, причем

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Замечание 6.3. Предел отношения двух функций может существовать, в то время как предел отношения их производных не существует.

Например,

$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x+\sin x}{x}=1$, а $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(x+\sin x)'}{(x)'}=\lim\limits_{x\to\infty}(1+\cos x)$ – не существует, так как $\lim\limits_{x\to\infty}\cos x$ не существует.

Замечание 6.4. Для раскрытия неопределенностей типа $\left(\frac{0}{0}\right)$ или $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$ иногда приходиться применять правило Лопиталя несколько раз, т.е. если $\frac{f'(x)}{g'(x)}$ при $x \to x_0$ ($x \to \infty$) является неопределенностью типа $\left(\frac{0}{0}\right)$ или $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$, и $f'(x)$, $g'(x)$ удовлетворяют условиям теоремы 6.1 (6.2), то

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f''(x)}{g''(x)}.$$

Задача 6.3. Найти $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\ln x}{ctg\, x}$.

Решение. При $x \to 0$ и $x > 0$ $\lim\limits_{x \to 0} \ln x = \infty$, $\lim\limits_{x \to 0} ctgx = \infty$, следовательно, имеем отношение двух бесконечно больших при $x \to 0$ и неопределенность типа $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$. Вычислим:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\ln x}{ctg\, x} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{x \to 0} \frac{1/x}{-1/\sin^2 x} = -\lim_{x \to 0} \frac{\sin^2 x}{x} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x \to 0} \frac{2 \sin x \cos x}{1} = 0.$$

Задача 6.4. Найти $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\ln x}{1 + 2 \cdot \ln(\sin x)}$.

Решение. Имеем неопределенность типа $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$.

$$\lim_{x \to 0} \frac{\ln x}{1 + 2\ln(\sin x)} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{x \to 0} \frac{(\ln x)'}{(1 + 2\ln(\sin x))'} =$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{1/x}{2 \cdot (1/\sin x) \cdot \cos x} = \frac{1}{2} \cdot \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x \cdot \cos x} = \frac{1}{2}.$$

Задача 6.5. Найти $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{e^x}{x^2}$.

Решение. Имеем неопределенность типа $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$.

$$\lim_{x \to \infty} \frac{e^x}{x^2} = \lim_{x \to \infty} \frac{(e^x)'}{(x^2)'} = \lim_{x \to \infty} \frac{(e^x)'}{(2x)'} = \lim_{x \to \infty} \frac{e^x}{2} = \left(\frac{e^\infty}{2}\right) = \infty.$$

Применили правило Лопиталя два раза.

Замечание 6.5. Правило Лопиталя можно применять и к неопределенностям другого вида, а именно $(0\cdot\infty)$, $(\infty\text{-}\infty)$, (0^0), (1^∞), (∞^0). Неопределенности вида $(0\cdot\infty)$, $(\infty\text{-}\infty)$ можно свести к неопределенностям $\left(\frac{0}{0}\right)$ и $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$. Покажем это.

Задача 6.6. Найти $\lim\limits_{x\to 0} x^2 \ln x$.

Решение. Так как $\lim\limits_{x\to 0} \ln x = \infty$, то имеем неопределенность типа $(0\cdot\infty)$. Преобразуем ее к виду $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$: $\lim\limits_{x\to 0} x^2 \ln x = \lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln x}{1/x^2}$, затем применим правило Лопиталя:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln x}{1/x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{(\ln x)'}{\left(1/x^2\right)'} = \lim_{x\to 0}\frac{1/x}{-2/x^3} = \lim_{x\to 0}\left(-\frac{x^2}{2}\right) = 0\cdot$$

Итак, $\lim\limits_{x\to 0} x^2 \ln x = 0$.

Задача 6.7. Найти $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2 e^{-x}$.

Решение. При $x\to+\infty$ $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2 = \infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-\infty} = 0$, следовательно, имеем неопределлнность $(0\cdot\infty)$. Вычислим:

$$\lim_{x\to+\infty} x^2 e^{-x} = (0\cdot\infty) = \lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{e^x} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{x\to+\infty}\frac{\left(x^2\right)'}{\left(e^x\right)'} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{2x}{e^x} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{x\to+\infty}\frac{(2x)'}{\left(e^x\right)'} = \lim_{x\to+\infty}\frac{2}{e^x} = 0.$$

Задача 6.8. Найти $\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{x}{x-1}-\frac{1}{\ln x}\right)$.

Решение. Рассмотрим неопределённость вида $(\infty-\infty)$:

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{x}{x-1}-\frac{1}{\ln x}\right) = (\infty-\infty) = \lim_{x\to 1}\left(\frac{x\ln x - x + 1}{\ln x\cdot(x-1)}\right) =$$

$$= \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x\to 1}\frac{(x\ln x - x + 1)'}{(\ln x\cdot(x-1))'} = \lim_{x\to 1}\frac{\ln x + x\cdot\frac{1}{x} - 1}{\frac{1}{x}\cdot(x-1) + \ln x} =$$

$$= \lim_{x\to 1}\frac{\ln x}{\ln x-\frac{1}{x}+1}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 1}\frac{(\ln x)'}{\left(\ln x-\frac{1}{x}+1\right)'}=\lim_{x\to 1}\frac{1/x}{1/x+1/x^2}=\frac{1}{2}.$$

Рассмотрим неопределенности вида (0^0), (1^∞), (∞^0). Такие неопределенности имеют место при рассмотрении функций $y=f(x)^{g(x)}$, если при $x\to a$ функция $f(x)$ стремится соответственно к 0, 1 и ∞, $g(x)$ - соответственно к 0, ∞ и 0. Для раскрытия этих неопределенностей функция предварительно логарифмируется и, значит, сначала отыскивается предел не заданной функции, а её логарифма, а затем уже по пределу логарифма находится предел функции (что допустимо вследствие непрерывности логарифмической функции). Рассмотрим это на примере.

Задача 6.9. Найти $\lim\limits_{x\to 0}(1-9x)^{\frac{1}{x}}$.

Решение. В данном случае имеем неопределенность типа (1^∞), поэтому для раскрытия этой неопределенности применим метод логарифмирования.

Пусть $A=\lim\limits_{x\to 0}(1-9x)^{\frac{1}{x}}$. Тогда с учетом того, что логарифмическая функция непрерывна, имеем

$$\ln A=\ln\lim_{x\to 0}(1-9x)^{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to 0}\ln(1-9x)^{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\cdot\ln(1-9x)=(\infty\cdot 0)=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1-9x)}{x}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{(\ln(1-9x))'}{(x)'}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{-9}{1-9x}}{1}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{-9}{1-9x}=-9$$

Так как $\ln A=-9$, то $\lim\limits_{x\to 0}(1-9x)^{\frac{1}{x}}=e^{-9}$.

§7. ПРИМЕНЕНИЕ ПРОИЗВОДНОЙ ДЛЯ ИССЛЕДОВАНИЯ СВОЙСТВ ФУНКЦИЙ

7.1. Возрастание и убывание функций

Функция $y=f(x)$ называется ***возрастающей*** (***убывающей***) на некотором интервале (a,b), если большему значению аргумента из этого интервала соответствует ***большее*** (***меньшее***) значение функции. Т. е. $f(x)$ **возрастает в интервале** (a,b), если для любых значений x_1, x_2, удовлетворяющих условию

$a < x_1 < x_2 < b$, имеет место неравенство $f(x_1) < f(x_2)$, и **убывает,** если для любых значений x_1, x_2, удовлетворяющих указанному условию, имеет место неравенство $f(x_1) > f(x_2)$.

Интервалы, в которых функция возрастает или убывает, называются **интервалами монотонности функции.**

Рассмотрим применение производной для нахождения интервалов монотонности функций.

Теорема 7.1.1. (*необходимое условие возрастания функции*). Если дифференцируемая на интервале (a,b) функция $y = f(x)$ возрастает (убывает) на этом интервале, то $f'(x) > 0$ ($f'(x) < 0$) для любого $x \in (a,b)$.

Теорема 7.1.2. (*достаточное условие возрастания функции*). Если функция $y = f(x)$ дифференцируема на интервале (a,b) и $f'(x) > 0$ ($f'(x) < 0$) для любого $x \in (a,b)$, то эта функция возрастает (убывает) на интервале (a,b).

Сформулированные теоремы дают возможность исследовать функции на монотонность (возрастание и убывание).

Задача 7.1.1. Исследовать на монотонность (т.е. возрастание и убывание) функцию: $f(x) = x^3 - 3x$ (рис. 3)

Решение. Функция определена на множестве действительных чисел **R.** Найдем производную заданной функции

$$f'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x^2 - 1).$$

Неравенство $f'(x) > 0$, т.е. $3(x^2 - 1) > 0$, справедливо для $x < -1$ и для $x > 1$. Следовательно, функция $f(x)$ возрастает на интервалах $x \in (-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$.

Поскольку неравенство $f'(x) < 0$, т.е. $3(x^2 - 1) < 0$ справедливо для $x \in (-1;1)$, то на интервале $(-1;1)$ функция $f(x)$ убывает.

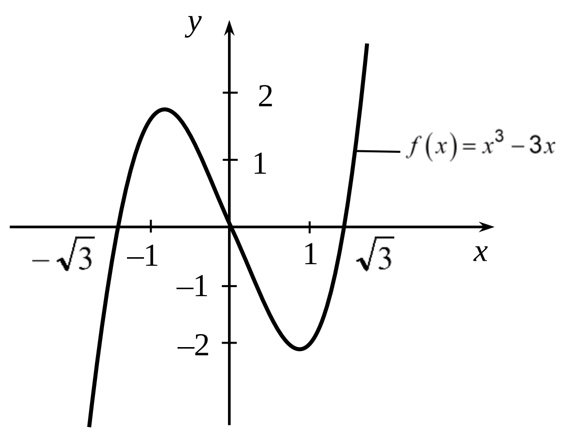


Рис. 3. График функции $f(x) = x^3 - 3x$

7.2. Экстремумы функции

Дадим точные определения точкам максимума и минимума функции. Пусть функция $y = f(x)$ определена на промежутке X и точка $x_0 \in X$. Говорят, что в точке x_0 функция $f(x)$ имеет ***максимум (минимум)***, если существует такая окрестность точки x_0, что для любого x из этой окрестности $f(x) < f(x_0)$ ($f(x) > f(x_0)$).

Точки максимума и минимума называются точками ***экстремума***.

Теорема 7.2.1. (*необходимое условие экстремума*). Если дифференцируемая функция $y = f(x)$ имеет экстремум в точке x_0, то ее производная в этой точке равна нулю: $f'(x_0) = 0$.

Геометрически равенство $f'(x_0) = 0$ означает, что в точке экстремума дифференцируемой функции $y = f(x)$ касательная к ее графику параллельна оси Ox.

Обратная теорема неверна, т.е. если $f'(x_0) = 0$, то это не значит, что x_0 - точка экстремума. Например, функция $y=x^3$ ее производная $y'=3x^2$ равна нулю при $x=0$,но $x=0$ не точка экстремума.

Существуют функции, которые в точках экстремума не имеют производной. Например, непрерывная функция $f(x) = |x|$, в точке $x=0$ производной не имеет, но точка $x=0$ - точка минимума (рис.1).

Замечание 7.2.1. Непрерывная функция может иметь экстремум лишь в точках, где производная равна нулю или не существует.

Если $f'(x_0) = 0$ или $f'(x_0)$ не существует, то точку x_0 будем называть ***критической*** (или подозрительной на экстремум). Критическая точка может и не быть точкой экстремума.

Теорема 7.2.2. (*достаточное условие экстремума*). Если непрерывная функция $y = f(x)$ дифференцируема в некоторой δ-окрестности критической точки x_0, т.е.в интервале $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, и при переходе через точку x_0 (слева направо) производная функции $f'(x)$ меняет знак с плюса на минус, то x_0 есть точка максимума, а если с минуса на плюс, то точка минимума.

Из теорем вытекает правило исследования функцию на экстремум:

1) найти критические точки функции $y = f(x)$;
2) выбрать из них только те, которые принадлежат области определения;
3) исследовать знак производной $f'(x)$ слева и справа от каждой из выбранных критических точек;

4) в соответствии с теоремой 7.2.2. выписать точки экстремума, если они есть, определить их тип (максимум или минимум) и вычислить значение функции в этих точках.

Задача 7.2.1. Исследовать на монотонность и экстремумы функцию $f(x)=x^2e^{-x}$. Построить её график.

Решение. Заданная функция определена и непрерывна на всей числовой оси $(-\infty;+\infty)$. Найдем критические точки заданной функции, для этого найдем производную и решим уравнение $f'(x) = 0$, получим

$$f'(x)=2xe^{-x}-x^2e^{-x}=xe^{-x}(2-x),$$

$$f'(x) = 0,$$

$$xe^{-x}(2-x)=0$$

$$x_1=0,\ x_2=2.$$

Точки x_1 и x_2 – критические точки. Эти точки разбивают всю числовую ось на три интервала: (–∞; 0), (0; 2), (2; +∞). Определим знак $f'(x)$ на каждом из интервалов: если $x\in(-\infty;0)$, то $f'(x)<0$; если $x\in(0;2))$, то $f'(x)<0$; если $x\in(2;+\infty)$, то $f'(x)<0$. Отсюда определяется поведение функции $f(x)$: на первом и последнем интервалах функция $f(x)$ убывает, а на втором – возрастает. Отсюда следует, что $x_1=0$ является точкой минимума, $y_{min}(0)=0$, а $x_2 = 2$ – точка максимума, $y_{max}(2)=\frac{4}{e^2}\approx 0{,}54$.

Все исследование удобно оформлять в виде таблицы. В первой строке которой поместим указанные точки и интервалы, во второй строке – сведения о производной $f'(x)$ в точках и на интервалах, а в третьей – поведение данной функции $f(x)$ (табл. 3).

Таблица 3. Промежутки монотонности $f(x)=x^2e^{-x}$.

x	$(-\infty,\ 0)$	0	$(0;2)$	0	$(2,+\infty)$
$f'(x)$	$f'(x)<0$	0	$f'(x)>0$	0	$f'(x)<0$
$f(x)$	убывает	$y_{min}(0)=0$	возрастает	$y_{max}(2)=\frac{4}{e^2}$	убывает

По данным исследования построим график заданной функции (рис.4).

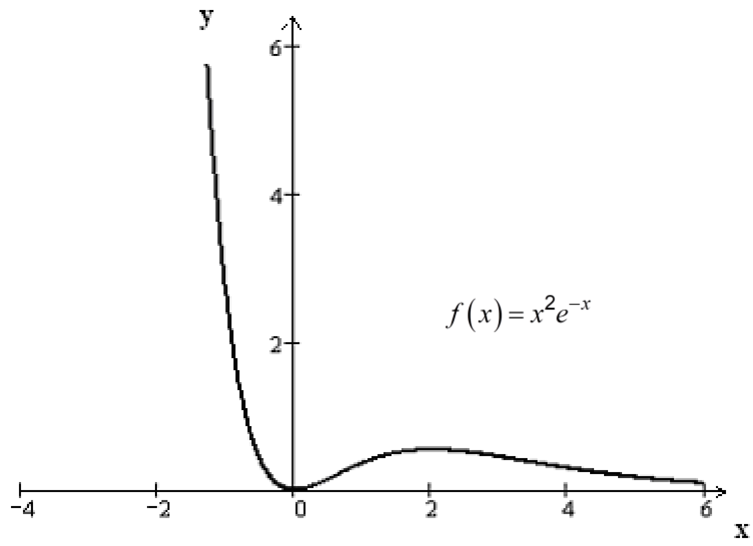


Рис.4 График функции $f(x)=x^2e^{-x}$.

7.3. Наибольшее и наименьшее значения функции на отрезке

Известно, что если функция непрерывна на отрезке, то она достигает на этом отрезке своего наименьшего и наибольшего значения. Иногда требуется найти наименьшее или наибольшее значение такой функции.

Если на отрезке $[a;b]$ есть точки минимума и максимума функции $f(x)$, то наименьшее значение функция будет принимать либо в одной из точек минимума, либо на конце отрезка $[a;b]$. Аналогично для наибольшего значения.

Сформулируем алгоритм нахождения наибольшего и наименьшего значения функции $f(x)$, непрерывной на отрезке.

1. Найти критические точки $x_1, x_2, ..., x_n$ функции $f(x)$.
2. Отобрать все критические точки, принадлежащие отрезку $[a;b]$.
3. Вычислить значения функции $f(x)$ в этих критических точках и на концах отрезка.
4. Из полученных значений выбрать самое большое и самое малое. Эти числа и будут наибольшим и наименьшим значениями $f(x)$ на отрезке $[a;b]$.

Задача 7.3.1. Найти наименьшее и наибольшее значения функции $f(x)=x^4-2x^2+5$ на отрезке $[-2;2]$.

Решение. Решать будем согласно изложенному выше алгоритму.

1. Найдем критические точки для данной функции:

$$f'(x)=4x^3-4x=4x\left(x^2-1\right);$$

$f'(x)=0$ при $x_1=0$, $x_2=-1, x_3=1$. Производная функции определена для любого x.

2. Все три критические точки принадлежат данному отрезку.
3. Вычислим значения функции в точках: -2; -1; 0; 1; 2:

$f(-2)=(-2)^4-2(-2)^2+5=16-8+5=13;$

$f(-1)=(-1)^4-2(-1)^2+5=1-2+5=4;$

$f(0)=(0)^4-2(0)^2+5=5;$

$f(1)=4;$

$f(2)=13.$

4. Из найденных значений самое маленькое число 4, а самое большое число 13.

Таким образом, наименьшее значение функции равно 4 в точке x=1, наибольшее значение равно 13 в точке x=2 и в точке x=-2.

Задача 7.3.2. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $y=x-2\sin x$ на отрезке $\left[0,\ \frac{\pi}{2}\right]$.

Решение. Решать будем согласно изложенному выше алгоритму.

1. Найдем критические точки для данной функции, для этого найдем производную: $y'=1-2\cos x$.

Точек в которых производная не существует нет, т.е. производная y' определена при любом x. Найдем точки, в которых производная равна нулю, т.е. $y'=0$,

$1-2\cos x=0$,

$\cos x=\frac{1}{2}$.

2. На отрезке $\left[0,\ \frac{\pi}{2}\right]$, $\cos x=\frac{1}{2}$ при $x=\frac{\pi}{3}$.
3. Имеем три точки: $x=0$, $x=\frac{\pi}{3}$, $x=\frac{\pi}{2}$, в которых функция может достигать наибольшее и наименьшее значения. Найдем значение функции в этих точках

$f(0)=0-2\sin 0=0;$

$f\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\pi}{2}-2\sin\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{2}-2=\frac{\pi-4}{2};$

$f\left(\frac{\pi}{3}\right)=\frac{\pi}{3}-2\sin\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{3}-2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}.$

Итак, $f_{наиб} = f(0) = 0$, $f_{наим} = f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\pi}{3} - 2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} \approx \frac{3{,}14}{3} - \sqrt{3} \approx -0{,}58$.

7.4. Выпуклость графика функции. Точки перегиба

Пусть $y=f(x)$– функция, дифференцируемая на интервале $(a;b)$. Рассмотрим кривую, являющуюся графиком этой функции.

Кривая, заданная функцией $y=f(x)$, называется ***выпуклой вверх*** на интервале $(a;b)$, если все точки кривой лежат ниже любой ее касательной на этом интервале.

Кривая называется ***выпуклой вниз*** на интервале $(a;b)$, если все точки кривой лежат выше любой ее касательной на этом интервале.

Точкой перегиба называется точка на кривой, где меняется направление её выпуклости.

Теорема 7.4.1. Если во всех точках интервала $(a;b)$ вторая производная функции $y=f(x)$ отрицательна, т.е. $f''(x)<0$, то кривая $y=f(x)$ на этом интервале выпукла вверх; если во всех точках интервала $(a;b)$ - $f''(x)>0$, то кривая $y=f(x)$ на этом интервале выгнута вниз.

Для нахождения точек перегиба графика функции используется следующая теорема.

Теорема 7.4.1. Если вторая производная функции $f''(x)$ при переходе через точку x_0, в которой она равна нулю или не существует, меняет знак, то точка графика функции с абсциссой x_0 есть точка перегиба.

Задача 7.4.1. Определить направление выпуклости и точки перегиба кривой $y = 3x^5 - 5x^4 + 4$.

Решение. Ищем точки *x* из области определения функции, в которых $y'' = 0$ или не существует.

$y' = 15x^4 - 20x^3$,

$y'' = 60x^3 - 60x^2 = 60x^2(x-1)$.

Вторая производная равна нулю $y'' = 0$ в точках $x = 0$ и $x = 1$. Эти точки являются искомыми, так как область определения и область непрерывности данной кривой есть вся ось абсцисс. Других точек *x*, которые могли бы быть абсциссами точек перегиба, нет, так как y'' существует всюду.

Исследуем найденные точки, определяя знак y'' слева и справа от каждой из найденных точек. Результаты исследования запишем в таблицу, подобную той, которая составляется при отыскании точек экстремума (табл. 4).

Таблица 4. Промежутки выпуклости и вогнутости $y = 3x^5 - 5x^4 + 4$.

x	$(-\infty;\ 0)$	0	$(0;\ 1)$	1	$(1,\ +\infty)$

$f''(x)$	$f''(x)<0$	0	$f''(x)<0$	0	$f''(x)>0$
$f(x)$	выпукла вверх	нет перегиба	выпукла вверх	точка перегиба	выпукла вниз

Выполним построение (рис. 5).

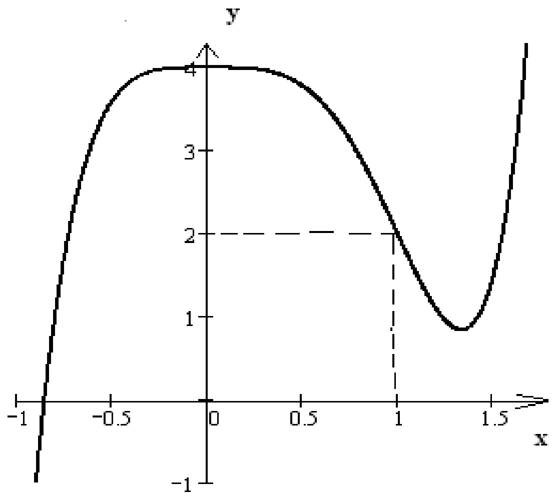


Рис.5 График функции $y=3x^5-5x^4+4$.

7.5. Асимптоты

Построение графика значительно облегчается, если знать его асимптоты. **Асимптотой** кривой называется прямая, расстояние до которой от точки, лежащей на кривой стремится к нулю при неограниченном удалении от начала координат этой точки по кривой. Асимптоты могут быть вертикальными, наклонными и горизонтальными.

Если $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=b$, то прямая $y = b$ является асимптотой графика $f(x)$ (при $x\to+\infty$). Эта асимптота параллельна оси Оx и называется ***горизонтальной асимптотой*** (рис. 6). Аналогично, прямая $y = b$ является асимптотой графика $y=f(x)$ при $x\to-\infty$, если $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=b$.

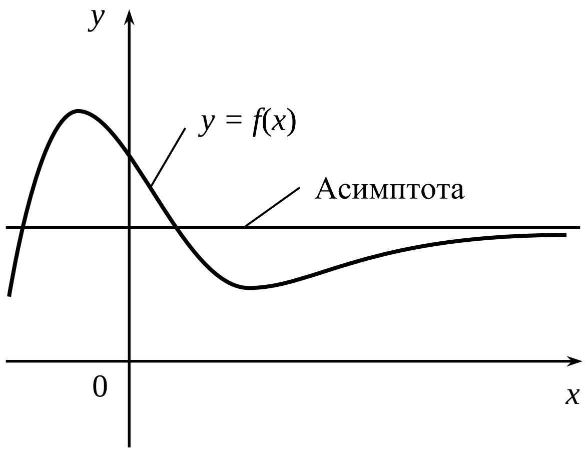
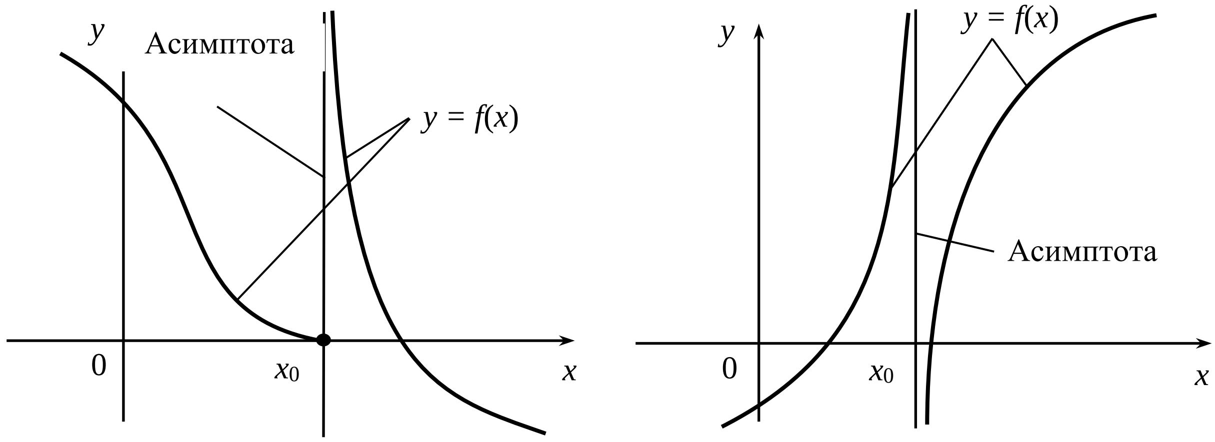


Рис. 6. Горизонтальная асимптота.

Рассмотрим асимптоты, параллельные оси *Oy*.

Прямая $x = x_0$ называется ***вертикальной асимптотой,*** если хотя бы один из односторонних пределов $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x)$ или $\lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x)$, является бесконечным, т.е.



$\lim\limits_{x \to x_0 \pm 0} f(x) = \pm\infty$ (рис. 7).

Следовательно, для отыскания вертикальных асимптот нужно найти точки разрыва функции второго рода.

Задача 7.5.1. Найти вертикальные и горизонтальные асимптоты для функции $y = \dfrac{1}{x-2}$.

Решение. Функция $f(x) = \dfrac{1}{x-2}$ определена и непрерывна во всех точках числовой оси, за исключением точки $x = 2$, в которой функция терпит разрыв. Найдем односторонние пределы.

$\lim\limits_{x \to 2-0} \dfrac{1}{x-2} = -\infty$, $\lim\limits_{x \to 2-0} \dfrac{1}{x-2} = +\infty$.

Следовательно, прямая $x=2$ является вертикальной асимптотой для графика $y=\dfrac{1}{x-2}$.

Найдем горизонтальную асимптоту. Для этого вычислим пределы $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x-2}=0$ и $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x-2}=0$. Следовательно, прямая $y=0$ является горизонтальной асимптотой при $x\to+\infty$ и при $x\to-\infty$ (рис.8).

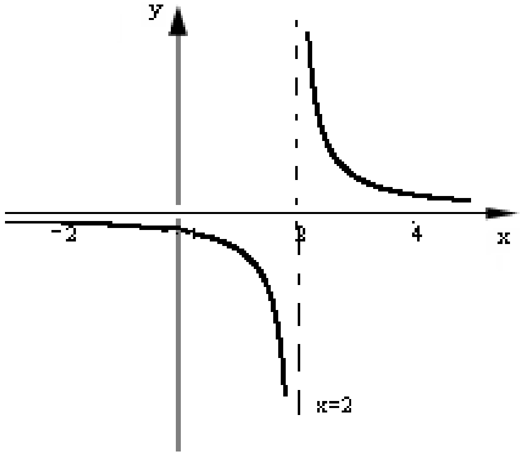


Рис.8. График функции $y=\dfrac{1}{x-2}$.

Рассмотрим асимптоты, которые не параллельны координатным осям (рис.9). Будем называть их наклонными асимптотами.

Уравнение наклонной асимптоты функции $y=f(x)$ будем искать в виде

$$y=kx+b, \tag{32}$$

где числа k и b, определяем по формулам

$$k=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} \tag{33}$$

$$b=\lim_{x\to+\infty}\left(f(x)-kx\right). \tag{34}$$

Если хотя бы один из пределов (33), (34) не существует, то при $x\to+\infty$ кривая не имеет наклонной асимптоты.

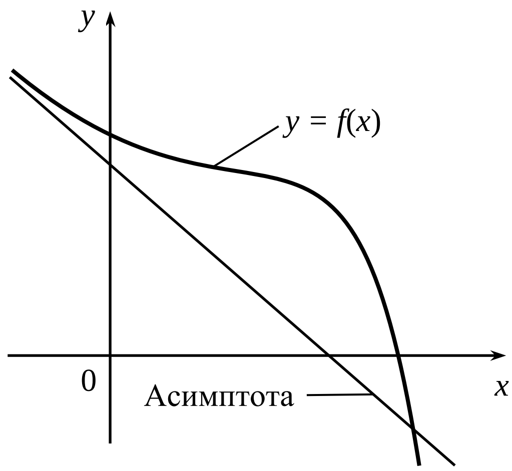


рис.9 Наклонная асимптота

Аналогично решается вопрос об наклонных асимптотах при $x \to -\infty$.

Замечание 7.5.1. Если, $k = 0$, то $y = b$ будет являться горизонтальной асимптотой. Т.е. отдельно находить горизонтальные асимптоты нет необходимости, они будут найдены при нахождении наклонных асимптот (при k=0).

Замечание 7.5.2. Асимптоты графика функции $y = f(x)$ при $x \to -\infty$ и при $x \to +\infty$ могут быть разными. Поэтому при нахождении пределов (33) (34) следует отдельно рассматривать случай, когда $x \to +\infty$ и когда $x \to -\infty$.

Задача 7.5.2. Найти асимптоты графика функции $y = e^x - x$.

Решение. Функция $f(x) = e^x - x$ определена, непрерывна на бесконечном интервале $(-\infty; +\infty)$ поэтому вертикальных асимптот нет.

Найдем наклонные асимптоты. Для этого вычислим пределы (33), (34) при $x \to +\infty$ и $x \to -\infty$.

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{e^x}{x} - 1\right) = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) - \lim_{x\to+\infty} 1 = \left[\begin{array}{l}\text{для неопределенности } \left(\frac{\infty}{\infty}\right) \\ \text{применим правило Лопиталя}\end{array}\right] =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{\left(e^x\right)'}{(x)'} - 1 = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{1} - 1 = e^{+\infty} - 1 = +\infty$$

Так как $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$, то отсюда следует, что при $x \to +\infty$ наклонных асимптот нет.

Найдем предел при $x \to -\infty$.

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty}\left(\frac{e^x}{x} - 1\right) = \lim_{x\to-\infty}\left(e^x \cdot \frac{1}{x}\right) - \lim_{x\to-\infty} 1 = \left(e^{-\infty} \cdot \frac{1}{\infty}\right) - 1 =$$

$$= 0 - 1 = -1.$$

Отсюда $k = -1$ при $x \to -\infty$.

Далее найдем число b:

$b = \lim\limits_{x\to-\infty}\left(f(x) - kx\right) = \lim\limits_{x\to-\infty}\left(e^x - x + x\right) = \lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$ значит, b=0.

Итак, прямая $y = -x$ есть наклонная асимптота для графика функции $y = e^x - x$ при $x \to -\infty$ (рис.10).

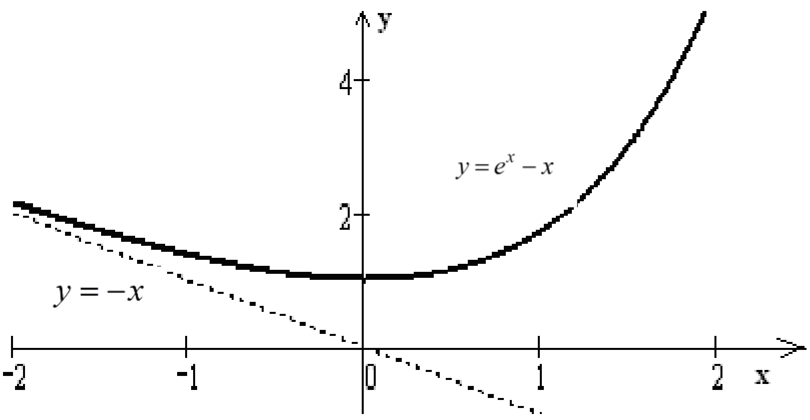


Рис.10 График функции $y=e^x-x$

§8. ОБЩАЯ СХЕМА ИССЛЕДОВАНИЯ ФУНКЦИИ И ПОСТРОЕНИЕ ГРАФИКА

При полном исследовании функции $y=f(x)$ и построении ее графика можно придерживаться следующей схемы.

1. Найти ***область определения*** функции.
2. Исследовать функцию на ***четность***.
3. Найти ***точки пересечения*** графика функции с осями координат.
4. Определить ***уравнения асимптот*** графика функции: вертикальные и наклонные.
5. Исследовать функцию на ***монотонность*** и ***экстремумы***.
6. Определить ***интервалы выпуклости*** функции и точки **перегиба**.
7. Произвести необходимые ***дополнительные*** исследования.
8. **Построить график** функции.

Дадим пояснения к каждому пункту приведенной схемы.

1) Чтобы найти область определения функции, надо найти множество значений x, для которых заданная функция имеет смысл.

2) Для определения четности функции надо проверить условие, что для любого x из области определения выполняется равенство $f(-x)=f(x)$, то функция является четной, если же выполняется равенство $f(-x)=-f(x)$, то функция является нечетной. В том случае, когда $f(-x)\neq f(x)$ и $f(-x)\neq -f(x)$ - функция не является ни четной, ни нечетной, т.е. она является функцией общего вида.

График четной функции симметричен относительно оси Oy, а график нечетной – относительно начала координат. Таким образом, график четной или нечетной функций достаточно построить лишь для $x\geq 0$, а потом, используя симметрию, достроить его на оставшейся части области определения.

3) Точки пересечения графика функции $y = f(x)$ с осью Ox определяются из условия $y=0$, т.е. $f(x)=0$. Точка пересечения с осью Oy определяется из условия $x=0$, значит, $y = f(0)$.

4) Прямая $x = x_0$ (где x_0 - точка разрыва функции) является вертикальной асимптотой графика функции $y = f(x)$, если

$$\lim_{x\to x_0-0} f(x)=\pm\infty, \text{ или } \lim_{x\to x_0+0} f(x)=\pm\infty.$$

Прямая $y=kx+b$ является наклонной асимптотой графика функции $y = f(x)$, если существуют конечные пределы

$$k = \lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x},\ b = \lim_{x\to+\infty}\left[f(x)-kx\right]$$

или

$$k = \lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x},\ b = \lim_{x\to-\infty}\left[f(x)-kx\right].$$

В частности, при $k=0$ получаем $b = \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ или $b = \lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.

Полученная прямая $y=b$ является горизонтальной асимптотой графика функции $y = f(x)$.

5) Для исследования на монотонность и экстремумы надо, найти производную y' и критические точки (в которых $y'=0$ или не существует). Изобразить критические точки на числовой оси и определить знак производной на каждом интервале, слева и справа от каждой критической точки. В промежутках где $y'>0$ функция возрастает, где $y'<0$ функция убывает.

Если при переходе через критическую точку производная y' меняет свой знак с “+” на “-”, то критическая точка - есть точка максимума; а если y' меняет знак с “-” на “+”, то критическая точка есть точка минимума; если y' не меняет знака, то в данной критической точке нет экстремума.

Полученные результаты для наглядности можно оформить в виде таблицы (см. задачу 7.2.1). Эта таблица заполняется следующим образом:

1. В первой строке указываются интервалы, на которые все критические точки разбивают числовую ось и сами точки;

2. Во второй строке указываются знаки первой производной на этих интервалах;

3. В третьей строке описывается поведение функции на каждом интервале (↑ - функция возрастает, ↓- функция убывает).

6) Для определения промежутков выпуклости и точек перегиба необходимо найти производную второго порядка заданной функции y''. Найти точки, в которых $y''=0$ или не существует. Изобразить критические точки на числовой оси и определить знак второй производной на каждом интервале. Если,

проходя через эти критические точки вторая производная меняет знак слева и справа то исследуемая точка будет абсциссой точки перегиба.

Если на некотором интервале $y''>0$, то функция выпукла вниз ($\cup$); если на некотором интервале $y''<0$, то функция выпукла вверх ($\cap$).

Результаты, так же, как и в п. 5 данного алгоритма для наглядности можно оформить в виде таблицы. Эта таблица заполняется следующим образом (пример задача 7.4):

1. В первой строке указываются интервалы, на которые все критические точки второго рода разбивают числовую ось и сами точки.
2. Во второй строке указываются знаки второй производной на этих интервалах.
3. В третьей строке описать поведение функции на каждом интервале (выпукла или вогнута).

7) Необходимо вычислить значения функции в точках экстремума и в точках перегиба графика функции. Если информации для построения графика недостаточно, найти значения функции в произвольно выбранных вспомогательных точках.

По составленным таблицам нетрудно построить график функции. Для этого нужно данные таблиц перенести в декартову систему координат в подходяще выбранном масштабе.

Задача 8.1. Исследовать функцию $y=\dfrac{x^3}{x^2-1}$ и построить ее график.

Решение. 1) Областью определения функции является вся числовая ось, за исключением точек, в которых знаменатель дроби обращается в нуль, то есть $x^2-1=0$. Отсюда $(x-1)(x+1)=0$, $x_1=1$, $x_2=-1$. Итак, область определения: $x\in(-\infty;-1)\cup(-1;1)\cup(-1;+\infty)$.

2) Проверим условие четности функции. Найдем $f(-x)$:

$$f(-x)=\frac{(-x)^3}{(-x)^2-1}=-\frac{x^3}{x^2-1}=-f(x).$$

Так как $f(-x)=-f(x)$, то функция $y=\dfrac{x^3}{x^2-1}$ является нечетной, и её график симметричен относительно начала координат.

3) Точка пересечения с осью Ox определяется равенством $y=0$, т.е.

$$\frac{x^3}{x^2-1}=0,\ x=0.$$

Точка пересечения с осью Oy определяется равенством $x=0$:

$$f(0)=\frac{0^3}{0^2-1}=0,$$

т.е. $y=0$. Итак, график функции имеет единственную точку пересечения с осями координат – начало координат $O(0,\ 0)$.

4) Так как при $x_1=1$ и $x_2=-1$ не выполняется условие непрерывности функции в точке, то эти точки являются точками разрыва функции $y=\dfrac{x^3}{x^2-1}$. Причем эти точки являются точками разрыва второго рода, так как

$$\lim_{x\to1-0}\frac{x^3}{x^2-1}=-\infty,\ \lim_{x\to1+0}\frac{x^3}{x^2-1}=+\infty$$

$$\text{и}\ \lim_{x\to-1-0}\frac{x^3}{x^2-1}=-\infty,\ \lim_{x\to-1+0}\frac{x^3}{x^2-1}=+\infty.$$

Так как данная функция имеет точки разрыва второго, то существуют вертикальные асимптоты графика функции и их уравнения: $x_1=1$ и $x_2=-1$.

Найдем уравнения наклонных асимптот. Для этого вычислим коэффициенты в уравнении прямой $y=kx+b$:

$$k=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^3}{x\cdot\left(x^2-1\right)}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^3}{x^3-x}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=$$

$$=\left[\begin{array}{l}\text{старшая степень числителя равна старшей степени знаменателя,}\\ \text{значит предел равен отношению коэффициентов при старших степенях}\end{array}\right]=$$

$$=1,$$

$$b=\lim_{x\to\pm\infty}\left[f(x)-kx\right]=\lim_{x\to\pm\infty}\left[\frac{x^3}{x^2-1}-x\right]=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x}{x^2-1}=0.$$

Следовательно, прямая $y=x$ является наклонной асимптотой при $x\to+\infty$ и $x\to-\infty$.

5) Найдем производную $f'(x)$:

$$f'(x)=\left(\frac{x^3}{x^2-1}\right)'=\frac{3x^2\cdot\left(x^2-1\right)-x^3\cdot2x}{\left(x^2-1\right)^2}=\frac{x^4-3x^2}{\left(x^2-1\right)^2}.$$

Для того чтобы найти критические точки, решим уравнение: $f'(x)=0$ и выясним, в каких точках не существует $f'(x)$.

Уравнение $\dfrac{x^4-3x^2}{\left(x^2-1\right)^2}=0$ равносильно уравнению

$x^4-3x^2=0$ или $x^2\cdot\left(x^2-3\right)=0$.

Отсюда находим стационарные точки: $x_1=0$, $x_2=\sqrt{3}$, $x_3=-\sqrt{3}$. Производная не существует в том случае, когда знаменатель $\left(x^2-1\right)^2=0$, т.е. при

$x_4 = 1$, $x_5 = -1$, т. е в точках в которых не определена сама функция. Таким образом, получили три критических точки: $x_1 = 0$, $x_2 = \sqrt{3}$, $x_3 = -\sqrt{3}$ и две точки $x_4 = 1$, $x_5 = -1$, не принадлежащие области определения функции (ООФ).

Для нахождения экстремумов и интервалов монотонности функции на числовой прямой отметим все критические точки и точки, не принадлежащие ООФ и определим знак производной в каждом из получившихся интервалов.

Для этого достаточно взять по одной произвольной точке из каждого интервала и вычислить значения производной (рис. 11).

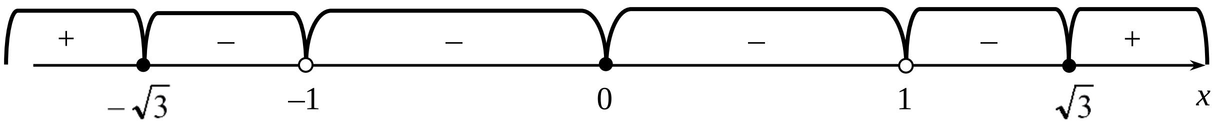


Рис. 11 Промежутки монотонности функции $y = \dfrac{x^3}{x^2 - 1}$

Например, $f'(-2) = \dfrac{16 - 3 \cdot 4}{3^2} = \dfrac{2}{9} > 0$; $f'\left(-\sqrt{2}\right) = \dfrac{4 - 3 \cdot 2}{1} = -2 < 0$;

$f'\left(-\sqrt{1/2}\right) = \dfrac{1/4 - 3 \cdot (1/2)}{1/4} = -5 < 0$; $f'\left(\sqrt{1/2}\right) = -5 < 0$; $f'\left(\sqrt{2}\right) = -2 < 0$;

$f'(2) = 2/9 < 0$.

Так как при переходе через критические точки $x = \pm\sqrt{3}$ производная меняет знак, то эти точки являются точками экстремума функции. В частности, при $x = \sqrt{3}$ достигается минимум функции, а при $x = -\sqrt{3}$ – максимум. Кроме того, на интервалах $\left(-\infty, -\sqrt{3}\right)$ и $\left(\sqrt{3}, +\infty\right)$ функция возрастает, а на интервалах $\left(-\sqrt{3}, -1\right)$, $(-1, 1)$ и $\left(1, \sqrt{3}\right)$ – убывает.

Полученные данные занесем в таблицу 5.

Таблица 5. Промежутки монотонности функции $y = \dfrac{x^3}{x^2 - 1}$.

x	$(-\infty;-\sqrt{3})$	$-\sqrt{3}$	$(-\sqrt{3};-1)$	-1	$(-1;0)$	0	$(0;1)$	1	$(1;\sqrt{3})$	$\sqrt{3}$	$(\sqrt{3};+\infty)$
$f'(x)$	+	0	-	∞	-	0	-	∞	-	0	+
$f(x)$	↑	-2,6	↓	∞	↓	0	↓	∞	↓	2,6	↑

6) Найдем $f''(x)$:

$$f''(x)=\left(\frac{x^4-3x^2}{\left(x^2-1\right)^2}\right)'=$$

$$\frac{\left(4x^3-6x\right)\left(x^2-1\right)^2-\left(4x^3-6x\right)2\left(x^2-1\right)2x}{\left(x^2-1\right)^4}=\left[\begin{array}{l}\text{вынесим общий множитель}\\ 2x\left(x^2-1\right)\text{ за скобки}\end{array}\right]=$$

$$=\frac{2x\left(x^2-1\right)\left[\left(2x^2-3\right)\left(x^2-1\right)-2\left(x^4-3x^2\right)\right]}{\left(x^2-1\right)^4}=\frac{2x^3+6x}{\left(x^2-1\right)^3}.$$

Определим точки, в которых $f''(x)=0$ и точки в которых $f''(x)$ не существует

$$\frac{2x^3+6x}{\left(x^2-1\right)^3}=\frac{2x\left(x^2+3\right)}{\left(x^2-1\right)^3}=0.$$

Это уравнение равносильно уравнению $2x\left(x^2+3\right)=0$, откуда $x_1=0$.

Производная второго порядка не существует при $x=\pm1$, т е. точки в которых не определена сама функция.

На числовой оси нанесем точки $x_1=0$, $x_2=1$, $x_3=-1$, и определим знаки второй производной аналогично тому, как это сделано в пункте 7 (рис. 12):

$$f''(-2)=\frac{2\cdot(-8)+3\cdot(-2)}{(4-3)^3}=-\frac{22}{27}<0,$$

$$f''(\text{-}0{,}5)=\frac{2\cdot(\text{-}0{,}125)+3\cdot(\text{-}0{,}5)}{(0{,}25\text{-}1)^3}\approx4{,}5>0,$$

$$f''(0{,}5)\approx-4{,}4<0,\ f''(2)=22/27>0.$$

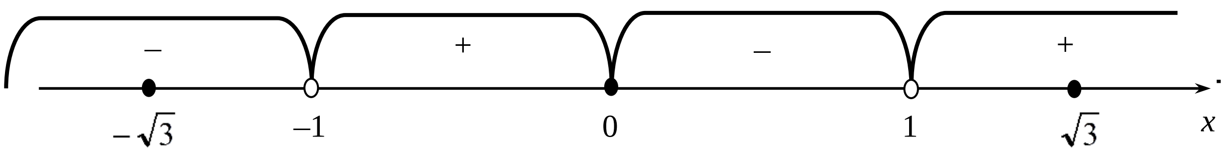


Рис. 12. Промежутки выпуклости вогнутости функции $y=\dfrac{x^3}{x^2-1}$.

При переходе через точку $x_1=0$ вторая производная меняет знак, следовательно, x_1 – точка перегиба графика функции. На интервалах $(-\infty,-1)$ и $(0,1)$ график функции является выпуклым вниз, а на интервалах $(-1,\ 0)$ и $(1,\ +\infty)$ –выгнутым вверх. Составим таблицу 6 исследования на выпуклость.

Таблица 6. Промежутки выпуклости и вогнутости функции $y=\dfrac{x^3}{x^2-1}$.

x	$(-\infty;-1)$	-1	$(-1;0)$	0	$(0;1)$	1	$(1;+\infty)$
$f''(x)$	-	∞	+	0	-	∞	+
$f(x)$	выпукла вверх	∞	выпукла вниз	0	выпукла вверх	∞	вогнута вниз

8) Вычислим значения функции в точках экстремума и перегиба:

$f\left(-\sqrt{3}\right)=\dfrac{3\cdot\sqrt{3}}{3-1}\approx-2{,}6$, $f(0)=0$, $f\left(\sqrt{3}\right)\approx 2{,}6$.

Для более точного построения графика найдем значения функции в дополнительных точках: $f(0{,}5)=\dfrac{0{,}125}{0{,}25-1}\approx-0{,}2$, $f(-0{,}5)\approx 0{,}2$.

Теперь построим график функции (рис. 13).

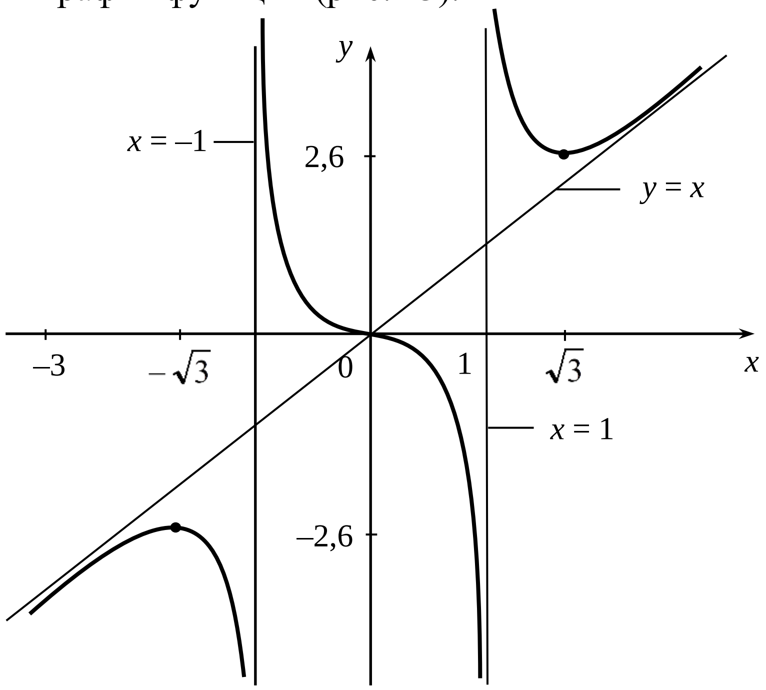


Рис. 13. График функции $y=\dfrac{x^3}{x^2-1}$

Задача 8.2. Исследовать функцию $y=\dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}$ и построить ее график.

Решение. 1) Исходя из того, что известны области определения элементарных функций $y=\ln x$ $(x>0)$ и $y=\sqrt{x}$ $(x\ge 0)$, получаем область определения функции: $x\in(0;+\infty)$.

2) Так как функция определена только для положительных значений x, то ООФ не является симметричной, функция не является ни четной ни нечетной.

3) Найдем точки пересечения с осью Ox: $y=0$ или $\frac{\ln x}{\sqrt{x}}=0$, т.е. $\ln x=0$, откуда $x=1$. Точки пересечения с осью Oy не существует, так как x никогда не обращается в нуль. Поэтому график функции пересекается с осями координат в единственной точке – $(1;0)$.

4) Данная функция непрерывна на всей области определения.

Изучим поведение функции на левом конце области определения, для этого вычислим предел:

$$\lim_{x\to+0} f(x)=\lim_{x\to+0}\frac{\ln x}{\sqrt{x}}=\frac{\ln(+0)}{+0}=\frac{-\infty}{0}=\left((-\infty)\cdot(+\infty)\right)=-\infty.$$

Отсюда прямая $x=0$ (ось Oy) является вертикальной асимптотой к графику функции.

Найдем уравнения невертикальных асимптот. Для этого вычислим (используя правило Лопиталя) следующие пределы:

$$k=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x\sqrt{x}}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{(\ln x)'}{\left(\sqrt{x^3}\right)'}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1/x}{\frac{3}{2}\sqrt{x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2}{3x\sqrt{x}}=0,$$

$$b=\lim_{x\to+\infty}\left[f(x)-kx\right]=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{\sqrt{x}}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{(\ln x)'}{\left(\sqrt{x}\right)'}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{1/x}{1/\left(2\sqrt{x}\right)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2}{\sqrt{x}}=0.$$

Полученная прямая $y=0$ (ось Ox) является горизонтальной асимптотой графика функции

5) Найдем $f'(x)$:

$$f'(x)=\left(\frac{\ln x}{\sqrt{x}}\right)'=\frac{(1/x)\sqrt{x}-\ln x/\left(2\sqrt{x}\right)}{x}=\frac{2-\ln x}{2x\sqrt{x}}=\frac{2-\ln x}{2x^{3/2}}.$$

Производная равна нулю, когда $2-\ln x=0$, то есть при $x=e^2$. Производная существует на всей области определения функции $y=\frac{\ln x}{\sqrt{x}}$. Следовательно, существует только одна критическая точка.

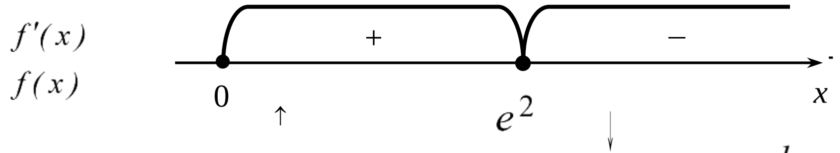


Рис. 14 Промежутки монотонности функции $y=\frac{\ln x}{\sqrt{x}}$.

Нанесем область определения и критическую точку на числовую ось и найдем знаки производной $f'(x)$ на всех интервалах (рис. 14):

$$f'(1)=\frac{2-0}{2}=1>0\,,\quad f'(9)=\frac{2-ln9}{54}\approx -0{,}004<0\,.$$

Так как при переходе через критическую точку производная меняет знак, то $x=e^2$ – точка экстремума функции (точка максимума). На интервале $\left(0,\ e^2\right)$ функция возрастает, а на интервале $\left(e^2,\ +\infty\right)$ – убывает.

6) Найдем $f''(x)$:

$$f''(x)=\left(\frac{2-ln\,x}{2x^{3/2}}\right)'=\frac{-\frac{1}{x}2x^{3/2}-(2-ln\,x)2\cdot\frac{3}{2}x^{1/2}}{4x^3}=\frac{\sqrt{x}\,(3ln\,x-8)}{4x^3}\,.$$

Производная второго порядка равна нулю, если $\sqrt{x}\cdot(3ln\,x-8)=0$ или $\sqrt{x}=0$, $3ln\,x-8=0$. Отсюда получаем: $x_1=0$, $x_2=e^{8/3}$. Так как $x_1=0$ не входит в область определения функции, то существует только одна критическая точка.

Нанесем область определения функции и критическую точку на числовую ось (рис. 16). Найдем знаки $f''(x)$ на всех полученных интервалах:

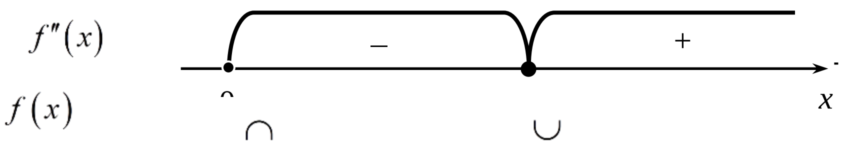


Рис. 15 Промежутки выпуклости и вогнутости $y=\dfrac{ln\,x}{\sqrt{x}}$

$$f''(1)=\frac{1\cdot(0-8)}{4}=-2<0\,,\quad f''\left(e^4\right)=\frac{e^2(3\cdot 4-8)}{4e^{12}}=\frac{1}{e^{10}}>0\,.$$

При переходе через критическую точку $x=e^{8/3}$ производная второго порядка сменила знак, следовательно, это точка перегиба графика функции. На интервале $\left(0;\ e^{8/3}\right)$ график является выпуклым вверх, а на $\left(e^{8/3};\ +\infty\right)$ – выпуклым вниз.

7) Найдем значения функции при $x=e^2$ и $x=e^{8/3}$:

$$f\left(e^2\right)\approx f(7{,}4)\approx 0{,}74\,,\quad f\left(e^{8/3}\right)\approx f(14{,}4)\approx 0{,}7\,.$$

Для более точного построения графика вычислим значения функции $y=\dfrac{ln\,x}{\sqrt{x}}$ в дополнительной точке: $f\left(e^4\right)\approx f(55)\approx 0{,}07$.

По полученным в пунктах 1-7 данным строим график функции $y=\dfrac{ln\,x}{\sqrt{x}}$ (рис. 16).

Замечание. В данном примере при исследовании функции полученные результаты оформлялись не в таблице, а на числовых осях с нанесением на них критических точек с особенностями поведения графика функции.

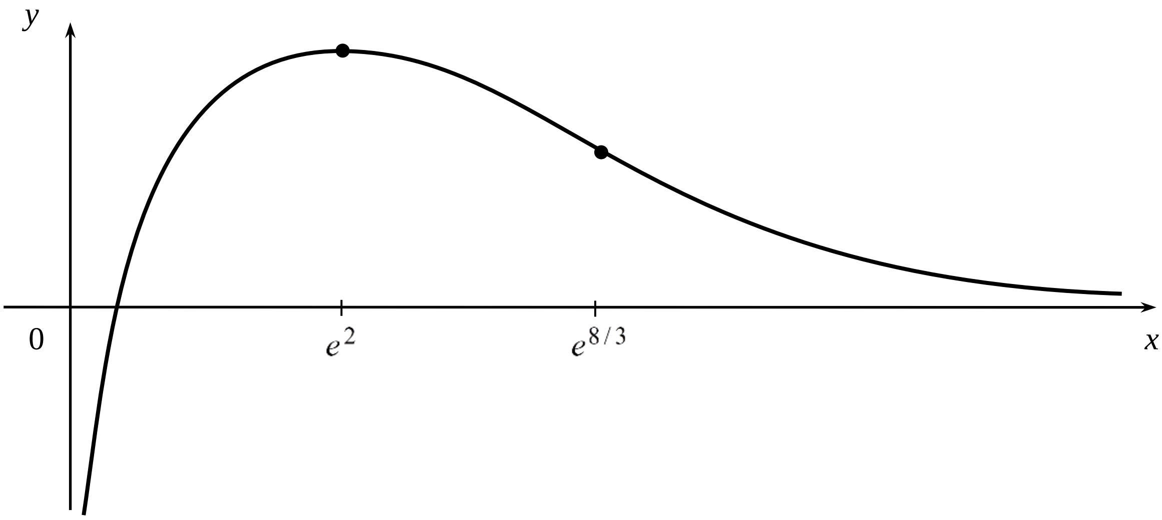


Рис. 16 График функции $y = \dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}$

Прежде чем приступать к выполнению индивидуальных задач, изучите теоретическую часть необходимой вам темы, разберите решения предлагаемых примеров, а затем приступите к выполнению своего варианта. Все вопросы, возникающие при подготовке, вы можете задать преподавателю на индивидуальной консультации.

§9. РАСЧЁТНО-ГРАФИЧЕСКОЕ ЗАДАНИЕ

Вариант 1

Задание 1. Вычислить производные заданных функций.

1. $y = x^3 - \frac{1}{5}x^2 + 2x - 4$;
2. $y = \cos 3x + 4tg5x - \ln 2x$;
3. $y = \frac{2x^2}{1+x^4}$;
4. $y = (x^4 + 2x)\sin 3x$;
5. $y = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$;
6. $y = \left(\frac{1-x}{1+x}\right)^4$;
7. $y = \arcsin\frac{\ln x}{1+x^4}$;
8. $y = 3\sin\left(xe^x - e^x\right) - \sin^3\left(xe^x - e^x\right)$;
9. $y = \left(x\cos x - \sin x\right)\left[\ln\left(x\cos x - \sin x\right) - 1\right]$;
10. $y = \arccos\left(2x\sqrt{1-x^2}\right)$.

Задание 2. Дифференцирование неявной функции. Логарифмическое дифференцирование. Дифференцирование функции, заданной параметрически.

1. $y = \left(x-2\right)^{\sin x}$;
2. $y = \frac{x^2\sqrt{x+1}}{\left(x-1\right)^3\sqrt[4]{5x-1}}$;
3. $x^3 + y^3 = 3xy$;
4. $\frac{y}{x} + e^{\frac{y}{x}} - \sqrt[3]{\frac{y}{x}} = 0$;
5. $\begin{cases} x = t^3 + 3t + 1, \\ y = 3t^5 + 5t^3 + 1. \end{cases}$

Задание 3. Проверить, удовлетворяет ли функция $y = -x\cos x + 3x$ дифференциальному уравнению $xy' = y + x^2\sin x$.

Задание 4. Найдите производную функции указанного порядка.

1) $y^{(n)}$, если $y = 3^x + 3^{-x}$; 2) $\frac{d^2y}{dx^2}$, если $x = arccos\sqrt{t}, y = \sqrt{t-t^2}$.

Задание 5. Составить уравнение касательной, проведенной к кривой $f\left(x\right) = -\frac{1}{6}x^3 + x^2 - 2x - 3,$ параллельно прямой $3x + 6y - 2 = 0$.

Задание 6. Найти пределы функций, используя правило Лопиталя.

1. $\lim\limits_{x\to -1}\frac{x^3 - 3x - 2}{x^2 + 2x + 1}$;
2. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2e^x - 2}{x^2 - x}$;
3. $\lim\limits_{x\to 0} xctg2x$;
4. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^2} - ctg^2x\right)$;
5. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{e^{3x} + 5}{6x^2 + 1}$;
6. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{2e^{4x} - 2}{\sin x}$;
7. $\lim\limits_{x\to 0}\left(1 - 6x\right)^{\frac{1}{x}}$;
8. $\lim\limits_{x\to 1} x^{\frac{1}{1-x}}$.

Задание 7. Найти наименьшее и наибольшее значения функции $y = -3x^2 + 4x - 8$ на промежутке $x \in \left[0;1\right]$.

Задание 8. Исследовать функции и построить их графики.

1. $y = x^3 - 3x + 2$;
2. $y = \frac{2x-1}{\left(x-1\right)^2}$;
3. $y = \ln\left(x^2 + x - 2\right)$.

Вариант 2

Задание 1. Вычислить производные заданных функций.

1. $y = 3x^4 - \frac{6}{7}x^2 + 5x - 2$;
2. $y = 6\sin(-x) + ctg5x - \ln 2x$;
3. $y = \frac{x^2}{\sin 3x}$;
4. $y = (x^4 + 2x)tg3x$;
5. $y = \ln tg\frac{x}{2}$;
6. $y = e^{\arcsin\frac{1}{x}}$;
7. $y = tg^3 2x \cos^2 2x$;
8. $y = \left(\frac{1-x}{1+x}\right)^4$;
9. $y = x^n a^{-x^2}$;
10. $y = \left(1 + \sqrt{x^2+1}\right)^5$.

Задание 2. Дифференцирование неявной функции. Логарифмическое дифференцирование. Дифференцирование функции, заданной параметрически.

1. $y = x^x$;
2. $y = \frac{(x-2)^9}{\sqrt{(x-1)^5(x-3)^{11}}}$;
3. $tgy = xy$;
4. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$;
5. $\begin{cases} x = a\cos^3 t, \\ y = b\sin^3 t. \end{cases}$

Задание 3. Проверить, удовлетворяет ли функция $y = \frac{x}{x-1} + x^2$ дифференциальному уравнению $x(x-1)y' + y = x^2(2x-1)$.

Задание 4. Найдите производную функции указанного порядка.

1) $y^{(n)}$, если $y = e^{-x/2}$;
2) $\frac{d^2y}{dx^2}$, если $x = a\cos t,\ y = a\sin t$.

Задание 5. Составить уравнение касательной, проведенной к кривой $f(x) = -2x^3 - 6x^2 + 12x + 21$, параллельно прямой $6x + y + 2 = 0$.

Задание 6. Найти пределы функций, используя правило Лопиталя.

1. $\lim\limits_{x\to -1}\frac{x^3-2x-1}{x^4+2x+1}$;
2. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x\sin 3x}{1-\cos 4x}$;
3. $\lim\limits_{x\to \frac{1}{2}}\sin(2x-1)tg\pi x$;
4. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln\sin 2x}{\ln\sin x}$;
5. $\lim\limits_{x\to \infty}\frac{e^{5x}+x^2}{x+x^3}$;
6. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{2e^x+e^{-x}-3}{x^2}$;
7. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}\right)^{\sin x}$;
8. $\lim\limits_{x\to 0}(1-2x)^{\frac{1}{x}}$.

Задание 7. Найти наименьшее и наибольшее значения функции $y = x^3 + 3x^2 - 9x - 7$ на промежутке $x \in [-4; 3]$.

Задание 8. Исследовать функции и построить их графики.

1. $y = x^3 + 3x^2 - 9x + 2$;
2. $y = \frac{x^3+4}{x^2}$;
3. $y = \frac{e^x}{e^x - 1}$.

Вариант 3

Задание 1. Вычислить производные заданных функций.

1. $y = x^4 - x^2\sqrt{2} + 0,5x - 2,5$;
2. $y = \sin 2x + tg3x + 3x - 2,2$;
3. $y = \dfrac{x^2}{\sin 3x}$;
4. $y = (x^4 + 2x)tg3x$;
5. $y = x\sin x\cos x + \dfrac{1}{2}\cos^2 x$;
6. $y = log_a\left(x + \sqrt{x^2 + 9}\right)$;
7. $y = \ln tg\dfrac{x}{2} - \dfrac{x}{\sin x}$;
8. $y = e^{\frac{1}{2}tg^2 x}\cos x$;
9. $y = x^n a^{-x^2}$;
10. $y = \left(1 + \sqrt{x^2 + 1}\right)^5$.

Задание 2. Дифференцирование неявной функции. Логарифмическое дифференцирование. Дифференцирование функции, заданной параметрически.

1. $y = x^{-x} \cdot 2^x \cdot x^2$;
2. $y = \sqrt{\dfrac{x(x-1)}{x-2}}$;
3. $x^3 + y^3 = a^3$;
4. $xy = arctg\dfrac{x}{y}$;
5. $\begin{cases} x = \dfrac{1}{t+1}, \\ y = \left(\dfrac{t}{t+1}\right)^2. \end{cases}$

Задание 3. Проверить, удовлетворяет ли функция $y = (x+1)^3(e^x - 1)$ дифференциальному уравнению $y' - \dfrac{3y}{x+1} = e^x(1+x)^3$.

Задание 4. Найдите производную функции указанного порядка.

1) $y^{(n)}$, если $y = ln\,x$;

2) $\dfrac{d^2y}{dx^2}$, если $x = a(t - sin\,t),\ y = a(1 - cos\,t)$,

Задание 5. Составить уравнение касательной, проведенной к кривой $f(x) = -2x^3 - 6x^2 + 12x + 21$, параллельно прямой $6x + y + 2 = 0$.

Задание 6. Найти пределы функций, используя правило Лопиталя.

1. $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{3x^2 + 2x - 1}{x^2 - 1}$;
2. $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{6}} \dfrac{1 - 2\sin x}{\cos 3x}$;
3. $\lim\limits_{x \to 0} xctg7x$;
4. $\lim\limits_{x \to 0} \left(\dfrac{1}{x\sin x} - \dfrac{1}{x^2}\right)$;
5. $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{e^x + x + 2}{x^4}$;
6. $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{e^x - e^2}{x - 2}$;
7. $\lim\limits_{x \to 0} (tgx)^{2x - \pi}$;
8. $\lim\limits_{x \to 0} (1 - 5x)^{\frac{1}{x}}$.

Задание 7. Найти наименьшее и наибольшее значения функции $y = x\ln^2 x$ на промежутке $x \in \left[e^{-1}; e\right]$.

Задание 8. Исследовать функции и построить их графики.

1. $y = -x^3 + 3x + 4$;
2. $y = \dfrac{2x}{(x-3)^2}$;
3. $y = e^{-x^2}$.

Вариант 4

Задание 1. Вычислить производные заданных функций.

1. $y = 3x^2 - 4,5x^2 + 2x - \frac{1}{4}$;
2. $y = 3\sin 2x + ctg 3x + \frac{2}{x} - 2,2$;
3. $y = \frac{5\sin 2x}{4x}$;
4. $y = (2x^5 + x) arctg 3x$;
5. $y = \frac{1}{2} tg^2 \sqrt{x} + \ln\cos\sqrt{x}$;
6. $y = x^2 e^{x^2} \ln x$;
7. $y = \arccos\sqrt{1-2^x}$;
8. $y = \log_{x^2} 2$;
9. $y = \frac{1}{4a}\ln\frac{x-a}{x+a} + \frac{1}{2a} arctg\frac{x}{a}$;
10. $y = \frac{2^{3x}}{\arcsin^2 5x}$.

Задание 2. Дифференцирование неявной функции. Логарифмическое дифференцирование. Дифференцирование функции, заданной параметрически.

1. $y = x^{\ln x}$;
2. $y = x \cdot \sqrt[3]{\frac{x^2}{x^2+1}}$;
3. $arctg\left(x+y\right) = x$;
4. $x^3 + x^2 y + y^2 = 0$;
5. $\begin{cases} x = a\cos^2 t, \\ y = b\sin^2 t. \end{cases}$

Задание 3. Проверить, удовлетворяет ли функция $y = tgx - 1 + e^{-tgx}$ дифференциальному уравнению $y'\cos^2 x + y = tgx$.

Задание 4. Найдите производную функции указанного порядка.

1) $y^{(n)}$, если $y = 1/(1+2x)$; 2) $\frac{d^2y}{dx^2}$, если $x = t^2$, $y = t^3/2$.

Задание 5. Составить уравнение касательной, проведенной к кривой $f\left(x\right) = x^3 + 3x^2 - 6x - 8,$ параллельно прямой $9x - 3y + 13 = 0$.

Задание 6. Найти пределы функций, используя правило Лопиталя.

1. $\lim\limits_{x\to 2}\frac{2x^2 + x - 10}{x^2 - x - 2}$;
2. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\arcsin 5x}{x}$;
3. $\lim\limits_{x\to 0} x^2 e^{\frac{1}{x}}$;
4. $\lim\limits_{x\to -2}\left(\frac{1}{x+2} - \frac{1}{x^2+5x+6}\right)$;
5. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{e^{4x}+x}{x^3+1}$;
6. $\lim\limits_{x\to\pi}\frac{ctg\frac{x}{2}}{x-\pi}$;
7. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\sin x\right)^{\frac{1}{x-\pi/2}}$;
8. $\lim\limits_{x\to 0}\left(1-8x\right)^{\frac{1}{x}}$.

Задание 7. Найти наименьшее и наибольшее значения функции $y = \arccos x^2$ на промежутке $x \in \left[-\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}\right]$.

Задание 8. Исследовать функции и построить их графики.

1. $y = 3x^3 - \frac{9}{2}x^2$;
2. $y = \frac{1-2x^3}{x^2}$;
3. $y = \left(3x^2+4\right)e^{-x^2}$.

Вариант 5

Задание 1. Вычислить производные заданных функций.

1. $y = 2x^5 - 5x^3 + 2x - 1;$
2. $y = e^{2x} + \arcsin 3x + \dfrac{3}{x^2} + 4;$
3. $y = \dfrac{5e^x}{4x};$
4. $y = e^{3x} \arcsin^3 2x;$
5. $y = \dfrac{1}{2} tg^2 \sqrt{x} + \ln\cos\sqrt{x};$
6. $y = x^2 e^{x^2} \ln x;$
7. $y = \arccos\sqrt{1-2^x};$
8. $y = \log_{x^2} 2;$
9. $y = \dfrac{1}{4a}\ln\dfrac{x-a}{x+a} + \dfrac{1}{2a} arctg\dfrac{x}{a};$
10. $y = \dfrac{2^{3x}}{\arcsin^2 5x}.$

Задание 2. Дифференцирование неявной функции. Логарифмическое дифференцирование. Дифференцирование функции, заданной параметрически.

1. ; $y = (x+1)(2x+1)(3x+1);$
2. $y = \sqrt[x]{x};$
3. $e^y = x + y;$
4. $\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{y^2} = \sqrt[3]{a^2};$
5. $\begin{cases} x = \arccos\dfrac{1}{\sqrt{1+t^2}}, \\ y = \arcsin\dfrac{t}{\sqrt{1+t^2}}. \end{cases}$

Задание 3. Проверить, удовлетворяет ли функция $y = e^{\frac{\pi}{4} - arctgx}$ дифференциальному уравнению $y'(1+x^2) + y = 0$.

Задание 4. Найдите производную функции указанного порядка.

1) $y^{(n)}$, если $y = arcsin(x/2);$ 2) $\dfrac{d^2y}{dx^2}$**,** если $x = cos^2 t,\ y = sin^3 t$.

Задание 5. Составить уравнение касательной, проведенной к кривой $f(x) = \dfrac{1}{6}x^3 - x^2 + 2x + 4,$ параллельно прямой $-2x + 4y + 3 = 0$.

Задание 6. Найти пределы функций, используя правило Лопиталя.

1. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-3x+2}{2x^2-5x+2};$
2. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 4x}{x^e};$
3. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(x^2 e^{-x}\right);$
4. $\lim\limits_{x\to\pi/2}\left(\dfrac{x}{ctgx} - \dfrac{\pi}{2\cos x}\right);$
5. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{e^{4x}+x}{x^3+1};$
6. $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{ctg\dfrac{x}{2}}{x-\pi};$
7. $\lim\limits_{x\to\pi/2}(\sin x)^{\frac{1}{x-\pi/2}};$
8. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{2}{x}\right)^x.$

Задание 7. Найти наименьшее и наибольшее значения функции $y = \dfrac{1}{\cos x}$ в промежутке $x \in \left[\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{3\pi}{2}\right]$.

Задание 8. Исследовать функции и построить их графики.

1. $y = x^3 - 8x^2 + 7x;$ 2. $y = \dfrac{x}{1+x^2};$ 3. $y = e^{-\frac{5}{x-3}}.$

Вариант 6

Задание 1. Вычислить производные заданных функций.

1. $y=5x^6-3x^4+2x^2+5;$
2. $y=6e^{2x}+\arccos 2x+\dfrac{1}{x^3}+2;$
3. $y=\dfrac{3e^{5x}}{x^2+\cos 2x};$
4. $y=x^3 arctgx;$
5. $y=\dfrac{\sin x-\cos x}{\sin x+\cos x}+2^{3x};$
6. $y=\left(\sin\dfrac{x}{2}-\cos\dfrac{x}{2}\right)^2;$
7. $y=\ln tg\dfrac{2x+1}{4};$
8. $y=tg2x+\dfrac{2}{3}tg^3 2x+\dfrac{1}{5}tg^5 2x;$
9. $y=x\arccos\dfrac{x}{2}-\sqrt{4-x^2};$
10. $y=3x^3\ln x-x^3.$

Задание 2. Дифференцирование неявной функции. Логарифмическое дифференцирование. Дифференцирование функции, заданной параметрически.

1. $y=\dfrac{(x+2)^2}{(x+1)^3(x+3)^4};$
2. $y=x^{\sqrt{x}};$
3. $\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{a};$
4. $\ln x+e^{-\frac{y}{x}}=c;$
5. $\begin{cases} x=\dfrac{2at}{1+t^2}, \\ y=\dfrac{a(1-t^2)}{1+t^2}. \end{cases}$

Задание 3. Проверить, удовлетворяет ли функция $y=x\sin x$ дифференциальному уравнению $xy'-y=x^2\cos x$.

Задание 4. Найдите производную функции указанного порядка.

1) $y^{(n)}$, если $y=xe^x;$ 2) $\dfrac{d^2y}{dx^2}$, если $x=lnt,\ y=t^2-1.$

Задание 5. Составить уравнение касательной, проведенной к кривой $f(x)=2x^3+6x^2-12x-23,$ параллельно прямой $12x-2y+11=0$.

Задание 6. Найти пределы функций, используя правило Лопиталя.

1. $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{2x^2-9x+4}{x^2+x-20};$
2. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{arctgx}{arctg2x};$
3. $\lim\limits_{x\to -2}\left(\dfrac{1}{x+2}-\dfrac{1}{x^2+x-2}\right);$
4. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^3+7x+e^x}{x^2+3};$
5. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\cos 2x}{\sin 2x};$
6. $\lim\limits_{x\to\pi/4}\left(ctgx^{\frac{1}{x-\pi/4}}\right);$
7. $\lim\limits_{x\to 0}(1-9x)^{\frac{1}{x}};$
8. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{e^x+4x}{x^3-x^2}.$

Задание 7. Найти наименьшее и наибольшее значения функции $y=x^6-5x^4+5x^3-1$ в промежутке $x\in[0;2]$.

Задание 8. Исследовать функции и построить их графики.

1. $y=x^3-3x-2;$
2. $y=\dfrac{4x}{4+x^2};$
3. $y=\ln(x^2-4x+5).$

Вариант 7

Задание 1. Вычислить производные заданных функций.

1. $y=-5x^3+4x^2+3x+5$;
2. $y=e^{2x}+\arcsin 2x+\dfrac{5}{x}+2x$;
3. $y=\dfrac{e^{5x}}{x^3+\sin 2x}$;
4. $y=(x^3+2x)arctg4x$;
5. $y=\ln\left(2x^3+3x^2\right)$;
6. $y=\sqrt{x}\arcsin\sqrt{x}+\sqrt{1-x}$;
7. $y=\ln\sqrt{\dfrac{1+\sin x}{1-\sin x}}$;
8. $y=\ln(\ln x)\cdot(\ln\ln\ln x-1)$;
9. $y=\dfrac{e^x 2^{5x}}{3^{4x}}$;
10. $y=\ln\sqrt{\dfrac{1+\sin x}{1-\sin x}}$.

Задание 2. Дифференцирование неявной функции. Логарифмическое дифференцирование. Дифференцирование функции, заданной параметрически.

1. $y=x^{\sin x}$;
2. $y=\dfrac{\sqrt{x-1}}{\sqrt[3]{x-1}\cdot\sqrt[3]{(x+2)^5}\cdot\sqrt{x+3}^5}$;
3. $\ln y+\dfrac{x}{y}=c$;
4. $y^3=\dfrac{x-y}{x+y}$;
5. $\begin{cases} x=\dfrac{\cos^3 t}{\sqrt{\cos 2t}}, \\ y=\dfrac{\sin^3 t}{\sqrt{\cos 2t}}. \end{cases}$

Задание 3. Проверить, удовлетворяет ли функция $y=0,5e^{-x^2}\left(x^2+2\right)$ дифференциальному уравнению $y'+2xy=xe^{-x^2}$.

Задание 4. Найдите производную функции указанного порядка.

1) $y^{(n)}$, если $y=sin\,ax+cos\,fx$;   2) $\dfrac{d^2y}{dx^2}$, если $x=a\,cos^3 t,\ y=a\,sin^2 t$.

Задание 5. Составить уравнение касательной, проведенной к кривой $f(x)=x^3-\dfrac{15}{2}x^2+9x-10$, параллельно прямой $18x+2y+15=0$.

Задание 6. Найти пределы функций, используя правило Лопиталя.

1. $\lim\limits_{x\to-4}\dfrac{x^2+x-12}{x^2+2x-8}$;
2. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{tg2x}{\sin 4x}$;
3. $\lim\limits_{x\to2}(2-x)tg\dfrac{\pi x}{4}$;;
4. $\lim\limits_{x\to1}\left(\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{1}{(x-2)(x-1)}\right)$;
5. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{e^{3x}+5}{2x^2}$;
6. $\lim\limits_{x\to\pi/4}\dfrac{\sin 2x-\cos 2x-1}{\sin x-\cos x}$;
7. $\lim\limits_{x\to1}\left(x^{\frac{1}{x-1}}\right)$;
8. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{4}{x}\right)^x$.

Задание 7. Найти наименьшее и наибольшее значения функции $y=x+\dfrac{1}{x}$ на промежутке $x\in[0,01;100]$.

Задание 8. Исследовать функции и построить их графики.

1. $y=2x^3+3x^2+x-6$;   2 $y=\dfrac{4x^2-9}{2x^3}$;   3 $y=x-\ln(x+9)$.

Вариант 8

Задание 1. Вычислить производные заданных функций.

1. $y=-\dfrac{3x^8}{7}+5x^7-4x^6+1$;
2. $y=-e^{-x}+\cos 3x+\dfrac{5}{x^2}+x$;
3. $y=\dfrac{arctg 5x}{x^5+10x}$;
4. $y=(x^3+3)\arccos^2 6x$;
5. $y=\ln\left(3x^2+\sqrt{9x^2+1}\right)$;
6. $y=\dfrac{x-e^{2x}}{x+e^{2x}}$;
7. $y=2xtg2x+\ln\cos 2x-2x^2$;
8. $y=2^{\cos^3 x-3\cos x}$;
9. $y=\dfrac{\ln x}{x^5}+\dfrac{1}{5x^5}$;
10. $y=\dfrac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2}+\dfrac{a^2}{2}\arcsin\dfrac{x}{a}$.

Задание 2. Дифференцирование неявной функции. Логарифмическое дифференцирование. Дифференцирование функции, заданной параметрически.

1. $y=\left(\cos x\right)^{\sin x}$;
2. $y=\dfrac{2^x\left(x+1\right)^3}{\left(x-1\right)^2\sqrt{2x+1}}$;
3. $arctg\dfrac{y}{x}=\dfrac{1}{2}\ln\left(x^2+y^2\right)$;
4. $y-0,3\sin y=x$;
5. $\begin{cases} x=e^{-t}, \\ y=e^{2t}. \end{cases}$

Задание 3. Проверить, удовлетворяет ли функция $y=\cos x(x+2)$ дифференциальному уравнению $y'\cos x+y=1-\sin x$.

Задание 4. Найдите производную функции указанного порядка.

1) $y^{(n)}$, если $y=1/(ax+b)$;

2) $\dfrac{d^2y}{dx^2}$, если $x=a\,cos^3 t,\ y=a\,sin^3 t$.

Задание 5. Составить уравнение касательной, проведенной к кривой $f\left(x\right)=-\dfrac{x^3}{6}-\dfrac{x^2}{2}+x+10,$ параллельно прямой $2x+4y+7=0$.

Задание 6. Найти пределы функций, используя правило Лопиталя.

1. $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{x^2+x}{x^2+2x+1}$;
2. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin 5x}{x}$;
3. $\lim\limits_{x\to4}\left(4-x\right)tg\dfrac{\pi x}{8}$;
4. $\lim\limits_{x\to3}\left(\dfrac{1}{x-3}-\dfrac{5}{x^2-x-6}\right)$;
5. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{e^x+x}{x^3}$;
6. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^x-e^{-x}}{\sin x\cos x}$;
7. $\lim\limits_{x\to\pi/2}\left(tg\dfrac{x}{2}\right)^{\frac{1}{x-\pi/2}}$;
8. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{5}{x}\right)^x$.

Задание 7. Найти наименьшее и наибольшее значения функции $y=x+\sqrt[3]{x-1}$ на промежутке $x\in\left[0;9\right]$.

Задание 8. Исследовать функции и построить их графики.

1. $y=x^3-6x^2+9x-4$;
2. $y=\dfrac{1}{x}+4x^2$;
3. $y=3xe^{-\frac{3x^2}{4}}$.

Вариант 9

Задание 1. Вычислить производные заданных функций.

1. $y=2x^3+x^2-7x+10$;
2. $y=4e^{-x}+8\cos x+\dfrac{1}{x^7}+5$;
3. $y=\dfrac{4arctg^4 5x}{5x^5+4x}$;
4. $y=xarctg\sqrt{4x^2-1}$;
5. $y=\ln\left(3x^2+\sqrt{9x^2+1}\right)$;
6. $y=e^x-\sqrt{1-e^{2x}}-\arcsin e^x$;
7. $y=-2\cos 2x+5\ln 3x-2x^2-4$;
8. $y=\dfrac{(1+\ln\cos x)}{\sin x}$;
9. $y=\ln tg\dfrac{e^{\sin x}}{4}$;
10. $y=x^3\sqrt{1-3x^2}$.

Задание 2. Дифференцирование неявной функции. Логарифмическое дифференцирование. Дифференцирование функции, заданной параметрически.

1. $y=x^{\arcsin x}$;
2. $y=\dfrac{x^2+e^{x^2}}{x^2+1}$;
3. $\sqrt{x^2+y^2}=arctg\dfrac{y}{x}$;
4. $a\cos^2(x+y)=b$;
5. $\begin{cases} x=\dfrac{3at}{1+t^3}, \\ y=\dfrac{3at}{1+t^3}. \end{cases}$

Задание 3. Проверить, удовлетворяет ли функция $y=e^{-x^2}\left(\dfrac{x^2}{2}+1\right)$ дифференциальному уравнению $y'+2xy=xe^{-x^2}$.

Задание 4. Найдите производную функции указанного порядка.

1) $y^{(n)}$, если $y=e^{ax}$;

2) $\dfrac{d^2y}{dx^2}$, если $x=at\,cost,\ y=at\,sint$.

Задание 5. Составить уравнение касательной, проведенной к кривой $f(x)=-\dfrac{2}{3}x^3+4x^2-8x-10$, параллельно прямой $4x+2y+3=0$.

Задание 6. Найти пределы функций, используя правило Лопиталя.

1. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2+x-12}{x^2-5x+6}$;
2. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\sin 2x}{1-\cos x}$;
3. $\lim\limits_{x\to\infty}x\left(e^{\frac{1}{x}}-1\right)$;
4. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\arcsin(3-x)}{\sqrt{x^2-5x+6}}$;
5. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{e^{2x}+x^2}{x^3}$;
6. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\ln(4-x)}{x-3}$;
7. $\lim\limits_{x\to\pi/4}(\sin 2x)^{\frac{1}{x-\pi/4}}$;
8. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{7}{x}\right)^x$.

Задание 7. Найти наименьшее и наибольшее значения функции $y=\dfrac{1-x+x^2}{1+x-x^2}$ на промежутке $x\in[0;1]$.

Задание 8. Исследовать функции и построить их графики.

1. $y=x^3+5x-6$;
2. $y=\dfrac{4x-12}{(x-2)^2}$;
3. $y=\ln\left(x^2-3x\right)$.

Вариант 10

Задание 1. Вычислить производные заданных функций.

1. $y=\cos 5x+\cos 2x-x^2+6x-1$;
2. $y=\dfrac{e^{-x}}{3}+\dfrac{\cos 3x}{5}+\dfrac{tg3x}{2}+x$;
3. $y=\dfrac{4arctg^4 5x}{5x^5+4x}$;
4. $y=\sin x(3x^2+2x-1)$;
5. $y=arctg\dfrac{x}{\sqrt{a^2-x^2}}$;
6. $y=e^x-\sin e^x\cos^3 e^x-\sin^3 e^x\cos e^x$;
7. $y=e^{\sqrt{2x}}\left(\sqrt{2x}-1\right)$;
8. $y=x\left(\ln^3 x-3\ln^2 x+6\ln x-6\right)$;
9. $y=\dfrac{x}{\left(1+\sin x^2\right)^{\frac{1}{2}}}$;
10. $y=\arcsin e^x+\arcsin\sqrt{1-e^{2x}}$.

Задание 2. Дифференцирование неявной функции. Логарифмическое дифференцирование. Дифференцирование функции, заданной параметрически.

1. $y=\left(arctgx\right)^x$;
2. $y=\sqrt[3]{\dfrac{x-5}{\sqrt[3]{x^3+4}}}$;
3. $e^y=x+y$;
4. $\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{y^2}=\sqrt[3]{a^2}$;
5. $\begin{cases} x=\arccos\dfrac{1}{\sqrt{1+t^2}}, \\ y=\arcsin\dfrac{t}{\sqrt{1+t^2}}. \end{cases}$

Задание 3. Проверить, удовлетворяет ли функция $y=e^{\sin x-1}-2$ дифференциальному уравнению $y'=(y+2)\cos x$.

Задание 4. Найдите производную функции указанного порядка.

1) $y^{(n)}$, если $y=x\ln x$;

2) $\dfrac{d^2y}{dx^2}$, если $x=\cos 2t,\ y=\sin 3t$.

Задание 5. Составить уравнение касательной, проведенной к кривой $f(x)=2x^3-3x^2-x+2$, параллельно прямой $9x+9y-7=0$.

Задание 6. Найти пределы функций, используя правило Лопиталя.

1. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^3-3x-2}{x+x^2}$;
2. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}$;
3. $\lim\limits_{x\to 0} tgx\ln x$;
4. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\sin 5x}{ctgx}$;
5. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4e^x+x^2}{x^3}$;
6. $\lim\limits_{x\to\pi/4}\left(tgx\right)^{\frac{1}{x-\pi/4}}$;
7. $\lim\limits_{x\to\pi/4}\dfrac{\sin 2x-1}{\sin x-\cos x}$;
8. $\lim\limits_{x\to 0}\left(1+7x\right)^{\frac{1}{x}}$.

Задание 7. Найти наименьшее и наибольшее значения функции $y=\dfrac{x-1}{x+1}$ на промежутке $x\in[0;4]$.

Задание 8. Исследовать функции и построить их графики.

1. $y=x^3-9x$;
2. $y=\dfrac{8}{x^2-4}$;
3. $y=\dfrac{e^{3x}+e^{-3x}}{6}$.

Вариант 11

Задание 1. Вычислить производные заданных функций.

1. $y=\sin 5x+\cos 2x-x^2-x-1$;
2. $y=e^{-x}+tg6x+\sin\ln x+5x$;
3. $y=\dfrac{2x}{\ln(x+3)}$;
4. $y=\arcsin x(e^x+3x^2+2x-1)$;
5. $y=\ln\left(\sin\sqrt{x}\right)tg\sqrt{x}-\sqrt{x}$;
6. $y=\ln\dfrac{\sqrt{1+x}-1}{\sqrt{1+x}+1}$;
7. $y=3x\sin^3 x+3\cos x-\cos^3 x$;
8. $y=e^{\sqrt{2x}}\left(\sqrt{2x}-1\right)$;
9. $y=\ln\dfrac{x^5}{x^5+2}$;
10. $y=\left(\dfrac{\sin x}{1+\cos x}\right)^2$.

Задание 2. Дифференцирование неявной функции. Логарифмическое дифференцирование. Дифференцирование функции, заданной параметрически.

1. $y=\left(tg2x\right)^{ctgx\frac{x}{2}}$;
2. $y=\dfrac{xe^x arctgx}{\ln^5 x}$;
3. $2^x+2^y=2^{x+y}$;
4. $y=\cos\left(x+y\right)$;
5. $\begin{cases} x=\sqrt{t}, \\ y=\sqrt[3]{t}. \end{cases}$

Задание 3. Проверить, удовлетворяет ли функция $y=\sqrt{e^{-x^2}+4}$ дифференциальному уравнению $x(y^2-4)+yy'=0$.

Задание 4. Найдите производную функции указанного порядка.

1) $y^{(n)}$, если $y=ln(ax+b)$;

2) $\dfrac{d^2y}{dx^2}$, если $x=cost,\ y=sin5t$.

Задание 5. Составить уравнение касательной, проведенной к кривой $f\left(x\right)=-\dfrac{2}{3}x^3-2x^2+4x+3,$ параллельно прямой $8x+4y+11=0$.

Задание 6. Найти пределы функций, используя правило Лопиталя.

1. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2x^2+5x-7}{3x^2-x-2}$;
2. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\sin x}{1-\cos 6x}$;
3. $\lim\limits_{x\to 0}\left(xctg4x\right)$;
4. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\ln x}{x^2}$;
5. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{2x}+6x}{x^2}$;
6. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2e^x-2}{x^2}$;
7. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\cos x\right)^{\frac{1}{x}}$;
8. $\lim\limits_{x\to 0}\left(1-3x\right)^{\frac{1}{x}}$.

Задание 7. Найти наименьшее и наибольшее значения функции $y=2x^3+3x^2-12x+1$ на промежутке $x\in\left[-1;5\right]$.

Задание 8. Исследовать функции и построить их графики.

1. $y=4x^3-12x+8$;
2. $y=\dfrac{x^4+3}{2x^2}$;
3. $y=xe^{-x}$.

Вариант 12

Задание 1. Вычислить производные заданных функций.

1. $y=-2x^{202}-20x^{20}-2x^2$;
2. $y=arctg^2 3x+\dfrac{5}{\ln 5x}-2x^{30}+x^{-2}$;
3. $y=\dfrac{e^{x+3}}{arctgx}$;
4. $y=\arcsin x\sqrt{1-x^2}$;
5. $y=\left(x^5+3\right)\left(\ln\left(x^5+3\right)-1\right)$;
6. $y=\arcsin\sqrt{1-\dfrac{x^2}{5}}$;
7. $y=\left(x^5+3\right)\left(\ln\left(x^5+3\right)-1\right)$;
8. $y=-\dfrac{1}{\cos^2\dfrac{x}{2}}$;
9. $y=\dfrac{2\ln^2\sin x+3}{\left(2\ln^2\sin x-3\right)^2}$;
10. $y=-\ln\left(\cos x+ctgx\right)$.

Задание 2. Дифференцирование неявной функции. Логарифмическое дифференцирование. Дифференцирование функции, заданной параметрически.

1. $y=x^{x^2}$;
2. $y=\dfrac{\left(1-x^2\right)e^{3x-1}\cos x}{\left(\arccos x\right)^3}$;
3. $2y\ln y=x$;
4. $x+arctgy=y$;
5. $\begin{cases} x=\sqrt{t^2+1}, \\ y=\dfrac{t-1}{\sqrt{t^2+1}}. \end{cases}$

Задание 3. Проверить, удовлетворяет ли функция $y=\arccos e^{2x}$ дифференциальному уравнению $\ln\cos y+xy'tgy=0$.

Задание 4. Найдите производную функции указанного порядка.

1) $y^{(n)}$, если $y=e^{-x}$; 2) $\dfrac{d^2y}{dx^2}$, если $x=t^2\,cos\,t,\ y=t\,sin\,t$.

Задание 5. Составить уравнение касательной, проведенной к кривой $f\left(x\right)=-x^3+\dfrac{3}{2}x^2+9x+2,$ параллельно прямой $15x-5y+4=0$.

Задание 6. Найти пределы функций, используя правило Лопиталя.

1. $\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{3x+6}{x^3+8}$;
2. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{tg4x}{\sin x}$;
3. $\lim\limits_{x\to0}\left(xctg5x\right)$;
4. $\lim\limits_{x\to\pi/4}\dfrac{\ln tgx}{x-\pi/4}$;
5. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{e^{3x}+4x}{2x^2-x}$;
6. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{2x}-1}{\arcsin 3x}$;
7. $\lim\limits_{x\to0}\left(\sin x\right)^x$;
8. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{3x}\right)^x$.

Задание 7. Найти наименьшее и наибольшее значения функции $y=4x^6-x^3+3$ на промежутке $x\in\left[0;1\right]$.

Задание 8. Исследовать функции и построить их графики.

1. $y=x^3-2x^2+3x+4$; 2. $y=\dfrac{x^3}{x^3+8}$; 3. $y=x+\ln\left(x^2-4\right)$.

Вариант 13

Задание 1. Вычислить производные заданных функций.

1. $y=-2\sqrt{x}-3\sqrt[3]{x}-2\sqrt[4]{x}$;
2. $y=arctg^2\dfrac{x}{3}+\dfrac{1}{\ln x}-x+x^{-2}$;
3. $y=\dfrac{5e^{x+3}}{ctgx}$;
4. $y=1-e^{\sin^2 3x}\cos^2 3x$;
5. $y=\arcsin\dfrac{\sin x}{\sqrt{1+\sin^2 x}}$;
6. $y=arctg\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}$;
7. $y=\left(x^5+3\right)\left(\ln\left(x^5+3\right)-1\right)$;
8. $y=\arccos\dfrac{9-x^2}{9+x^2}$;
9. $y=e^{-x}-\sin\left(e^{-x}\right)\cos\left(e^{-x}\right)$;
10. $y=-ctg^2\dfrac{x}{2}-2\ln\sin\dfrac{x}{2}$.

Задание 2. Дифференцирование неявной функции. Логарифмическое дифференцирование. Дифференцирование функции, заданной параметрически.

1. $y=x\sqrt{x^2+1}\cdot\sin x$;
2. $y=\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x$;
3. $y=1+xe^x$;
4. $x\sin y-\cos y+\cos 2y=0$;
5. $\begin{cases} x=a\left(\cos t+t\sin t\right), \\ y=a\left(\sin t-t\cos t\right). \end{cases}$

Задание 3. Проверить, удовлетворяет ли функция $y=\sqrt{2-2x^2}$ дифференциальному уравнению $2x+yy'=0$.

Задание 4. Найдите производную функции указанного порядка.

1) $y^{(n)}$, если $y=log_a x$;

2) $\dfrac{d^2y}{dx^2}$, $x=3^t$, $y=t^3\,ln3$.

Задание 5. Составить уравнение касательной, проведенной к кривой $f\left(x\right)=\dfrac{2}{3}x^3-4x^2+8x+10$, параллельно прямой $6x-3y-1=0$.

Задание 6. Найти пределы функций, используя правило Лопиталя.

1. $\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{x^2+x-2}{x^2-x-6}$;
2. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\arcsin 4x}{x}$;
3. $\lim\limits_{x\to0}\left(x^2\ln x\right)$;
4. $\lim\limits_{x\to\pi/4}\dfrac{\ln\sin 2x}{x-\pi/4}$;
5. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x}{\ln\left(1+x\right)}$;
6. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^x+e^{-x}-2}{1-\cos 2x}$;
7. $\lim\limits_{x\to0}x^{\sin x}$;
8. $\lim\limits_{x\to0}\left(1+5x\right)^{\frac{1}{x}}$.

Задание 7. Найти наименьшее и наибольшее значения функции $y=\sqrt[3]{x^2}-x$ на промежутке $x\in\left[0;1\right]$.

Задание 8. Исследовать функции и построить их графики.

1. $y=x^3-3x^2$;
2. $y=\dfrac{x^3}{\left(x^2-4\right)}$;
3. $y=\ln\dfrac{x}{x-1}$.

Вариант 14

Задание 1. Вычислить производные заданных функций.

1. $y=-\sin 2x+\dfrac{\ln x}{3}-x^3-x^2;$

2. $y=\sqrt{x+3}+\sqrt[3]{x-4}-x+x^{-1};$

3. $y=\dfrac{5tg\,2x}{\arccos x};$

4. $y=x\ln\left(3x^2\right);$

5. $y=\dfrac{1}{64}\left(tg^4\dfrac{x}{2}-ctg^4\dfrac{x}{2}\right)+\dfrac{1}{8}\left(tg^3\dfrac{x}{2}-ctg^2\dfrac{x}{2}\right);$

6. $y=-\dfrac{2\cos\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}+3\cos\frac{x}{2}};$

7. $y=\arccos\left(2e^{2x}-1\right);$

8. $y=\operatorname{arc}tg\dfrac{3x-x^3}{1-3x^2};$

9. $y=\dfrac{a}{2}\sin^2 x+\dfrac{b}{2}\cos^2 x-\dfrac{a+b}{4}\cos 2x;$

10. $y=\ln\left(1-\dfrac{1}{x}\right)+\dfrac{1}{x}.$

Задание 2. Дифференцирование неявной функции. Логарифмическое дифференцирование. Дифференцирование функции, заданной параметрически.

1. $y=\left(\cos x\right)^{\sin x};$

2. $y=\dfrac{\sqrt{x+2}\left(3-x\right)^4}{\left(x+1\right)^5};$

3. $tg\dfrac{y}{2}=\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}\cdot tg\dfrac{x}{2};$

4. $y\sin x-\cos\left(x-y\right)=0;$

5. $\begin{cases}x=\ln\left(1+t^2\right),\\ y=t-arctgt.\end{cases}$

Задание 3. Проверить, удовлетворяет ли функция $y=e^{tg\frac{x}{2}}$ дифференциальному уравнению $y'\sin x=y\ln y$.

Задание 4. Найдите производную функции указанного порядка.

1) $y^{(n)}$, если $y=(log_a x)^2;$

2) $\dfrac{d^2y}{dx^2}$, если $x=cost-sint,\ y=sint+cost$.

Задание 5. Составить уравнение касательной, проведенной к кривой $f\left(x\right)=\dfrac{1}{3}x^3-2x^2+5x$, параллельно прямой $6x-3y-11=0$.

Задание 6. Найти пределы функций, используя правило Лопиталя**.**

1. $\lim\limits_{x\to-3}\dfrac{x^2+x-6}{2x^2-x-21};$

2. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin 3x}{\sin 5x};$

3. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(x\sin\dfrac{9}{x}\right);$

4. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln tgx}{x};$

5. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{e^x+4}{x^3};$

6. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{2x}-1}{\sin x};$

7. $\lim\limits_{x\to0}x^{3tgx};$

8. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-4x\right)^{\frac{1}{x}}.$

Задание 7. Найти наименьшее и наибольшее значения функции $y=x^3e^{-x}$ на промежутке $x\in\left[-1;4\right]$.

Задание 8. Исследовать функции и построить их графики.

1. $y=\left(x-1\right)^2\left(x+2\right);$

2. $y=\dfrac{x^2+2x-3}{x-5};$

3. $y=xe^{2x-1}.$

Вариант 15

Задание 1. Вычислить производные заданных функций.

1. $y = x^4 + \sin 3x - \cos 4x + \sin \pi$;
2. $y = x^{\frac{1}{3}} + x^{\frac{2}{5}} - 2x + x^{-1} + 3$;
3. $y = \dfrac{x^5}{4 + x^4}$;
4. $y = (x+3)\ln\sqrt{9x^4 + 1}$;
5. $y = \dfrac{1}{2} tg^2 \sin x + \ln\cos(\sin x)$;
6. $y = \ln\dfrac{\sqrt{x^2 + 2x}}{x+1}$;
7. $y = \left(1 + \sqrt[3]{x}\right)^3$;
8. $y = 3\cos^2 x - \cos^3 x$;
9. $y = 5tg\dfrac{x}{5} + tg\dfrac{\pi}{8}$;
10. $y = \sin x \cdot e^{\cos x}$.

Задание 2. Дифференцирование неявной функции. Логарифмическое дифференцирование. Дифференцирование функции, заданной параметрически.

1. $y = \sqrt{x \sin x \sqrt{1 - e^x}}$;
2. $y = \left(x^2 + 1\right)^{\sin x}$;
3. $x^3 + y^3 - 3axy = 0$;
4. $x - y = \arcsin x - \arcsin y$;
5. $\begin{cases} x = \ln\left(1 + t^2\right), \\ y = t - arctgt. \end{cases}$

Задание 3. Проверить, удовлетворяет ли функция $y = \sqrt{3 - 3x^2}$ дифференциальному уравнению $3x + yy' = 0$.

Задание 4. Найдите производную функции указанного порядка.

1) $y^{(n)}$, если $y = a^{2x}$;

2) $\dfrac{d^2 y}{dx^2}$, если $x = \pi \, arcsin\, 2t,\ y = arccos\, 2t$.

Задание 5. Составить уравнение касательной, проведенной к кривой $f(x) = -2x^3 - 3x^2 + 6x - 5$, параллельно прямой $12x + 2y + 15 = 0$.

Задание 6. Найти пределы функций, используя правило Лопиталя.

1. $\lim\limits_{x \to 1/2} \dfrac{8x^3 - 1}{6x^2 - 5x + 1}$;
2. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x}{\sin 3x}$;
3. $\lim\limits_{x \to 0} \left(\sqrt[4]{x} \ln x\right)$;
4. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln\cos x}{2x}$;
5. $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{e^{4x} - x}{x^2}$;
6. $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^2 - \sqrt{8x}}{x - 2}$;
7. $\lim\limits_{x \to \pi/2} (\sin x)^{tgx}$;
8. $\lim\limits_{x \to 0} (1 + 2x)^{\frac{1}{x}}$.

Задание 7. Найти наименьшее и наибольшее значения функции $y = xe^{-x^2/2}$ в промежутке $x \in [-2; 2]$.

Задание 8. Исследовать функции и построить их графики.

1. $y = \dfrac{(x-2)^2 (x+4)}{4}$;
2. $y = \dfrac{x^3}{8 - x^3}$;
3. $y = \ln\left(x^2 + 2x + 2\right)$.

Вариант 16

Задание 1. Вычислить производные заданных функций.

1. $y=0,5x^2+\dfrac{\sin^2 x}{5}-\dfrac{1}{2}\arccos 4x+10$;
2. $y=x^2+\sqrt{\dfrac{1}{x}}-\dfrac{2}{x}+\dfrac{1}{x^3}+4$;
3. $y=\dfrac{\cos 5x}{\sqrt{x+2}}$;
4. $y=(x^2+3x)\sin 3x$;
5. $y=\dfrac{1}{\sqrt[3]{x+\sqrt{x}}}$;
6. $y=e^{-x^2}\ln x$;
7. $y=arctg\dfrac{x+1}{x-1}$;
8. $y=\dfrac{tg\dfrac{x}{2}+ctg\dfrac{x}{2}}{x}$;
9. $y=\cos 2x+\ln x$;
10. $y=\lg\left(x-\cos x\right)$.

Задание 2. Дифференцирование неявной функции. Логарифмическое дифференцирование. Дифференцирование функции, заданной параметрически.

1. $y=2x^{\sqrt{x}}$;
2. $y=\sqrt{\dfrac{1-\arcsin x}{1+\arcsin x}}$;
3. $x^7+y^7=x^2y^2$;
4. $\sin\left(xy\right)+\cos\left(xy\right)=tg\left(x+y\right)$;
5. $\begin{cases} x=e^t\sin t, \\ y=e^t\cos t. \end{cases}$

Задание 3. Проверить, удовлетворяет ли функция $y=\sin x+\cos x$ дифференциальному уравнению $y'+y-2\cos x=0$.

Задание 4. Найдите производную функции указанного порядка.

а) $y=(1+x)^m$, $y^{(n)}-?$; б) $x=arctg2t, y=arcctg2t$, $\dfrac{d^2y}{dx^2}-?$

Задание 5. Составить уравнение касательной, проведенной к кривой $f\left(x\right)=-\dfrac{1}{3}x^3-x^2+2x+1,$ параллельно прямой $7x+7y-4=0$.

Задание 6. Найти пределы функций, используя правило Лопиталя.

1. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{3x^2-x-2}{3x^2-4x+1}$;
2. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{arctg5x}{x}$;
3. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(xtg\dfrac{9}{x}\right)$;
4. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\cos x}{\sin x}$;
5. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2+5e^x}{2x^2+6}$;
6. $\lim\limits_{x\to 0}ctgx\ln\left(x+e^x\right)$;
7. $\lim\limits_{x\to 0}\left(tgx\right)^x$;
8. $\lim\limits_{x\to 0}\left(1+4x\right)^{\frac{1}{x}}$.

Задание 7. Найти наименьшее и наибольшее значения функции $y=\dfrac{4-x^2}{4+x^2}$ в промежутке $x\in\left[-1;3\right]$.

Задание 8. Исследовать функции и построить их графики.

1. $y=\left(x-2\right)\left(x-1\right)\left(x+1\right)$;
2. $y=\dfrac{x^3}{x^2-4}$;
3. $y=\ln\dfrac{x-1}{x-2}$.

Вариант 17

Задание 1. Вычислить производные заданных функций.

1. $y=0,5x^2+\dfrac{\sin^2 x}{5}-\dfrac{1}{2}\arccos 4x+10$;
2. $y=x^3+\log_3 x-e^{2x}+\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{x}-1$;
3. $y=\dfrac{\ln 4x}{arctg\,4x}$;
4. $y=(x^2-5x+2)tg3x$;
5. $y=\ln\left(x-\cos x\right)$;
6. $y=\dfrac{1}{\sqrt{3}}arctg\dfrac{x\sqrt{3}}{1-x^2}$;
7. $y=\sin^2\dfrac{x}{3}ctg\dfrac{x}{2}$;
8. $y=\ln\left(x+\sqrt{a^2+x^2}\right)$;
9. $y=\dfrac{\sqrt[3]{4x^5+2}}{3x^4}$;
10. $y=x\sqrt{arctgx}$.

Задание 2. Дифференцирование неявной функции. Логарифмическое дифференцирование. Дифференцирование функции, заданной параметрически.

1. $y=\left(\ln x\right)^x$;
2. $y=x^3e^x\sin 2x$;
3. $y^3-3y^2+2ax=0$;
4. $\cos\left(xy\right)=x$;
5. $\begin{cases}x=1-t^2,\\ y=t-t^3.\end{cases}$

Задание 3. Проверить, удовлетворяет ли функция $y=2\sqrt{1-x^2}$ дифференциальному уравнению $4x+yy'=0$.

Задание 4. Найдите производную функции указанного порядка.

1) $y^{(n)}$, если $y=2x/(x^2-1)$;

2) $\dfrac{d^2y}{dx^2}$, если $x=e^{2t}$, $y=e^{3t}$.

Задание 5. Составить уравнение касательной, проведенной к кривой $f\left(x\right)=-\dfrac{x^3}{3}+6x^2+12x+12,$ параллельно прямой $6x-6y-2=0$.

Задание 6. Найти пределы функций, используя правило Лопиталя.

1. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^3-3x-2}{x^2-x-2}$;
2. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{2x}-1}{\sin x}$;
3. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(x^4e^{-x}\right)$;
4. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln tg3x}{\ln\sin 6x}$;
5. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{e^{5x}+x}{x^2-1}$;
6. $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{e^x-e^4}{x-4}$;
7. $\lim\limits_{x\to\pi/4}\left(tgx\right)^{tg2x}$;
8. $\lim\limits_{x\to 0}\left(1-x\right)^{\frac{1}{x^2+2x}}$.

Задание 7. Найти наименьшее и наибольшее значения функции $y=x^3\cdot\sqrt[3]{\left(x-1\right)^2}$ на промежутке $x\in\left[-2;2\right]$.

Задание 8. Исследовать функции и построить их графики.

1. $y=x^3+3x^2$;
2. $y=\sqrt[3]{1-x^3}$;
3. $y=\left(2x-3\right)e^{-\frac{x}{2}}$.

Вариант 18

Задание 1. Вычислить производные заданных функций.

1. $y = x^2 + 2x + 3 + \frac{5}{x} - \frac{3}{x^2}$;
2. $y = 5x^3 + 2\log_3 x + \cos\frac{\pi x}{2} + \frac{1}{x^2} - 2x$;
3. $y = \frac{\log_3 x}{x+2}$;
4. $y = \ln(x^4 + x^2)\cos 3x$;
5. $y = \sqrt{1 + tg^2 x + tg^4 x}$;
6. $y = \frac{1}{18}\sin^6 3x - \frac{1}{24}\sin^8 3x$;
7. $y = \log_3\left(x^2 - \sin x\right)$;
8. $y = tg\,\frac{1-e^x}{1+e^x}$;
9. $y = x \cdot 10^{\sqrt{x}}$;
10. $y = \ln arctg\,\frac{1}{1+x}$.

Задание 2. Дифференцирование неявной функции. Логарифмическое дифференцирование. Дифференцирование функции, заданной параметрически.

1. $y = x^{x^3}$;
2. $x \cdot \sqrt[3]{\frac{x^2}{x^2+1}} = y$;
3. $tgy = xy$;
4. $x^3 + x^2 y + y^2 = 0$;
5. $\begin{cases} x = t^3 + 3t^2 + 1, \\ y = 3t^5 + 5t^3 + 1. \end{cases}$

Задание 3. Проверить, удовлетворяет ли функция $y = \frac{c}{\cos x}$ дифференциальному уравнению $y' - tgx \cdot y = 0$.

Задание 4. Найдите производную функции указанного порядка.

1) $y^{(n)}$, если $y = x/(x^2 - 1)$; 2) $\frac{d^2 y}{dx^2}$, если $x = a(\sin t - t\cos t),\ y = a(\cos t + t\sin t)$.

Задание 5. Составить уравнение касательной, проведенной к кривой $f(x) = \frac{2}{3}x^3 + 2x^2 - 4x - 5,$ параллельно прямой $10x - 5y + 13 = 0$.

Задание 6. Найти пределы функций, используя правило Лопиталя.

1. $\lim\limits_{x\to -4}\frac{x^2 + x - 12}{x^2 + 2x - 8}$;
2. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{xtgx}$;
3. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x\ln(1+x)}$;
4. $\lim\limits_{x\to 0} xe^{\frac{1}{x}}$;
5. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{e^x - x}{x^2}$;
6. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln\cos 6x}{x}$;
7. $\lim\limits_{x\to 0}(1-4x)^{\frac{1}{x}}$;
8. $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{\sin x}}$.

Задание 7. Найти наименьшее и наибольшее значения функции $y = x^3 \cdot \sqrt[3]{(x-1)^2}$ на промежутке $x \in [-2; 2]$.

Задание 8. Исследовать функции и построить их графики.

1. $y = (x+1)(x+2)(x+3)$; 2. $y = \frac{x^2 - 5x + 6}{x+2}$; 3. $y = \ln\left(2x^2 + 3\right)$.

Вариант 19

Задание 1. Вычислить производные заданных функций.

1. $y=\sqrt{x^3}+2\sin x+3\cos 2x+\ln x-5x$;
2. $y=x^2+2\log_3 x+\sin x+2x$;
3. $y=\dfrac{\sqrt{x}}{x^2+2}$;
4. $y=arctg(x+2)\sin\dfrac{x}{2}$;
5. $y=x-\sqrt{1-x^2}\cdot\arcsin x$;
6. $y=\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}$;
7. $y=\sin^2\left(\dfrac{1-\ln x}{x}\right)$;
8. $y=\cos x\cdot\sqrt{1+\sin^2 x}$;
9. $y=e^{\frac{1}{\ln x}}$;
10. $y=\ln\dfrac{1-e^x}{e^x}$.

Задание 2. Дифференцирование неявной функции. Логарифмическое дифференцирование. Дифференцирование функции, заданной параметрически.

1. $y=x^{-x}\cdot 5^x\cdot x^3$;
2. $y=\dfrac{(x-2)^{10}}{\sqrt{(x-1)^5(x-3)^{11}}}$;
3. $\dfrac{y}{x}+e^{\frac{y}{x}}-\sqrt[3]{\dfrac{y}{x}}=0$;
4. $arctg\left(x+y\right)=x$;
5. $\begin{cases} x=a\cos^3 t, \\ y=b\sin^3 t. \end{cases}$.

Задание 3. Проверить, удовлетворяет ли функция $y=-x\cos x+5x$ дифференциальному уравнению $xy'=y+x^2\sin x$.

Задание 4. Найдите производную функции указанного порядка.

1) $y^{(n)}$, если $y=2\,sin\,x$;

2) $\dfrac{d^2y}{dx^2}$, если $x=e^t$, $y=arc\,sin\,t$.

Задание 5. Составить уравнение касательной, проведенной к кривой $f\left(x\right)=x^3-6x^2+12x-12,$ параллельно прямой $6x-2y+5=0$.

Задание 6. Найти пределы функций, используя правило Лопиталя.

1. $\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{x^2+x-2}{x^2+2x}$;
2. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tg4x}{x}$;
3. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x}\ln x\right)$;
4. $\lim\limits_{x\to 1}\left(\ln x-\ln\left(x-1\right)\right)$;
5. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{e^{\frac{x}{2}}+x}{4x^2-1}$;
6. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x^2}-1}{\cos x-1}$;
7. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\cos 2x\right)^{\frac{1}{x^2}}$;
8. $\lim\limits_{x\to 0}\left(1-9x\right)^{\frac{1}{x}}$.

Задание 7. Найти наименьшее и наибольшее значения функции $y=2\sin x-\sin 2x$ на промежутке $x\in\left[0;\dfrac{3\pi}{2}\right]$.

Задание 8. Исследовать функции и построить их графики.

1. $y=3x^3+6x^2$;
2. $y=\dfrac{x}{\left(x-1\right)^2}$;
3. $y=\ln\left(x^2+5x\right)$.

Вариант 20

Задание 1. Вычислить производные заданных функций:

1. $y=(x+2)^2+2(3x+3)-4x+5$;
2. $y=\sqrt{4x-7}+2\sin 3x+3tg\,4x+e^x-3x$;
3. $y=\dfrac{\sin x}{x^3+2}$;
4. $y=x\arccos\sqrt{1-3x}$;
5. $y=\ln\dfrac{x+\sqrt{1-x^2}}{x}$;
6. $y=\ln\dfrac{x+\sqrt{1-x^2}}{x}$;
7. $y=0,4\left(\cos\dfrac{2x+1}{2}-\sin 0,8x\right)^2$;
8. $y=\sqrt[3]{1+x\sqrt{x+3}}$;
9. $y=\dfrac{\ln\sin x}{\ln\cos x}$;
10. $y=2^{\frac{x}{\ln x}}$.

Задание 2. Дифференцирование неявной функции. Логарифмическое дифференцирование. Дифференцирование функции, заданной параметрически.

1. $y=(\cos x)^{\sin x}$;
2. $y=\dfrac{(x+2)^2}{(x+1)^3(x+3)^4}$;
3. $e^y=x+y$;
4. $arctg\dfrac{y}{x}=\dfrac{1}{2\ln\left(x^2+y^2\right)}$;
5. $\begin{cases} x=\dfrac{\cos^2 t}{\sqrt{\cos 2t}}, \\ y=\dfrac{\sin^3 t}{\sqrt{\cos 2t}}. \end{cases}$

Задание 3. Проверить, удовлетворяет ли функция $y=tgx-1+e^{-tgx}$ дифференциальному уравнению $y'\cos^2 x+y=tgx$.

Задание 4. Найдите производную функции указанного порядка.

1) $y^{(n)}$, если $y=ln(x+1)$; 2) $\dfrac{d^2y}{dx^2}$, если $x=e^t\,cost,\ y=e^t\,sint$.

Задание 5. Составить уравнение касательной, проведенной к кривой $f(x)=x^3-\dfrac{3}{2}x^2-3x+5,$ параллельно прямой $15x-5y-1=0$.

Задание 6. Найти пределы функций, используя правило Лопиталя.

1. $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x^2-5x+4}{x^2-2x-8}$;
2. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 10x}{x^2}$;
3. $\lim\limits_{x\to 0}(\sin x\ln x)$;
4. $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{x}{x-1}-\dfrac{1}{\ln x}\right)$;
5. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^4}{e^x}$;
6. $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{e^x-e^a}{x-a}$;
7. $\lim\limits_{x\to 1}(1-x)^{\cos\frac{\pi x}{2}}$;
8. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x}\right)^{tgx}$.

Задание 7. Найти наименьшее и наибольшее значения функции $y=3x^4-16x^3+2$ на промежутке $x\in[-3;1]$.

Задание 8. Исследовать функции и построить их графики.

1. $y=x^3-4x$;
2. $y=\dfrac{x^4}{x^3-27}$;
3. $y=\dfrac{e^x}{e^x-1}$.

Вариант 21

Задание 1. Вычислить производные заданных функций:

1. $y=(3x+2)^3+2(3x-1)^2-x+7$;
2. $y=e^{\frac{x}{2}}+2\sin 2x-3ctg4x-3^x$;
3. $y=\dfrac{3+4x}{\arcsin 2x}$;
4. $y=x^3arctgx$;
5. $y=\arcsin x+\sqrt{1-x^2}$;
6. $y=\ln\dfrac{1}{x+\sqrt{x^2-1}}$;
7. $y=x^2\sqrt{1+\sqrt{x}}$;
8. $y=\sqrt[3]{\ln x+\sqrt{x+3}}$;
9. $y=\sin^2 x\cdot\sin x^2$;
10. $y=e^{\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}}$.

Задание 2. Дифференцирование неявной функции. Логарифмическое дифференцирование. Дифференцирование функции, заданной параметрически.

1. $y=\sqrt[x]{(x-3)}$;
2. $y=\dfrac{\sqrt{x-1}}{\sqrt[3]{(x+2)^2}\sqrt{(x+3)^3}}$;
3. $\ln y+\dfrac{x}{y}=c$;
4. $y=0,5\sin y+x$;
5. $\begin{cases} x=e^{-2t}, \\ y=e^{2t}. \end{cases}$

Задание 3. Проверить, удовлетворяет ли функция $y=e^{1-arctgx}$ дифференциальному уравнению $y'(1+x^2)+y=0$.

Задание 4. Найдите производную функции указанного порядка.

1) $y^{(n)}$, если $y=cos^2 x$;   2) $\dfrac{d^2y}{dx^2}$, если $x=lnt,\ y=t^3$.

Задание 5. Составить уравнение касательной, проведенной к кривой $f(x)=-x^3-3x^2+6x+10$, параллельно прямой $6x+2y+9=0$.

Задание 6. Найти пределы функций, используя правило Лопиталя:

1. $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{x^2-2x-15}{2x^2-7x-15}$;
2. $\lim\limits_{x\to\pi/2}\dfrac{tgx}{tg3x}$;
3. $\lim\limits_{x\to 0}tg2x\ln x$;
4. $\lim\limits_{x\to\pi/2}\left(tgx-\dfrac{1}{\cos x}\right)$;
5. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2+7}{x^2+1+e^x}$;
6. $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\ln(x-3)}{x-4}$;
7. $\lim\limits_{x\to 1}x^{\frac{1}{1-x}}$;
8. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{6}{x}\right)^x$.

Задание 7. Найти наименьшее и наибольшее значения функции $y=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+4}}$ на промежутке $x\in[-4;4]$.

Задание 8. Исследовать функции и построить их графики.

1. $y=x^2+6x-7$;
2. $y=\dfrac{3x^3}{x^2-9}$;
3. $y=(3x+5)e^{-x^2}$.

Вариант 22

Задание 1. Вычислить производные заданных функций:

1. $y=(3x+2)^3+2(3x-1)^2-x+7$;
2. $y=5e^x+2\log_3 x-3arcctg4x-3^x$;
3. $y=\dfrac{x+5}{\arccos 5x}$;
4. $y=(x+2)^3 arctg\dfrac{x}{2}$;
5. $y=\dfrac{1}{4}\ln\dfrac{1+x}{1-x}+\dfrac{1}{2}arctgx$;
6. $y=\sqrt{a^2-x^2}-a\arccos\dfrac{x}{a}$;
7. $y=x^2\sqrt{1+\sqrt{x}}$;
8. $y=\sqrt{x^2+1}-\ln\left(\dfrac{1}{x}+\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}\right)$;
9. $y=xe^{1-\cos x}$;
10. $y=\dfrac{1}{arctge^{-2x}}$.

Задание 2. Дифференцирование неявной функции. Логарифмическое дифференцирование. Дифференцирование функции, заданной параметрически.

1. $y=\left(tg2x\right)^{ctg\frac{x}{2}}$;
2. $y=\dfrac{x^2e^{x^2}}{x^2-1}$;
3. $2y\ln y=x^2$;
4. $a\cos^2\left(x+y\right)=b$;
5. $\begin{cases} x=\sqrt{t}, \\ y=\sqrt[3]{t}. \end{cases}$

Задание 3. Проверить, удовлетворяет ли функция $y=x\sin x$ дифференциальному уравнению $xy'-y=x^2\cos x$.

Задание 4. Найдите производную функции указанного порядка.

1) $y^{(n)}$, если $y=lg\,x$; 2) $\dfrac{d^2y}{dx^2}$, если $x=arctgt,\ y=ln(1+t^2)$.

Задание 5. Составить уравнение касательной, проведенной к кривой $f\left(x\right)=-\dfrac{2}{3}x^3+x^2+2x+3$, , параллельно прямой $14x-7y+3=0$.

Задание 6. Найти пределы функций, используя правило Лопиталя.

1 $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{3x^2-4x+1}{x^2-3x+2}$;
2. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{tg2x}{x}$;
3. $\lim\limits_{x\to3}\left(3-x\right)tg\dfrac{\pi x}{6}$;
4. $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{1}{\sin x}-\dfrac{1}{x}\right)$;
5. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{e^x-3x-1}{x^3+x}$;
6. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln\cos 4x}{x}$;
7. $\lim\limits_{x\to0}x^x$;
8. $\lim\limits_{x\to0}\left(1+5x\right)^{\frac{1}{x}}$.

Задание 7. Найти наименьшее и наибольшее значения функции $y=\dfrac{\sqrt{3}}{2}x+\cos x$ на промежутке $x\in\left[0;\dfrac{\pi}{2}\right]$.

Задание 8. Исследовать функции и построить их графики.

1. $y=x^3-12x+3$; 2. $y=\dfrac{3x}{x^2+5}$; 3. $y=xe^{-x}$.

Вариант 23

Задание 1. Вычислить производные заданных функций:

1. $y=(x-1)^3+(x-2)^2-\dfrac{1}{x+7}$;
2. $y=5e^x+2\log_3 x-3arcctg4x-3^x$;
3. $y=\dfrac{\lg x}{\arcsin 8x}$;
4. $y=e^{3x}tg\dfrac{x}{2}$;
5. $y=\ln\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)-\dfrac{x}{\sqrt{x^2-1}}$;
6. $y=\dfrac{\sin^2 x}{1+ctgx}+\dfrac{\cos^2 x}{1+tgx}$;
7. $y=\sqrt{arctg\ln(x^2+4x+4)}$;
8. $y=e^x\left(\sin 3x-3\cos 3x\right)$;
9. $y=3x^3\arcsin x+\left(x^2+2\right)\sqrt{1-x^2}$;
10. $y=\dfrac{1}{\sqrt{1+e^{-\sqrt{x}}}}$.

Задание 2. Дифференцирование неявной функции. Логарифмическое дифференцирование. Дифференцирование функции, заданной параметрически.

1. $y=x^{\arcsin x}$;
2. $y=\sqrt[3]{\dfrac{x-5}{\sqrt[5]{x^2+4}}}$;
3. $2^x+2^y=2^{x+y}$;
4. $y=x+arctgy$;
5. $\begin{cases} x=a\left(\ln t+\cos t-\sin t\right), \\ y=a\left(\sin t+\cos t\right). \end{cases}$.

Задание 3. Проверить, удовлетворяет ли функция $y=e^{-x^2}\left(\dfrac{x^2}{2}+1\right)$ дифференциальному уравнению $y'+2xy=xe^{-x^2}$.

Задание 4. Найдите производную функции указанного порядка.

1) $y^{(n)}$, если $y=xe^x$;

2) $\dfrac{d^2y}{dx^2}$, если $x=cos^2t,\ y=sin2t$.

Задание 5. Составить уравнение касательной, проведенной к кривой $f\left(x\right)=\dfrac{2}{3}x^3-5x^2+6x-2,$ параллельно прямой $12x+2y+11=0$.

Задание 6. Найти пределы функций, используя правило Лопиталя:

1. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2+4x-21}{2x^2-7x+3}$;
2. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tgx-\sin x}{x-\sin x}$;
3. $\lim\limits_{x\to 0}\left(tg3x\ln x\right)$;
4. $\lim\limits_{x\to 4}\left(\dfrac{1}{x-4}-\dfrac{1}{x^2-5x+4}\right)$;
5. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{e^{3x}-x}{x^3}$;
6. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\ln\left(2-x\right)}{1-x}$;
7. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\cos x\right)^{\frac{1}{x}}$;
8. $\lim\limits_{x\to 0}\left(1-7x\right)^{\frac{1}{x}}$.

Задание 7. Найти наименьшее и наибольшее значения функции $y=\dfrac{5x}{1+x^2}$ на промежутке $x\in\left[-2;2\right]$.

Задание 8. Исследовать функции и построить их графики.

1. $y=\left(x-3\right)^2\left(x+1\right)$;
2. $y=\dfrac{4x^2}{6+x^2}$;
3. $y=e^{\frac{1}{2-x}}$.

Вариант 24

Задание 1. Вычислить производные заданных функций:

1. $y=(2x-1)^3+(3x-2)^2-\ln(4x-3)$;
2. $y=0{,}5e^{3x}+\dfrac{2}{5}\lg x-3arctg\,4x-e^x$;
3. $y=\dfrac{e^x}{\sin 2x}$;
4. $y=(e^x+\ln 3x)(x+3)$;
5. $y=\ln\left(2x+e^{-x}\sin x\right)$;
6. $y=\dfrac{1+x\,arctg\,x}{\sqrt{x^2+1}}$;
7. $y=e^x\sin x\cos^3 x$;
8. $y=\sqrt[11]{9+6\sqrt[5]{x^9}}$;
9. $y=\ln tg\dfrac{x}{2}-ctgx\ln\left(1+\sin x\right)-x$;
10. $y=e^{arctg\sqrt{1+\ln(2x+3)}}$.

Задание 2. Дифференцирование неявной функции. Логарифмическое дифференцирование. Дифференцирование функции, заданной параметрически.

1. $y=\left(x+1\right)^{x^2}$;
2. $y=\dfrac{x^4\sqrt{x+1}}{\left(x-1\right)^2\sqrt[4]{x-1}}$;
3. $x^3-2y^3=3x^2y$;
4. $\dfrac{4y}{x}-2e^{\frac{y}{x}}+\sqrt[3]{\dfrac{y}{x}}=0$;
5. $\begin{cases} x=t^3-2t+3, \\ y=3t^5-4t^3+3. \end{cases}$

Задание 3. Проверить, удовлетворяет ли функция $y=\ln(c+e^x)$ дифференциальному уравнению $y'=e^{x-y}$.

Задание 4. Найдите производную функции указанного порядка.

1) $y^{(n)}$, если $y=sin^4 x+cos^4 x$;   2) $\dfrac{d^2y}{dx^2}$, если $x=arctgt,\ y=t^2/2$.

Задание 5. Составить уравнение касательной, проведенной к кривой $f\left(x\right)=\dfrac{1}{6}x^3+\dfrac{1}{2}x^2-x+2,$ параллельно прямой $3x-6y+4=0$.

Задание 6. Найти пределы функций, используя правило Лопиталя:

1. $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}}\dfrac{2x^2-7x+3}{4x-2}$;
2. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-x-1}{\sin 2x}$;
3. $\lim\limits_{x\to 1}\left(x-1\right)\ln\left(x-1\right)$;
4. $\lim\limits_{x\to 3}\left(\dfrac{1}{x-3}-\dfrac{1}{x^2-5x+6}\right)$;
5.. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{e^{4x}+x^2+x}{x^3+1}$;
6. $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{x^2-\sqrt{a^3x}}{\sqrt{ax}-x}$;
7. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x^2}\right)^x$;
8. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\cos 2x\right)^{\frac{5}{x^2}}$.

Задание 7. Найти наименьшее и наибольшее значения функции $y=2x+\cos 2x$ на промежутке $x\in\left[-\dfrac{3\pi}{4};\pi\right]$.

Задание 8. Исследовать функции и построить их графики.

1. $y=\left(x+2\right)\left(x+3\right)^2$;   2. $y=\dfrac{8x^3+1}{3x^2}$;   3. $y=\left(x+4\right)e^{2x}$.

Вариант 25

Задание 1. Вычислить производные заданных функций:

1. $y=(2-x)^3+(x-2)^2-\sin(1-4x)$;
2. $y=3e^{-3x}+\sqrt{\dfrac{2}{5}}\ln 2x+3arctg(4-x)-e^{-x}$;
3. $y=\dfrac{\cos 2x}{e^x}$;
4. $y=\dfrac{1}{\cos\left(x-\cos x\right)}$;
5. $y=x-\ln\left(2e^x+1+\sqrt{e^{2x}+4e^x+1}\right)$;
6. $y=\dfrac{e^{x^2}}{e^x+e^{-x}}$;
7. $y=2\ln\left(2x-3\sqrt{1-4x^2}\right)-6\arcsin 2x$;
8. $y=\dfrac{3x^2-1}{3x^3}+\ln\sqrt{x^2+1}+arctgx$;
9. $y=x\sqrt{x^2+1}\cdot\sin x$;
10. $y=\sqrt[6]{\left(1+xe^{\sqrt{x}}\right)^3}$.

Задание 2. Дифференцирование неявной функции. Логарифмическое дифференцирование. Дифференцирование функции, заданной параметрически.

1. $y=\left(x^2+1\right)^{\sin 2x}$;
2. $y=\dfrac{\sqrt{x+2}\cdot(3-x)^4}{\left(x+1\right)^5}$;
3. $y=1+xe^y$;
4. $y\sin x=\cos\left(x-y\right)$;
5. $\begin{cases} x=a\left(\cos t+t\sin t\right), \\ y=a\left(\sin t-t\cos t\right). \end{cases}$

Задание 3. Проверить, удовлетворяет ли функция $y=3\sqrt{1-x^2}$ дифференциальному уравнению $9x+yy'=0$.

Задание 4. Найдите производную функции указанного порядка.

1) $y^{(n)}$, если $y=e^{-\frac{x}{2}}$;

2) $\dfrac{d^2y}{dx^2}$, если $x=a\cos t,\ y=a\sin t$.

Задание 5. Составить уравнение касательной, проведенной к кривой $f\left(x\right)=3x^3-12x^2+10x-2,$ параллельно прямой $24x+12y-5=0$.

Задание 6. Найти пределы функций, используя правило Лопиталя:

1. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3-3x-2}{x-2}$;
2. $\lim\limits_{x\to\pi/4}\dfrac{1-tgx}{x-\pi/4}$;
3. $\lim\limits_{x\to 0}\sqrt{x}\ln x$;
4. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\ln x}{1-x^3}$;
5. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2+4x}{e^{3x}}$;
6. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3e^{4x}-3}{x^3}$;
7. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x}\right)^{tgx}$;
8. $\lim\limits_{x\to 0}\left(1+8x\right)^{\frac{1}{x}}$.

Задание 7. Найти наименьшее и наибольшее значения функции $y=\dfrac{1}{\sin x}$ на промежутке $x\in\left[\dfrac{\pi}{2};\dfrac{3\pi}{2}\right]$.

Задание 8. Исследовать функции и построить их графики:

1. $y=\left(x-1\right)\left(x+2\right)\left(x-3\right)$;
2. $y=\dfrac{-3}{x^2-6x+9}$;
3. $y=x^2e^{-2x}$.

Вариант 26

Задание 1. Вычислить производные заданных функций:

1. $y=\frac{x^2-3x+5}{x^3}$;
2. $y=-3\sin 4x+5\cos\frac{x}{2}+arcctg5x;$
3. $y=\frac{2x+3}{e^{6x}}$;
4. $y=\frac{1}{\sin\left(\sqrt{x}-\cos\sqrt{x}\right)}$;
5. $y=\ln\left(x-2\sqrt{x^4+1}\right)$;
6. $y=3\cos\left(e^x-xe^x\right)-\cos^2\left(xe^x-e^x\right)$;
7. $y=\arcsin\left(4x\sqrt{1-x^2}\right)$;
8. $y=\left(\sin x-x\cos x\right)\left[\ln\left(\sin x-x\cos x\right)-1\right]$;
9. $y=\arcsin\frac{2+x^2}{x}$;
10. $y=\left(\frac{1+2x}{1-2x}\right)^4$.

Задание 2. Дифференцирование неявной функции. Логарифмическое дифференцирование. Дифференцирование функции, заданной параметрически.

1. $y=\sqrt{x\sin x\sqrt{1-e^x}}$;
2. $y=\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$;
3. $y\sin x=\cos\left(x-y\right)$;
4. $x^3+y^3-3axy=0$;
5. $\begin{cases} x=\ln\left(1+t^2\right), \\ y=t-arctgt. \end{cases}$

Задание 3. Проверить, удовлетворяет ли функция $y=-\sqrt{x^4-x^2}$ дифференциальному уравнению $xyy'-y^2=x^4$.

Задание 4. Найдите производную функции указанного порядка.

1) $y^{(n)}$, если $y=sin\,x+cos\,x$; 2) $\frac{d^2y}{dx^2}$, если $x=e^{-t}$, $y=t^3$.

Задание 5. Составить уравнение касательной, проведенной к кривой $f\left(x\right)=-2x^3+36x^2-216x$, параллельно прямой $2x+\frac{y}{3}+2=0$.

Задание 6. Найти пределы функций, используя правило Лопиталя:

1. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^4-1}{2x^4-x^2-1}$;
2. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^3}$;
3. $\lim\limits_{x\to 0}\sqrt[3]{x}\ln x$;
4. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{2x}-1}{\ln\left(1+2x\right)}$;
5. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2-1}{e^x}$;
6. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x+e^{-x}-2}{\sin x}$;
7. $\lim\limits_{x\to 0}\left(e^x+x\right)^{\frac{1}{x}}$;
8. $\lim\limits_{x\to 0}\left(tg4x\right)^{2x}$.

Задание 7. Найти наименьшее и наибольшее значения функции $y=\sin 3x-3\sin x$ на промежутке $x\in\left[0;\frac{3\pi}{2}\right]$.

Задание 8. Исследовать функции и построить их графики:

1. $y=x^3-6x^2$;
2. $y=\frac{x^2+6}{x^2-9}$;
3. $y=\ln\left(x^2-5x+4\right)$.

Вариант 27

Задание 1. Вычислить производные заданных функций:

3. $y=(x+3)^2-4x+4^x$;
2. $y=\sqrt{1-x}+\sqrt[3]{1-2x}+(2x-3)^2$;
3. $y=\dfrac{3-x}{\ln 4x}$;
4. $y=\log_3\dfrac{1+x^4}{3x}$;
5. $y=\left(\dfrac{1-x}{1+x}\right)^4$;
6. $y=3\cos\left(e^x-xe^x\right)-\cos^2\left(xe^x-e^x\right)$;
7. $y=\left(x\cos x-\sin x\right)\left[\ln\left(x\cos x-\sin x\right)-1\right]$;
8. $y=3\sin\left(xe^x-e^x\right)-\sin^3\left(xe^x-e^x\right)$;
9. $y=\arccos\left(2x\sqrt{1-x^2}\right)$;
10. $y=(\sin x-x\cos\dfrac{1}{\sqrt{x}})$.

Задание 2. Дифференцирование неявной функции. Логарифмическое дифференцирование. Дифференцирование функции, заданной параметрически:

1. $y=\left(x-2\right)^{\sin x}$;
2. $y=\dfrac{x^2\sqrt{x+1}}{\left(x-1\right)^3\sqrt[4]{5x-1}}$;
3. $x^3+y^3=3xy$;
4. $\dfrac{y}{x}+e^{\frac{y}{x}}-\sqrt[3]{\dfrac{y}{x}}=0$;
5. $\begin{cases} x=t^3+3t+1, \\ y=3t^5+5t^3+1. \end{cases}$

Задание 3. Проверить, удовлетворяет ли функция $y=(x+1)^2(e^x-1)$ дифференциальному уравнению $y'-\dfrac{2y}{x+1}=e^x(1+x)^2$.

Задание 4. Найдите производную функции указанного порядка:

1) $y^{(n)}$, если $y=e^{\frac{x}{2}}$;

2) $\dfrac{d^2y}{dx^2}$, если $x=a(t-\sin t),\ y=a(1-\cos t)$.

Задание 5. Составить уравнение касательной, проведенной к кривой $f(x)=\dfrac{1}{3}x^3-\dfrac{3}{2}x^2+1$, параллельно прямой $y+4x=1$.

Задание 6. Найти пределы функций, используя правило Лопиталя.

1. $\lim\limits_{x\to5}\dfrac{x^3-5x^2-3x+15}{2x^2-6x-20}$;
2. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2e^x-2}{x^2-x}$;
3. $\lim\limits_{x\to0}x\,ctg\,2x$;
4. $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{1}{x^2}-ctg^2x\right)$;
5. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{e^{3x}+5}{6x^2+1}$;
6. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{2e^{4x}-2}{\sin x}$;
7. $\lim\limits_{x\to0}\left(1-6x\right)^{\frac{1}{x}}$;
8. $\lim\limits_{x\to1}x^{\frac{1}{1-x}}$.

Задание 7. Найти наименьшее и наибольшее значения функции $y=x+\ln(-x)$ на промежутке $[-4;\ -0{,}5]$.

Задание 8. Исследовать функции и построить их графики.

1. $y=x^3+3x+2$;
2. $y=\dfrac{2x-1}{\left(x-1\right)^2}$;
3. $y=\ln\left(x^2+x-2\right)$.

Вариант 28

Задание 1. Вычислить производные заданных функций:

1. $y = \arccos 5x + \sqrt[3]{e^{\frac{x}{2}}}$;
2. $y = \sqrt{1-2x} + \sqrt[4]{1-2x} + \sqrt{6-3x}$;
3. $y = \dfrac{3^x - x^3}{\log_3 3x}$;
4. $y = \ln \operatorname{tg} \dfrac{x}{2}$;
5. $y = 4^{arctg \sqrt{x^2-1}}$;
6. $y = \left(1+\sqrt{x^2+1}\right)^5$;
7. $y = e^{\arcsin \frac{1}{x}}$;
8. $y = \operatorname{tg}^3 2x \cos^2 2x$;
9. $y = \dfrac{1}{4}\operatorname{tg}^4 x - \ln\cos x - \dfrac{\operatorname{tg}^2 x}{2}$;
10. $y = x^n a^{-x^2}$.

Задание 2. Дифференцирование неявной функции. Логарифмическое дифференцирование. Дифференцирование функции, заданной параметрически:

1. $y = x^x$;
2. $y = \dfrac{(x-2)^9}{\sqrt{(x-1)^5 (x-3)^{11}}}$;
3. $tgy = xy$;
4. $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$;
5. $\begin{cases} x = a(\cos t + t\sin t), \\ y = a(\sin t - t\cos t). \end{cases}$

Задание 3. Проверить, удовлетворяет ли функция $y = xe^{-\frac{x^2}{2}}$ дифференциальному уравнению $xy' = (1-x^2)y$.

Задание 4. Найдите производную функции указанного порядка:

1. $y^{(n)}$, если $y = e^{-\sqrt{2}x}$;
2. $\dfrac{d^2y}{dx^2}$, если $x = arc\cos t,\ y = (1-t^2)^3$.

Задание 5. Составить уравнение касательной, проведенной к кривой $f(x) = \dfrac{13}{15}x^3 + 6x^2 - 7x$, параллельно прямой $2y + 4x = 1$.

Задание 6. Найти пределы функций, используя правило Лопиталя:

1. $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{x^3-2x-1}{x^4+2x+1}$;
2. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x\sin 3x}{1-\cos 4x}$;
3. $\lim\limits_{x\to \frac{1}{2}} \sin(2x-1) tg\pi x$;
4. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln\sin 2x}{\ln\sin x}$;
5. $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{e^{5x}+x^2}{x+x^3}$;
6. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2e^x+e^{-x}-3}{x^2}$;
7. $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{1}{x}\right)^{\sin x}$;
8. $\lim\limits_{x\to 0} (1-2x)^{\frac{1}{x}}$.

Задание 7. Найти наименьшее и наибольшее значения функции $y = x + e^{-x}$ на промежутке $[-\ln 4;\ \ln 2]$.

Задание 8. Исследовать функции и построить их графики.

1. $y = x^3 - 6x$;
2. $y = \dfrac{x^3+8}{3x}$;
3. $y = \dfrac{e^x}{e^x-1}$.

Вариант 29

Задание 1. Вычислить производные заданных функций:

1. $y = x^3 + 3x^2 - 4x + 5 - \sin 2x$;
2. $y = e^{-x} + \ln 5x - \cos 2x$;
3. $y = \dfrac{\operatorname{tg} 7x}{\ln 3x}$;
4. $y = \ln \operatorname{tg} \dfrac{x}{2}$;
5. $y = \operatorname{arctg} \dfrac{\ln x}{3}$;
6. $y = x \sin x \cos x + \dfrac{1}{2} \cos^2 x$;
7. $y = e^{\arcsin \frac{1}{x}}$;
8. $y = \log_a \left(x + \sqrt{x^2 + 9} \right)$;
9. $y = \ln \operatorname{tg} \dfrac{x}{2} - \dfrac{x}{\sin x}$;
10. $y = e^{\frac{1}{2} tg^2 x} \cos x$.

Задание 2. Дифференцирование неявной функции. Логарифмическое дифференцирование. Дифференцирование функции, заданной параметрически:

1. $y = x^{-x} \cdot 2^x \cdot x^2$;
2. $y = \sqrt{\dfrac{x(x-1)}{x-2}}$;
3. $x^3 + y^3 = a^3$;
4. $xy = arctg \dfrac{x}{y}$;
5. $\begin{cases} x = \dfrac{1}{t+1}, \\ y = \left(\dfrac{t}{t+1} \right)^2. \end{cases}$

Задание 3. Проверить, удовлетворяет ли функция $y = -\sqrt{\dfrac{2}{x^2} - 1}$ дифференциальному уравнению $1 + y^2 + xyy' = 0$.

Задание 4. Найдите производную функции указанного порядка:

1) $y^{(n)}$, если $y = a / x^n$;
2) $\dfrac{d^2 y}{dx^2}$, если $x = at\,cost,\ y = at\,sint$.

Задание 5. Составить уравнение касательной, проведенной к кривой $f(x) = \dfrac{1}{6} x^3 + 2x^2 - 2x$, параллельно прямой $2y + 20x = 2$.

Задание 6. Найти пределы функций, используя правило Лопиталя:

1. $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{3x^2 + 2x - 1}{x^2 - 1}$;
2. $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{6}} \dfrac{1 - 2\sin x}{\cos 3x}$;
3. $\lim\limits_{x \to 0} x ctg 7x$;
4. $\lim\limits_{x \to 0} \left(\dfrac{1}{x \sin x} - \dfrac{1}{x^2} \right)$;
5. $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{e^x + x + 2}{x^4}$;
6. $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{e^x - e^2}{x - 2}$;
7. $\lim\limits_{x \to 0} (tgx)^{2x - \pi}$;
8. $\lim\limits_{x \to 0} (1 - 5x)^{\frac{1}{x}}$.

Задание 7. Найти наименьшее и наибольшее значения функции $y = x \ln^2 x$ на промежутке $x \in \left[e^{-1}; e \right]$.

Задание 8. Исследовать функции и построить их графики:

1. $y = x^3 - 12x + 21$;
2. $y = \dfrac{2x}{(x-3)^2}$;
3. $y = xe^{\frac{-x^2}{2}}$.

Вариант 30

Задание 1. Вычислить производные заданных функций:

1. $y=(x+1)^3+3(x-3)^2-4(x+1)+5$;
2. $y=2^{-x}+\sin 5x-5\mathrm{tg}2x-\sqrt[3]{1-x}$;
3. $y=\dfrac{\mathrm{tg}7x}{\ln 3x}$;
4. $y=\dfrac{2^{3x}}{3^{5x}}$;
5. $y=\dfrac{1}{2}\mathrm{tg}^2\sqrt{x}+\ln\cos\sqrt{x}$;
6. $y=x\sin x\cos x+\dfrac{1}{2}\cos^2 x$;
7. $y=e^{\arcsin\frac{1}{x}}$;
8. $y=x^2e^{x^2}\ln x$;
9. $y=\arccos\sqrt{1-2^x}$;
10. $y=\log_{x^2}2$.

Задание 2. Дифференцирование неявной функции. Логарифмическое дифференцирование. Дифференцирование функции, заданной параметрически:

1. $y=x^{\ln x}$;
2. $y=x\cdot\sqrt[3]{\dfrac{x^2}{x^2+1}}$;
3. $arctg\left(x+y\right)=x$;
4. $x^3+x^2y+y^2=0$;
5. $\begin{cases}x=a\cos^2 t,\\ y=b\sin^2 t.\end{cases}$

Задание 3. Проверить, удовлетворяет ли функция $y=5e^{-2x}+\dfrac{e^x}{3}$ дифференциальному уравнению $y'+2y=e^x$.

Задание 4. Найдите производную функции указанного порядка:

1) $y^{(n)}$, если $y=arctgx$;

2) $\dfrac{d^2y}{dx^2}$, если $x=a\,log_b\,t,\ y=a\,lnt$.

Задание 5. Составить уравнение касательной, проведенной к кривой $f(x)=\dfrac{1}{12}x^3-x^2+7x$, параллельно прямой $4y-16x=2$.

Задание 6. Найти пределы функций, используя правило Лопиталя:

1. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{2x^2+x-10}{x^2-x-2}$;
2. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin 5x}{x}$;
3. $\lim\limits_{x\to 0}x^2e^{\frac{1}{x}}$;
4. $\lim\limits_{x\to -2}\left(\dfrac{1}{x+2}-\dfrac{1}{x^2+5x+6}\right)$;
5. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{e^{4x}+x}{x^3+1}$;
6. $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{ctg\,\frac{x}{2}}{x-\pi}$;
7. $\lim\limits_{x\to\pi/2}\left(\sin x\right)^{\frac{1}{x-\pi/2}}$;
8. $\lim\limits_{x\to 0}\left(1-8x\right)^{\frac{1}{x}}$.

Задание 7. Найти наименьшее и наибольшее значение функции $y=\arccos x^2$ на промежутке $x\in\left[-\sqrt{2}/2;\sqrt{2}/2\right]$.

Задание 8. Исследовать функции и построить их графики:

1. $y=x^3+6x+14$;
2. $y=\dfrac{4x^2}{x^3-1}$;
3. $y=\left(3x^2+4\right)e^{-x^2}$.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Абрамовский, В. А. Дифференциальное и интегральное исчисление функции одной переменной. Т. 1 / В.А. Абрамовский – М.: Физматлит, 2019.
2. Болгов, В. А. Сборник задач по математике для втузов. Ч. 1 Линейная алгебра и основы математического анализа: Учеб. Пособие для втузов. / В.А Болгов, Б.П. Демидович, А. В. Ефимов и др. – 2-е изд., репринт. – М.: Буквоед, 2012.
3. Данко, П.Е. Высшая математика в упражнениях и задачах. В 2-х ч. Ч. I: учеб. пособие для втузов. / П.Е. Данко, А. Г. Попов, Т. Я. Кожевникова - М.:ОНИКС 21 век, 2002.
4. Кузнецов, Л.А. Сборник заданий по высшей математике. Учеб. пособие для втузов. / Л.А. Кузнецов - М.: Лань, 2008.
5. Лунгу, К. Н. Сборник задач по высшей математике. 1 курс / К.Н Лунгу, Д.Т. Письменный, С.Н. Федин, Ю.А. Шевченко. – 6-е изд. – М.: Айрис-пресс, 2007.
6. Письменный, Д. Т. Сборник задач по высшей математике. 1 курс. / Д.Т. Письменный, С.Н. Федин. – М.: Айрис-пресс, 2018.

Оглавление