Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное
учреждение высшего образования
«Брянский государственный инженерно-технологический университет»

Кафедра математики

Приближенные методы вычисления определенных интегралов

Методические указания к выполнению расчетно-графической работы для студентов всех специальностей и всех направлений подготовки бакалавров очной формы обучения

Брянск 2015

Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное
учреждение высшего образования
«Брянский государственный инженерно-технологический университет»

Кафедра математики

УТВЕРЖДЕНЫ
научно-методическим
советом университета
Протокол № ____
от “____”___________2015 г.

Приближенные методы вычисления определенных интегралов

Методические указания к выполнению расчетно-графической работы для студентов всех специальностей и всех направлений подготовки бакалавров очной формы обучения

Брянск 2015

Составители: Баранова И.М., зав. кафедрой математики БГИТУ,
Часова Н.А., доцент кафедры математики БГИТУ

Рецензент: Евтюхов К.Н. – к., ф.- м.н., профессор кафедры физики

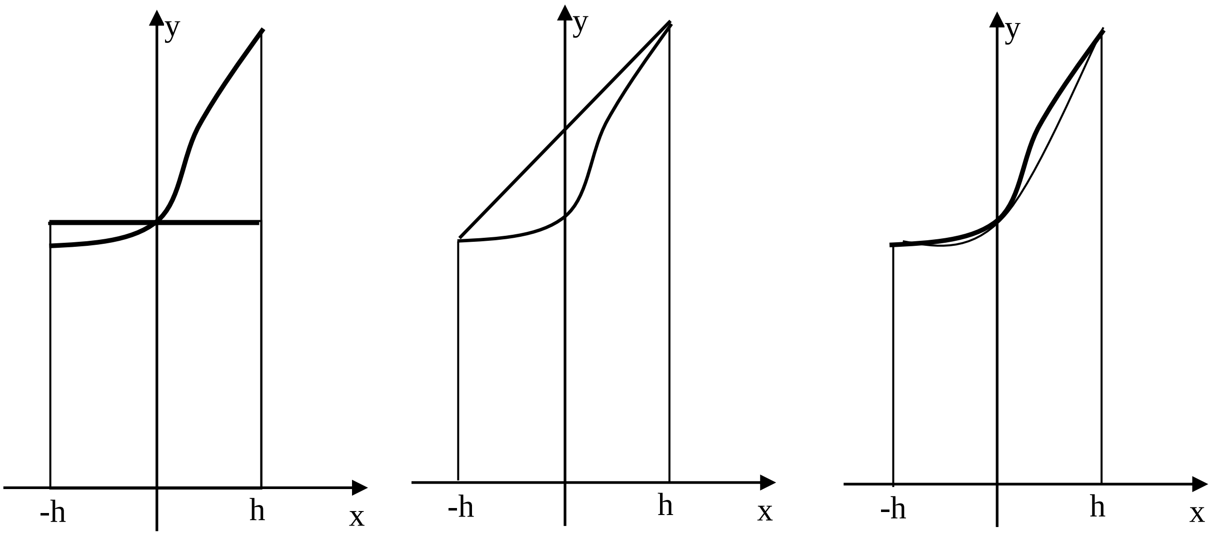
Рассмотрены УМК МТФ
Протокол № 1 от 10.09.15 г.

Введение

При решении ряда физических и технических задач встречаются определенные интегралы, которые не могут быть вычислены в элементарных функциях. Кроме того, в некоторых важных задачах возникает необходимость вычисления определенных интегралов, подынтегральные функции которых не являются элементарными.

Наиболее употребляемыми приближенными методами вычисления определенных интегралов являются: метод прямоугольников, метод трапеций и метод парабол (Симпсона).

Основная идея этих методов заключается в замене подынтегральной функции $f(x)$ функцией более простой природы – многочленом $P_n(x)$ малой степени n (0, 2, 3, …).



$n = 0$ Метод прямоугольников

$n = 1$ Метод трапеций

$n = 2$ Метод парабол (Симпсона)

Приближенные методы вычисления определенных интегралов

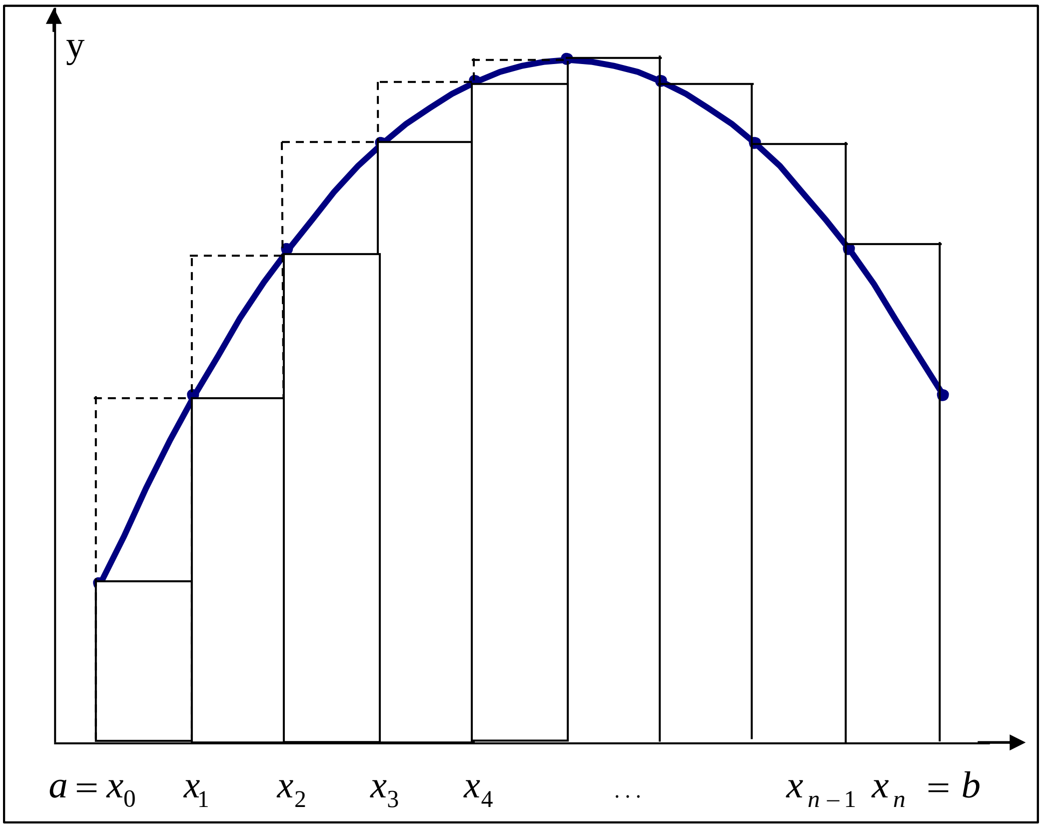
1. Метод прямоугольников

Разобьем отрезок $[a, b]$ на n равных частей при помощи точек:

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b,\ h = \frac{b-a}{n},\ x_{i+1} = x_i + h,\ y_i = f(x_i).$$

Метод прямоугольников заключается в замене интеграла суммой:

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{b-a}{n}(y_o + y_1 + y_2 + \ldots + y_{n-1}) + R_n.$$



Для приближенных практических расчетов применяется формулы:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{n}(y_o + y_1 + y_2 + \ldots + y_{n-1}), \qquad (1)$$

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{n}(y_1 + y_2 + \ldots + y_n). \qquad (2)$$

Из рисунка ясно, что если $f(x)$ – положительная и возрастающая функция, то формула (1) выражает площадь ступенчатой фигуры, составленной из «входящих» прямоугольников, а формула (2) – площадь ступенчатой фигуры, состоящей из «выходящих» прямоугольников.

Абсолютная погрешность приближенных равенств (1) и (2) оценивается с помощью следующей формулы: $|R_n| \le \dfrac{(b-a)^3 \cdot M_2}{24n^2}$, где M_2 – наибольшее значение $|f''(x)|$ на отрезке $[a, b]$.

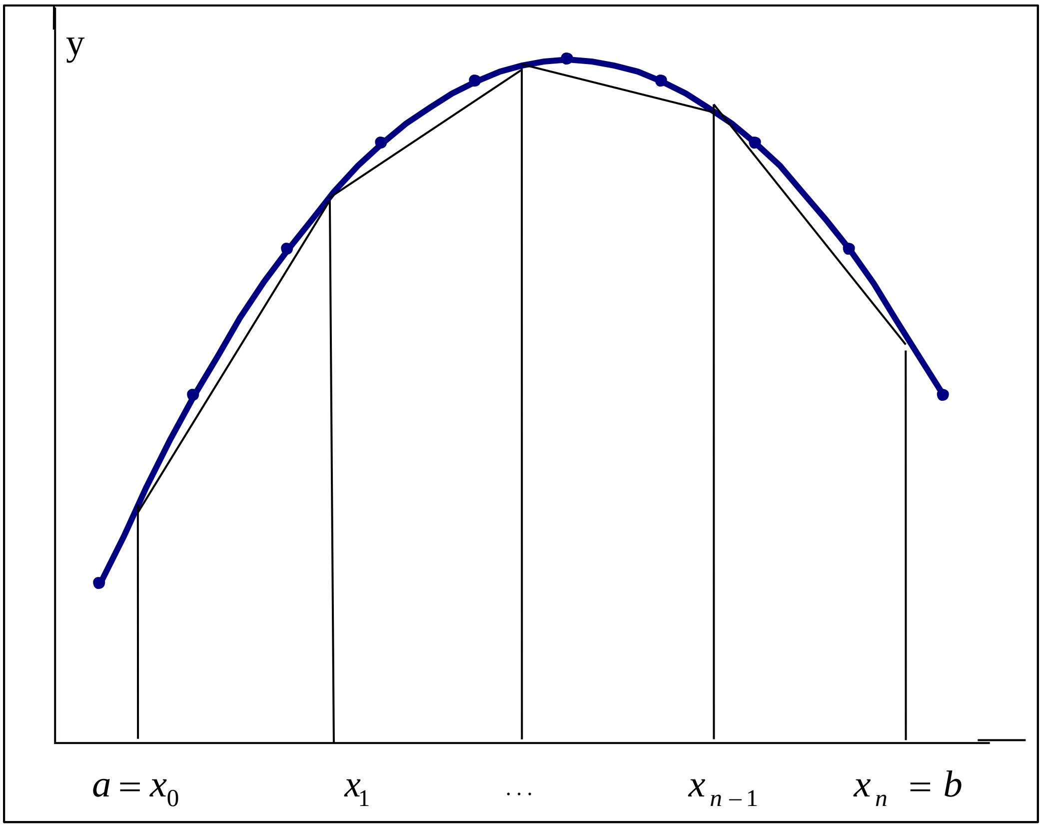
2. Метод трапеций

Разобьем отрезок $[a, b]$ на n равных частей при помощи точек:

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b,\ h = \frac{b-a}{n},\ x_{i+1} = x_i + h,\ y_i = f(x_i).$$

Метод трапеций заключается в замене интеграла суммой:

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{b-a}{n}\left(\frac{y_o + y_n}{2} + y_1 + y_2 + \ldots + y_{n-1}\right) + R_n.$$



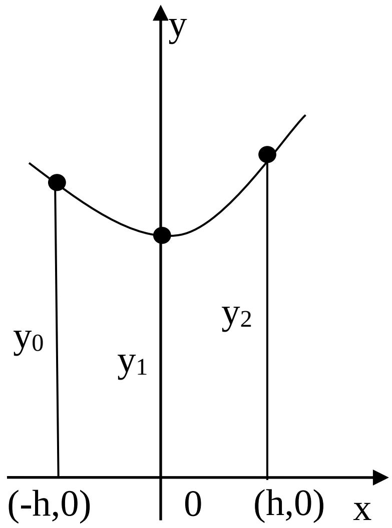
Для приближенных практических расчетов применяется формула:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{n}\left(\frac{y_o + y_n}{2} + y_1 + y_2 + \ldots + y_{n-1}\right). \qquad (3)$$

Абсолютная погрешность приближения, полученного по формуле трапеций, оценивается с помощью формулы $|R_n| \le \frac{(b-a)^3 \cdot M_2}{12n^2}$, где $M_2 = \max\limits_{a\le x\le b}|f''(x)|$.

3. Метод парабол (метод Симпсона)

а) Через любые три точки с координатами $(-h, y_0), (0, y_1), (h, y_2)$ проходит только одна парабола $y = Ax^2 + Bx + C$.



$$\begin{cases} Ah^2 - Bh + C = y_0 \\ C = y_1 \\ Ah^2 + Bh + C = y_2 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A = \frac{y_0 - 2y_1 + y_2}{2h^2}; \quad B = \frac{y_2 - y_0}{2h}; \quad C = y_1$$

б) Выразим площадь под параболой $y = Ax^2 + Bx + C$ на отрезке $[-h, h]$ через $h,\ y_0,\ y_1,\ y_2$:

$$S = \int_{-h}^{h}\left(Ax^2 + Bx + C\right)dx = \left[A\frac{x^3}{3} + B\frac{x^2}{2} + Cx\right]\Bigg|_{-h}^{h} = \frac{2Ah^3}{3} + 2Ch.$$

Учитывая значения A, B и C из пункта а) следует:

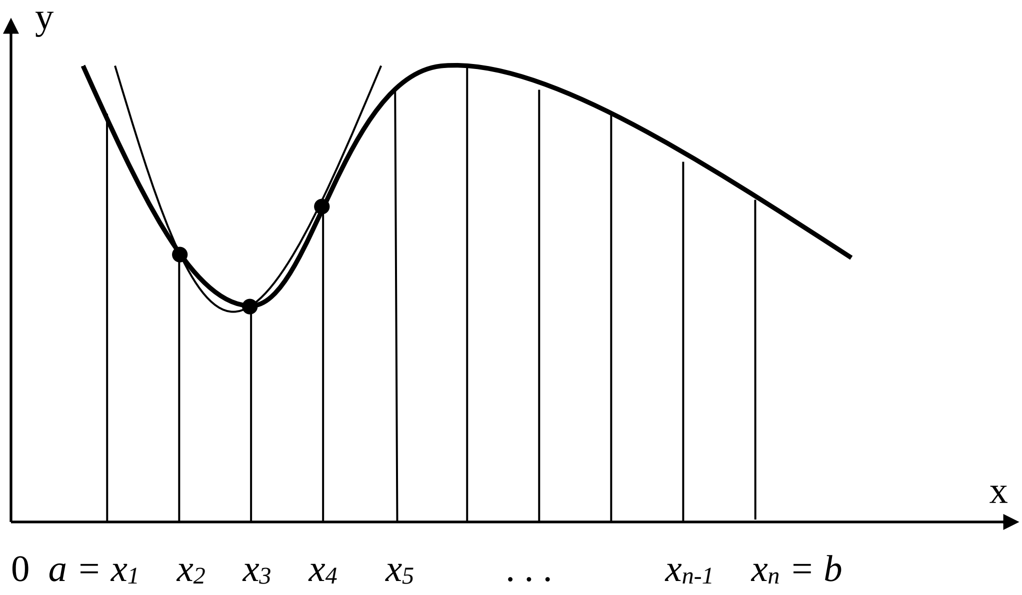
$$S = \frac{h}{3}(y_0 + 4y_1 + y_2).$$

в) Разобьем отрезок $[a, b]$ на n равных частей при помощи точек:

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b,\ h = \frac{b-a}{n},\ x_{i+1} = x_i + h,\ y_i = f(x_i).$$

Метод парабол заключается в замене интеграла суммой: $n = 2m$

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{b-a}{6m}\left[y_o + y_{2m} + 2(y_2 + y_4 + \ldots + y_{2m-2}) + 4(y_1 + y_3 + \ldots + y_{2m-1})\right] + R_n .$$



Для приближенных практических расчетов применяется формула: $n = 2m$

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{6m}\left[y_o + y_{2m} + 2(y_2 + y_4 + \ldots + y_{2m-2}) + 4(y_1 + y_3 + \ldots + y_{2m-1})\right]. \quad (4)$$

Абсолютная погрешность вычисления по формуле (4) оценивается соотношением $|R_n| \le \frac{(b-a)^5 \cdot M_4}{2880 n^4}$, где $M_4 = \max\limits_{a \le x \le b} \left| f^{IV}(x) \right|$.

4. Оценка точности вычисления «неберущихся» интегралов

В данной работе вычисление абсолютной и относительной погрешности проводится при условии, что известно точное значение определенного интеграла. Однако не всякая первообразная, даже тогда, когда она существует, выражается в конечном виде через элементарные функции. Таковы первообразные, выраженные интегралами $\int e^{-x^2} dx$, $\int \frac{\sin x}{x} dx$, $\int \frac{\cos x}{x} dx$, $\int \frac{dx}{\ln x}$ и т.д.

Во всех подобных случаях первообразная представляет собой некоторую новую функцию, которая не сводится к комбинации конечного числа элементарных функций.

Определенные интегралы от таких функций можно вычислить только приближенно. Для оценки точности вычисления в таких случаях используют, например, правило Рунге. В данном случае интеграл вычисляется по выбранной формуле (прямоугольников, трапеций, парабол Симпсона) при числе шагов, равном n, а затем при числе шагов, равном $2n$. Погрешность вычисления значения интеграла при числе шагов, равном $2n$, вычисляется по формуле Рунге: $\Delta_{2n} \approx \Theta\left|I_{2n} - I_n\right|$, для формул прямоугольников и трапеций $\Theta = 1/3$, а для формулы Симпсона $\Theta = 1/15$. Таким образом, интеграл вычисляется для последовательных значений числа шагов $N = n_0$, $2n_0$, $4n_0$, ..., где n_0 – начальное число шагов. Процесс вычислений заканчивается, когда для очередного значения N будет выполнено условие $\Delta_{2n} < \varepsilon$, где ε – заданная точность.

Для того чтобы не вычислять один и тот же интеграл по нескольку раз для разных разбиений отрезка интегрирования, можно вычислить шаг интегрирования заранее.

Пример. Выбрать шаг интегрирования для вычисления интеграла $\int\limits_{1,1}^{3,1} \frac{dx}{1-x}$ с точностью 0,01 пользуясь квадратурными формулами прямоугольников, трапеций, Симпсона.

Квадратурная формула прямоугольников.

Вычислим, при каком шаге $h = \dfrac{b-a}{n}$ погрешность будет составлять 0,01:

$$R = \frac{(b-a)^3}{24n^2} f^{(2)}(\eta) = M_2 \frac{(b-a)h^2}{24} \le 0{,}01.$$

Поскольку $M_2 = \sup\limits_{x \in [1{,}1;\, 3{,}1]} \left| f''(x) \right| = \left| f''(1{,}1) \right| \approx 200$, то

$$h=\sqrt{0{,}01\times\frac{24}{M_2(b-a)}}\approx 0{,}025.$$

При шаге $h\approx 0{,}025$ отрезок $[1{,}1;\ 3{,}1]$ разбивается на $N=80$ равностоящих узлов.

Квадратурная формула трапеций.

Вычислим, при каком шаге $h=\dfrac{b-a}{n}$ погрешность составит 0,01:

$$R=-\frac{(b-a)^3}{12n^2}f^{(2)}(\eta)=M_2\frac{(b-a)h^2}{12}\le 0{,}01.$$

Поскольку $M_2=\sup\limits_{x\in[1{,}1;\ 3{,}1]}\left|f''(x)\right|=\left|f''(1{,}1)\right|\approx 200$, $h=\sqrt{0{,}01\times\dfrac{12}{M_2(b-a)}}\approx 0{,}017$.

При шаге $h\approx 0{,}017$,отрезок $[1{,}1;\ 3{,}1]$ разбивается на $N=118$ равностоящих узлов.

Квадратурная формула Симпсона.

Вычислим, при каком шаге $h=\dfrac{b-a}{n}$ погрешность составит 0,01:

$$R=-\frac{(b-a)^5}{2880n^4}f^{(4)}(\eta)=M_4\frac{(b-a)h^4}{2880}\le 0{,}01,$$

$$M_4=\sup_{x\in[1{,}1;3{,}1]}\left|f^{(4)}(x)\right|=\left|f^{(4)}(1{,}1)\right|=2400000,\ h=\sqrt[4]{0{,}01\times\frac{2880}{M_4(b-a)}}\approx 0{,}05.$$

При шаге $h=0{,}05$, отрезок $[1{,}1;\ 3{,}1]$ разбивается на $N=40$ равностоящих узлов.

Как и следовало ожидать, наименьшее количество равностоящих узлов $N=40$ получается при вычислении интеграла по квадратурной формуле Симпсона.

Содержание РГР «Приближенные методы вычисления определенных интегралов»

Студенту предлагается работа, состоящая из четырех этапов:

1 этап – точное вычисление определенного интеграла.

2 этап – приближенное вычисление определенного интеграла одним из методов: прямоугольников или трапеций.

3 этап – приближенное вычисление определенного интеграла методом парабол.

4 этап – расчет и сравнение абсолютной и относительной ошибок приближенных методов: $\Delta = \left| I - I_{np} \right|$, $\delta = \frac{\Delta}{I} \cdot 100\%$, где I – точное решение интеграла, I_{np} – значение интеграла, полученное с помощью приближенных методов.

Построение графика подынтегральной функции.

Варианты и образец выполнения РГР приведены ниже.

Варианты

№ варианта	***f*(*x*)**	***a***	***b***	**Шаг *h***
1	$\frac{\sin 2x}{1+\cos^2 x}$	0	π/2	0,05π
2	$\frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}$	1	2	0,1
3	$x\, e^{-\frac{x^2}{4}}$	0	1	0,1
4	$x\, \sqrt[3]{3-2x^2}$	0	1	0,1
5	$\cos x \sqrt{2+\sin x}$	0	π/2	0,05π
6	$x^2 \sqrt{3-2x^3}$	0	1	0,1
7	$\frac{\sin x}{1+\cos^2 x}$	0	π/2	0,05π
8	$x^2 \sqrt{2+x^3}$	0	1	0,1

9	$x^2\ e^{-x}$	0	1	0,1
10	$x\ \sqrt[3]{2-x^2}$	0	1	0,1
11	$x\ arctgx^2$	0	1	0,1
12	$x\ \sqrt[3]{1+x^2}$	0	1	0,1
13	$\cos x\ \sqrt{2-\sin x}$	0	π/2	0,05π
14	$x^2\ \sqrt{4-x^3}$	0	1	0,1
15	$x^2 \sin x$	0	1	0,1
16	$x^2\ \sqrt{2-x^3}$	0	1	0,1
17	$\frac{\cos x}{1+\sin x}$	0	π/2	0,05π
18	$\ln\left(1+\frac{x^2}{2}\right)x$	0	1	0,1
19	$x^2\ e^{-\frac{x^3}{2}}$	0	1	0,1
20	$\frac{\cos\sqrt{x}}{\sqrt{x}}$	1	2	0,1
21	$\frac{x}{\sqrt{4x+5}}$	0	1	0,1
22	$x^2\ \cos x$	0	π/2	0,05π
23	$x^2\ \sqrt{1+4x^3}$	0	1	0,1
24	$x\sin\left(x^2\right)$	0	π/2	0,05π
25	$\frac{e^x}{1+e^{2x}}$	0	1	0,1
26	$\frac{\sin 2x}{\sqrt{1-\cos 2x}}$	0	π/2	0,05π
27	$\ln(x+1)$	0	1	0,1
28	$tg^2\frac{x}{2}$	0	π/2	0,05π
29	$\sqrt{1+x^2}$	0	1	0,1
30	$\sin x\sqrt{3+\cos x}$	0	π	0,1π

Образец выполнения РГР

Задание. *Вычислить интеграл* $\int_0^1 x^2\sqrt{1+x^3}\,dx$

1. Точное вычисление:

$$\int_0^1 x^2\sqrt{1+x^3}\,dx = \left|\begin{array}{l} \text{делаем замену}: \\ 1+x^3=t, \\ x^2dx=\dfrac{dt}{3}, \\ \text{при } x=0\ t=1, \\ \text{при } x=1\ t=2 \end{array}\right| = \int_1^2 \sqrt{t}\cdot\frac{dt}{3} = \frac{1}{3}\int_1^2\sqrt{t}\,dt = \left.\frac{2t\sqrt{t}}{9}\right|_1^2 = \frac{4\sqrt{2}}{9}-\frac{2}{9} =$$

= 0,40631714.

2. Приближенное вычисление с помощью формул прямоугольников:

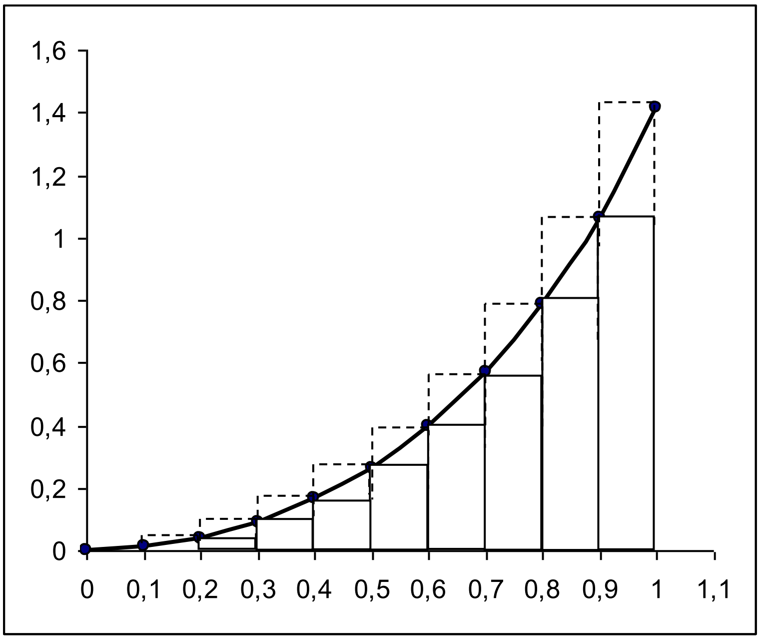
$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{n}(y_o+y_1+y_2+\ldots+y_{n-1}),$$

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{n}(y_1+y_2+\ldots+y_n),\ \frac{b-a}{n}=h.$$

$f(x)=x^2\sqrt{1+x^3}$, $a=0,\ b=1,\ h=0{,}1.$

Составим таблицу:

№	x_i	$y_i = f(x_i)$
0	0	0
1	0,1	0,010005
2	0,2	0,04016
3	0,3	0,091207
4	0,4	0,165041
5	0,5	0,265165
6	0,6	0,396981
7	0,7	0,567851
8	0,8	0,786966
9	0,9	1,065081
10	1	1,414214



По первой формуле прямоугольников получаем:

$$\int_0^1 x^2\sqrt{1+x^3}dx \approx 0{,}1\,(y_o + y_1 + y_2 + \ldots + y_9) = 0{,}1\cdot 3{,}062514 = 0{,}306251.$$

По второй формуле прямоугольников получаем:

$$\int_0^1 x^2\sqrt{1+x^3}dx \approx 0{,}1\,(y_1 + y_2 + y_3 + \ldots + y_{10}) = 0{,}1\cdot 4{,}802669 = 0{,}480267.$$

В данном случае первая формула дает значение интеграла с недостатком, вторая – с избытком.

Вычислим относительную и абсолютную погрешности.

$I = 0{,}40631714,\ I_{np}^1 = 0{,}306251,\ I_{np}^2 = 0{,}480267,$

$$\Delta = \left|I - I_{np}^1\right| \approx 0{,}1001,\quad \delta = \frac{\Delta}{I}\cdot 100\% \approx 25\%.$$

$$\Delta = \left|I - I_{np}^2\right| \approx 0{,}07395,\quad \delta = \frac{\Delta}{I}\cdot 100\% \approx 18\%.$$

3. Приближенное вычисление по формуле трапеций:

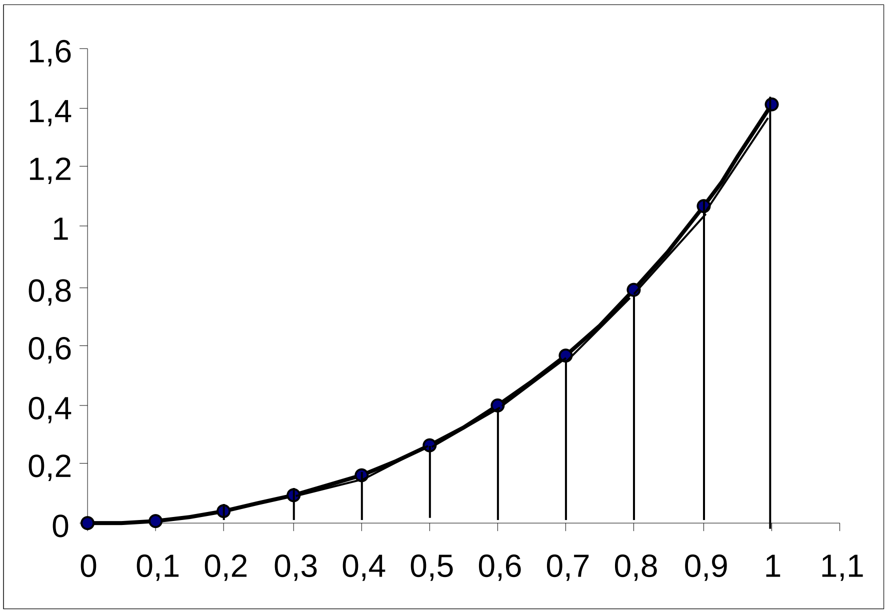
$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{n}\left(\frac{y_o + y_n}{2} + y_1 + y_2 + \ldots + y_{n-1}\right)$$

В нашем случае получаем:

$$\int_0^1 x^2\sqrt{1+x^3}dx \approx 0{,}1\left(\frac{y_o + y_{10}}{2} + y_1 + y_2 + \ldots + y_9\right) =$$

$$=0{,}1\left(\frac{0+1{,}414214}{2} + 0{,}010005 + 0{,}04016 + \ldots + 1{,}065081\right) = 0{,}1\cdot 4{,}095562 =$$

$$=0{,}409556.$$



Вычислим относительную и абсолютную погрешности.

$I = 0{,}40631714,\ I_{np} = 0{,}409556,$

$$\Delta = \left| I - I_{np} \right| \approx 0{,}003239, \quad \delta = \frac{\Delta}{I} \cdot 100\% \approx 0.8\%.$$

4. Приближенное вычисление по формуле Симпсона:

$n = 2m$

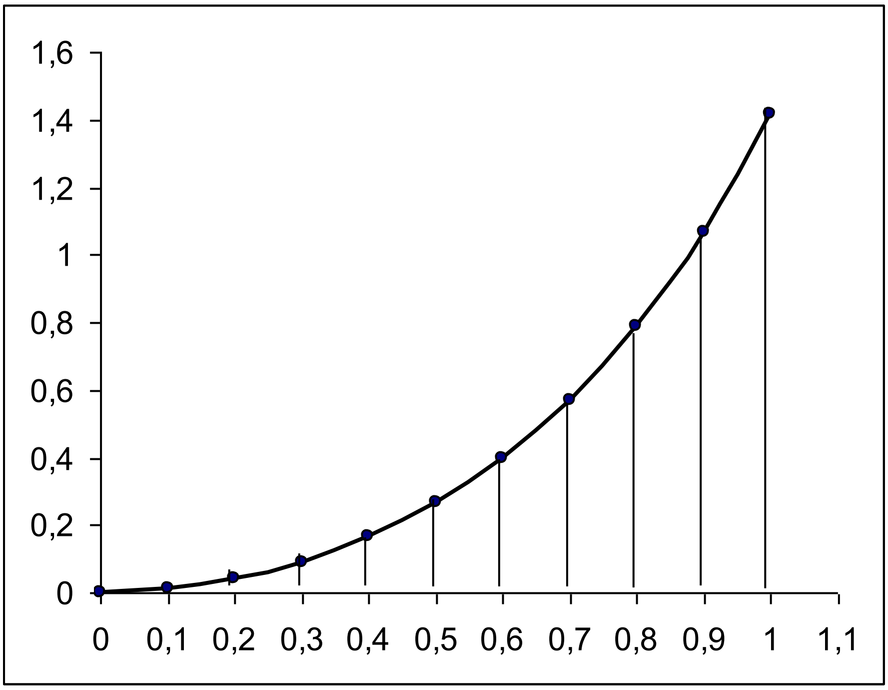
$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{6m}\left[y_o + y_{2m} + 2(y_2 + y_4 + \ldots + y_{2m-2}) + 4(y_1 + y_3 + \ldots + y_{2m-1})\right]$$

В нашем случае получаем:

$$\int_0^1 x^2\sqrt{1+x^3}dx \approx \frac{0.1}{3}\left[y_o + y_{10} + 2(y_2 + y_4 + y_6 + y_8) + 4(y_1 + y_3 + y_5 + y_7 + y_9)\right] =$$

$$= \frac{0.1}{3}\Big[\ 0 + 1{,}414214 + 2(0{,}04016 + 0{,}165041 + 0{,}396981 + 0{,}786966) +$$

$$+ 4(0{,}010005 + 0{,}091207 + 0{,}265165 + 0{,}567851 + 1{,}065081)\ \Big] = 0{,}406325.$$



Вычислим относительную и абсолютную погрешности.

$I = 0{,}40631714$, $I_{np} = 0{,}406325$,

$$\Delta = \left| I - I_{np} \right| \approx 7{,}9 \cdot 10^{-6}, \quad \delta = \frac{\Delta}{I} \cdot 100\% \approx 0.002\%.$$

В действительности, $\int_0^1 x^2 \sqrt{1 + x^3} dx = 0{,}40631714$.

Таким образом, при разбиении отрезка $[0,\ 1]$ на 10 частей по формуле Симпсона мы получили 5 верных знаков; по формуле трапеций – три верных знака; по формуле прямоугольников мы можем ручаться только за первый знак.

Литература:

1. Задачи и упражнения по математическому анализу для втузов: учеб. пособие для втузов / Г. С. Бараненков [и др.]; под ред. Б.П. Демидовича. - М.; Владимир: Астрель: Изд-во АСТ: ВКТ, 2010. – 495 с.

2. Кудрявцев, Л.Д. Краткий курс математического анализа: учеб. для вузов. Т. 1: Дифференциальное и интегральное исчисления функций одной переменной. Ряды / Л. Д. Кудрявцев. - 3-е изд., перераб. - М.: ФИЗМАТЛИТ, 2009. – 399 с.

3. Пискунов, Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисления: учеб. пособие для втузов. В 2 т. Т. 1 / Н. С. Пискунов. - Изд. стер. - М.: Интеграл-Пресс, 2004. – 415 с.

4. Письменный, Д.Т. Конспект лекций по высшей математике: полн. курс / Д.Т. Письменный. – 9-е изд. – М.: Айрис-пресс, 2009. – 608 с.

Баранова И.М., Часова Н.А.

МАТЕМАТИКА

ПРИБЛИЖЕННЫЕ МЕТОДЫ ВЫЧИСЛЕНИЯ ОПРЕДЕЛЕННЫХ ИНТЕГРАЛОВ

Методические указания к выполнению расчетно-графической работы для студентов всех специальностей и всех направлений подготовки бакалавров очной формы обучения

Формат Объем Тираж Заказ

Брянск, Станке Димитрова 3, Редакционно-издательский отдел
Отпечатано: Печатный цех БГИТУ