Российская Федерация Министерство путей сообщения
ГОУ ВПО “Дальневосточный государственный
университет путей сообщения МПС России”

Кафедра “Теоретическая механика”

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА

Сборник задач в 3-х частях
Часть 3

ДИНАМИКА

Под редакцией В.И. Доронина
5-е издание

Рекомендовано
Дальневосточным региональным учебно-методическим центром
в качестве учебного пособия для студентов вузов региона

Хабаровск
Издательство ДВГУПС
2003

Рецензенты:

Член-корреспондент Академии транспорта России, доктор технических наук, заведующий кафедрой “Теоретическая механика” Дальневосточного государственного технического университета, профессор *И.С. Лукьянов*;

Кафедра “Теоретическая механика” Хабаровского государственного технического университета (заведующий кафедрой, доктор физико-математических наук,
профессор *Б.С. Задохин*)

Т 338 Теоретическая механика. Сборник задач в 3-х частях. Ч. 3: Динамика. – 5-е / Под ред. В.И. Доронина. – Хабаровск: Изд-во ДВГУПС, 2003. – 167 с.: ил.

Учебное пособие соответствует государственному образовательному стандарту дисциплины “Теоретическая механика”.

Пособие содержит 29 задач по динамике, каждая задача имеет 30 вариантов. Это позволяет преподавателю выдать каждому студенту в группе индивидуальное задание на курсовую работу. Задачи, включенные в пособие, имеют простые расчетные схемы, решение их не требует каких-либо искусственных приемов и сложных математических преобразований.

Учебное пособие составлено с целью рациональной организации самостоятельной работы студентов высших технических учебных заведений при освоении ими методики решения задач по разделу “Динамка” курса теоретической механики. Некоторые задачи пособия могут быть использованы преподавателями для тестового контроля знаний студентов. Предназначено для студентов технических специальностей всех форм обучения.

УДК 531(075.8)

ББК В236

Оглавление

ВВЕДЕНИЕ

Третья часть пособия содержит минимальное число задач, которые студент должен самостоятельно решить для ознакомления с основными приемами динамического исследования движения материальных точек, твердых тел и механических систем. Основное внимание при подборе задач уделено необходимости приобретения студентами опыта выполнения элементарных операций. Такими операциями в разделе “Динамика” являются составление расчетных схем, составление и решение дифференциальных уравнений движения точек и тел с использованием основных законов динамики, определение кинетической энергии механических систем, определение работы переменных сил, определение сил инерции для различных движений твердого тела, определение обобщенных сил системы. В конце каждого раздела сборника помещены комплексные задачи на динамическое исследование движения различных объектов.

Первое издание сборника задач было осуществлено в 1973 году; составителями задач, помещенных в нем, были Н.Н. Бобылева, В.И. Доронин, В.Ю. Иванченко, Т.П. Кустова, Н.М. Рачек, Г.К. Федоров.

Проверкой ответов и подготовкой сборника к первому изданию, кроме авторов, занимались Е.А. Кравченко, Э.В. Соколова, В.Т. Мазаник.

Второе и третье издания были стереотипными.

В четвертом издании (1996 г.) уменьшено число задач по сравнению с первыми изданиями (29 вместо 35), отредактированы условия некоторых задач, устранены замеченные опечатки и ошибки. В этой работе приняли участие В.И. Доронин, В.Ю. Иванченко, Е.А. Кравченко, Н.М. Рачек, Т.Н. Силукова, Э.В. Соколова, А.А. Чибуркин

Пятое издание печатается без изменений по сравнению с четвертым изданием.

В приведенной ниже таблице указаны номера задач первых трех изданий и соответствующие им номера задач из четвертого и пятого издания.

1–3 изд.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
4–5 изд.	–	–	–	–	1	2	3	4	5	6	7	8	–	–	9	10	11	12

1–3 изд.	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35
4–5 изд.	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29

1. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ

Задача № 1. Варианты 1–5

Материальная точка массой m движется по горизонтальной оси x под действием силы, проекция которой на эту ось задана (см. табл. 1.1, где A и к – постоянные величины, t – время движения). Пренебрегая сопротивлением движению, найти уравнение движения точки, если в начальный момент $x_0 = 0$, $\dot{x}_0 = V_0$.

Таблица 1.1

№ вар.	Дано	Ответ
1	$F_x = A \sin \kappa t$	$x = V_0 t + \frac{A}{\kappa^2 m} (\kappa t - \sin \kappa t)$
2	$F_x = A \cos \kappa t$	$x = V_0 t + \frac{A}{\kappa^2 m} (1 - \cos \kappa t)$
3	$F_x = A (1 - t)$	$x = V_0 t + \frac{A t^2}{6 m} (3 - t)$
4	$F_x = \kappa t$	$x = V_0 t + \frac{\kappa t^3}{6 m}$
5	$F_x = A (\sin \kappa t + \cos \kappa t)$	$x = V_0 t + \frac{A}{\kappa^2 m} (1 + \kappa t - \sin \kappa t - \cos \kappa t)$

Варианты 6–9

Материальная точка массой m движется по горизонтальной оси x под действием силы, проекция которой на эту ось задана (см. табл. 1.2, где A и к – постоянные величины, t – время движения). Принимая, что сила сопротивления движению постоянна и равна R, найти уравнение движения точки, если в начальный момент $x_0 = 0$, $\dot{x}_0 = 0$.

Таблица 1.2

№ вар.	Дано	Ответ
6	$F_x = A \sin \kappa t$	$x = \frac{A}{\kappa^2 m} (\kappa t - \sin \kappa t) - \frac{R t^2}{2 m}$
7	$F_x = A \cos \kappa t$	$x = \frac{A}{\kappa^2 m} (1 - \cos \kappa t) - \frac{R t^2}{2 m}$
8	$F_x = A (1 - t)$	$x = \frac{A t^2}{6 m} (3 - t) - \frac{R t^2}{2 m}$
9	$F_x = \kappa t$	$x = \frac{\kappa t^3}{6 m} - \frac{R t^2}{2 m}$

Вариант 10

Корабль движется прямым курсом под действием силы упора винтов Q = к t, где к – постоянная величина, t – время движения. Найти закон движения корабля S = S(t), принимая во внимание, что сила сопротивления воды постоянна и равна R. В начальный момент $S_0 = 0$, $V_0 = 0$.

Ответ: $S = \frac{t^2}{6m}(к\,t - 3\,R).$

Вариант 11

В момент прекращения работы двигателей корабль водоизмещением P имел скорость V_0. Определить уравнение последующего прямолинейного движения S = S (t), если сила сопротивления R = c + к V, где С и К – постоянные величины, V – скорость корабля.

Ответ: $S = \frac{1}{к}\left[(c + к\,V_0)\frac{1}{\mu}(1 - e^{-\mu t}) - ct\right]$, где $\mu = \frac{к\,g}{P}$.

Вариант 12

Шар весом P падает без начальной скорости, испытывая сопротивление среды R = к V , где к – постоянная величина, V – скорость шара. Найти закон движения шара.

Ответ: $S = \frac{P}{к}\left[t - \frac{1}{\mu}(1 - e^{-\mu t})\right]$, где $\mu = \frac{к\,g}{P}$.

Вариант 13

Принимая, что сила сопротивления воздуха в свободном горизонтальном полете планера изменяется по закону R = к m V, где к – постоянный коэффициент, m – масса планера, V – его скорость, найти закон движения планера x = x (t). Считать, что при t = 0, $x_0 = 0$, $\dot{x}_0 = V_0$.

Ответ: x = $\frac{V_0}{к}(1 - e^{-кt})$.

Вариант 14

Тело массой m движется по горизонтальной прямой из состояния покоя под действием постоянной силы F. Определить уравнение движения, зная, что суммарное сопротивление движению R = μ V, где μ – постоянная величина, V – скорость тела.

Ответ: $x = \frac{F}{\mu}\left[t - \frac{1}{\kappa}(1 - e^{-\kappa t})\right]$, где $\kappa = \frac{\mu}{m}$.

Вариант 15

Определить закон опускания S = S(t) груза весом P в воде, считая, что сила сопротивления воды R = к V, где к – постоянная величина, V – скорость груза. Выталкивающей силой пренебречь. В начальный момент $S_0 = 0$, $V_0 = 0$.

Ответ: $S = \frac{1}{\mu\,\kappa}\left[g\,\kappa\,t - P(1 - e^{-\mu t})\right]$, где $\mu = \frac{g\,\kappa}{P}$.

Вариант 16

Определить уравнение горизонтального движения самолета весом P, считая, что горизонтальная составляющая силы тяги мотора постоянна и равна Q, а суммарное сопротивление движению R = кV, где к – постоянный коэффициент, V – скорость самолета. Считать, что при t = 0, $x_0 = 0$, $\dot{x}_0 = V_0$.

Ответ: $x = \frac{1}{\kappa}\left[Q\,t - \frac{1}{\mu}(Q - \kappa\,V_0)(1 - e^{-\mu t})\right]$, где $\mu = \frac{g\,\kappa}{P}$.

Варианты 17–18

Материальная точка движется вдоль горизонтальной оси x. Сила сопротивления движению R = f(V) (см. табл. 1.3, где к – постоянный коэффициент, m – масса точки, V – скорость точки). Найти уравнение движения точки, если при t = 0, $x_0 = 0$, $\dot{x}_0 = V_0$.

Таблица 1.3

№ вар.	Дано	Ответ
17	$R = \kappa\,m\,\sqrt{V}$	$x = \frac{\kappa^2}{4}\left(\frac{4}{\kappa^2}V_0\,t - \frac{2}{\kappa}\sqrt{V_0}\,t^2 + \frac{1}{3}t^3\right)$
18	$R = \kappa\,m\,\sqrt[3]{V}$	$x = \frac{3}{5\kappa}V_0^{5/3} - \frac{3}{5\kappa}\left(V_0^{2/3} - \frac{2}{3}\kappa\,t\right)^{5/3}$

Вариант 19

Тело, находящееся на гладкой плоскости, наклоненной под углом α к горизонту, в некоторый момент начинает скользить вниз с начальной скоростью V_0. Найти уравнение движения тела, если сила сопротивления $R = к\, m\, V$, где к – постоянный коэффициент, m – масса тела, V – скорость тела.

Ответ: $S = \frac{1}{к^2}\left[g\, к\, t \sin\alpha - (g \sin\alpha - к\, V_0)(1 - e^{-кt})\right]$.

Варианты 20–23

Материальная точка массой m поднимается по оси x, наклоненной под углом α к горизонту, под действием силы, проекция которой на ось x задана (см. табл. 1.4, где A и к – постоянные величины, t – время движения). Найти уравнение движения точки, зная, что ее начальная скорость равна нулю.

Таблица 1.4

№ вар.	Дано	Ответ
20	$F_x = A \sin кt$	$x = \frac{A}{к^2 m}(к t - \sin кt) - \frac{g}{2} t^2 \sin\alpha$
21	$F_x = A \cos кt$	$x = \frac{A}{к^2 m}(1 - \cos кt) - \frac{g}{2} t^2 \sin\alpha$
22	$F_x = A (1 – t)$	$x = \frac{A t^2}{6 m}(3 - t) - \frac{g}{2} t^2 \sin\alpha$
23	$F_x = к\, t$	$x = \frac{к\, t^3}{6 m} - \frac{g}{2} t^2 \sin\alpha$

Вариант 24

Материальная точка движется по горизонтальной оси x под действием силы отталкивания от начала координат O, изменяющейся по закону $F = к^2 m\, x$, где к – постоянный коэффициент, m – масса точки, x – координата точки. Найти уравнение движения точки, если в начальный момент $x_0 = 0$, $\dot{x}_0 = V_0$.

Ответ: x = $\frac{V_0}{2\,к}(e^{кt} - e^{-кt})$.

Вариант 25

В условиях варианта 24 найти уравнение движения точки, учитывая, что на нее действует также постоянная сила трения R = к m V_0.

Ответ: x = $\frac{V_0}{к}(1 - e^{-кt})$.

Вариант 26

Телу, находящемуся на поверхности Земли сообщена начальная вертикальная скорость V_0 = $\sqrt{2\,gR}$, где g – ускорение свободного падения, R – радиус Земли. На тело действует сила притяжения Земли, изменяющаяся обратно пропорционально квадрату расстояния тела до центра Земли. Пренебрегая сопротивлением воздуха, найти уравнение движения тела
y = y(t), принимая за начало координат центр Земли.

Ответ: y = $\left[R^{3/2} + \frac{3}{2}R\sqrt{2g}\,t\right]^{2/3}$.

Вариант 27

Материальная точка движется по горизонтальной оси x под действием силы притяжения к началу координат O, изменяющейся по закону F = m x^{-3}, где m – масса точки, x – ее координата. Определить закон движения точки, если в начальный момент x_0 = к, $\dot{x}_0 = 1/к$.

Ответ: x = $\sqrt{к^2 + 2\,t}$.

Варианты 28–29

Частица массой m, несущая заряд e электричества, влетает в однородное электрическое поле со скоростью V_0, совпадающей по направлению с напряженностью поля E. Закон изменения величины E дан в табл. 1.5, где A и к – постоянные величины, t – время. Найти уравнение движения частицы, если в поле на нее действует сила $\overline{F} = e\,\overline{E}$. Влиянием силы тяжести пренебречь. Начальное положение частицы принять за начало координат.

Таблица 1.5

№ вар.	Дано	Ответ
28	E = A cos κt	$x = V_0 t + \frac{Ae}{\kappa^2 m}(1 - \cos\kappa t)$
29	E = A sin κt	$x = V_0 t + \frac{Ae}{\kappa^2 m}(\kappa t - \sin\kappa t)$

Вариант 30

При движении тела весом P вдоль горизонтальной оси x в неоднородной среде сила сопротивления изменяется по закону $R = \kappa\,(V^2/x)$, где к – постоянный коэффициент, V – скорость тела, x – его координата. В начальный момент $x_0 = a$, $\dot{x}_0 = V_0$. Определить скорость тела в положении, когда координата x равна $2a$.

Ответ: $V = V_0\, 2^{-\kappa/m}$.

Задача № 2. Варианты 1–2

Телу весом P сообщена вертикально вверх начальная скорость. Сила сопротивления движению R = f(V) задана (см. табл. 1.6, где к – постоянный коэффициент). Найти время T и высоту H наибольшего подъема тела.

Таблица 1.6

№ вар.	Дано	Ответ	
1	$R = \kappa P V$	$T = \frac{1}{g\kappa}\ln(1+\kappa V_0)$,	$H = \frac{1}{g\kappa}\left[V_0 - \frac{1}{\kappa}\ln(1+\kappa V_0)\right]$
2	$R = \kappa^2 P V^2$	$T = \frac{1}{g\kappa}\operatorname{arctg}\kappa V_0$,	$H = \frac{1}{2g\kappa^2}\ln(1+\kappa^2 V_0^2)$

Варианты 3–7

Материальная точка массой m, которой сообщена начальная скорость V_0, движется по горизонтальной прямой в среде, сила сопротивления среды равна R = f(V) (см. табл. 1.7, где к – постоянный коэффициент). Определить время T, прошедшее от начала движения точки до остановки, и путь S, пройденный точкой.

Таблица 1.7

№ вар.	Дано	Ответ
3	$R = m\kappa\sqrt{V}$	$T = \frac{2}{\kappa}\sqrt{V_0}, \quad S = \frac{2}{3\kappa}\sqrt{V_0^3}$
4	$R = m\kappa(1+V)$	$T = \frac{1}{\kappa}\ell n(1+V_0), \quad S = \frac{1}{\kappa}[V_0 - \ell n(1+V_0)]$
5	$R = \kappa^2 m(1+V^2)$	$T = \frac{1}{\kappa^2}\mathrm{arctg}V_0, \quad S = \frac{1}{2\kappa^2}\ell n(1+V_0^2)$
6	$R = \kappa m\sqrt[3]{V}$	$T = \frac{3}{2\kappa}\sqrt[3]{V_0^2}, \quad S = \frac{3}{5\kappa}V_0\sqrt[3]{V_0^2}$
7	$R = \kappa m\sqrt{1+V}$	$T = \frac{2}{\kappa}(\sqrt{1+V_0} - 1), \; S = \frac{2}{\kappa}\left[\frac{1}{3}\sqrt{(1+V_0)^3} - \sqrt{1+V_0} + \frac{2}{3}\right]$

Вариант 8

Определить скорость V_0, которую нужно сообщить по вертикали вверх телу весом P, находящемуся на поверхности Земли, для того, чтобы оно поднялось на высоту H. Сила сопротивления воздуха $R = \kappa^2 P V^2$, где к – постоянный коэффициент.

Ответ: $V_0 = \frac{1}{\kappa}\sqrt{e^{2g\kappa^2 H} - 1}$.

Варианты 9–11

Точка массой m движется по горизонтальной прямой, испытывая сопротивление среды. Сила сопротивления среды R = f(V) (табл. 1.8, где к – постоянный коэффициент). Какую начальную скорость следует сообщить точке, чтобы она прошла путь, равный S.

Таблица 1.8

№ вар.	Дано	Ответ
9	$R = \kappa m\sqrt{V}$	$V_0 = \sqrt[3]{\left(\frac{2}{3}\kappa S\right)^2}$
10	$R = \kappa m(1+V^2)$	$V_0 = \sqrt{e^{2\kappa S} - 1}$
11	$R = \kappa m\sqrt[3]{V}$	$V_0 = \sqrt[5]{\left(\frac{5}{3}\kappa S\right)^3}$

Варианты 12–15

Точка массой m движется по горизонтальной прямой с начальной скоростью V_0, испытывая сопротивление среды. Сила сопротивления среды R = f(V) (см. табл. 1.9, где к – постоянный коэффициент). Какое расстояние S пройдет точка, прежде чем ее скорость уменьшиться в два раза? За какое время T точка пройдет это расстояние?

Таблица 1.9

№ вар.	Дано	Ответ
12	$R = \kappa m \sqrt{V}$	$T = \dfrac{\sqrt{2V_0}}{\kappa}(\sqrt{2}-1)$, $\quad S = \dfrac{\sqrt{2}}{6\kappa}(2\sqrt{2}-1)\sqrt{V_0^3}$
13	$R = \kappa m \sqrt[3]{V}$	$T = \dfrac{3}{4\kappa}(2-\sqrt[3]{2})\sqrt[3]{V_0^2}$, $\quad S = \dfrac{3}{20\kappa}(4-\sqrt[3]{2})\sqrt[3]{V_0^5}$
14	$R = \kappa m (1+V)$	$T = \dfrac{1}{\kappa}\ell n\dfrac{2(1+V_0)}{2+V_0}$, $\quad S = \dfrac{1}{2\kappa}\left[V_0 - 2\,\ell n\dfrac{2(1+V_0)}{2+V_0}\right]$
15	$R = \kappa^2 m (1+V^2)$	$T = \dfrac{1}{\kappa^2}\left(\operatorname{arctg} V_0 - \operatorname{arctg}\dfrac{V_0}{2}\right)$, $\quad S = \dfrac{1}{2\kappa^2}\ell n\dfrac{4(1+V_0^2)}{4+V_0^2}$

Варианты 16–17

Тело весом P падает в среде без начальной скорости. Сопротивление R = f(V) (табл. 1.10, где к – постоянный коэффициент). Найти скорость V точки по истечении времени T после начала падения, а также ее максимальную скорость.

Таблица 1.10

№ вар.	Дано	Ответ
16	$R = \kappa^2 P V^2$	$V = \dfrac{1}{\kappa}\dfrac{e^{g\kappa T} - e^{-g\kappa T}}{e^{g\kappa T} + e^{-g\kappa T}}$, $\quad V_{max} = \dfrac{1}{\kappa}$
17	$R = \kappa P V$	$V = \dfrac{1}{\kappa}(1-e^{-g\kappa T})$, $\quad V_{max} = \dfrac{1}{\kappa}$

Варианты 18–20

Точка массой m начинает двигаться по горизонтальной оси X без начальной скорости из положения $x_0 = a$ под действием силы притяжения к началу координат F = f(X) (табл. 1.11, где к – постоянный коэффициент). Найти момент времени T, когда точка окажется в положении $x_1 = \frac{1}{2}\,a$. Определить скорость V точки в этом положении.

Таблица 1.11

№ вар.	Дано	Ответ
18	$F = \frac{к\,m}{X^3}$	$V = \frac{\sqrt{3\,к}}{a}, \quad T = \frac{a^2}{2}\sqrt{\frac{3}{к}}$
19	$F = \frac{к\,m}{X^2}$	$V = \sqrt{\frac{2к}{a}}, \quad T = a\sqrt{\frac{a}{2\,к}}\,\frac{(2+\pi)}{4}$
20	$F = к\,m\,X$	$V = \frac{a}{2}\sqrt{3\,к}\,, \quad T = \frac{\pi}{6\sqrt{к}}$

Варианты 21–24

Точка весом P движется вертикально вверх по оси y под действием силы отталкивания от начала координат F = f(y) (табл. 1.12, где к – постоянный коэффициент). В начальный момент $y_0 = 0$, $V_0 = 0$. Определить зависимость между скоростью точки в данный момент и ее координатой.

Таблица 1.12

№ вар.	Дано	Ответ
21	$F = к\,P\,(1 + y)$	$V = \sqrt{g\,y\,[к\,(2+y)-2]}$
22	$F = к\,P\,(1 + y)^{-1}$	$V = \sqrt{2\,g\,[к\ell n\,(1+y)-y]}$
23	$F = к\,P\,(1 + y)^{-2}$	$V = \sqrt{2\,g\,y\,\frac{к-1-y}{1+y}}$
24	$F = к\,P\,(1 + y)^{-3}$	$V = \frac{1}{1+y}\sqrt{(1+y)^2\,(1-2\,g\,y)-к\,g}$

Варианты 25–28

Материальная точка массой m движется по горизонтальной оси x под действием силы, проекция которой на эту ось F = f(t) (табл. 1.13, где F_0, к – постоянные величины).

Определить скорость и положение точки через t, с, после начала движения, если в начальный момент $x_0 = 0$, $\dot{x}_0 = V_0$.

Таблица 1.13

№ вар.	Дано	Ответ
25	$F_x = F_0 \cos кt$	$V = \frac{F_0}{к\,m}\sin кt + V_0;\quad x = \frac{F_0}{к^2\,m}(1 - \cos кt) + V_0 t$
26	$F_x = F_0 \sin кt$	$V = \frac{F_0}{к\,m}(1 - \cos кt) + V_0;\ x = \left(V_0 + \frac{F_0}{к\,m}\right)t - \frac{F_0}{к^2\,m}\sin кt$
27	$F_x = F_0 + к\,t$	$V = \frac{F_0}{к\,m}t + \frac{кt^2}{2m} + V_0;\quad x = \frac{F_0 t^2}{2m} + \frac{к}{6m}t^3 + V_0 t$
28	$F_x = F_0\, e^{-t}$	$V = \frac{F_0}{m}(1 - e^{-t}) + V_0;\quad x = \frac{F_0}{m}(t + e^{-t} - 1) + V_0 t$

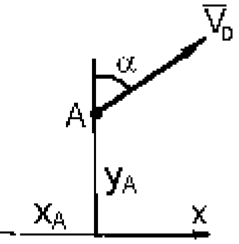
Варианты 29–30

Материальная точка весом P движется по горизонтальной оси x под действием силы, проекция которой на эту ось Fx = f(t) (табл. 1.14, где к – постоянный коэффициент). Определить положение точки в момент остановки, если в начальный момент $x_0 = 0$, $V_0 = 0$.

Таблица 1.14

№ вар.	Дано	Ответ
29	$F_x = к\,P\,(1 - t)$	$x = \frac{2}{3}\,g\,к$
30	$F_x = к\,P\,(1 - t^2)$	$x = \frac{3}{4}\,g\,к$

Задача № 3. Варианты 1–3



Из орудия, находящегося в точке А, произведен выстрел под углом а (табл. 1.15) к вертикали с начальной скоростью V_0. Считая, что полет снаряда происходит в плоскости ху и на него действует только сила тяжести, найти уравнения движения и траекторию у = f(x) снаряда.

Таблица 1.15

№ вар.	Дано			Ответ
	x_A	y_A	α	
1	0	0	$0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2}$	$y = \operatorname{ctg}\alpha\, x - \dfrac{g}{2(V_0 \sin\alpha)^2}\, x^2$
2	S	h	$\dfrac{\pi}{2}$	$y = h - \dfrac{g}{2V_0^2}(x - S)^2$
3	0	h	$\dfrac{3}{4}\pi$	$y = h - x - \dfrac{g}{V_0^2}\, x^2$

Вариант 4

В условиях варианта 1 найти уравнения движения снаряда и дальность обстрела L.

Ответ: $L = \dfrac{V_0^2}{g}\sin 2\alpha$.

Вариант 5

В условиях варианта 1 найти уравнения движения снаряда и определить, при каком угле α * будет наибольшая дальность обстрела.

Ответ: $\alpha^* = \dfrac{\pi}{4}$.

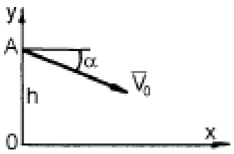
Вариант 6

В условиях варианта 1 найти уравнения движения и наибольшую высоту Н траектории снаряда.

Ответ: $H = \dfrac{V_0^2 \cos^2\alpha}{2g}$.

Вариант 7

С самолета, летящего по прямолинейному участку траектории под углом а = 60° к горизонту, сброшен груз без начальной относительной скорости. Считая, что при



сбрасывании груза самолет находился на высоте h над землей в точке А и имел скорость $\overline{V}_0$, найти уравнения движения и траекторию y = f(x) груза, если груз движется в плоскости xy под действием только силы тяжести.

Ответ: $y = h - \sqrt{3x} - \dfrac{2g}{V_0^2}x^2$.

Вариант 8

В условиях варианта 7 при α = 0 найти уравнения движения и траекторию y = f(x) груза.

Ответ: $y = h - \dfrac{g}{2V_0^2}x^2$.

Вариант 9

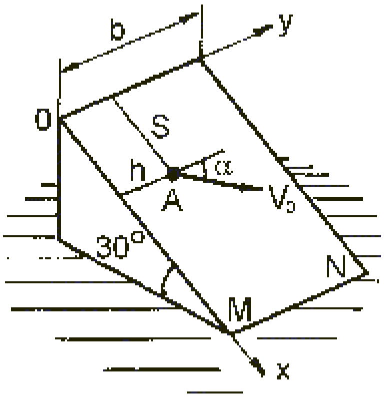
В условиях варианта 7 при α = 0 найти уравнения движения груза и определить, какое расстояние L по горизонтали пролетит груз до падения на землю.

Ответ: L = $V_0\sqrt{\dfrac{2h}{g}}$.

Варианты 10–11

Тяжелое тело скользит по наклонной плоскости xy, образующей угол 30° с горизонтальной поверхностью. Найти уравнения движения и траекторию x = f(y) тела, если оно стало двигаться из точки А (S; h) с начальной скоростью $\overline{V}_0$, образующей угол α (табл. 1.16) с осью y. Трение и сопротивление воздуха не учитывать.

Таблица 1.16



№ вар.	Дано	Ответ
	α	$x = f(y)$
10	0	$x = S + \dfrac{g}{4V_0^2}\ (y-h)^2$
11	$\dfrac{\pi}{4}$	$x = S + y - h + \dfrac{g}{2V_0^2}\ (y-h)^2$

Вариант 12

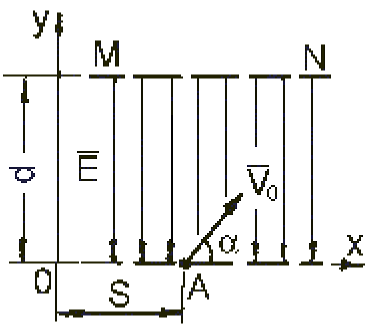
В условиях варианта 10 найти уравнения движения тела и определить, через сколько времени T тело достигнет края MN наклонной плоскости, если OM = 2S (ширина плоскости b достаточно большая).

Ответ: $T = 2\sqrt{\dfrac{S}{g}}$.

Варианты 13–14

Частица массой m, несущая заряд отрицательного электричества e, влетает в точке A (S; 0) в однородное электрическое поле плоского конденсатора напряженностью E со скоростью V_0 под углом α (табл. 1.17) к оси x. Вектор $\overline{E}$ напряженности поля направлен противоположно оси y. Найти уравнения движения и траекторию y = f(x) частицы, зная, что в электрическом поле на нее действует сила $\overline{F} = -e\overline{E}$. Действием силы тяжести пренебречь.

Таблица 1.17



№ вар.	Дано	Ответ
	α	$y = f(y)$
13	$\dfrac{\pi}{3}$	$y = \dfrac{2eE}{mV_0^2}(x-S)^2 + \sqrt{3}(x-S)$
14	0	$y = \dfrac{eE}{2mV_0^2}(x-S)^2$

Вариант 15

В условиях варианта 14 найти уравнения движения частицы и определить координату x* точки, в которой частица попадет на обкладку конденсатора, если расстояние между обкладками равно d.

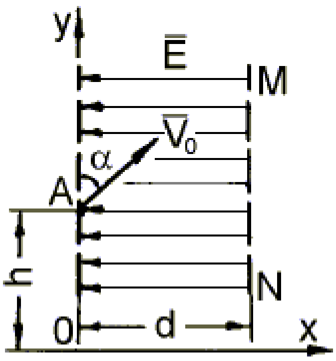
Ответ: $x^* = S + V_0 \sqrt{\dfrac{2md}{eE}}$.

Вариант 16

В условиях варианта 13 для случая, когда вектор $\bar{E}$ совпадает по направлению с осью y, найти уравнения движения частицы и определить расстояние d между обкладками конденсатора, при котором частица не достигнет обкладки MN.

Ответ: $d > \dfrac{3mV_0^2}{8eE}$.

Варианты 17–20



Тяжелая частица массой m, несущая заряд отрицательного электричества e, влетает в точке A (0; h) в однородное электрическое поле плоского конденсатора напряженностью E со скоростью V_0 под углом α (табл. 1.18) к оси y. Вектор $\bar{E}$ напряженности поля направлен противоположно оси x. Найти уравнения движения частицы в плоскости xy под действием силы тяжести, направленной противоположно оси y, и силы поля $\bar{F} = -e\bar{E}$.

Таблица 1.18

№ вар.	Дано α	Ответ $x = f_1(t)$	Ответ $y = f_2(t)$
17	$\dfrac{\pi}{2}$	$x = V_0 t + \dfrac{eE}{2m}t^2$	$y = h - \dfrac{gt^2}{2}$
18	$0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2}$	$x = V_0 \sin\alpha t + \dfrac{eE}{2m}t^2$	$y = h + V_0 \cos\alpha t - \dfrac{gt^2}{2}$
19	$\dfrac{3}{4}\pi$	$x = \dfrac{\sqrt{2}}{2}V_0 t + \dfrac{eE}{2m}t^2$	$y = h - \dfrac{\sqrt{2}}{2}V_0 t - \dfrac{gt^2}{2}$
20	0	$x = \dfrac{eE}{2m}t^2$	$y = h + V_0 t - \dfrac{gt^2}{2}$

Вариант 21

В условиях варианта 20 найти уравнения движения частицы и определить координату y* точки, в которой частица попадет на обкладку MN конденсатора, если расстояние между обкладками равно d.

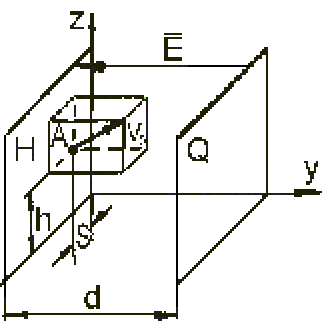
Ответ: $y^{*} = h + V_0 \sqrt{\frac{2md}{eE} - \frac{dgm}{eE}}$.

Вариант 22

В условиях варианта 17 для случая, когда вектор $\bar{E}$ совпадает с направлением оси x, найти уравнения движения частицы и определить на каком расстоянии L от точки A частица пересечет ось y.

Ответ: $L = 2g\left(\frac{mV_0}{eE}\right)^2$.

Варианты 23–29



Тяжелая частица массой m, несущая заряд отрицательного электричества e, влетает в точке A (S; 0; h) со скоростью $\bar{V}_0$ ($\dot{x}_0; \dot{y}_0; \dot{z}_0$) (табл. 1.19) в однородное электрическое поле между обкладками H и Q плоского конденсатора. Вектор $\bar{E}$ напряженности поля направлен противоположно оси y.

Найти уравнения движения частицы под действием силы тяжести, направленной противоположно оси z и силы поля $\bar{F} = -e\bar{E}$.

Таблица 1.19

№ вар.	Дано			Ответ		
	$\dot{x}_0$	$\dot{y}_0$	$\dot{z}_0$	$x = f_1(t)$	$y = f_2(t)$	$z = f_3(t)$
23	ℓ	0	0	$x = S + \ell t$	$y = \frac{eE}{2m}t^2$	$z = h - \frac{g}{2}t^2$
24	ℓ	k	0	$x = S + \ell t$	$y = kt + \frac{eE}{2m}t^2$	$z = h - \frac{g}{2}t^2$
25	ℓ	k	n	$x = S + \ell t$	$y = kt + \frac{eE}{2m}t^2$	$z = h + nt - \frac{g}{2}t^2$
26	0	k	n	$x = S$	$y = kt + \frac{eE}{2m}t^2$	$z = h + nt - \frac{g}{2}t^2$
27	0	0	n	$x = S$	$y = \frac{eE}{2m}t^2$	$z = h + nt - \frac{g}{2}t^2$
28	0	k	0	$x = S$	$y = kt + \frac{eE}{2m}t^2$	$z = h - \frac{g}{2}t^2$
29	ℓ	0	n	$x = S + \ell t$	$y = \frac{eE}{2m}t^2$	$z = h + nt - \frac{g}{2}t^2$

Вариант 30

В условиях варианта 23 определить через сколько времени T частица достигнет обкладки Q, если расстояние между обкладками равно d.

Ответ: $T = \sqrt{\frac{2dm}{eE}}$.

Задача № 4. Варианты 1–2

Материальная точка массой m движется в горизонтальной плоскости xy под действием двух сил: силы отталкивания F от начала координат 0 и силы притяжения F_1 к неподвижному центру A с координатами (ℓ; 0). Величины сил пропорциональны расстояниям точки от этих центров, коэффициент пропорциональности – к m. Найти уравнения движения и траекторию x = f(y) точки. Начальные условия даны в табл. 1.20.

Таблица 1.20

№ вар.	Дано				Ответ
	x_0	y_0	$\dot{x}_0$	$\dot{y}_0$	$x = f(y)$
1	0	h	0	V_0	$x = \frac{\kappa \ell}{2V_0^2}(y-h)^2$

2	0	0	α	β	$x = \dfrac{\kappa \ell}{2\beta^2} y^2 + \dfrac{\alpha}{\beta} y$

Варианты 3–4

Частица массой m, несущая заряд отрицательного электричества e, влетает в однородное электрическое поле с переменной напряженностью E = E(t) (табл. 1.21, где A и к – постоянные величины) со скоростью $\overline{V}_0$, перпендикулярной $\overline{E}$. Пренебрегая действием силы тяжести, найти уравнения движения и траекторию y = f(x) частицы в поле, если на нее действует сила поля $\overline{F} = -e\overline{E}$. Начало координат взять в начальном положении точки, ось y направить по направлению $\overline{E}$, ось x – по направлению $\overline{V}_0$.

Таблица 1.21

№ вар.	Дано	Ответ
3	E = A sin кt	$y = \dfrac{eA}{m\kappa^2}\left(\sin\dfrac{\kappa x}{V_0} - \dfrac{\kappa x}{V_0}\right)$
4	E = A cos кt	$y = -\dfrac{eA}{m\kappa^2}\left(1 - \cos\dfrac{\kappa x}{V_0}\right)$

Варианты 5–6

При перемещении заряженной частицы массой m в однородном электрическом поле на нее действует сила тяжести и горизонтальная сила поля F = F(t) (табл. 1.22, где A и к – постоянные величины). Найти уравнения движения и траекторию x = f(y) частицы, считая, что при вступлении в поле частица имела горизонтальную скорость $\overline{V}_0$, направленную в сторону действия силы $\overline{F}$. Начало координат взять в начальном положении частицы, ось x направить по $\overline{V}_0$, ось y – вертикально вниз.

Таблица 1.22

№ вар.	Дано	Ответ

5	F = A sin кt	$x = \left(\frac{A}{m\kappa} + V_0\right)\sqrt{\frac{2y}{g}} - \frac{A}{m\kappa^2}\sin\kappa\sqrt{\frac{2y}{g}}$
6	F = A cos кt	$x = \frac{A}{m\kappa^2}\left(1 - \cos\kappa\sqrt{\frac{2y}{g}}\right) + V_0\sqrt{\frac{2y}{g}}$

Варианты 7–8

Материальная точка массой m движется в горизонтальной плоскости xy под действием сил притяжения к двум центрам A и B с координатами: A $(-a;\ 0)$, B $(a;\ 0)$. Величины сил пропорциональны расстояниям точки от этих центров, коэффициент пропорциональности – $\kappa^2 m$. Найти уравнения движения и траекторию y = f(x) точки. Начальные условия даны в табл. 1.23.

Таблица 1.23

№ вар.	Дано				Ответ y = f(x)
	x_0	y_0	$\dot{x}_0$	$\dot{y}_0$	
7	0	h	V_0	0	$\frac{y^2}{h^2} + \frac{2\kappa^2 x^2}{V_0^2} = 1$
8	ℓ	0	0	V_0	$\frac{2\kappa^2 y^2}{V_0^2} + \frac{x^2}{\ell^2} = 1$

Варианты 9–10

Материальная точка массой m движется в горизонтальной плоскости xy под действием силы притяжения к началу координат 0. Величина силы пропорциональна расстоянию точки от начала координат. Коэффициент пропорциональности – $\kappa^2 m$. Найти уравнения движения и траекторию y = f(x) точки. Начальные условия даны в табл. 1.24.

Таблица 1.24

№ вар.	Дано				Ответ y = f(x)
	x_0	y_0	$\dot{x}_0$	$\dot{y}_0$	
9	0	h	V_0	0	$\frac{\kappa^2 x^2}{V_0^2} + \frac{y^2}{h^2} = 1$

10	ℓ	0	0	V_0	$\dfrac{x^2}{\ell^2}+\dfrac{k^2y^2}{V_0^2}=1$

Варианты 11–12

Материальная точка массой m движется в горизонтальной плоскости xy под действием силы отталкивания от начала координат 0. Величина силы пропорциональна расстоянию точки от начала координат. Коэффициент пропорциональности – k^2 m. Найти уравнения движения и траекторию y = f(x) точки. Начальные условия даны в табл. 1.25

Таблица 1.25

№ вар.	Дано				Ответ
	x_0	y_0	$\dot{x}_0$	$\dot{y}_0$	y = f(x)
11	0	h	V_0	0	$\dfrac{y^2}{h^2}-\dfrac{k^2x^2}{V_0^2}=1$
12	ℓ	0	0	V_0	$\dfrac{x^2}{\ell^2}-\dfrac{k^2y^2}{V_0^2}=1$

Варианты 13–14

Тяжелая точка массой m движется в вертикальной плоскости xy под действием силы тяжести и силы притяжения к началу координат 0, изменяющейся по закону $\bar{F}=-k^2\,m\,\bar{r}$, где k – постоянный коэффициент, $\bar{r}$ – радиус-вектор точки. Найти уравнения движения и траекторию y = f(x) точки. Начальные условия даны в табл. 1.26. Ось y направлена по вертикали вниз.

Таблица 1.26

№ вар.	Дано				Ответ y = f(x)
	x_0	y_0	$\dot{x}_0$	$\dot{y}_0$	
13	ℓ	0	0	0	$y=\dfrac{g}{k^2\ell}(\ell-x)$
14	0	0	V_0	0	$\dfrac{k^2x^2}{V_0^2}+\left(\dfrac{k^2y}{g}-1\right)^2=1$

Варианты 15–16

Тяжелая точка массой m движется в вертикальной плоскости xy под действием силы тяжести и силы отталкивания от начала координат 0, изменяющейся по закону $\bar{F} = -\kappa^2 m \bar{r}$, где к – постоянный коэффициент, $\bar{r}$ – радиус-вектор точки. Найти уравнения движения и траекторию y = f(x) точки. Начальные условия даны в табл. 1.27. Ось y направлена вертикально вниз.

Таблица 1.27

№ вар.	Дано				Ответ y = f(x)
	x_0	y_0	$\dot{x}_0$	$\dot{y}_0$	
15	0	0	V_0	0	$\left(\frac{\kappa^2 y}{g}+1\right)^2 - \frac{\kappa^2 x^2}{V_0^2} = 1$
16	ℓ	0	0	0	$y = \frac{g}{\kappa^2 \ell}(x-\ell)$

Варианты 17–18

Материальная точка массой m движется в горизонтальной плоскости xy под действием силы притяжения к оси y. Сила перпендикулярна к этой оси, ее величина пропорциональна расстоянию точки от оси, коэффициент пропорциональности – κ^2 m. Найти уравнения движения и траекторию x = f(y) точки. Начальные условия даны в табл. 1.28.

Таблица 1.28

№ вар.	Дано				Ответ x = f(y)
	x_0	y_0	$\dot{x}_0$	$\dot{y}_0$	
17	ℓ	h	0	V_0	$x = \ell \cos\left[\frac{\kappa}{V_0}(y-h)\right]$
18	0	0	α	β	$x = \frac{\alpha}{\kappa}\sin\left(\frac{\kappa}{\beta}y\right)$

Вариант 19

Материальная точка массой m движется в горизонтальной плоскости xy под действием силы отталкивания от оси x. Сила перпендикулярна к этой оси, ее величина пропорциональна расстоянию точки от оси, коэффициент пропорциональности – κ^2 m. Найти уравнения движения и траекторию y = f(x) точки при начальных условиях: $x_0 = 0$, $y_0 = h$, $\dot{x}_0 = V_0$, $\dot{y}_0 = 0$.

Ответ: $y = \frac{h}{2}\left(e^{\frac{\kappa x}{V_0}} + e^{-\frac{\kappa x}{V_0}}\right)$.

Вариант 20

В условиях варианта 19 найти уравнения движения и траекторию y = f(x) точки при начальных условиях: $x_0 = 0$, $y_0 = 0$, $\dot{x}_0 = \alpha$, $\dot{y}_0 = \beta$.

Ответ: $y = \frac{\beta}{2\kappa}\left(e^{\frac{\kappa x}{\alpha}} - e^{-\frac{\kappa x}{\alpha}}\right)$.

Варианты 21–22

Тяжелая точка массой m движется в вертикальной плоскости под действием силы тяжести и силы отталкивания от горизонтальной оси x. Сила отталкивания перпендикулярна к оси x, ее величина пропорциональна расстоянию точки от этой оси, коэффициент пропорциональности – $\kappa^2 m$. Найти уравнения движения и траекторию y = f(x) точки. Ось y направлена по вертикали вниз.

Таблица 1.29

№ вар.	Дано				Ответ y = f(x)
	x_0	y_0	$\dot{x}_0$	$\dot{y}_0$	
21	0	0	V_0	0	$y = \frac{g}{2\kappa^2}\left(e^{\frac{\kappa x}{V_0}} + e^{-\frac{\kappa x}{V_0}} - 2\right)$
22	0	0	V_0	0	$y = \frac{1}{2}\left(h + \frac{g}{\kappa^2}\right)\left(e^{\frac{\kappa x}{V_0}} + e^{-\frac{\kappa x}{V_0}}\right) - \frac{g}{\kappa^2}$

Варианты 23–24

Тяжелая точка массой m движется в вертикальной плоскости xy под действием силы тяжести и силы притяжения к горизонтальной оси x. Сила притяжения перпендикулярна к оси x, ее величина пропорциональна расстоянию точки от этой оси, коэффициент пропорциональности – $к^2 m$. Найти уравнения движения и траекторию y = f(x) точки. Начальные условия даны в табл. 1.30. Ось y направлена по вертикали вниз.

Таблица 1.30

№ вар.	Дано				Ответ y = f(x)
	x_0	y_0	$\dot{x}_0$	$\dot{y}_0$	
23	ℓ	0	V_0	0	$y = \frac{g}{2к^2}\left[1 - \cos\frac{к}{V_0}(x-\ell)\right]$
24	0	0	α	β	$y = \frac{\beta}{к}\sin\frac{к\,x}{\alpha} + \frac{g}{к^2}\left(1 - \cos\frac{к\,x}{\alpha}\right)$

Варианты 25–26

Тяжелая точка массой m движется в вертикальной плоскости xy под действием силы тяжести и силы отталкивания от вертикальной оси y. Сила отталкивания перпендикулярна к оси y, ее величина пропорциональна расстоянию точки от этой оси, коэффициент пропорциональности – $к^2$ m. Найти уравнения движения и траекторию x = f(y) точки. Начальные условия даны в табл. 1.31. Ось y направлена вниз.

Таблица 1.31

№ вар.	Дано				Ответ x = f(y)
	x_0	y_0	$\dot{x}_0$	$\dot{y}_0$	
25	ℓ	0	0	0	$x = \frac{\ell}{2}\left(e^{к\sqrt{\frac{2y}{g}}} + e^{-к\sqrt{\frac{2y}{g}}}\right)$
26	0	0	V_0	0	$x = \frac{V_0}{2к}\left(e^{к\sqrt{\frac{2y}{g}}} - e^{-к\sqrt{\frac{2y}{g}}}\right)$

Варианты 27–28

Тяжелая точка массой m движется в вертикальной плоскости xy под действием силы тяжести и силы притяжения к вертикальной оси y. Сила притяжения перпендикулярна к оси y, ее величина пропорциональна расстоянию точки от этой оси, коэффициент пропорциональности – $к^2 m$.

Найти уравнения движения и траекторию x = f(y) точки. Начальные условия даны в табл. 1.32. Ось y направлена вверх.

Таблица 1.32

№ вар.	Дано				Ответ x = f(y)
	x_0	y_0	$\dot{x}_0$	$\dot{y}_0$	
27	ℓ	h	0	0	$x = \ell \cos\left[\kappa\sqrt{\frac{2(h-y)}{g}}\right]$
28	0	h	V_0	0	$x = \frac{V_0}{\kappa}\sin\left[\kappa\sqrt{\frac{2(h-y)}{g}}\right]$

Варианты 29–30

Тело весом P движется в вертикальной плоскости xy под действием силы тяжести и силы сопротивления среды $\overline{R} = -\kappa P\overline{V}$, где к – постоянный коэффициент, $\overline{V}$ – скорость тела. Найти уравнения движения тела x = x (t) и y = y (t). Начальные условия даны в табл. 1.33. Ось y направлена по вертикали вверх.

Таблица 1.33

№ вар.	Дано				Ответ	
	x_0	y_0	$\dot{x}_0$	$\dot{y}_0$	x = x (y)	y = y(y)
29	0	h	V_0	0	$x = \frac{V_0}{\kappa g}\left(1-e^{-\kappa gt}\right)$	$y = h + \frac{1}{\kappa^2 g}\left(1-e^{-\kappa gt}\right) - \frac{t}{\kappa}$
30	0	0	α	β	$x = \frac{\alpha}{\kappa g}\left(1-e^{-\kappa gt}\right)$	$y = \frac{\kappa\beta+1}{\kappa^2 g}\left(1-e^{-\kappa gt}\right) - \frac{t}{\kappa}$

Задача № 5. Варианты 1–2

Материальная точка массой m перемещается по горизонтальной оси Ox под действием силы притяжения к центру 0, изменяющейся по закону $F = \kappa^2 m x$, где к – заданный коэффициент, x – расстояние точки от центра 0. Найти закон движения точки, начальные условия даны в табл. 1.34.

Таблица 1.34

№	Дано	Ответ

вар.	x_0	$\dot{x}_0$	
1	0	x_0	$x = \frac{V_0}{к} \sin кt$
2	b	0	$x = b \cos кt$

Вариант 3

К нижнему концу вертикально подвешенной недеформированной пружины с коэффициентом жесткости с прикрепляют груз весом Р и отпускают без начальной скорости. Пренебрегая массой пружины, найти закон движения груза, отнеся его движение к оси x, проведенной вертикально вниз из положения статического равновесия.

Ответ: $x = -\frac{P}{c} \cos \sqrt{\frac{c\,g}{P}}\, t$

Вариант 4

Груз, прикрепленный к нижнему концу вертикально подвешенной пружины, вызывает статическое удлинение пружины, равное λ .
Найти закон движения груза, если он начинает движение из положения равновесия с начальной скоростью V_0, направленной вертикально вниз. Движение отнести к оси x, проведенной из положения статического равновесия груза в направлении $\overline{V}_0$. Массой пружины пренебречь.

Ответ: $x = \frac{V_0}{к} \sin кt,\ к = \sqrt{\frac{g}{\lambda}}$.

Вариант 5

К нижнему концу вертикально подвешенной пружины прикрепляют две одинаковые по весу гири, вызывающие статическое удлинение пружины 2λ . В некоторый момент одна из гирь обрывается без начальной скорости. Найти закон движения гири, оставшейся на пружине, отнеся ее движение к оси x, проведенной вертикально вниз из положения статического равновесия этой гири. Массой пружины пренебречь.

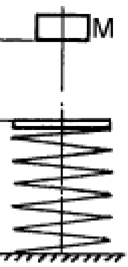
Ответ: $x = \lambda \cos \sqrt{\frac{g}{\lambda}}\, t$.

Вариант 6

В условиях варианта 5 найти закон движения гири, оставшейся на пружине, если в начальный момент (в момент обрыва другой гири) она приобретает скорость V_0, направленную вниз.

Ответ: $x = \sqrt{\lambda^2 + \frac{V_0^2}{\kappa^2}}\,\sin\left(\kappa t + \mathrm{arctg}\frac{\kappa\lambda}{V_0}\right),\ \kappa = \sqrt{\frac{g}{\lambda}}$.

Вариант 7



Груз М весом Р падает с высоты h без начальной скорости на вертикально поставленную пружину с коэффициентом жесткости с. Пренебрегая массой пружины, найти закон движения груза, отнеся его движение к оси x, проведенной вертикально вверх из положения статического равновесия.

Ответ: $x = \frac{P}{c}\sqrt{1+\frac{2hc}{P}}\,\sin\left(\sqrt{\frac{cg}{P}}\,t - \mathrm{arctg}\sqrt{\frac{P}{2hc}t}\right)$.

Варианты 8

В условиях варианта 7 найти закон движения груза для случая, когда груз положен на недеформированную пружину и отпущен без начальной скорости.

Ответ: $x = \frac{P}{c}\cos\sqrt{\frac{cg}{P}}\,t$.

Варианты 9–10

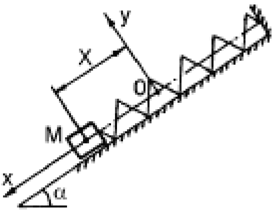
Груз, положенный на вертикально поставленную пружину, вызывает статическое сжатие пружины λ . Пренебрегая массой пружины, найти закон движения груза, отнеся его движение к оси x, проведенной вертикально вверх из положения статического равновесия. Начальные условия даны в табл. 1.35.

Таблица 1.35

№ вар.	Дано		Ответ
	x_0	$\dot{x}_0$	

9	$-\ell$	V_0	$x = \sqrt{\ell^2 + \left(\frac{V_0}{\kappa}\right)^2}\ \sin\left(\kappa t - \operatorname{arctg}\frac{\kappa\ell}{V_0}\right),\ \kappa = \sqrt{\frac{g}{\ell}}$
10	$-\ell$	0	$x = -\ell\cos\kappa t,\ \kappa = \sqrt{\frac{g}{\ell}}$

Варианты 11–12



Найти закон движения x = x(t) груза M весом P по наклонной плоскости, если он прикреплен к пружине с коэффициентом жесткости c. Отсчет координаты x вести от положения статического равновесия груза. Массой пружины и трением пренебречь. Начальные условия даны в табл. 1.36.

Таблица 1.36

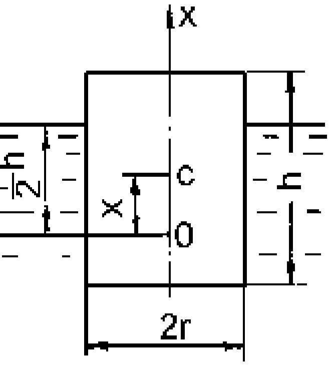
№ вар.	Дано		Ответ
	x_0	$\dot{x}_0$	
11	0	V_0	$x = \frac{V_0}{\kappa}\sin\kappa t,\ \kappa = \sqrt{\frac{c\,g}{P}}$
12	ℓ	0	$x = \ell\cos\kappa t,\ \kappa = \sqrt{\frac{c\,g}{P}}$

Вариант 13

В условиях варианта 11 найти закон движения груза при неизвестном коэффициенте жесткости пружины, если статическое удлинение пружины под действием груза равно λ .

Ответ: $x = \frac{V_0}{\kappa}\sin\kappa t,\ \kappa = \sqrt{\frac{g}{2\lambda}}$.

Вариант 14



Цилиндр весом P, радиусом r и высотой h опущен в воду. В положении статического равновесия он погружается на половину своей высоты. В начальный момент времени он был погружен на $\frac{2}{3}$ h и затем без начальной скорости пришел в движение по вертикальной прямой. Применяя закон Архимеда, найти закон движения x = x(t) цилиндра, относительно положения статического равновесия. Удельный вес воды γ .

Ответ: x = $-\frac{1}{6}h\cos\kappa t,\ \kappa = \sqrt{\frac{\pi r^2\gamma g}{P}}$.

Вариант 15

В условиях варианта 14 найти закон движения цилиндра, если он начинает движение из положения статического равновесия со скоростью V_0, направленной вертикально вниз.

Ответ: x = $-\frac{V_0}{\kappa}\sin\kappa t,\ \kappa = \sqrt{\frac{\pi r^2\gamma g}{P}}$.

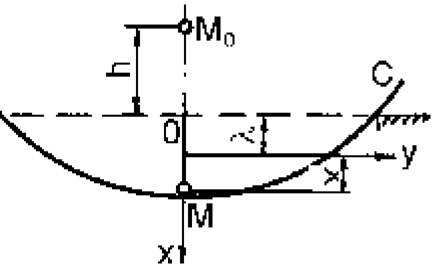
Варианты 16–17

Кузов вагона в положении статического равновесия прогибает рессоры на величину λ . Найти закон свободных колебаний вагона на рессорах, отнеся его движение к оси x, проведенной вертикально вверх из положения статического равновесия. Начальные условия даны в табл. 1.37.

Таблица 1.37

№ вар.	Дано		Ответ
	x_0	$\dot{x}_0$	
16	0	V_0	x = $V_0\sqrt{\frac{\lambda}{g}}\sin\sqrt{\frac{g}{\lambda}}\,t$
17	–h	0	x = $-h\cos\sqrt{\frac{g}{\ell}}\,t$

Вариант 18



Груз, лежащий на середине упругой пластины BC, вызывает статический прогиб λ . Пренебрегая массой пластины, определить закон свободных колебаний груза относительно положения статического равновесия, если он упадет на недеформированную пластину с высоты h без начальной скорости.

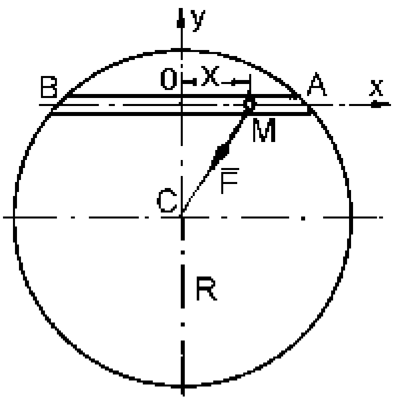
Ответ: $x = \sqrt{\lambda^2 + 2h\lambda}\,\sin\left(\sqrt{\frac{g}{\lambda}}\,t - \mathrm{arctg}\sqrt{\frac{\lambda}{2h}}\right)$.

Вариант 19

В условиях варианта 18 определить закон колебания груза для случая, когда он положен на недеформированную пластину и отпущен без начальной скорости.

Ответ: $x = -\lambda\cos\sqrt{\frac{g}{\lambda}}\,t$.

Вариант 20



Найти закон движения x = x(t) тяжелого шарика M вдоль воображаемого канала AB, прорытого сквозь Землю, если известно, что сила притяжения F внутри земного шара прямо пропорциональна расстоянию CM. Шарик начинает движение из точки A без начальной скорости. Радиус Земли равен R, 0C = h .

Ответ: $x = \sqrt{R^2 - h^2}\cos\sqrt{\frac{g}{R}}\,t$.

Вариант 21

В условиях варианта 20 найти закон движения шарика, если канал проходит через центр Земли.

Ответ: $x = R\cos\sqrt{\frac{g}{R}}\,t$.

Вариант 22

Материальная точка массой m движется по горизонтальной прямой под действием сил притяжения к двум неподвижным центрам 0_1 и 0_2, расположенным на этой прямой. Каждая из сил притяжения пропорциональна расстоянию точки до соответствующего центра. Коэффициент пропорциональности равен 2 $к^2$ m, где к – заданный коэффициент. Найти закон движения точки, отнеся ее движение к оси x, проведенной из середины отрезка $0_1 0_2$ в направлении центра 0_2. Начальные условия:

$x_0 = b$, $\dot{x}_0 = 0$.

Ответ: x = b cos 2 кt.

Вариант 23

В условиях варианта 22 найти закон движения точки, если в начальный момент $x_0 = 0$, $\dot{x}_0 = V_0$.

Ответ: x = $\dfrac{V_0}{2\,к} \sin 2\,кt$.

Вариант 24

При равномерном спуске груза весом Q на тросе со скоростью V_0 произошла неожиданная задержка верхнего конца троса. Найти закон свободных вертикальных колебаний груза на тросе относительно положения, которое занимал груз в момент остановки верхнего конца троса. Коэффициент жесткости троса c.

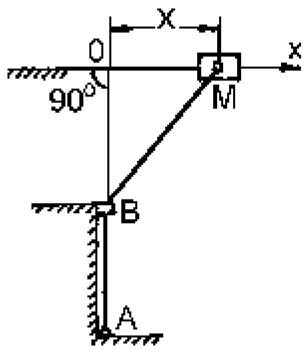
Ответ: x = $V_0 \sqrt{\dfrac{Q}{c\,g}} \sin \sqrt{\dfrac{c\,g}{Q}}\, t$.

Варианты 25–26

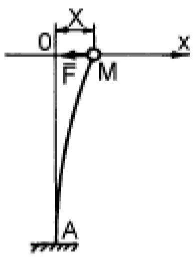
Упругая нить, закрепленная в точке A и проходящая через неподвижное гладкое кольцо B, привязана к ползуну M, скользящему по горизонтальной прямой 0x. Длина невытянутой нити равна AB поэтому сила, с которой нить действует на ползун, прямо пропорциональна расстоянию BM, коэффициент пропорциональности – $к^2$ m. Найти, пренебрегая трением, закон движения ползуна. Начальные условия даны в табл. 1.38.

Таблица 1.38

№ вар.	Дано		Ответ
	x_0	$\dot{x}_0$	
25	ℓ	V_0	$x = \sqrt{\ell^2 + \dfrac{V_0^2}{\kappa^2}}\,\sin\left(\kappa\, t + \mathrm{arctg}\dfrac{\kappa\ell}{V_0}\right)$
26	$-b$	0	$x = -b\cos\kappa t$



Варианты 27–28

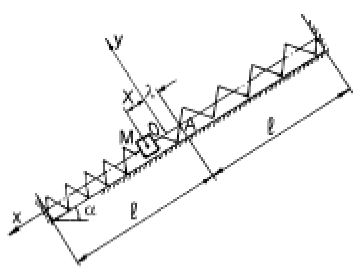


К свободному концу упругого стержня, заделанного жестко концом А, закреплен гру М массой m. Считая, что малые колебания груза являются прямолинейными, найти закон этих колебаний, если восстанавливающая сила F прямо пропорциональна смещению x, коэффициент пропорциональности равен c (табл. 1.39).

Таблица 1.39

№ вар.	Дано		Ответ
	x_0	$\dot{x}_0$	
27	0	V_0	$x = V_0\sqrt{\dfrac{m}{c}}\sin\sqrt{\dfrac{c}{m}}\,t$
28	b	0	$x = b\cos\sqrt{\dfrac{c}{m}}\,t$

Варианты 29–30



Найти закон движения x = x(t) груза М весом Р по наклонной плоскости, если к нему прикреплены две пружины с одинаковыми коэффициентами жесткости с. В положении А груза (рисунок) пружины недеформированы. Начало оси x взять в положении статического равновесия груза на плоскости. Массой пружины и трением пренебречь. Начальные условия даны в табл. 1.40.

Таблица 1.40

№ вар.	Дано		Ответ
	x_0	$\dot{x}_0$	

29	0	V_0	$x = V_0\sqrt{\frac{P}{2cg}}\sin\sqrt{\frac{2cg}{P}}t$
30	S	0	$x = S\cos\sqrt{\frac{2cg}{P}}t$

Задача № 6. Варианты 1–3

Груз весом 98 Н, прикрепленный к нижнему концу вертикально подвешенной пружины с коэффициентом жесткости 10 Н/см, движется, встречая сопротивление среды $R = \mu V$, где V – скорость груза, μ – постоянный коэффициент (табл. 1.41). Найти, пренебрегая массой пружины, уравнение движения груза, отнеся его движение к оси x, проведенной вертикально вниз из положения статического равновесия. Начальные условия даны в табл. 1.41.

Таблица 1.41

№ вар.	Дано			Ответ x, см
	μ, Н·с/см	x_0, см	$\dot{x}_0$, см/с	
1	1,6	4	4	$x = 7{,}2\, e^{-8t}\sin\left(6t + \mathrm{arctg}\frac{2}{3}\right)$
2	5,2	4	-240	$x = \frac{1}{6}\,(29\, e^{-50t} - 5e^{-2t})$
3	2	4	0	$x = 4\, e^{-10t}\,(1 + 10t)$

Варианты 4–6

Ползун весом 1,96 Н, прикрепленный к концу пружины с коэффициентом жесткости 20 Н/см, перемещается по горизонтальной оси x под действием силы $Q = H \sin \rho t$, где H и ρ – постоянные величины, и силы сопротивления $R = \mu V$, где V – скорость ползуна, см/с, μ – постоянный коэффициент (табл. 1.42). Определить, пренебрегая массой пружины, уравнение движения ползуна x = x (t), принимая за начало координат положение статического равновесия. В начальный момент $x_0 = 0$, $\dot{x}_0 = 0$.

Таблица 1.42

№ вар.	Дано			Ответ x, см
	H, Н	ρ, c^{-1}	μ, Н·с/см	
4	16	60	0	$x = -0{,}75 \sin 100\,t + 1.25 \sin 60\,t$
5	16	100	0	$x = 0{,}4 \sin 100\,t + 40\,t \sin\left(100\,t - \frac{\pi}{2}\right)$
6	16	100	0,40	$x = e^{-100t}(40\,t + 0{,}4) + 0{,}4 \sin\left(100\,t - \frac{\pi}{2}\right)$

Варианты 7–8

К вертикальной пружине, верхний конец которой совершает вертикальные колебания по закону $S = A \sin \rho\, t$ (величины постоянных коэффициентов A и ρ даны в табл. 1.43), подвешен груз, вызывающий статическое удлинение пружины 2 см. Найти, пренебрегая массой пружины, уравнение вынужденных колебаний груза. Движение отнести к оси x, проведенной вертикально вниз из положения статического равновесия груза.

Таблица 1.43

№ вар.	Дано		Ответ
	А, см	ρ , c^{-1}	x, см
7	4	10	$x = 5 \sin 10\,t$
8	4	$7\sqrt{10}$	$x = -14\sqrt{10}\,t \cos 7\sqrt{10}\,t$

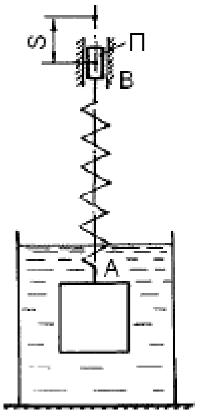
Варианты 9–10

Пластинка весом 0,98 Н, подвешенная к вертикальной пружине с коэффициентом жесткости 0,196 Н/см, движется между полюсами магнита. Вследствие вихревых токов движение тормозится силой $R = \mu V$, где V – скорость, см/с, μ – постоянный коэффициент (табл. 1.44). Определить, пренебрегая массой пружины, уравнение движения пластинки, отнеся ее движение к оси x, проведенной вертикально вниз из положения статического равновесия. В начальный момент скорость пластинки равна нулю и пружина не растянута.

Таблица 1.44

№ вар.	Дано	Ответ
	μ, Н·с/см	x, см
9	0,005	$x = e^{-2,5t}\,(5\cos 13{,}78\,t + 0{,}907\sin 13{,}78\,t)$
10	0,1	$x = \frac{5}{48}\,(-49\,e^{-2t} + e^{-98t})$

Варианты 11–12



Пластинка весом 0,5 Н, помещенная в сосуд с вязкой жидкостью, прикреплена к концу А пружины с коэффициентом жесткости 0,25 Н/см. В некоторый момент ползун П, к которому прикреплен верхний конец В пружины, начинает совершать вертикальные колебания согласно уравнению $S = \ell \sin \rho\, t$ (величины постоянных коэффициентов ℓ и ρ даны в табл. 1.45). Сила сопротивления движению пластины в жидкости пропорциональна скорости пластинки, причем при скорости 1 см/с сила сопротивления равна 3,06 мН.

Найти, пренебрегая массой пружины, уравнение вынужденных колебаний пластинки. Движение отнести к оси x, проведенной вертикально вниз из положения статического равновесия груза.

Таблица 1.45

№ вар.	Дано		Ответ
	ℓ, см	ρ, c^{-1}	x, см
11	2	15	$x = 3{,}5\,\sin\,(15\,t - \mathrm{arctg}\,0{,}34)$
12	$3\sqrt{10}$	$7\sqrt{10}$	$x = 35\sin\left(7\sqrt{10}\,t - \frac{\pi}{2}\right)$

Варианты 13–15

Груз весом 1 Н, подвешенный к нижнему концу вертикальной пружины жесткостью 0,2 Н/см, движется в жидкости. Сила сопротивления движению пропорциональна первой степени скорости груза $R = \mu V$, где μ – постоянный коэффициент (табл. 1.46). Найти, пренебрегая массой пружины, уравнение движения груза относительно оси x, проведенной вертикально вниз из положения статического равновесия. Начальные условия даны в табл. 1.46.

Таблица 1.46

№ вар.	Дано			Ответ x, см
	μ, Н·с/см	x_0, см	$\dot{x}_0$, см/с	
13	0,035	1	0	$x = 1{,}36\, e^{-7{,}2t} - 0{,}36\, e^{-27{,}1t}$
14	$\frac{1}{35}$	1	–50	$x = e^{-14t}\,(1 - 36\, t)$
15	$\frac{1}{98}\sqrt{3}$	5	10	$x = e^{-5\sqrt{3}t}\,(5 \cos 11t + 4{,}85 \sin 11t)$

Варианты 16–17

На вертикальной пружине, коэффициент жесткости которой 0,196 Н/см, подвешен магнитный стержень весом 0,98 Н. Нижний конец магнита проходит через катушку, по которой идет переменный ток. Сила взаимодействия между магнитом и катушкой определяется равенством $Q = 32\pi \cdot 10^{-4} \sin 8\pi t$, Н. Определить уравнение движения магнитного стержня, пренебрегая массой пружины и сопротивлением среды. Движение отнести к оси x, проведенной вертикально вниз из положения статического равновесия. Начальные условия даны в табл. 1.47.

Таблица 1.47

№ вар.	Дано		Ответ x, см
	x_0, см	$\dot{x}_0$, см/с	
16	–5	0	$x = -5 \cos 14\, t + 0{,}04 \sin 14\, t - 0{,}023 \sin 8\pi\, t$
17	0	5	$x = 0{,}4 \sin 14\, t - 0{,}023 \sin 8\pi\, t$

Варианты 18–19

Груз весом 2 Н, подвешенный к пружине, коэффициент жесткости которой 10 Н/см, находится под действием вертикальной силы $Q = 20 \sin \rho\, t$, Н (значения ρ даны в табл. 1.48). Найти уравнение движения груза относительно оси x, направленной вниз, за начало координат взять положение статического равновесия. Массой пружины пренебречь. В начальный момент $x_0 = 2$ см, $\dot{x}_0 = 10$ см/с.

Таблица 1.48

№ вар.	Дано	Ответ x, см
	ρ, $с^{-1}$	
18	50	$x = 2 \cos 70\, t - 2{,}77 \sin 70\, t + 4{,}08 \sin 50\, t$

19	70	x = 2 cos 70 t + 1,14 sin 70 t – 70 t cos 70 t

Варианты 20–21

На вертикальной пружине с коэффициентом жесткости 0,196 Н/см подвешен магнитный стержень весом 0,98 Н, проходящий через вертикально установленный соленоид. Сила взаимодействия соленоида со стержнем $Q = 32 \cdot 10^{-4}\ \pi \sin \rho t$, Н (значение ρ дано в табл. 1.49). При движении стержень испытывает сопротивление среды $R = \mu V$, где V – скорость стержня, см/с, значение постоянного коэффициента μ дано в табл. 1.49. Найти, пренебрегая массой пружины, уравнения вынужденных колебаний x = x(t). Ось x провести из положения статического равновесия вертикально вниз.

Таблица 1.49

№ вар.	Дано		Ответ
	ρ, c^{-1}	μ, Н·с/см	x, см
20	8π	0,005	$x = 0{,}022 \sin (8\pi t - 0{,}91\pi)$
21	14	0,005	$x = 0{,}14 \sin (14 t - 0{,}5\pi)$

Варианты 22–24

Грузы весом P_1 = 20 Н и P_2 = 30 Н подвешены к вертикальной пружине, коэффициент жесткости которой 4 Н/см. Груз P_2 осторожно сняли. При движении груза P_1 на него действует сила сопротивления среды $\overline{R} = -\mu \overline{V}$, где $\overline{V}$ – скорость груза, см/с. Значения постоянного коэффициента даны в табл. 1.50. Пренебрегая массой пружины, найти уравнение движения груза P_1, считая, что ось x проведена вертикально вниз из положения статического равновесия этого груза.

Таблица 1.50

№ вар.	Дано	Ответ
	μ, Н·с/см	x, см
22	0,1	$x = e^{-2{,}45t} (7{,}5 \cos 13{,}8 t + 1{,}36 \sin 13{,}8 t)$
23	1,0	$x = 8{,}34\ e^{-4{,}5t} - 0{,}84\ e^{-44{,}5t}$
24	$\frac{4}{7}$	$x = e^{-14t} (105 t + 7{,}5)$

Вариант 25

Тело весом 980 Н подвешено к вертикальной пружине, коэффициент жесткости которой равен 50 Н/см. На тело действует вертикальная возмущающая сила Q = 125 sin 5t, Н, и сила сопротивления R = 10 V, Н, где V – скорость тела, см/с. Найти, пренебрегая массой пружины, уравнение вынужденных колебаний тела относительно оси x, проведенной вертикально вниз из положения статического равновесия груза.

Ответ: x = $\sqrt{5}\sin(5t - \mathrm{arctg}\ 2)$.

Варианты 26–28

Тело весом 58,8 Н, подвешенное к пружине при отсутствии сопротивления, колеблется с периодом T = 0,4 π, с. Найти, пренебрегая массой пружины, уравнение движения этого тела в среде, сила сопротивления которой R = μ V, где V – скорость тела, см/с, значение постоянного коэффициента μ дано в табл. 1.51. Движение отнести к оси x, проведенной из положения статического равновесия вертикально вниз. В начальный момент x_0 *= 4 см,* $\dot{x}_0 = 0$.

Таблица 1.51

№ вар.	Дано μ, Н·с/см	Ответ x, см
26	0,36	$x = 5e^{-3t}\sin\left(4t + \mathrm{arctg}\frac{4}{3}\right)$
27	1,56	$x = \frac{1}{6}\left(25e^{-t} - e^{-25t}\right)$
28	0,6	$x = 4e^{-8t}(8t + 1)$

Варианты 29–30

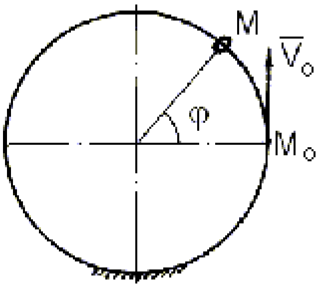
На тело весом 3,92 Н, прикрепленное к вертикальной пружине с коэффициентом жесткости 40 Н/см, действует сила Q = 40 sin ρ t, Н (значение ρ дано в табл. 1.52) и сила сопротивления R = 0,25 V, Н, где V – скорость тела, см/с. Написать, пренебрегая массой пружины, уравнение вынужденных колебаний груза x = x(t), считая, что ось x проведена вертикально вниз из положения статического равновесия.

Таблица 1.52

№ вар.	Дано ρ , с$^{-1}$	Ответ x, см

29	50	x = 1,23 sin (50 t – 0,394)
30	100	x = 1,6 sin (100 t – 0,5 π)

Задача № 7. Вариант 1



На расположенную в вертикальной плоскости неподвижную проволочную окружность радиусом R надето колечко M весом P. В начальный момент колечко находилось в точке M_0 на горизонтальном диаметре окружности и ему сообщена скорость V_0, направленная вверх. Пренебрегая трением и сопротивлением среды, определить скорость колечка M и давление его на окружность в положении, определяемом углом φ = 30°.

Ответ: $V = \sqrt{V_0^2 - gR},\ N = \frac{3}{2}P - \frac{PV_0^2}{gR}$.

Вариант 2

В условиях варианта 1 определить величину V_0, при которой давление колечка на окружность в верхнем положении равно нулю. Найти также скорость колечка в этом положении.

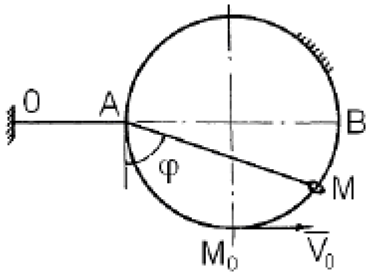
Ответ: $V_0 = \sqrt{3gR},\ V = \sqrt{gR}$.

Вариант 3

В условиях варианта 1, полагая начальную скорость направленной вниз, определить величину V_0, при которой давление колечка на окружность в нижнем положении равно 3 P.

Ответ: $V_0 = 0$.

Вариант 4



На неподвижную проволочную окружность радиусом R, расположенную в горизонтальной плоскости, надето колечко M весом P. К этому колечку привязана упругая нить OAM, проходящая через кольцо A, закрепленное на окружности. Натяжение нити пропорционально ее удлинению. Длина нити в нерастянутом состоянии равна OA, коэффициент жесткости равен c. В начальный момент колечко находилось

в точке M_0 ($\varphi_0 = 45°$) и имело скорость V_0. Пренебрегая массой нити, трением и сопротивлением среды, определить скорость колечка и горизонтальную составляющую давления колечка на окружность в положении $\varphi = 60°$.

Ответ: $V = \sqrt{V_0^2 - \frac{c\,g\,R^2}{P}},\ N = P\,\frac{V_0^2}{g\,R} - \frac{5}{2}\,c\,R$.

Вариант 5

В условиях варианта 4, полагая $V_0 = R\sqrt{\frac{2\,c\,g}{P}}$, определить давление колечка М на окружность в начальный момент, а также путь, пройденный им до остановки.

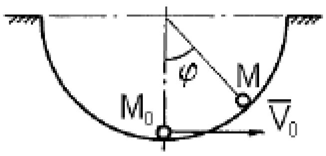
Ответ: $N = \sqrt{P^2 + c^2\,R^2},\ S = \frac{\pi\,R}{2}$.

Вариант 6

В условиях варианта 4, полагая, что движение колечка М началось из точки В вследствие незначительного толчка ($V_0 = 0$), определить скорость колечка и горизонтальную составляющую давления колечка на окружность в положении $\varphi = 120°$.

Ответ: $V = R\sqrt{\frac{c\,g}{P}},\ N = \frac{1}{2}\,c\,R$.

Вариант 7



Шарику М весом Р, находящемуся в нижнем положении на дне полусферической чаши радиусом R, сообщена горизонтальная скорость V_0. Пренебрегая трением и сопротивлением среды, определить скорость шарика М, его давление на чашу в положении $\varphi = 60°$.

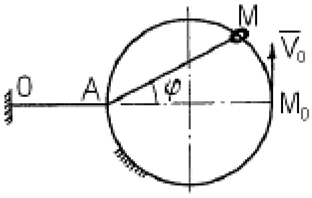
Ответ: $V = \sqrt{V_0^2 - g\,R},\ N = P\left(\frac{V_0^2}{g\,R} - \frac{1}{2}\right)$.

Вариант 8

В условиях варианта 6, полагая $V = \sqrt{g\,R}$, определить давление шарика М на дно чаши в начальный момент, а также расстояние, которое шарик пройдет до остановки.

Ответ: $N = 2P,\ S = \frac{\pi R}{3}$.

Вариант 9



На неподвижную проволочную окружность радиусом R, расположенную в вертикальной плоскости, надето колечко M весом P. К этому колечку привязана упругая нить, проходящая через кольцо A, закрепленное на окружности. Натяжение нити пропорционально ее удлинению. Длина нити в ненапряженном ***состоянии равна 0A, коэффициент жесткости ее равен c. В начальный момент колечко M находилось в положении M_0 и имело скорость V_0, направленную вверх. Пренебрегая массой нити, трением и сопротивлением среды, определить скорость колечка и его давление на окружность в положении j = 45°.***

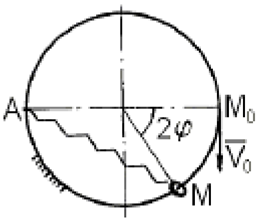
Ответ: $N = cR - P\left(3 - \frac{V_0^2}{gR}\right),\ V = \sqrt{V_0^2 + 2gR\left(\frac{cR}{P} - 1\right)}$.

Вариант 10

В условиях варианта 9, полагая начальную скорость направленной вниз, определить скорость колечка и его давление на окружность в наинизшем положении (j = – 45°).

Ответ: $N = cR + P\left(3 + \frac{V_0^2}{gR}\right),\ V = \sqrt{V_0^2 + 2gR\left(\frac{cR}{P} + 1\right)}$.

Вариант 11



На неподвижную проволочную окружность радиусом R, помещенную в горизонтальной плоскости, надето колечко M весом P, присоединенное к пружине, другой конец которой закреплен в неподвижной точке A окружности. Длина ненапряженной пружины равна 2R, жесткость ее равна c. В начальный момент колечко ***находилось в точке M_0 и имело скорость V_0. Пренебрегая массой пружины, трением и сопротивлением среды, определить скорость колечка и горизонтальную составляющую давления колечка на окружность в положении j = 60°. Считать, что при движении колечка пружина не изгибается.***

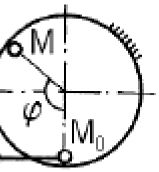
Ответ: $V=\sqrt{V_0^2-\dfrac{c\,g\,R^2}{P}},\ N=\dfrac{P\,V_0^2}{g\,R}-\dfrac{c\,R}{2}$.

Вариант 12

В условиях варианта 11 определить величину V_0, при которой колечко остановится в положении j = 45°, а также горизонтальную составляющую давления колечка на окружность в этом положении.

Ответ: $V_0=\sqrt{\dfrac{2\,c\,g}{P}\,(3-2\sqrt{2})},\ N=(5-3\sqrt{2})\,c\,R$.

Вариант 13



Шарику M, помещенному в нижнем положении на внутренней поверхности цилиндра, ось которого горизонтальна, сообщена горизонтальная скорость V_0 в плоскости, перпендикулярной оси цилиндра. Определить скорость шарика и его давление на цилиндр

в положении φ = 120°. Вес шарика равен P, радиус цилиндра – R. Трением и сопротивлением среды пренебречь.

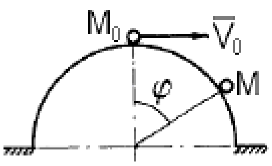
Ответ: $V=\sqrt{V_0^2-3\,g\,R},\ N=P\left(\dfrac{V_0^2}{g\,R}-\dfrac{7}{2}\right)$.

Вариант 14

В условиях варианта 13 определить, какой должна быть величина V_0, чтобы шарик описал полную окружность. Указание: шарик опишет полную окружность, если его давление на цилиндр в верхней точке окружности будет больше или равно нулю.

Ответ: $V_0\ge\sqrt{5\,g\,R}$.

Вариант 15



Тело M весом P, находившееся на вершине полусферического купола радиусом R, начинает движение по поверхности купола вследствие ничтожного толчка. Пренебрегая трением и сопротивлением среды, определить скорость тела и его давление на купол в положении φ = 30°.

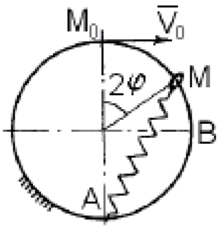
Ответ: $V = \sqrt{gR\,(2-\sqrt{3})},\ N = (3\sqrt{3}-4)\,\dfrac{P}{2}$.

Вариант 16

В условиях варианта 15 определить положение (угол φ_1), в котором тело покинет купол. Определить скорость тела в этом положении.

Ответ: $\cos\varphi_1 = \dfrac{2}{3},\ V_1 = \sqrt{\dfrac{2}{3}gR}$.

Вариант 17



На проволочную окружность радиусом R, помещенную в вертикальной плоскости, надето кольцо M весом P, присоединенное к пружине, конец A которой закреплен в нижней точке окружности. Длина ненапряженной пружины равна 2 R, жесткость ее равна c. В начальный момент кольцо находилось в верхнем положении и имело скорость V_0. Пренебрегая весом пружины, трением и сопротивлением

среды, определить скорость кольца и давление его на окружность в положении φ = 45°. Считать, что при движении кольца M пружина не изгибается.

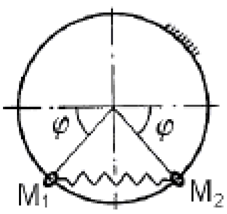
Ответ: $V = \sqrt{V_0^2 + 2gR - \dfrac{2cgR^2}{P}(3-2\sqrt{2})},\ N = \dfrac{PV_0^2}{gR} + 2P + cR\,(5\sqrt{2}-7)$.

Вариант 18

В условиях варианта 17, полагая, что движение кольца M началось вследствие незначительного толчка (V_0 = 0), определить скорость кольца в зависимости от угла φ.

Ответ: $V = \sqrt{2gR\,(1-\cos 2\varphi) - \dfrac{2cgR^2}{P}(3+\cos 2\varphi - 4\cos\varphi)}$.

Варианты 19–20



На неподвижную проволочную окружность радиусом R, помещенную в вертикальной плоскости, надеты два одинаковых кольца M_1 и M_2 весом P каждое, соединенных между собой пружиной. Длина пружины в ненапряженном состоянии равна 2 R, жесткость ее равна c. Кольца, помещенные в начальный момент на концах

горизонтального диаметра окружности, начинают двигаться из состояния покоя под действием сил тяжести. Пренебрегая массой пружины, трением и сопротивлением среды и считая, что прямая, проходящая через точки M_1 и M_2, всегда горизонтальна, определить скорость V кольца и его давление на окружность в положении, заданном углом φ (табл. 1.53), P >cR.

Таблица 1.53

№ вар.	Дано	Ответ
	φ	
19	45°	$V = \sqrt{gR\sqrt{2} - \frac{cgR^2}{P}(3 - 2\sqrt{2})}$, $N = \frac{3\sqrt{2}}{2}P + cR(3\sqrt{2} - 4)$
20	60°	$V = \sqrt{gR\sqrt{3} - \frac{cgR^2}{2P}}$, $N = \frac{3\sqrt{3}}{2}P$

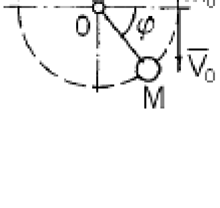
Варианты 21–22

В условиях вариантов 19–20, полагая, что длина пружины в ненапряженном состоянии равна R, определить скорость кольца и его давление на окружность в положении, заданном углом φ (табл. 1.54)

Таблица 1.54

№ вар.	Дано	Ответ
	φ	
21	45°	$V = \sqrt{gR\sqrt{2} + \frac{cgR^2}{P}(\sqrt{2} - 1)}$, $N = \frac{3\sqrt{2}}{2}P + \frac{cR}{2}(3\sqrt{2} - 4)$
22	60°	$V = \sqrt{gR\sqrt{3} + \frac{cgR^2}{2P}}$, $N = \frac{3\sqrt{3}}{2}P + \frac{cR}{2}$

Вариант 23



Груз M весом P подвешен на нерастяжимой нити OM, закрепленной в неподвижной точке 0. Длина нити равна R. В начальный момент груз находился в положении M_0 и имел скорость V_0, направленную по вертикали вниз. Пренебрегая массой нити и сопротивлением среды, определить скорость груза и натяжение нити в положении φ = 30°.

Ответ: $V = \sqrt{V_0^2 - gR}, \;\; N = P\left(\frac{3}{2} + \frac{V_0^2}{gR}\right)$.

Вариант 24

В условиях варианта 23, полагая $V_0 = \sqrt{\frac{3}{2} gR}$***, определить положение груза, в котором натяжение нити равно нулю, и скорость груза в этом положении.***

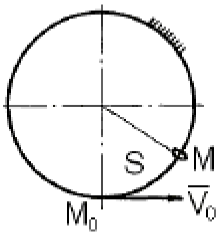
Ответ: $\varphi_1 = \frac{7}{6}\pi, \;\; V_1 = \sqrt{\frac{gR}{2}}$.

Вариант 25

В условиях варианта 23 определить, при каком значении V_0 груз опишет полную окружность. Указание: груз опишет полную окружность, если натяжение нити в наивысшем положении будет больше или равно нулю.

Ответ: $V_0 \geq \sqrt{3\,gR}$.

Вариант 26



Тяжелому кольцу M массой m, надетому на неподвижную проволочную окружность радиусом R, лежащую в горизонтальной плоскости, сообщена скорость V_0. Окружность покрыта смазкой, и кольцо тормозится силой вязкого трения, пропорциональной ***первой степени скорости. Коэффициент пропорциональности равен к. Принимая за начало отсчета начальное положение кольца, определить закон движения его по окружности S = f(t) и зависимость от времени горизонтальной составляющей давления кольца на окружность.***

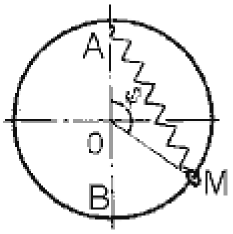
Ответ: $S = \frac{m V_0}{к}\left(1 - e^{-\frac{к}{m}t}\right), \;\; N = \frac{m V_0^2}{R} e^{-2\frac{к}{m}t}$.

Вариант 27

В условиях варианта 26 определить полное давление кольца на окружность в начальный момент и расстояние, пройденное им до остановки.

Ответ: $N = m\sqrt{g^2 + \left(\frac{V_0^2}{R}\right)^2}, \quad S = \frac{m\,V_0}{к}$ ***.***

Варианты 28–29



Кольцо М весом Р, подвешенное на пружине к верхней точке А проволочной окружности радиусом R, расположенной в вертикальной плоскости, падает, скользя по окружности без трения. Длина пружины в ненапряженном состоянии равна радиусу R, ее жесткость равна с. Кольцо М начинает движение без начальной ***скорости из положения, в котором пружина не деформирована. Пренебрегая массой пружины, определить скорость кольца и его давление на окружность в положении, заданном углом φ (табл. 1.55).***

Таблица 1.55

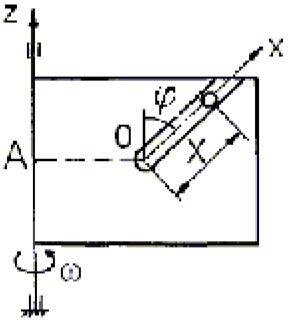
№ вар.	Дано	Ответ
	φ	
28	90°	$V = \sqrt{g\,R - \frac{c\,g\,R^2}{P}(3 - 2\sqrt{2})}, \; N = P - c\,R\left(4 - \frac{5}{2}\sqrt{2}\right)$
29	120°	$V = \sqrt{2\,g\,R - \frac{c\,g\,R^2}{P}(4 - 2\sqrt{3})}, \; N = \frac{5}{2}P - c\,R\left(\frac{11}{2} - \frac{5}{2}\sqrt{3}\right)$

Вариант 30

В условиях вариантов 28–29 определить жесткость пружины для того, чтобы давление кольца на окружность в нижней точке В было равно нулю.

Ответ: с = $\frac{2\,P}{R}$ ***.***

Задача № 8. Варианты 1–5

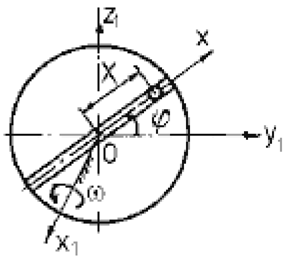


Тяжелый шарик массой m движется по каналу в прямоугольной пластине, которая равномерно вращается вокруг неподвижной вертикальной оси z с угловой скоростью ω . Найти закон относительного движения шарика x = x(t). В начальный момент: $x_0 = 0$, $\dot{x}_0 = 0$ (табл. 1.56).

Таблица 1.56

№ вар.	Дано		Ответ
	OA	φ	
1	0	30°	$x = \frac{g}{\omega^2}\sqrt{3}(2 - e^{0,5\omega t} - e^{-0,5\omega t})$
2	0	150°	$x = \frac{g}{\omega^2}\sqrt{3}(-2 + e^{0,5\omega t} + e^{-0,5\omega t})$
3	ℓ	30°	$x = \left(\ell - \frac{g}{\omega^2}\sqrt{3}\right)(-2 + e^{0,5\omega t} + e^{-0,5\omega t})$
4	ℓ	90°	$X = \frac{\ell}{2}(-2 + e^{\omega t} + e^{-\omega t})$
5	ℓ	150°	$x = \left(\ell + \frac{g}{\omega^2}\sqrt{3}\right)(-2 + e^{0,5\omega t} + e^{-0,5\omega t})$

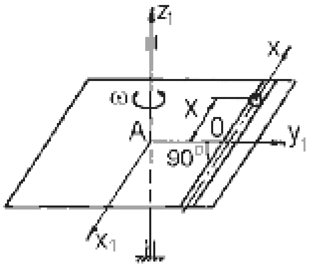
Вариант 6



Тяжелый шарик массой m движется по каналу диска, который равномерно вращается в вертикальной плоскости вокруг неподвижной горизонтальной оси x_1, с постоянной угловой скоростью ω ($\varphi = \omega t$). Найти закон относительного движения шарика x = x(t). В начальный момент: $x_0 = 0$, $\dot{x}_0 = 0$.

Ответ: $x = \frac{g}{4\omega^2}(e^{\omega t} - e^{-\omega t} + 2\sin \omega t)$ **.**

Вариант 7



Шарик массой m движется по каналу в прямоугольной пластинке, которая равномерно вращается в горизонтальной плоскости вокруг неподвижной вертикальной оси z_1 с угловой скоростью ω . Найти закон относительного движения шарика $x = x(t)$. Начальные условия: $x_0 = 0$, $\dot{x}_0 = V_0$.

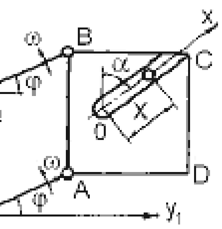
Ответ: $x = \dfrac{V_0}{2\omega}\left(e^{\omega t} - e^{-\omega t}\right)$.

Вариант 8

В условиях варианта 7 найти $x = x(t)$, если $AO = 0$, а в начальный момент $x_0 = a$, $\dot{x}_0 = 0$.

Ответ: $x = \dfrac{a}{2}\left(e^{\omega t} + e^{-\omega t}\right)$.

Варианты 9–13



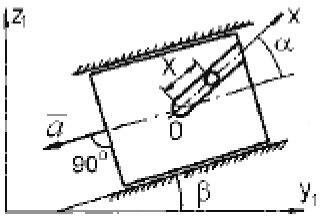
Тяжелый шарик массой m движется по каналу в прямоугольной пластине ABCD, которая движется поступательно в вертикальной плоскости y_1z_1. $0_1A = 0_2B = r$, $0_10_2 = AB$. Кривошипы 0_1A и 0_2B вращаются с постоянной угловой скоростью ω ($\varphi = \omega t$). Найти закон относительного движения шарика $x = x(t)$. В начальный момент $x_0 = 0$, $\dot{x}_0 = 0$ (табл. 1.57).

Таблица 1.57

№ вар.	Дано	Ответ
	α	
9	0°	$x = -\dfrac{g t^2}{2} + r \sin \omega t + \omega r t$
10	30°	$x = -\dfrac{\sqrt{3}}{4} g t^2 + \dfrac{\sqrt{3}}{2}\omega r t + \dfrac{r}{2} - r\cos\left(\omega t - \dfrac{\pi}{3}\right)$
11	90°	$x = r(1 - \cos \omega t)$
12	150°	$x = \dfrac{\sqrt{3}}{4} g t^2 - \dfrac{\sqrt{3}}{2}\omega r t + \dfrac{r}{2} - r\cos\left(\omega t + \dfrac{\pi}{3}\right)$

13	180°	$x = \frac{1}{2} g t^2 + r \sin \omega t - \omega r t$

Варианты 14–17



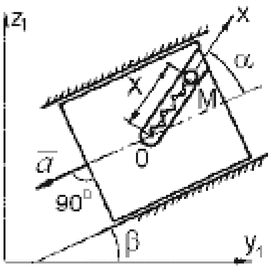
Шарик массой m перемещается по каналу в прямоугольной пластине, которая движется поступательно в вертикальной плоскости y_1z_1 с постоянным ускорением a. Найти закон относительного движения шарика x = x(t), если в начальный момент $x_0 = 0$, $\dot{x}_0 = 0$ (табл. 1.58). Каким должно быть

ускорение a_1 пластины, чтобы шарик находился в относительном покое?

Таблица 1.58

№ вар.	Дано		Ответ
	α	β	
14	30°	90°	$x = \frac{\sqrt{3}}{4}(a - g)\, t^2, \quad a_1 = g$
15	0°	30°	$x = \left(a - \frac{1}{2} g\right) \frac{1}{2} t^2, \quad a_1 = \frac{1}{2} g$
16	30°	60°	$x = \left(\frac{\sqrt{3}}{2} a - g\right) \frac{1}{2} t^2, \quad a_1 = \frac{2}{\sqrt{3}} g$
17	30°	0°	$x = \left(\sqrt{3}\, a - g\right) \frac{1}{4} t^2, \quad a_1 = \frac{\sqrt{3}}{3} g$

Варианты 18–22



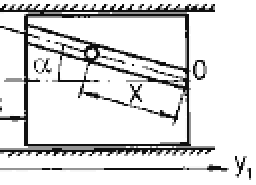
Шарик М массой m, прикрепленный к свободному концу пружины, может перемещаться по каналу в прямоугольной пластине, которая движется поступательно в вертикальной плоскости y_1z_1 с постоянным ускорением a. Длина недеформированной пружины – ℓ, коэффициент жесткости равен с. Определить закон

относительного движения шарика x = x(t). В начальный момент $x_0 = \ell$, $\dot{x}_0 = 0$ (табл. 1.59).

Таблица 1.59

№ вар.	Дано		Ответ
	α	β	
18	30°	0°	$x = \frac{m}{2c}(\sqrt{3}\,a - g)(1 - \cos\sqrt{c/m}\,t) + \ell$
19	0°	0°	$x = \frac{m}{c}a(1 - \cos\sqrt{c/m}\,t) + \ell$
20	300°	0°	$x = \frac{m}{2c}(a + \sqrt{3}\,g)(1 - \cos\sqrt{c/m}\,t) + \ell$
21	30°	90°	$x = \frac{\sqrt{3}m}{2c}(a - g)(1 - \cos\sqrt{c/m}\,t) + \ell$
22	300°	90°	$x = \frac{m}{2c}(a - g)(1 - \cos\sqrt{c/m}\,t) + \ell$

Варианты 23–25



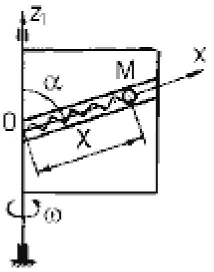
Шарик массой m перемещается по каналу в прямоугольной пластине, которая движется вдоль оси y_1 в вертикальной плоскости y_1z_1. Закон движения пластины S = S(t) указан в табл. 1.60. Найти уравнение относительного движения шарика x = x(t),

если в начальный момент $x_0 = 0$, $\dot{x}_0 = 0$. Определить также давление шарика N на стенку канала в момент t.

Таблица 1.60

№ вар.	Дано		Ответ
	α	S	
23	30°	$\frac{1}{2}g\,t^2$	$x = \frac{1}{4}(\sqrt{3} - 1)\,g\,t^2$, $N = \frac{1}{2}(\sqrt{3} + 1)\,m\,g$
24	0°	$a\sin\pi t$	$x = a(\pi t - \sin\pi t)$, $N = m\,g$
25	30°	$a\,t^3$	$x = \frac{\sqrt{3}}{2}a\,t^3 - \frac{1}{4}g\,t^2$, $N = \frac{m}{2}(g\sqrt{3} + 6\,a\,t)$

Варианты 26–28



Шарик М массой m, прикрепленный к свободному концу пружины может перемещаться по каналу в прямоугольной пластине, которая вращается с постоянной угловой скоростью ω вокруг вертикальной оси. Длина недеформированной пружины – ℓ, коэффициент жесткости равен c, $c > m\omega^2 \sin^2\alpha$. Определить закон относительного движения шарика x = x(t). В начальный момент: $x_0 = \ell$, $\dot{x}_0 = 0$.

***Ответ:* x =** $\left(\ell - \dfrac{h}{\kappa^2}\right)\cos\kappa t + \dfrac{h}{\kappa^2}$ **.**

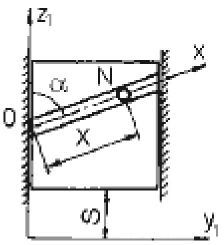
Значения постоянных коэффициентов h и к для различных значений угла α приведены ниже:

вариант 26 $\qquad \alpha = 60°$; $\qquad h = \dfrac{c}{m}\ell - \dfrac{g}{2}$; $\qquad \kappa^2 = \dfrac{c}{m} - \dfrac{3}{4}\omega^2$;

вариант 27 $\qquad \alpha = 90°$; $\qquad h = \dfrac{c}{m}\ell$;, $\qquad \kappa^2 = \dfrac{c}{m} - \omega^2$;

вариант 28 $\qquad \alpha = 150°$; $\qquad h = \dfrac{c}{m}\ell + \dfrac{\sqrt{3}}{2}g$; $\qquad \kappa^2 = \dfrac{c}{m} - \dfrac{1}{4}\omega^2$.

Варианты 29–30



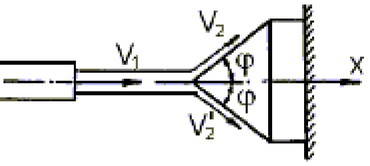
Шарик массой m перемещается по каналу в прямоугольной пластине, которая движется вдоль оси z_1 в вертикальной плоскости y_1z_1. Закон движения пластины S = S(t) указан в табл. 1.61. Найти уравнение относительного движения шарика x = x(t), если в начальный момент $x_0 = 0$, $\dot{x}_0 = 0$. Определить также давление шарика N на стенку канала в момент t.

Таблица 1.61

№ вар.	Дано		Ответ
	α	S	
29	60°	$10\cos\pi t$	$x = -\dfrac{1}{4}gt^2 - 5\cos\pi t + 5,\ N = \dfrac{\sqrt{3}}{2}m\left(g - 10\pi^2\cos\pi t\right)$
30	120°	$20\sin\dfrac{\pi}{2}t$	$x = \dfrac{1}{4}gt^2 + 10\sin\dfrac{\pi}{2}t - 5\pi t,\ N = \dfrac{\sqrt{3}}{2}m\left(g - 5\pi^2\sin\dfrac{\pi}{2}t\right)$

2. ОБЩИЕ ТЕОРЕМЫ ДИНАМИКИ СИСТЕМЫ

Задача № 9. Варианты 1–2



Горизонтальная струя воды бьет из шланга по вершине конуса в направлении оси x со скоростью V_1. Пренебрегая действием силы тяжести и считая, что по поверхности конуса частицы воды движутся вдоль образующих со средней скоростью $V_2 = \frac{3}{4}V_1$, определить силу давления струи на конус в направлении оси x.Радиус поперечного сечения шланга – R, плотность воды – γ, угол φ см. в табл. 2.1.

Таблица 2.1

№ вар.	Дано φ	Ответ
1	$\frac{1}{3}\pi$	$N_x = \frac{5}{8}\gamma\,\pi\,R^2\,V_1^2$
2	$\frac{1}{6}\pi$	$N_x = \left(1 - \frac{3}{8}\sqrt{3}\right)\gamma\,\pi\,R^2\,V_1^2$

Варианты 3–4

В условиях вариантов 1–2 (табл. 2.2), полагая $V_2 = \frac{2}{3}V_1$, определить величину скорости V_1, при которой давление струи на конус в направлении оси x равно заданной величине N.

Таблица 2.2

№ вар.	Дано φ	Ответ
3	$\frac{1}{4}\pi$	$V_1 = \sqrt{\frac{3N}{(3-\sqrt{2})\,\gamma\,\pi\,R^2}}$

4	$\frac{1}{3}\pi$	$V_1 = \sqrt{\frac{3N}{2\gamma\pi R^2}}$

Варианты 5–6

Жидкость плотностью γ течет со скоростью V по неподвижной изогнутой трубе (табл. 2.3), ось которой расположена в горизонтальной плоскости. Силы F_1 и F_2 динамического давления жидкости в коленах трубы образуют пару с плечом ℓ. Определить момент пары. Площадь поперечного сечения трубы – σ .

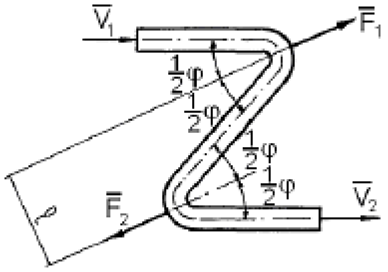
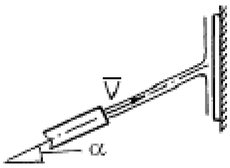


Таблица 2.3

№ вар.	Дано	Ответ
	φ	
5	$\frac{1}{2}\pi$	$M = \sqrt{2}\,\sigma\gamma V^2\ell$
6	$\frac{2}{3}\pi$	$M = \sigma\gamma V^2\ell$

Варианты 7–8



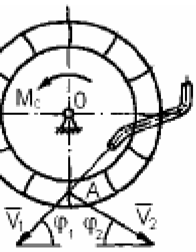
Струя воды, бьющая из шланга со скоростью V под углом α (табл. 2.4) к горизонту, ударяется о вертикальную стеклянную пластину. Пренебрегая действием силы тяжести и считая, что скорости частиц воды после удара направлены вдоль стекла, определить наибольшую допустимую величину V, если давление на стекло не должно превышать величины N. Площадь поперечного сечения шланга равна σ , плотность воды – γ .

Таблица 2.4

№	Дано	Ответ

вар.	α	
7	$\frac{1}{6}\pi$	$V = \sqrt{\frac{2N}{\sqrt{3}\,\sigma\,\gamma}}$
8	$\frac{1}{3}\pi$	$V = \sqrt{\frac{2N}{\sigma\,\gamma}}$

Варианты 9–10



В гидравлической турбине, ось вращения которой горизонтальна, струя воды падает на нижнюю лопатку неподвижного колеса со скоростью V_1, под углом φ_1 к горизонту и стекает с лопатки со скоростью V_2 = к V_1 (к < 1 – заданный коэффициент) под углом φ_2 к горизонту (табл. 2.5). Определить наименьшую величину скорости V_1, при которой колесо турбины начинает вращаться, если момент сил сопротивления на валу колеса равен M_C. Считаем, что равнодействующая сила динамического давления воды на лопатку проходит через точку А, расстояние OA = R. Площадь поперечного сечения трубы, подающей воду, равна σ , плотность воды – γ .

Таблица 2.5

№ вар.	Дано		Ответ
	φ_1	φ_2	
9	$\frac{1}{6}\pi$	$\frac{1}{6}\pi$	$V_1 = \sqrt{\frac{2M_c}{\sqrt{3}\,(1+к)\,\sigma\,\gamma\,R}}$
10	$\frac{1}{4}\pi$	$\frac{1}{3}\pi$	$V_1 = \sqrt{\frac{2M_c}{(\sqrt{2}+к)\,\sigma\,\gamma\,R}}$

Варианты 11–12

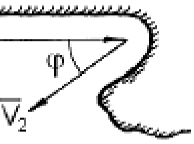
В условиях вариантов 9–10 (табл. 2.6) определить момент сил сопротивления на валу колеса, если оно начало вращаться при заданной скорости V_1.

Таблица 2.6

№	Дано	Ответ

вар.	φ_1	φ_2	
11	$\frac{1}{6}\pi$	$\frac{1}{3}\pi$	$M_c = \frac{1}{2}(\sqrt{3}+к)\,\sigma\,\gamma R\,V_1^2$
12	$\frac{1}{3}\pi$	$\frac{1}{3}\pi$	$M_c = \frac{1}{2}(1+к)\,\sigma\,\gamma R\,V_1^2$

Варианты 13–14



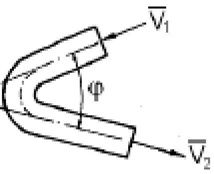
Определить силу, с которой струя воды в реке действует на выступ берега, считая, что в результате столкновения с этим выступом струя

воды с секундной массой m меняет свою скорость с V_1 на V_2, и пренебрегая другими последствиями столкновения. Угол φ см. табл. 2.7.

Таблица 2.7

№ вар.	Дано	Ответ
	φ	
13	$\frac{1}{6}\pi$	$N = m\sqrt{V_1^2 + V_2^2 + \sqrt{3}V_1V_2}$
14	$\frac{2}{3}\pi$	$N = m\sqrt{V_1^2 + V_2^2 - V_1V_2}$

Варианты 15–17



Жидкость плотностью γ течет со скоростью V по изогнутой трубе (табл. 2.8). Ось трубы расположена в горизонтальной плоскости, радиус поперечного сечения трубы равен R. Определить

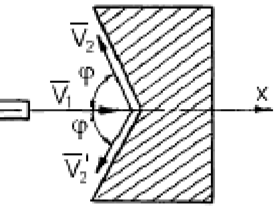
главный вектор сил динамического давления жидкости на стенки трубы.

Таблица 2.8

№ вар.	Дано	Ответ
	φ	
15	0	$N = 2\,\gamma\,\pi\,R^2\,V^2$
16	$\frac{1}{3}\pi$	$N = \sqrt{3}\,\gamma\,\pi\,R^2\,V^2$

17	$\frac{1}{2}\pi$	$N = \sqrt{2}\,\gamma\,\pi\,R^2 V^2$

Варианты 18–19



Горизонтальная струя воды бьет из шланга вдоль оси x внутренней поверхности конуса со скоростью V_1. Считая, что после удара о конус частицы воды движутся вдоль его образующих (табл. 2.9) со средней скоростью $V_2 = \frac{2}{3}V_1$,

определить силу давления воды на конус в направлении оси x. Площадь поперечного сечения шланга равна σ , плотность воды – γ .

Таблица 2.9

№ вар.	Дано	Ответ
	φ	
18	$\frac{1}{4}\pi$	$N_x = \frac{1}{3}\;\gamma\,\sigma\,V_1^2(3+\sqrt{2})$
19	$\frac{1}{3}\pi$	$N_x = \frac{4}{3}\;\gamma\,\sigma\,V_1^2$

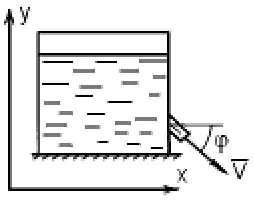
Варианты 20–21

В условиях вариантов 18–19 (табл. 2.10), полагая $V_2 = \frac{1}{2}V_1$, определить величину скорости V_1, при которой давление воды на конус в направлении оси x равно заданной величине N.

Таблица 2.10

№ вар.	Дано	Ответ
	φ	
20	$\frac{1}{6}\pi$	$V_1 = 2\sqrt{\frac{N}{(4+\sqrt{3})\,\gamma\,\sigma}}$
21	$\frac{1}{3}\pi$	$V_1 = 2\sqrt{\frac{N}{5\,\gamma\,\sigma}}$

Варианты 22–23

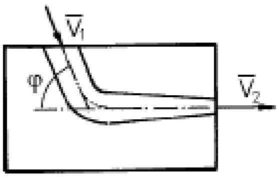


Из бака через патрубок, радиус выходного отверстия которого равен R, вытекает жидкость плотностью γ со скоростью V под углом φ к горизонту (табл. 2.11). Определить горизонтальную силу динамического давления жидкости на стенки бака.

Таблица 2.11

№ вар.	Дано	Ответ
	φ	
22	$\frac{1}{3}\pi$	$N_x = \frac{1}{2}\gamma\,\pi\,R^2\,V^2$
23	0	$N_x = \gamma\,\pi\,R^2\,V^2$

Варианты 24–26



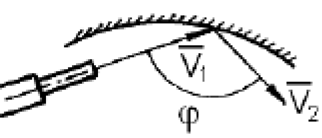
Жидкость плотностью γ входит в канал переменного сечения со скоростью V_1 и выходит из него со скоростью V_2 (табл. 2.12). Ось канала расположена в горизонтальной плоскости, площадь поперечного сечения его на входе равна S.

Определить главный вектор сил динамического давления жидкости на стенки канала.

Таблица 2.12

№ вар.	Дано	Ответ
	φ	
24	0	$N = \gamma\,S\,V_1\,(V_2 - V_1)$
25	$\frac{1}{3}\pi$	$N = \gamma\,S\,V_1\sqrt{V_1^2 + V_2^2 - V_1V_2}$
26	π	$N = \gamma\,S\,V_1\,(V_2 + V_1)$

Варианты 27–28



Струя воды гидромонитора бьет в стену забоя со скоростью V_1. Пренебрегая действием силы тяжести и считая, что средняя скорость частиц воды после удара равна $V_2 = кV_1$, где к – заданный коэффициент, V_2 – направлена под углом φ

(табл. 2.13) к V_1, определить силу давления воды на стенку. Площадь сечения выходного отверстия насадки гидромонитора равна σ, плотность воды – γ.

Таблица 2.13

№ вар.	Дано φ	Ответ
16	$\frac{1}{2}\pi$	$N = \sqrt{1+\kappa^2}\,\gamma\sigma V_1^2$
17	$\frac{3}{4}\pi$	$N = \sqrt{\kappa^2-\sqrt{2}\,\kappa+1}\,\gamma\sigma V_1^2$

Варианты 29–30

В условиях вариантов 27–28 и табл. 2.14 определить величину скорости, при которой давление воды на стену равно N, если к = $\frac{1}{2}$.

Таблица 2.14

№ вар.	Дано φ	Ответ
16	$\frac{2}{3}\pi$	$V_1 = \sqrt{\frac{2N}{\sqrt{3}\,\gamma\sigma}}$
17	$\frac{1}{3}\pi$	$V_1 = \sqrt{\frac{2N}{\sqrt{7}\,\gamma\sigma}}$

Задача № 10. Вариант 1

Однородная платформа весом P, радиусом R вращается в горизонтальной плоскости вокруг вертикальной оси, проходящей через ее центр 0, с угловой скоростью ω_0. На краю платформы стоят два человека весом Q_1 и Q_2 ($Q_2 = 2\,Q_1$). Как изменится угловая скорость платформы, если люди будут двигаться по краю платформы навстречу друг другу со скоростью U относительно платформы, полагая при этом, что человек весом Q_1 идет в сторону, противоположную вращению платформы. Сопротивлением движению пренебречь.

Ответ: $\omega = \omega_0 - \dfrac{2Q_1}{P + 6Q_1}\dfrac{U}{R}$.

Вариант 2

В условиях варианта 1 определить с какой относительной скоростью должны двигаться люди, чтобы платформа перестала вращаться.

Ответ: U = $\dfrac{P + 6Q_1}{2Q_2} R\,\omega_0$.

Вариант 3

Однородная горизонтальная платформа весом P, радиусом R может вращаться вокруг вертикальной оси, проходящей через ее центр 0. С какой угловой скоростью будет вращаться эта платформа, если по ее краю будут идти навстречу друг другу два человека весом Q_1 и Q_2 с одинаковой скоростью U относительно платформы. Сопротивлением движению пренебречь. В начальный момент система была в покое.

Ответ: $\omega = \dfrac{2(Q_2 - Q_1)U}{(P + 2Q_1 + 2Q_2)R}$.

Вариант 4

Однородный горизонтальный диск радиусом R, весом P может вращаться вокруг неподвижной вертикальной оси, проходящей через его центр. С какой угловой скоростью будет вращаться диск, если по его ободу будет двигаться точка по закону
$S = \dfrac{1}{2} a t^2$***, где a – const. В начальный момент система была в покое. Вес точки равен Q.***

Ответ: $\omega = \dfrac{2aQt}{(P + 2Q)R}$.

Вариант 5

В условиях варианта 4 определить угол поворота диска, когда точка сделает по диску один оборот.

Ответ: $\varphi = \dfrac{4Q}{P + 2Q}\pi$ ***.***

Вариант 6

Однородный горизонтальный диск весом P, радиусом R вращается вокруг вертикальной оси, проходящей через его центр, с угловой скоростью ω_0. В некоторый момент по ободу диска начинает двигаться в сторону вращения материальная точка весом Q с относительной скоростью U. Определить угловую скорость диска при движении точки.

Ответ: $\omega = \omega_0 - \dfrac{2Q}{P + 2Q}\dfrac{U}{R}$***.***

Вариант 7

В условиях варианта 6 определить угловую скорость диска, если материальная точка движется по его ободу в сторону, противоположную вращению.

Ответ: $\omega = \omega_0 + \dfrac{2Q}{P + 2Q}\dfrac{U}{R}$***.***

Вариант 8

В условиях варианта 6 найти скорость относительного движения точки по ободу диска, при которой угловая скорость диска будет в два раза меньше ω_0.

Ответ: $U = \dfrac{P + 2Q}{4Q}\omega_0 R$ ***.***

Вариант 9

Горизонтальная однородная платформа радиусом R, весом P вращается вокруг вертикальной оси, проходящей через центр платформы, с угловой скоростью ω_0. В некоторый момент от центра платформы по радиусу начинает двигаться материальная точка весом Q с постоянной относительной скоростью U. Определить угловую скорость диска, когда точка дойдет до края платформы.

Ответ: $\omega = \dfrac{P\,\omega_0}{P + 2\,Q}$.

Вариант 10

Однородная платформа радиусом R, весом P вращается в горизонтальной плоскости вокруг вертикальной оси, проходящей через центр платформы, с угловой скоростью ω_0***. В некоторый момент от центра платформы по диаметру в противоположные стороны начинают двигаться материальные точки весом*** Q_1 ***и*** Q_2 ***с одинаковой скоростью U относительно платформы. Определить угловую скорость платформы через t секунд после начала движения этих точек.***

Ответ: $\omega = \dfrac{P\,\omega_0\,R^2}{P\,R^2 + 2\,(Q_1 + Q_2)\,U^2\,t^2}$.

Вариант 11

Два человека весом P каждый стоят на концах горизонтальной балки длиной 2ℓ***, весом P, вращающейся вокруг вертикальной оси, проходящей через ее середину, с угловой скоростью*** ω_0***. Как изменится угловая скорость балки, если оба человека переместятся по балке к оси вращения на равные отрезки длиной*** $\dfrac{1}{2}\ell$ ***? Сопротивлением движению пренебречь.***

Ответ: $\omega = \dfrac{14}{5}\omega_0$.

Вариант 12

В условиях варианта 11 определить, на каком расстоянии от оси вращения должны находиться люди на балке, чтобы угловая скорость балки была в два раза больше начальной.

Ответ: X = $\dfrac{\ell}{2}\sqrt{\dfrac{5}{3}}$.

Вариант 13

В условиях варианта 11 определить отношение наибольшей угловой скорости вращения балки к наименьшей.

Ответ: $\frac{\omega_{max}}{\omega_{min}} = 7$ **.**

Вариант 14

Горизонтальная балка весом P, длиной 2ℓ вращается вокруг вертикальной оси, проходящей через середину балки, с угловой скоростью ω_0. В некоторый момент по балке от оси вращения начинают двигаться два человека в противоположные стороны с постоянной скоростью U относительно балки. Вес первого человека равен $\frac{1}{4}P$; второго – $\frac{1}{2}P$. Определить угловую скорость балки через t секунд после начала движения людей. Сопротивлением движению пренебречь.

Ответ: $\omega = \frac{4\,\omega_0\,\ell^2}{4\ell^2 + 9\,U^2\,t^2}$ **.**

Вариант 15

Два человека равного веса P стоят на горизонтальной балке длиной 2ℓ , весом Q. Один человек стоит в центре балки, а другой – на ее конце. Балка вращается вокруг вертикальной оси, проходящей через середину балки, с угловой скоростью ω_0. Затем люди начинают движение навстречу друг другу с одинаковой скоростью относительно балки. Определить угловую скорость балки в момент встречи людей. Сопротивлением движению пренебречь.

Ответ: $\omega = \frac{2\,(Q + 3\,P)}{2\,Q + 3\,P}\,\omega_0$ **.**

Вариант 16

Вдоль образующей однородного круглого конуса массой M, ось которого вертикальна, а вершина обращена вверх, просверлен тонкий канал. Конусу сообщают угловую скорость ω_0 вокруг его оси и одновременно с этим опускают в верхнее отверстие канала шарик массы m. Какова будет угловая скорость конуса в тот момент, когда шарик выскочит из канала? Момент инерции конуса относительно его оси равен $J_z = \frac{3}{10}M\,r^2$, r – радиус основания конуса.

Ответ: $\omega = \dfrac{3M}{3M + 10m}\,\omega_0$ ***.***

Вариант 17

Горизонтальная трубка весом Q, длиной 2ℓ вращается вместе с находящимся внутри шариком весом P вокруг вертикальной оси, проходящей через конец трубки, с угловой скоростью ω_0. В начальный момент шарик находится на расстоянии ℓ от оси вращения и его относительная скорость равна нулю. Определить угловую скорость вращения трубки в момент, когда шарик вылетает из нее.

Ответ: $\omega = \dfrac{4Q + 3P}{4Q + 12P}\,\omega_0$ ***.***

Вариант 18

В условиях варианта 17 определить отношение наибольшей угловой скорости вращения трубки к наименьшей, если в начальный момент шарик находился на оси вращения.

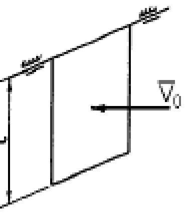
Ответ: $\dfrac{\omega_{max}}{\omega_{min}} = \dfrac{Q + 3P}{Q}$ ***.***

Вариант 19

Кольцо радиусом R вращается вокруг вертикального диаметра с угловой скоростью ω_0. В некоторый момент из наивысшей точки по кольцу начинает двигаться точка массой m. Найти отношение наибольшей угловой скорости вращения кольца к наименьшей. Момент инерции кольца относительно оси вращения равен J_z.

Ответ: $\dfrac{\omega_{max}}{\omega_{min}} = 1 + \dfrac{mR^2}{J_z}$ ***.***

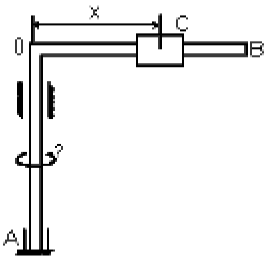
Вариант 20



Деревянная доска длиной ℓ, весом P может вращаться без трения вокруг горизонтальной оси x. В некоторый момент в середину неподвижной доски попадает пуля весом Q, летевшая перпендикулярно к ней со скоростью V_0.Определить угловую *скорость, которую приобретает доска в момент попадания пули. Момент инерции доски:* $J_x = \frac{1}{3}\frac{P}{g}\ell^2$ *.*

Ответ: $\omega = \frac{6\,Q\,V_0}{(4\,P + 3\,Q)\ell}$ *.*

Вариант 21



Стержень, имеющий форму прямого угла А0В, вращается вокруг своей вертикальной стороны А0 с угловой скоростью ω_0. На горизонтальную сторону его насажен груз С массой m. В начальный момент он находится на расстоянии a от точки 0.

Найти зависимость между угловой скоростью стержня ω и расстоянием ОС = x, если момент инерции стержня относительно оси АО равен J.

Ответ: $\omega = \frac{J + m\,a^2}{J + m\,x^2}\omega_0$ *.*

Вариант 22

Горизонтальной однородной платформе радиусом R, весом P, имеющей вертикальную ось, проходящую через центр платформы, сообщается начальная угловая скорость ω_0. Материальная точка весом Q, находящаяся в начальный момент в центре платформы, перемещается вдоль радиуса. Найти угловую скорость вращения платформы ω как функцию расстояния ОА = x.

Ответ: $\omega = \frac{P\,R^2}{P\,R^2 + 2\,Q\,x^2}\omega_0$ *.*

Вариант 23

Однородная круглая горизонтальная платформа радиусом R, весом Q вращается с угловой скоростью ω_0 вокруг вертикальной оси, проходящей через ее центр, вместе с человеком весом P, который находится на расстоянии r от оси вращения. С какой скоростью будет вращаться платформа, если человек пойдет по окружности радиуса с постоянной относительной скоростью

U в сторону, противоположную вращению платформы? Сопротивлением движению пренебречь.

Ответ: $\omega = \omega_0 + \dfrac{2PUr}{QR^2 + 2Pr^2}$ ***.***

Вариант 24

Однородный шар радиусом R, весом Q может вращаться вокруг вертикального диаметра. С какой угловой скоростью будет вращаться шар, если по большому горизонтальному кругу начнет движение материальная точка весом P с относительной скоростью U? В начальный момент шар и точка находятся в покое. Момент инерции шара относительно оси, направленной вдоль диаметра, $J_z = \dfrac{2}{5}\dfrac{Q}{g}R^2$ ***.***

Ответ: $\omega = \dfrac{5P}{(2Q + 5P)}\dfrac{U}{R}$***.***

Вариант 25

В условиях варианта 24 определить угловую скорость шара, если материальная точка движется по малому горизонтальному кругу радиусом r.

Ответ: $\omega = \dfrac{5Pr}{2QR^2 + 5Pr^2}U$ ***.***

Вариант 26

Однородный диск радиусом R, весом Q может вращаться без трения вокруг вертикального диаметра. В некоторый момент в точку неподвижного диска, отстоящую на расстоянии $\frac{1}{2}R$ ***от вертикального диаметра, попадает пуля, летящая перпендикулярно плоскости диска со скоростью V. Вес пули равен P. Определить угловую скорость диска, которую он приобретает в момент попадания пули.***

Ответ: $\omega = \dfrac{2P}{(Q + P)}\dfrac{V}{R}$***.***

Вариант 27

Человеку, который стоит на скамейке Жуковского с расставленными в стороны руками, сообщают угловую скорость, соответствующую 15 об/мин. Момент инерции человека и скамейки относительно оси вращения равен 0,8 кгм^2. С какой угловой скоростью начнет вращаться скамейка с человеком, если, опустив руки, он уменьшит момент инерции системы до 0,12 кгм^2?

Ответ: 100 об/мин.

Вариант 28

Два твердых тела вращаются независимо друг от друга вокруг одной неподвижной вертикальной оси с постоянными угловыми скоростями ω_1 и ω_2. Моменты инерции тел относительно этой оси соответственно равны J_1 и J_2. С какой угловой скоростью станут вращаться оба тела, если они будут во время вращения соединены ?

Ответ: $\omega = \dfrac{J_1 \omega_1 + J_2 \omega_2}{J_1 + J_2}$.

Вариант 29

Однородная горизонтальная платформа радиусом R, весом Q вращается без трения вокруг вертикальной оси, проходящей через ее центр, с угловой скоростью ω_0. На платформе стоят два человека: человек весом P_1 – на краю платформы, человек весом P_2 – на расстоянии $\frac{R}{2}$ от центра платформы. Как изменится угловая скорость платформы, если человек весом P_1 пойдет по краю платформы в сторону вращения с относительной скоростью U, а человек весом P_2 пойдет по окружности радиусом $\frac{R}{2}$ в противоположную сторону с той же относительной скоростью? Сопротивлением движению пренебречь.

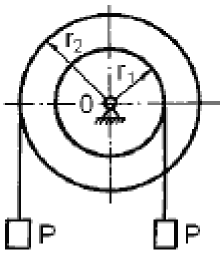
Ответ: $\omega = \omega_0 + \dfrac{2(P_2 - 2P_1)}{(2Q + 4P_1 + P_2)} \dfrac{U}{R}$.

Вариант 30

В условиях варианта 29 определить с какой относительной скоростью должны двигаться люди, чтобы платформа перестала вращаться. Принять $P_1 = P_2 = \frac{1}{4}Q$.

Ответ: $U = 6{,}5\,\omega_0 R$

Задача № 11. Вариант 1



Два груза одинакового веса P подвешены на двух невесомых нерастяжимых нитях, которые навернуты на барабаны, насаженные на горизонтальный вал и имеющие радиусы r_1 и r_2. Общий момент инерции барабанов и вала относительно оси вращения равен J. Пренебрегая сопротивлением движению, определить угловое ускорение барабанов. Система движется под действием силы тяжести грузов.

Ответ: $\varepsilon = \dfrac{P(r_2 - r_1)\,g}{J\,g + P(r_1^2 + r_2^2)}$.

Вариант 2

В условиях варианта 1 определить угловое ускорение барабанов, если к валу приложен постоянный крутящий момент M_0, поворачивающий барабаны по часовой стрелке.

Ответ: $\varepsilon = \dfrac{M_0 - P(r_2 - r_1)}{J\,g + P(r_1^2 + r_2^2)}\,g$.

Вариант 3

В условиях варианта 1 определить, каким должен быть постоянный момент трения в подшипниках вала, чтобы барабаны вращались с заданным угловым ускорением ε .

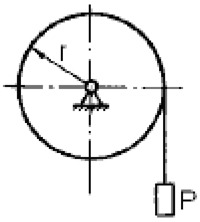
Ответ: $M_{тр} = P(r_2 - r_1) - \dfrac{\varepsilon}{g}[J\,g + P(r_1^2 + r_2^2)]$.

Вариант 4

В условиях варианта 1 определить закон изменения угловой скорости барабанов, учитывая, что при движении системы возникает момент сил сопротивления, пропорциональный угловой скорости барабанов: $M_c = k\omega$, где к – постоянный коэффициент.

Ответ: $\omega = \frac{P}{\kappa}(r_2 - r_1)[1 - e^{-\mu t}], \quad \mu = \frac{\kappa g}{J g + P(r_1^2 + r_2^2)}$.

Вариант 5



На барабан весом Q, радиусом r намотана невесомая нерастяжимая нить, к концу которой подвешен груз весом P. Система движется под действием силы тяжести груза. Пренебрегая сопротивлением движению, определить ускорение груза. Масса барабана равномерно распределена по ободу.

Ответ: $a = \frac{P}{(Q + P)\, g}$.

Вариант 6

В условиях варианта 5 учесть момент сил сопротивления среды, пропорциональный угловой скорости барабана ($M_c = \kappa\omega$, где к – постоянный коэффициент) и определить угловую скорость барабана через t секунд после начала движения. В начальный момент система была
в покое.

Ответ: $\omega = \frac{P r}{\kappa}(1 - e^{-\mu t}), \quad \mu = \frac{\kappa g}{(P + Q)\, r^2}$.

Вариант 7

В условиях варианта 5 определить угловое ускорение барабана, учитывая, что при вращении барабана в подшипниках вала возникает постоянный момент трения $M_{тр}$.

Ответ: $\varepsilon = \frac{Pr - M_{тр}}{(P + Q)\, r^2}\, g$.

Вариант 8

Барабан весом Q, радиусом R приводится во вращение вокруг горизонтальной оси постоянным крутящим моментом M_0. На вал наматывается трос, к свободному концу которого подвешен груз весом P. Определить, пренебрегая весом троса и его растяжением, скорость подъема груза через t секунд после начала движения. В начальный момент система была в покое. Масса барабана равномерно распределена по его ободу.

Ответ: $V = \dfrac{(M_0 - P R)}{(Q + P) R} g t$.

Вариант 9

В условиях варианта 8 определить величину крутящего момента, обеспечивающего подъем груза с заданным ускорением a.

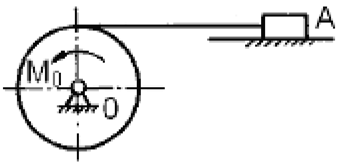
Ответ: $M_0 = \left[P + (P + Q) \dfrac{a}{g}\right] R$.

Вариант 10

В условиях варианта 8 определить закон изменения скорости груза, учитывая, что при подъеме на груз действует сила сопротивления среды, равная μV, где μ – постоянный коэффициент, V – скорость груза.

Ответ: $V = \dfrac{M_0 - P R}{\mu R}(1 - e^{-\kappa t}), \quad \kappa = \dfrac{\mu g}{P + Q}$.

Вариант 11



Груз A весом P приводится в движение по горизонтальной плоскости с помощью троса, наматываемого на барабан радиусом r. К барабану приложен постоянный вращающий момент M_0. Момент инерции барабана относительно оси вращения равен J. Коэффициент трения груза о плоскость равен f. Определить, через какой промежуток времени скорость груза A будет равна V.

Ответ: $t = \dfrac{(P r^2 + J g) V}{g r (M_0 - f P r)}$.

Вариант 12

В условиях варианта 11 определить угловое ускорение барабана.

Ответ: $\varepsilon = \dfrac{M_0 - f P r}{J g + P r^2} g$.

Вариант 13

В условиях варианта 11 определить ускорение груза А, учитывая, что при вращении барабана в подшипниках вала возникает постоянный момент трения $M_{тр}$.

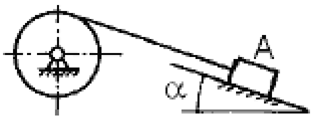
Ответ: $$a = \frac{M_0 - f P r - M_{тр}}{(P r^2 + J g)} rg$$.

Вариант 14

В условиях варианта 11 определить закон изменения угловой скорости барабана, учитывая, что при движении системы возникает момент сил сопротивления, пропорциональный угловой скорости барабана, $M_{сопр} = к\omega$, где к – постоянный коэффициент.

Ответ: $$\omega = \frac{1}{к}(M_0 - f P r)\left(1 - e^{-\frac{g к t}{J g + P r^2}}\right)$$.

Вариант 15



Тело весом Р находится на гладкой наклонной плоскости, образующей угол α с горизонтом. К телу А привязан трос, второй конец которого намотан на барабан радиусом r. Момент инерции барабана относительно оси вращения равен J.

Определить угловое ускорение барабана при движении груза вниз по наклонной плоскости под действием силы тяжести.

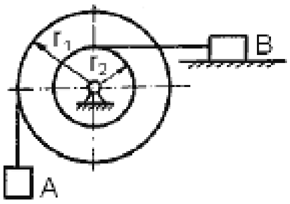
Ответ: $$\varepsilon = \frac{P g r \sin\alpha}{J g + P r^2}$$.

Вариант 16

В условиях варианта 15 определить ускорение тела А, учитывая, что при вращении барабана в подшипниках возникает постоянный момент трения $M_{тр}$.

Ответ: $$a = \frac{P r \sin\alpha - M_{тр}}{J g + P r^2} r g$$.

Вариант 17



Два груза A и B одинакового веса прикреплены к концам невесомых и нерастяжимых нитей, которые навернуты на барабаны, насаженные на горизонтальный вал и имеющие радиусы r_1 и r_2. Груз A опускается вниз под действием силы тяжести, груз B скользит по горизонтальной плоскости, коэффициент трения скольжения равен f. Общий момент инерции барабанов и вала относительно оси вращения равен J. Определить, через какой промежуток времени скорость груза B будет равна V, если система пришла в движение без начальной скорости.

Ответ: $$t = \frac{J\,g + P\,(r_1^2 + r_2^2)}{P\,g\,(r_1 - f\,r_2)}\,\frac{V}{r^2}.$$

Вариант 18

В условиях варианта 17 определить угловое ускорение барабанов.

Ответ: $$\varepsilon = \frac{P\,g\,(r_1 - f\,r_2)}{J\,g + P\,(r_1^2 + r_2^2)}.$$

Вариант 19

В условиях варианта 17 определить ускорение груза A .

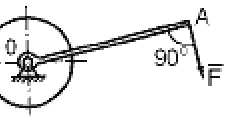
Ответ: $$a = \frac{P\,g\,(r_1 - f\,r_2)\,r_1}{J\,g + P\,(r_1^2 + r_2^2)}.$$

Вариант 20

В условиях варианта 17 определить, каким должен быть постоянный момент трения в подшипниках вала, чтобы барабаны вращались с заданным угловым ускорением ε .

Ответ: $$M_{тр} = P\,(r_1 - f\,r_2) - \frac{\varepsilon}{g}\,(J\,g + P\,r_1^2 + P\,r_2^2).$$

Вариант 21



Груз весом P поднимается посредством троса, наматывающегося на барабан. Барабан получает вращение от силы F, приложенной на конце рукоятки OA длиной ℓ . Считая барабан сплошным цилиндром весом Q, радиусом r, пренебрегая массой рукоятки, определить ускорение груза.

Ответ: $a = \frac{2(F\,\ell - P\,r)}{(2P + Q)\,r}\,g$.

Вариант 22

В условиях варианта 21 определить угловое ускорение барабана, считая, что при вращении барабана на его оси возникает постоянный момент трения, равный $M_{тр}$.

Ответ: $\varepsilon = \frac{2(F\ell - P\,r - M_{тр})}{(2\,P + Q)\,r^2}\,g$.

Вариант 23

В условиях варианта 21 определить величину момента трения на оси барабана, при которой груз P будет подниматься с заданным постоянным ускорением a.

Ответ: $M_{тр} = F\,\ell - P\,r - (2\,P + Q)\frac{r}{2}\frac{a}{g}$.

Варианты 24–27

Грузы A и B одинакового веса P прикреплены к концам невесомой нерастяжимой нити, переброшенной через блок весом Q, радиусом r. Грузы под действием силы тяжести скользят по гладким наклонным плоскостям, образующим углы α и β с горизонтом (табл. 2.15). Определить ускорение грузов, считая, что нить не проскальзывает по блоку и масса блока равномерно распределена по его ободу.

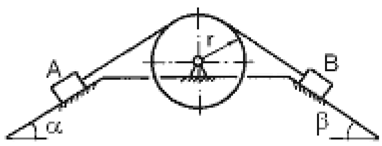


Таблица 2.15

№ вар.	Дано		Ответ
	α	β	
24	$\frac{\pi}{2}$	$0 < \beta < \frac{\pi}{2}$	$a = \frac{P\,(1 - \sin\beta)}{2\,P + Q}\,g$
25	$0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2}$	$a = \frac{P\,(1 - \sin\alpha)}{2\,P + Q}\,g$

26	0	$0 < \beta < \frac{\pi}{2}$	$a = \frac{P \sin\beta}{2P + Q} g$
27	$\frac{\pi}{2}$	0	$a = \frac{P}{2P + Q} g$

Вариант 28

В условиях варианта 24 определить, через сколько времени скорость грузов будет равна V, учитывая, что при вращении блока на оси возникает постоянный момент трения $M_{тр}$. Начальная скорость грузов равна нулю.

Ответ: $t = \frac{r\,(Q + 2P)\,V}{g\,[P\,(1 - \sin\beta)\,r - M_{тр}]}$.

Вариант 29

В условиях варианта 25 определить закон изменения угловой скорости блока, учитывая, что при вращении блока на оси возникает постоянный момент трения $M_{тр}$. Система пришла в движение без начальной скорости.

Ответ: $\omega = \frac{P\,r\,(1 - \sin\beta)\,r - M_{тр}}{(2P + Q)\,r^2}\,t$.

Вариант 30

В условиях варианта 26 определить величину момента трения на оси блока, если известно, что блок вращается с постоянным угловым ускорением ε .

Ответ: $M_{тр} = P\,r\,\sin\beta - \frac{2P + Q}{g}\,r^2\varepsilon$.

Задача № 12. Вариант 1

Винт судна приводится во вращение из состояния покоя постоянным крутящим моментом M_0. Момент сил сопротивления воды, приведенный к оси винта, пропорционален квадрату угловой скорости, то есть $M_{сопр} = к\,\omega^2$, где к – постоянный коэффициент. Определить, через сколько времени угловая скорость винта станет равной ω_1. Момент инерции винта относительно оси вращения равен J.

Ответ: $t_1 = \frac{J}{2\,a\,к} \ln \frac{a+\omega_1}{a-\omega_1},\ a = \sqrt{\frac{M_0}{к}}$.

Вариант 2

В условиях варианта 1 определить число оборотов N_1, которое сделает винт судна до момента, когда его угловая скорость станет равной ω_1.

Ответ: $N_1 = \frac{J}{4\pi к} \ln \frac{M_0}{M_0 - к\,\omega_1^2}$

Вариант 3

Твердое тело начинает вращаться вокруг неподвижной оси z из состояния покоя под действием момента, зависящего от угла поворота φ : $M_z = a\,\varphi - b\,\varphi^3$, где a и b – постоянные величины. Определить угловую скорость тела в зависимости от угла поворота φ , если его момент инерции относительно оси вращения равен J_z. При t = 0, $\varphi = \varphi_0$.

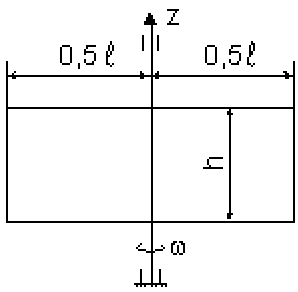
Ответ: $\omega = \sqrt{\frac{1}{J_z}(\varphi^2 - \varphi_0^2)\,[a - \frac{1}{2} b\,(\varphi^2 - \varphi_0^2)]}$.

Вариант 4

К ротору электродвигателя в период разгона из состояния покоя приложен вращающий момент $M_z = M_0 - \alpha\,\omega$, где M_0 и α – постоянные величины, ω – угловая скорость ротора. Определить закон изменения угловой скорости ротора, если его момент инерции относительно оси вращения равен J.

Ответ: $\omega = \frac{M_0}{\alpha}\,(1 - e^{-\frac{\alpha}{J}t})$.

Вариант 5



Однородная прямоугольная пластинка весом P, длиной ℓ и высотой h вращается вокруг вертикальной оси z, являющейся ее осью симметрии. При вращении пластинка испытывает сопротивление воздуха. Равнодействующая сил сопротивления, приложенная к каждой половине пластинки, направлена перпендикулярно к ее плоскости на расстоянии $\frac{3}{8}\ell$ от оси вращения и определяется равенством $R = \alpha \dfrac{h \ell^3 \omega^2}{24}$, где α – постоянный коэффициент, ω – угловая скорость пластинки. Определить, через сколько времени угловая скорость пластинки уменьшится от ω_1 до ω_2.

Момент инерции пластинки относительно оси вращения $J_z = \dfrac{1}{12\,g} P \ell^2$.

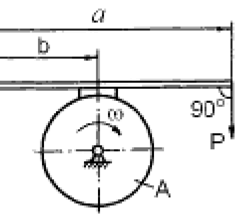
Ответ: $t = \dfrac{8\,P\,(\omega_1 - \omega_2)}{3\,\alpha\,h\,\ell^2\,g\,\omega_1\,\omega_2}$.

Вариант 6

Твердое тело начинает вращаться из состояния покоя под действием момента, изменяющегося по закону: $M_z = a\,t$, где a – постоянный коэффициент, t – время. Определить зависимость угловой скорости тела от угла поворота, принимая $\varphi_0 = 0$. Момент инерции тела относительно оси вращения равен J_z.

Ответ: $\omega = 3\sqrt[3]{\dfrac{a}{6\,J_z}\varphi^2}$.

Вариант 7



Шкив A, вращающийся с угловой скоростью ω_0, тормозится при помощи ручного тормоза. С какой силой P надо прижать рукоятку тормоза, чтобы шкив остановился через t секунд, если коэффициент трения равен f, величины a и b заданы, момент инерции относительно оси вращения – J, а его радиус – r.

Ответ: $P = \dfrac{J\,b\,\omega_0}{a\,r\,f\,t}$.

Вариант 8

В условиях предыдущей задачи определить число оборотов N, совершенных шкивом до остановки, считая силу P известной.

Ответ: $N = \dfrac{J\,b\,\omega_0^2}{4\pi\,a\,r\,f\,P}$.

Вариант 9

Однородному стержню длиной 2ℓ, весом P, лежащему на горизонтальной шероховатой плоскости, сообщена угловая скорость ω_0 вокруг оси, перпендикулярной стержню и проходящей через его центр. Определить время вращения стержня до остановки, считая, что момент сил трения определяется по формуле $M_{тр} = \frac{1}{2} P \ell f$, где f – коэффициент трения.

Ответ: $t = \frac{2 \ell \omega_0}{3 g f}$.

Вариант 10

Однородный сплошной диск радиусом R, весом P, вращающийся с угловой скоростью ω_0 вокруг оси, перпендикулярной к плоскости диска и проходящей через его центр, помещен на горизонтальную шероховатую плоскость. Найти время движения диска до остановки, считая, что момент сил трения определяется по формуле $M_{тр} = \frac{2}{3} P f R$, где f – коэффициент трения.

Ответ: $t = \frac{3 R \omega_0}{4 g f}$.

Вариант 11

Маховик, момент инерции которого относительно оси вращения равен J, в начале торможения имел угловую скорость ω_0. Определить, через сколько времени его угловая скорость уменьшится в два раза, если момент сил сопротивления пропорционален квадрату угловой скорости, коэффициент пропорциональности равен к.

Ответ: $t = \frac{J}{\omega_0 к}$.

Вариант 12

В условиях предыдущей задачи определить число оборотов маховика до момента, когда его угловая скорость уменьшится в два раза.

Ответ: $N = \frac{J \ln 2}{2 \pi к}$.

Вариант 13

При работе судового дизеля с отключенным винтом и без регулятора крутящий момент на выходном валу двигателя изменяется по закону: $M = -A + B\,\omega$, где A и B – постоянные величины, ω – угловая скорость. Определить закон изменения угловой скорости вала с течением времени, если момент инерции вала – J, начальная угловая скорость – ω_0.

Ответ: $\omega = \frac{A}{B} + \left(\omega_0 - \frac{A}{B}\right) e^{\frac{B}{J}t}$.

Вариант 14

На тормозящий вал действует постоянный момент M_1 от трения в подшипниках и момент сил сопротивления, изменяющийся по закону: $M_c = M_0\,(1 - e^{-\kappa t})$, где M_0 и к – постоянные величины. Определить угловую скорость вала как функцию времени, если его начальная угловая скорость равна ω_0, а момент инерции равен J.

Ответ: $\omega = \omega_0 - \frac{1}{J}(M_1 - M_0)\,t - \frac{M_0}{J\kappa}(e^{-\kappa t} - 1)$.

Вариант 15

При вращении маховика возникает постоянный момент M_1 от трения в подшипниках и момент сил сопротивления, пропорциональный скорости V на ободе маховика: $M_c = \kappa\,V$, где к – постоянный коэффициент. Диаметр маховика – D, момент инерции относительно оси вращения – J. Найти, через сколько времени маховик остановится, если его начальная угловая скорость равна ω_0.

Ответ: $t = \frac{2\,J}{\kappa\,D} \ln\left(1 + \frac{\kappa\,D\,\omega_0}{2\,M_1}\right)$.

Варианты 16–17

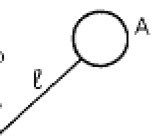
Твердое тело, находящееся в покое, приводится во вращение вокруг неподвижной вертикальной оси постоянным моментом M_0, при этом возникает момент сил сопротивления M_c (табл. 2.16, где α – постоянный коэффициент, ω – угловая скорость тела). Найти закон изменения угловой скорости, если момент инерции твердого тела относительно оси вращения равен J.

Таблица 2.16

№	Дано	Ответ

вар.	M_c	
16	$\alpha\,\omega^2$	$\omega = \sqrt{\dfrac{M_0}{\alpha}}\,\dfrac{e^{kt}-1}{e^{kt}+1},\quad к = \dfrac{2}{J}\sqrt{\alpha M_0}$
17	$\alpha\,\omega$	$\omega = \dfrac{M_0}{\alpha}(1-e^{-nt}),\quad n = \dfrac{\alpha}{J}$

Вариант 18



К вертикальному валу под углом φ жестко прикреплен стержень длиной ℓ с тяжелым шаром A на конце. При вращении вала на шар действует сила сопротивления среды, пропорциональная угловой скорости: $R = к\, m\, \omega$, где к – коэффициент пропорциональности, m – масса шара.

Определить, через сколько времени угловая скорость вращения вала станет в два раза меньше начальной. Размерами шара, массой стержня и вала пренебречь.

Ответ: $t = \dfrac{\ell \sin\varphi}{к}\ln 2$.

Вариант 19

В условиях предыдущей задачи определить число оборотов N, сделанных валом до момента, когда его угловая скорость станет равной $\dfrac{1}{2}\omega_0$, где ω_0 – начальная угловая скорость вала.

Ответ: $N = \dfrac{\ell\,\omega_0 \sin\varphi}{4\pi к}$.

Вариант 20

Приводной вал вращается постоянным крутящим моментом M_0. Специальное устройство для регулировки вращения, укрепленное на валу, создает момент сопротивления $M_1 = к\,\omega^2$, где к – постоянный коэффициент, ω – угловая скорость вала. Определить закон изменения угловой скорости вала, предполагая, что в начальный момент она равна нулю. Момент инерции всех вращающихся частей относительно оси вращения равен J.

Ответ: $\omega = \sqrt{\frac{M_0}{\kappa}}\,\frac{e^{bt}-1}{e^{bt}+1}, \quad b = \frac{2}{J}\sqrt{\kappa M_0}$.

Вариант 21

В условиях варианта 20 определить закон вращения вала после прекращения действия крутящего момента, считая, что в этот момент угловая скорость вала равна ω_0.

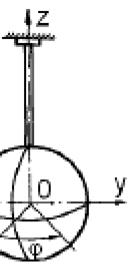
Ответ: $\varphi = \frac{J}{\kappa}\ln\left(1 + \frac{\kappa\,\omega_0}{J}t\right)$.

Вариант 22

В условиях варианта 20, считая момент сопротивления $M_1 = \kappa\,\omega$, определить закон изменения угловой скорости, если $\omega_0 = 0$.

Ответ: $\omega = \frac{M_0}{\kappa}\left(1 - e^{-\frac{\kappa}{J}t}\right)$.

Вариант 23

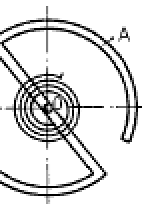


Упругий вертикальный стержень, на котором подвешен однородный шар радиусом r, массой m, закручивают на угол φ_0, вокруг вертикальной оси z, а затем предоставляют ему свободно раскручиваться. Момент сил упругости стержня относительно оси z изменяется по закону: $M_z = c\,\varphi$, где c – постоянный коэффициент, φ – угол закручивания стержня.

Определить закон крутильных колебаний шара $\varphi = \varphi(t)$, пренебрегая сопротивлением воздуха. Осевой момент инерции шара: $J_z = \frac{2}{5}m r^2$.

Ответ: $\varphi = \varphi_0 \cos\sqrt{\frac{5c}{2mr^2}}\,t$.

Вариант 24



Часовой балансир А может свободно вращаться вокруг оси, перпендикулярной к его плоскости и проходящей через центр тяжести 0, имея относительно этой оси момент инерции J; балансир приводится в движение спиральной пружиной, один конец которой скреплен с ним, а другой – неподвижен. При повороте балансира вокруг оси на некоторый угол возникает момент сил упругости пружины, пропорциональный

углу поворота, коэффициент пропорциональности равен с. Определить закон крутильных колебаний балансира $\varphi = \varphi(t)$, если при $t = 0$, $\varphi_0 = 0$, $\dot{\varphi}_0 = \omega_0$.

Ответ: $\varphi = \omega_0 \sqrt{\frac{J}{c}} \sin \sqrt{\frac{c}{J}}\, t$.

Вариант 25

При полете снаряда вращение его вокруг оси симметрии замедляется действием момента сил сопротивления воздуха, равного к ω, где ω – угловая скорость вращения снаряда, к – коэффициент пропорциональности. Определить закон убывания угловой скорости, если начальная угловая скорость равна ω_0, а момент инерции снаряда относительно оси симметрии равен J.

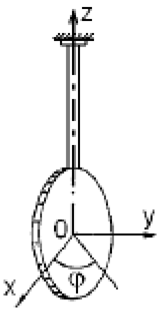
Ответ: $\omega = \omega_0\, e^{-\frac{\kappa}{J}t}$.

Вариант 26

Твердое тело начинает вращаться вокруг неподвижной вертикальной оси z из состояния покоя под действием момента, зависящего от угловой скорости вращения тела: $M_z = M_0 - \alpha\,\omega^2$, где M_0 и α – постоянные величины. Определить закон изменения угловой скорости вращения тела, если его момент инерции относительно оси вращения равен J_z.

Ответ: $\omega = \sqrt{\frac{M_0}{\alpha}}\,\frac{1 - e^{-\kappa t}}{1 + e^{\kappa t}},\quad \kappa = \frac{2}{J_z}\sqrt{\alpha\, M_0}$.

Вариант 27



Однородный круглый диск весом Р, радиусом r жестко прикреплен к нижнему концу вертикальной упругой проволоки в одной из точек на ободе. При повороте диска на угол φ вокруг оси z в проволоке возникает момент сил упругости, пропорциональный углу закручивания φ : $M_z = c\,\varphi$, где с – постоянный коэффициент.Определить, пренебрегая

сопротивлением воздуха, крутильные колебания диска $\varphi = \varphi(t)$, если при $t = 0$, $\varphi_0 = 0$, $\dot{\varphi}_0 = \omega_0$.

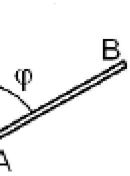
Ответ: $\varphi = \frac{\omega_0}{\kappa} \sin \kappa t, \quad \kappa = \frac{4cg}{Pr^2}$.

Вариант 28

Решить предыдущую задачу в предположении, что диск совершает крутильные колебания в вязкой жидкости, причем момент силы сопротивления движению $(M_z)_{сопр} = \beta \dot{\varphi}$, где β – постоянный коэффициент $\beta < r\sqrt{\frac{cP}{g}}$.

Ответ: $\varphi = \frac{\omega_0}{\sqrt{\kappa^2 - n^2}} e^{-nt} \sin \sqrt{\kappa^2 - n^2}\, t, \quad \kappa^2 = \frac{4cg}{Pr^2}, \quad n = \frac{2\beta g}{Pr^2}$.

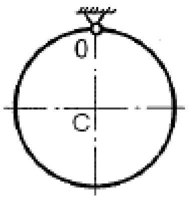
Вариант 29



Однородный стержень АВ длиной ℓ, весом Р падает из вертикального положения, вращаясь вокруг горизонтальной оси, проходящей через его конец А. Пренебрегая сопротивлением воздуха, определить угловую скорость стержня в момент прохождения им горизонтального положения.

Ответ: $\omega = \sqrt{\frac{3g}{\ell}}$.

Вариант 30



Однородный сплошной диск весом Р, радиусом R может вращаться вокруг горизонтальной оси, проходящей через точку 0 на его ободе. Какую минимальную скорость нужно сообщить центру тяжести диска в положении, указанном на рисунке, чтобы радиус 0С диска занял горизонтальное положение.

Ответ: $V_c = \frac{2}{3}\sqrt{3gR}$.

Задача № 13. Вариант 1

Тело весом Р падает без начальной скорости с высоты Н на горизонтальную упругую балку в ее середину; концы балки закреплены. Сила упругости балки, действующая на тело, пропорциональна прогибу балки, $F = c\lambda$, где с – коэффициент пропорциональности, λ –прогиб балки. Определить, пренебрегая массой балки, наибольший прогиб ее, вызванный упавшим телом.

Ответ: $\lambda_{max} = \frac{P}{c}\left(1 + \sqrt{1 + 2\frac{c}{P}H}\right)$.

Вариант 2

В условиях варианта 1 определить скорость тела в момент, когда прогиб балки равен λ .

Ответ: $V = \sqrt{2g(H + \lambda) - \frac{c}{P} g \lambda^2}$.

Вариант 3

На тело массой m, скользящее по горизонтальной прямой, действует сила притяжения к центру 0, расположенному на этой прямой. Сила притяжения пропорциональна расстоянию тела от центра 0, коэффициент пропорциональности – $к^2$ m. Считая, что движение тела началось из пункта M_0, удаленного от центра 0 на расстояние ℓ без начальной скорости, определить, пренебрегая трением, скорость тела в момент прохождения им центра 0 .

Ответ: $V = к\ell$.

Вариант 4

В условиях варианта 3 определить скорость тела в момент, когда оно находится на расстоянии S от центра 0, считая, что движение началось из того же пункта M_0 с начальной скоростью V_0, направленной к центру 0.

Ответ: $V = \sqrt{V_0^2 + к^2(\ell^2 - S^2)}$.

Вариант 5

В условиях варианта 3 определить скорость тела в момент прохождения им центра 0, учитывая трение скольжения; коэффициент трения скольжения – f.

Ответ: $V = \sqrt{к^2\ell^2 - 2fg\ell}$.

Вариант 6

В условиях варианта 3 определить, на какое расстояние от центра 0 удалится тело, если движение началось из M_0 со скоростью V_0, направленной от центра.

Ответ: $S_{max} = \frac{1}{к}\sqrt{к^2\ell^2 + V_0^2}$.

Вариант 7

Груз весом P подвешен к концу B упругого шнура, другой конец которого закреплен в точке A. Груз поднимают в точку A и опускают без начальной скорости. Найти наибольшее удлинение шнура, если его естественная длина равна ℓ, а статическое удлинение под действием силы P равно λ.

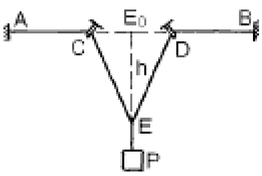
Ответ: $\lambda_{max} = \lambda + \sqrt{\lambda(\lambda + 2\ell)}$.

Вариант 8

В условиях варианта 7 определить наибольшее удлинение шнура, если груз начинает движение из точки A с начальной скоростью V_0, направленной вертикально вниз.

Ответ: $\lambda_{max} = \lambda + \sqrt{\lambda^2 + \frac{\lambda}{g}V_0^2 + 2\lambda\ell}$.

Вариант 9



К середине E_0 горизонтального упругого шнура, закрепленного в точках A и B, проходящего через гладкие колечки C и D (AC = BD = ℓ) прикреплен груз весом P. Определить на какое расстояние h_{max} опустится груз из положения E_0, если $V_0 = 0$. Сила натяжения шнура пропорциональна его удлинению, коэффициент пропорциональности равен C. Естественная длина шнура равна 2ℓ.

Ответ: $h_{max} = \frac{P}{c}$.

Вариант 10

В условиях варианта 9 определить зависимость скорости груза от расстояния h.

Ответ: $V = \sqrt{2gh\left(1 - \frac{c}{P}h\right)}$.

Задача № 13.

В условиях варианта 9 определить h_{max}, если груз начал двигаться из точки E_0 со скоростью V_0, направленной вертикально вниз.

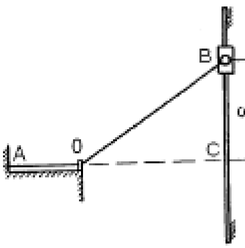
Ответ: $$h_{max} = \frac{P}{2c}\left(1 + \sqrt{1 + 2\frac{c}{Pg}V_0^2}\right).$$

Вариант 12

Груз весом P подвешен на пружине, другой конец которой прикреплен к нерастяжимой веревке, навернутой на шкив. При равномерном вращении шкива груз опускается с постоянной скоростью V_0. Внезапно шкив останавливается. Определить наибольшее удлинение пружины, если ее статическое удлинение под действием силы P равно λ .

Ответ: $$\lambda_{max} = \lambda + V_0\sqrt{\frac{\lambda}{g}}.$$

Вариант 13



Упругая нить A0B, закрепленная в точке A, проходит через неподвижное гладкое кольцо 0; конец B нити прикреплен к ползуну весом P, скользящему по неподвижному вертикальному стержню. Длина нерастянутой нити равна A0. Сила натяжения нити пропорциональна ее удлинению,коэффициент пропорциональности равен к. В некоторый момент ползун был сдвинут вверх по стержню на расстояние S от точки C и отпущен без начальной скорости. Определить, пренебрегая трением, скорость ползуна при возвращении его в положение C.

Ответ: $$V_0 = \sqrt{\left(2g + \frac{\kappa g S}{P}\right)S}.$$

Вариант 14

В условиях варианта 13 определить, какое расстояние L от точки C пройдет ползун вниз по стержню до остановки.

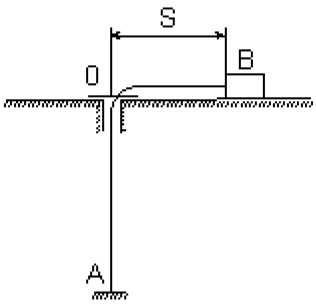
Ответ: $$L = \frac{P}{\kappa} + \sqrt{\left(\frac{P}{\kappa}\right)^2 + \left(2\frac{P}{\kappa} + S\right)S}.$$

Вариант 15

В условиях варианта 13 определить расстояние H, которое пройдет ползун вверх по стержню до остановки, если движение его начинается из точки C (см. рисунок к варианту 13) со скоростью V_0, направленной вверх.

Ответ: $H = \frac{P}{к}\left(\sqrt{1+\frac{к}{Pg}V_0^2} - 1\right)$.

Вариант 16



Упругая нить A0B, закрепленная в точке A, проходит через гладкое отверстие 0 в горизонтальной плоскости; конец B нити прикреплен к телу массой m, лежащему на плоскости. Длина нерастянутой нити равна A0. Сила натяжения нити пропорциональна ее удлинению, коэффициент пропорциональности равен $к^2$ m. В некоторый момент тело было отведено из центра 0 вправо на расстояние S_0 и отпущено без начальной скорости. Определить скорость тела в момент, когда оно находится на расстоянии S от центра 0. Коэффициент трения тела о плоскость равен f.

Ответ: $V = \sqrt{к^2(S_0^2 - S^2) - 2fg(S_0 - S)}$.

Вариант 17

В условиях варианта 16 определить, какую начальную скорость V_0, направленную к центру 0, нужно сообщить телу, чтобы оно остановилось слева от центра на расстоянии, равном S_0.

Ответ: $V_0 = 2\sqrt{fgS_0}$.

Вариант 18

На точку массой m действует сила отталкивания от неподвижного центра, пропорциональная расстоянию точки от этого центра, коэффициент пропорциональности равен к. В момент, когда точка находилась на расстоянии S_0 от центра отталкивания, ей была толчком сообщена скорость V_0, направленная к этому центру. Определить наименьшее значение скорости V_0, при которой точка достигнет центра отталкивания. Действием силы тяжести пренебречь.

Ответ: $(V_0)_{min} = \sqrt{\frac{к}{m}}S_0$.

Вариант 19

В условиях варианта 18 определить скорость точки в момент, когда ее расстояние от центра отталкивания равно S. Принять, что в начальный момент точка, находясь в этом центре, получила скорость V_0.

Ответ: $V = \sqrt{V_0^2 + \frac{к}{m} S^2}$.

Вариант 20

Шарик весом P вложен в вертикально поставленный самострел, пружина которого сжата на величину h. Коэффициент жесткости пружины равен с. Пренебрегая массой пружины и ее трением о стенки самострела, определить, на какую высоту H поднимется шарик при отсутствии сопротивления воздуха.

Ответ: $H = \frac{c}{2P} h^2 - h$.

Вариант 21

В условиях варианта 20 определить, с какой скоростью шарик вылетит из самострела.

Ответ: $V = \sqrt{\frac{c}{P} g h^2 - 2gh}$.

Вариант 22

Тело падает на Землю с высоты h без начальной скорости. На тело действует сила притяжения Земли, обратно пропорциональная квадрату расстояния тела от центра Земли. Определить скорость в момент падения тела на Землю, если радиус Земли равен R, сила притяжения у поверхности Земли равна весу тела m g. Сопротивление воздуха не учитывать.

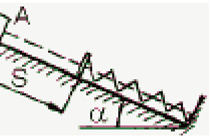
Ответ: $V = \sqrt{\frac{2ghR}{R+h}}$.

Вариант 23

В условиях варианта 22 решить следующую задачу: определить, на какую высоту h поднимется тело, получившее на поверхности Земли скорость V_0, направленную по радиусу от центра Земли.

Ответ: $h = \dfrac{R V_0^2}{2 g R - V_0^2}$.

Вариант 24



Тело А весом Р, положенное на гладкую наклонную плоскость, начинает скользить вниз без начальной скорости. Пройдя расстояние, равное S, тело ударяется о пружину с коэффициентом жесткости с. Определить, пренебрегая массой пружины, наибольшее сжатие ее, если угол наклона плоскости к горизонту равен α .

Ответ: $\lambda_{max} = \dfrac{P}{c}\sin\alpha\left(1+\sqrt{1+\dfrac{2cS}{P\sin\alpha}}\right)$.

Вариант 25

В условиях варианта 24 определить, при какой начальной скорости V_0, направленной вниз по плоскости, тело вызовет сжатие пружины, равное расстоянию S, пройденному телом до соприкосновения с пружиной.

Ответ: $V_0 \geq \sqrt{\dfrac{c g}{P} S^2 - 4 g S \sin\alpha}$.

Вариант 26

Прямоугольный параллелепипед весом Р с квадратным основанием, сторона которого равна ℓ , плавает в воде в вертикальном положении. Применяя закон Архимеда, найти, на какую глубину h опустится основание параллелепипеда от начального равновесного положения, если параллелепипеду толчком сообщена скорость V_0, направленная вниз. При погружении параллелепипед движется поступательно, его основание остается все время горизонтальным. Высота параллелепипеда достаточно большая. Удельный вес воды γ .

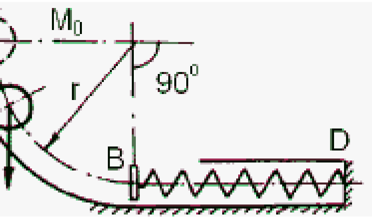
Ответ: $h = V_0\sqrt{\dfrac{P}{\gamma g \ell^2}}$.

Вариант 27

В условиях варианта 26 определить наибольшую величину погружения Н, если в начальный момент параллелепипед был поставлен своим основанием на поверхность воды и отпущен без начальной скорости.

Ответ: $H = V_0 \frac{2P}{\gamma \ell^2}$.

Вариант 28



Шарик весом P, скатываясь по внутренней поверхности цилиндрического желоба радиусом r, ударяется в точке B о горизонтальную пружину BD, имеющую коэффициент жесткости c. Определить, пренебрегая массой пружины, наибольшее сжатие ее, если движение шарика началось из положения M_0 без начальной скорости. Размерами шарика пренебречь. Трение не учитывать.

Ответ: $S_{max} = \sqrt{2\frac{P}{c}r}$.

Вариант 29

В условиях варианта 28 определить скорость шарика в момент, когда сжатие пружины равно S.

Ответ: $V = \sqrt{2gr - \frac{cgS^2}{P}}$.

Вариант 30

Шарик массой m вложен в горизонтально установленный самострел, пружина которого сжата на величину ℓ. Коэффициент жесткости пружины равен c. Пренебрегая массой пружины и трением, определить, с какой скоростью шарик вылетит из самострела.

Ответ: $V = \sqrt{\frac{c}{m}}\ell$.

Задача № 14. Варианты 1–3

Маковик, момент инерции которого относительно оси вращения равен J, имеет угловую скорость ω_0. Предоставленный затем самому себе маховик останавливается под действием момента сопротивления M_C (табл. 2.17, где к – постоянная величина, φ – угол поворота маховика, отсчитываемый от начала замедленного движения). Определить, сколько оборотов N сделает маховик до остановки.

Таблица 2.17

№ вар.	Дано	Ответ
1	$M_c = к$	$N = \dfrac{J\,\omega_0^2}{4\,\pi\,к}$
2	$M_c = к\varphi$	$N = \dfrac{\omega_0}{2\,\pi}\sqrt{\dfrac{J}{к}}$
3	$M_c = к\varphi^2$	$N = \dfrac{1}{2\,\pi}\sqrt[3]{\dfrac{3\,J\,\omega_0^2}{2\,к}}$

Вариант 4

На какую высоту h может вкатиться по наклонной плоскости диск, центр которого в начальный момент обладал скоростью V_0, параллельной линии наибольшего ската наклонной плоскости? Качение диска происходит без проскальзывания. Трением качения пренебречь.

Ответ: $h = \dfrac{3}{4}\dfrac{V_0^2}{g}$.

Вариант 5

Однородный цилиндрический каток радиусом R вкатывается на наклонную плоскость. Скорость центра катка в начальный момент параллельна линии наибольшего ската наклонной плоскости и равна V_0. Угол наклона плоскости к горизонту α , коэффициент трения качения равен R. Определить путь, пройденный осью катка до остановки, предполагая, что каток катится без проскальзывания.

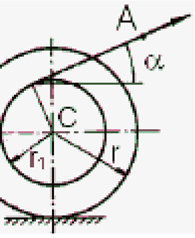
Ответ: $S = \dfrac{3\,V_0^2}{4\,g\left(\sin\alpha + \dfrac{к}{R}\cos\alpha\right)}$.

Вариант 6

Какую начальную скорость, параллельную линии наибольшего ската наклонной плоскости, надо сообщить оси колеса радиусом r для того, чтобы оно, катясь без проскальзывания, поднялось на высоту h по наклонной плоскости, образующей угол α с горизонтом? Коэффициент трения качения равен к. Колесо считать однородным диском.

Ответ: $V = \dfrac{2}{3}\sqrt{3\,g\,h\left(1+\dfrac{к}{r}\operatorname{ctg}\alpha\right)}$.

Варианты 7–10



Катушка весом P, радиусом r перекатывается по горизонтальной плоскости посредством силы F, приложенной к концу A нити, намотанной на барабан радиуса r_1. Угол α наклона нити к горизонту дан в табл. 2.18. Определить скорость центра масс C катушки, когда он пройдет из состояния покоя расстояние S. Радиус инерции катушки

относительно оси, проходящей через центр C, равен ρ . Коэффициент трения качения равен к (табл. 2.18).

Таблица 2.18

№ вар.	Дано		Ответ
	α	к	
7	0	0	$V_c = \sqrt{\dfrac{2\,g\,r\,SF\,(r_1 + r)}{P\,(r^2 + \rho^2)}}$
8	$\alpha < \dfrac{\pi}{2}$	0	$V_c = \sqrt{\dfrac{2\,g\,r\,S\,F\,(r_1 + r\cos\alpha)}{P\,(r^2 + \rho^2)}}$
9	0	к	$V_c = \sqrt{\dfrac{2\,g\,r\,S\,[F\,(r_1 + r) - P\kappa]}{P\,(r^2 + \rho^2)}}$
10	$\alpha < \dfrac{\pi}{2}$	к	$V_c = \sqrt{\dfrac{2\,g\,r\,S\,[F\,(r_1 + r\cos\alpha) - (P - F\sin\alpha)\,\kappa]}{P\,(r^2 + \rho^2)}}$

Вариант 11

Однородный диск радиусом R может вращаться в вертикальной плоскости вокруг горизонтальной оси, проходящей перпендикулярно диску через одну из точек на его ободе. Какую начальную скорость нужно сообщить центру диска в наинизшем положении, чтобы диск повернулся на четверть оборота?

Ответ: $V_0 = \sqrt{\dfrac{1}{3}gR}$.

Вариант 12

Два цилиндра одинакового веса и радиуса скатываются независимо один от другого без проскальзывания по наклонной плоскости. Масса первого цилиндра равномерно распределена по его объему, масса второго – равномерно распределена по его поверхности. Найти зависимость между скоростями центров тяжести цилиндров при опускании их на одну и ту же высоту, считая, что в начальный момент цилиндры находились в покое. Трение качения не учитывать.

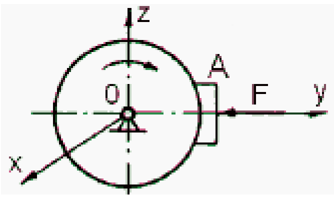
Ответ: $\frac{V_2}{V_1} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Вариант 13

Однородный стержень длиной 2ℓ, надетый своим концом на ось, вокруг которой он может вращаться в вертикальной плоскости, падает без начальной скорости из горизонтального положения. Определить угловую скорость стержня при прохождении через положение устойчивого равновесия.

Ответ: $\omega = \sqrt{\frac{3\,g}{2\,\ell}}$.

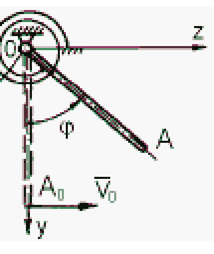
Вариант 14



Однородный диск весом Q, радиусом R вращается вокруг оси x с угловой скоростью ω. С какой силой F нужно нажать на тормозную колодку A, чтобы диск остановился, сделав один оборот? Коэффициент трения колодки о диск равен f.

Ответ: $F = \frac{Q\,R\,\omega_0^2}{g\,f}$.

Вариант 15



Однородный стержень OA длиной ℓ, весом P может вращаться вокруг горизонтальной неподвижной оси x, проходящей через его конец O перпендикулярно плоскости чертежа. Спиральная пружина с коэффициентом упругости c при вращении стержня создает момент сил упругости Mx = – c φ. Стержень находится в покое в нижнем

вертикальном положении, пружина при этом не деформирована. Какую скорость нужно сообщить концу A стержня в этом положении, чтобы он отклонился от вертикали на угол 60°?

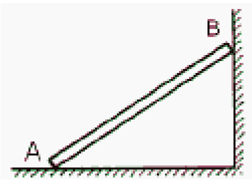
Ответ: $V_0 = \sqrt{\frac{(9\,P\,\ell + 2\,\pi^2\,c)}{6\,P}\,g}$.

Вариант 16

В условиях варианта 15, пренебрегая действием силы упругости пружины, определить, на какой угол повернется стержень, если в вертикальном положении ему сообщили угловую скорость ω_0.

Ответ: $\varphi = \arccos\left(1 - \frac{\ell}{g}\frac{\omega_0^2}{3}\right)$.

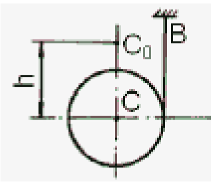
Вариант 17



Однородный стержень АВ длиной ℓ опирается концами на гладкую стену и гладкий пол. Стержень, первоначально удерживаемый в состоянии покоя под углом 60° к горизонтали, начинает падать под действием силы тяжести, оставаясь в вертикальной плоскости. Определить скорость конца В стержня в момент удара его о пол.

Ответ: $V_в = \sqrt{\frac{3}{2}\sqrt{3}\, g \ell}$.

Вариант 18



Однородный круглый цилиндр обмотан посередине тонкой нитью, конец В которой закреплен неподвижно. Цилиндр падает без начальной скорости, разматывая нить. Определить скорость центра цилиндра, когда он опустится на высоту h?

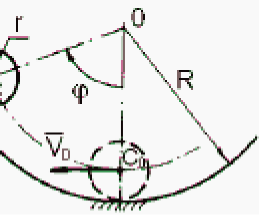
Ответ: $V_c = \frac{2}{3}\sqrt{3\, g h}$.

Вариант 19

Однородному диску весом P, радиусом R, лежащему на горизонтальной шероховатой плоскости сообщена начальная угловая скорость ω_0. Сколько оборотов сделает диск до остановки, если момент сил трения диска о плоскость $M_{тр} = \frac{2}{3} R\, f\, P$, где f – коэффициент трения скольжения.

Ответ: $N = \frac{3 R \omega_0^2}{16 \pi f g}$

Вариант 20



Однородный шар радиусом r положен в круговой желоб радиусом R, по которому он перекатывается без проскальзывания под действием силы тяжести. Положение центра шара определяется углом φ . Какую начальную скорость в положении статического

равновесия нужно сообщить центру шара, чтобы угол φ_{max} был равным 60°?

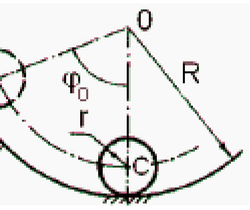
Ответ: $V_0 = \sqrt{\frac{5}{7}(R-r)\,g}$.

Вариант 21

В условиях варианта 20 определить наибольшее значение угла φ , если в положении статического равновесия центру шара сообщили начальную скорость $V_0 = \sqrt{\frac{10}{7}(R-r)\,g}$.

Ответ: $\varphi = \frac{\pi}{2}$.

Вариант 22



Однородный сплошной цилиндр радиусом r под действием силы тяжести перекатывается без проскальзывания по круговой направляющей радиусом R. Положение центра тяжести C цилиндра определяется углом φ . Какую скорость будет иметь

центр тяжести цилиндра в наинизшем положении, если движение начинается из положения, где φ_0 = 60°, без начальной скорости ?

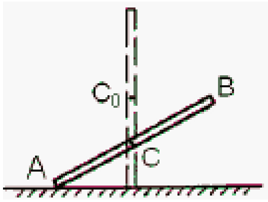
Ответ: $V_c = \sqrt{\frac{2\,g\,(R-r)}{3}}$.

Вариант 23

В условиях варианта 22 определить наибольшее значение угла φ , если в низшем положении цилиндра его центру сообщили скорость V_0.

Ответ: $\varphi = \arccos\left[1 - \frac{3\,V_0^2}{4\,g\,(R-r)}\right]$.

Вариант 24



Стержень АВ длиной 2 a падает под действием силы тяжести из вертикального положения, скользя концом А по гладкому горизонтальному полу. Считая, что движение началось вследствие незначительного толчка, определить скорость центра тяжести стержня в момент удара о пол.

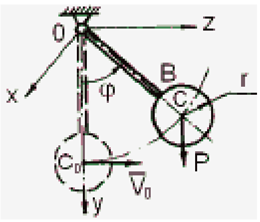
Ответ: $V_c = \sqrt{\frac{3}{2} g a}$.

Вариант 25

В условиях предыдущего варианта определить скорость центра тяжести стержня, когда он отстоит от пола на расстоянии $\frac{1}{2} a$.

Ответ: $V_c = 3\sqrt{\frac{1}{13} g a}$.

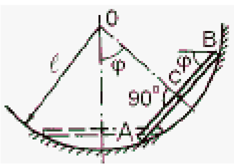
Вариант 26



Маятник, подвешенный к оси х, состоит из однородного диска весом P, радиусом r и невесомого стержня OB длиной 2 r. В положении равновесия центру тяжести C диска сообщили начальную скорость V_0. На какой угол отклонится маятник?

Ответ: $\varphi = \arccos\left(1 - \frac{19 V_0^2}{108 g r}\right)$.

Вариант 27

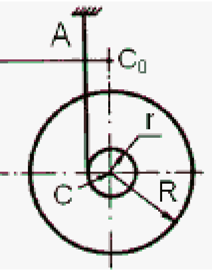


Однородный тонкий стержень длиной ℓ движется под действием силы тяжести в шаровой чаше радиусом ℓ, оставаясь в вертикальной плоскости, проходящей через центр 0 чаши. В начальный момент стержень составлял с горизонтом угол 60°, скорость его центра С была равна нулю. Какова будет скорость центра С в момент

прохождения через низшее положение ? Трение не учитывать.

Ответ: $V_c = \frac{3}{2}\sqrt{\frac{1}{5}\sqrt{3}\, g \ell}$.

Вариант 28

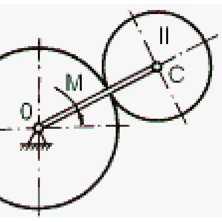


На валу радиусом r намотаны на некотором расстоянии друг от друга две нерастяжимые нити, концы А которых закреплены неподвижно. Посередине между нитями на валу жестко насажен массивный маховик радиусом R, центр тяжести которого лежит на оси вала. Отпущенный без начальной скорости вал с маховиком падает так, что вертикальные участки нитей остаются параллельными друг другу.

Определить скорость центра тяжести маховика, когда он опустится на высоту h. Массу маховика считать равномерно распределенной по ободу, массой вала пренебречь.

Ответ: $V = \sqrt{\dfrac{2gh}{1+\left(\dfrac{R}{r}\right)^2}}$.

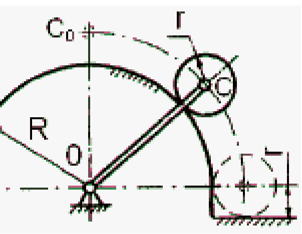
Вариант 29



Эпициклический механизм, расположенный в вертикальной плоскости, приводится в движение из состояния покоя постоянным вращающим моментом М, приложенным к кривошипу ОС. Определить скорость центра тяжести С подвижного колеса II, когда кривошип сделает полный оборот. Колесо II считать однородным диском весом Р. Массой кривошипа пренебречь.

Ответ: $V_c = \sqrt{\dfrac{8M\pi g}{3P}}$.

Вариант 30



Однородный диск весом Р, радиусом r скатывается без скольжения под действием силы тяжести по поверхности полуцилиндра радиусом R, лежащего на горизонтальной плоскости. При движении ось диска остается параллельной оси полуцилиндра. Расстояние между осями не меняется благодаря стержню ОС. Пренебрегая массой стержня, определить

скорость центра С в момент, когда диск коснется горизонтальной плоскости, если движение его начнется из положения неустойчивого равновесия за счет ничтожно малого толчка.

Ответ: $V_c = 2\sqrt{\dfrac{g(R+r)}{3}}$.

Задача № 15. Вариант 1–20

Механическая система, состоящая из нескольких тел, приходит в движение из состояния покоя под действием силы тяжести. Буквами на схемах (варианты 1–12 в табл. 2.19) обозначены:

A и A_1 – грузы весом 2 P;

B и B_1 – блоки весом P, радиусом r (сплошные однородные диски);

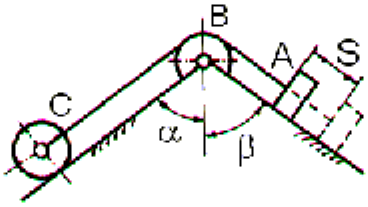
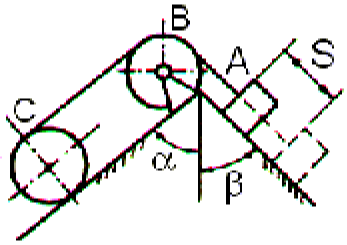
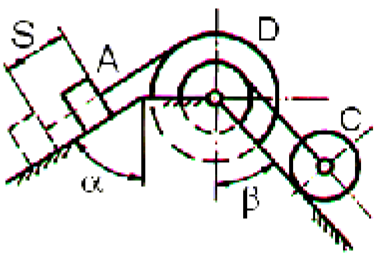
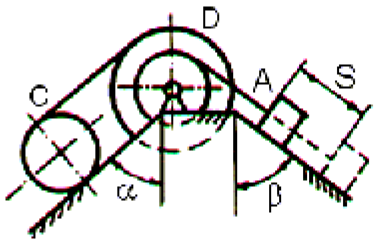
C – каток весом P, радиусом r (сплошной однородный диск);

D – ступенчатый барабан весом 2 P, радиус малого барабана равен r, большого – 2 r, радиус инерции относительно оси вращения ρ = r.

E – блок весом 2 P, радиусом 2 r (сплошной однородный диск).

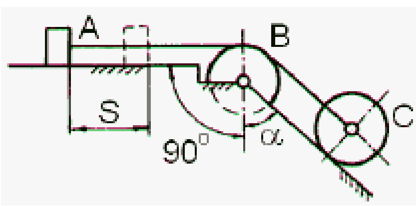
Считая, что коэффициент трения скольжения груза A по плоскости равен f (варианты 1, 2, 4, 5, 7, 8, 10, 11, 13–16, 18, 19), коэффициент трения качения катка C, перекатывающегося по плоскости без скольжения, равен к (варианты 1–14, 17, 19, 20), пренебрегая другими силами сопротивления и массой нитей, предполагаемых нерастяжимыми, определить скорость груза A, когда он переместится на расстояние S в положение, изображенное на схеме штриховыми линиями.

Таблица 2.19

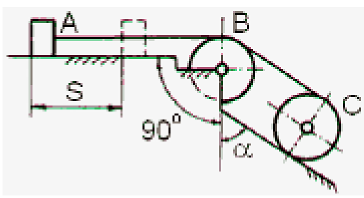
Рисунок	№ вар.	Дано		Ответ
		α	β	
	1	90°	β	$V_A = \sqrt{\frac{g\,S}{2}\left(2\cos\beta - 2\,f\sin\beta - \frac{\kappa}{r}\right)}$
	2	α	$\beta=\alpha$	$V_A = \sqrt{\frac{g\,S}{2}\left(\cos\alpha - \sin\alpha\left(2\,f + \frac{\kappa}{r}\right)\right)}$
	3	α	0	$V_A = \sqrt{\frac{g\,S}{2}\left(2 - \cos\alpha - \frac{\kappa}{r}\sin\alpha\right)}$
	4	90°	β	$V_A = \sqrt{\frac{8\,g\,S}{23}\left(4\cos\beta - 4\,f\sin\beta - \frac{\kappa}{r}\right)}$
	5	α	$\beta=\alpha$	$V_A = \sqrt{\frac{8\,g\,S}{23}\left(3\cos\alpha - \left(4\,f + \frac{\kappa}{r}\right)\sin\alpha\right)}$
	6	90°	0	$V_A = \sqrt{\frac{8\,g\,S}{23}\left(4 - \frac{\kappa}{r}\right)}$
	7	α	90°	$V_A = \sqrt{\frac{8\,g\,S}{23}\left(4(\cos\alpha - f\sin\alpha) - \frac{\kappa}{r}\right)}$
	8	α	$\beta=\alpha$	$V_A = \sqrt{\frac{8\,g\,S}{23}\left(3\cos\alpha - \left(4\,f + \frac{\kappa}{r}\right)\sin\alpha\right)}$
	9	0	β	$V_A = \sqrt{\frac{8\,g\,S}{23}\left(4 - \cos\beta - \frac{\kappa}{r}\sin\beta\right)}$
	10	90°	β	$V_A = 2\sqrt{\frac{g\,S}{11}\left(2(\cos\beta - f\sin\beta) - \frac{\kappa}{r}\right)}$
	11	α	$\beta=\alpha$	$V_A = 2\sqrt{\frac{g\,S}{11}\left(\cos\alpha - \left(2\,f + \frac{\kappa}{r}\right)\sin\alpha\right)}$
	12	90°	0	$V_A = 2\sqrt{\frac{g\,S}{11}\left(2 - \frac{\kappa}{r}\right)}$

Вариант 13–18

Вариант 13



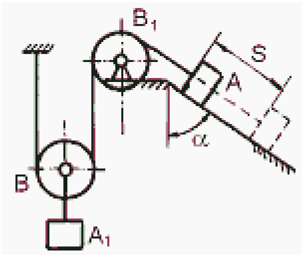
Вариант 14



Ответ: $V_A = \sqrt{\dfrac{g\,S}{2}\left(\cos\alpha - 2f - \dfrac{\kappa}{r}\sin\alpha\right)}$.

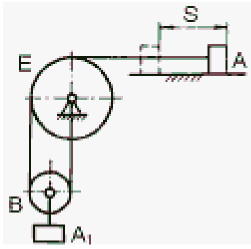
Ответ: $V_A = \sqrt{\dfrac{8\,g\,S}{23}\left(\cos\alpha - 4\,f - \dfrac{\kappa}{r}\sin\alpha\right)}$.

Вариант 15



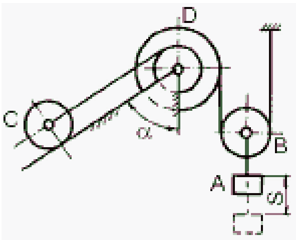
Ответ: $V_A = \sqrt{\dfrac{8\,g\,S}{27}(3 - 4(\cos\alpha + f\sin\alpha))}$.

Вариант 16



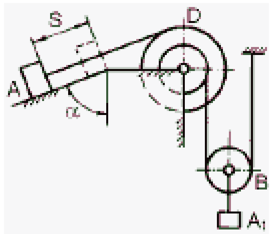
Ответ: $V_A = \sqrt{\dfrac{8\,g\,S}{31}(3 - 4f)}$.

Вариант 17



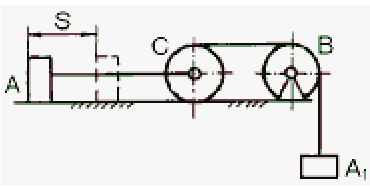
Ответ: $V_A = \sqrt{\dfrac{2\,g\,S}{7}\left(3 - \cos\alpha - \dfrac{\kappa}{r}\sin\alpha\right)}$.

Вариант 18



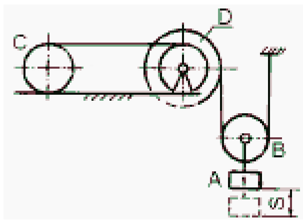
Ответ: $V_A = 4\sqrt{\dfrac{g\,S}{87}(3 - 8\,(\cos\alpha + f\sin\alpha))}$.

Вариант 19



Ответ: $V_A = \dfrac{2}{3}\sqrt{\dfrac{g\,S}{3}\left(4 - 2\,f - \dfrac{\kappa}{r}\right)}$.

Вариант 20

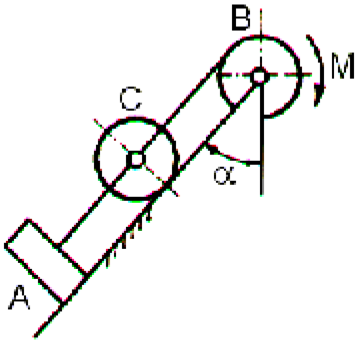
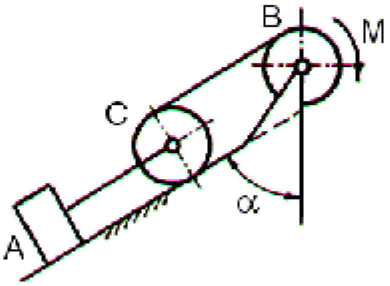


Ответ: $V_A = 2\sqrt{\dfrac{2\,g\,S}{47}\left(6 - \dfrac{\kappa}{r}\right)}$.

Вариант 21–24

Механическая система (табл. 2.20), состоящая из груза A весом 2 P, катка C весом P, радиусом r и барабана B весом P, радиусом r приводится в движение из состояния покоя крутящим моментом M = 6 P r, приложенным к барабану. Определить угловую скорость барабана, когда он сделает N оборотов. Трение скольжения груза A по плоскости (коэффициент трения скольжения f) учесть только в вариантах 22 и 24, сопротивление качению катка C (коэффициент трения качения к) учесть во всех вариантах. Каток катится без скольжения. Барабан и каток однородные круглые диски. Весом канатов пренебречь.

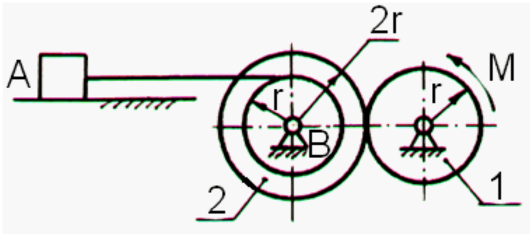
Таблица 2.20

Рисунок	№ вар.	Дано	Ответ
		α	
	21	α	$\omega = \frac{1}{r}\sqrt{\pi N g\,(3r\,(2-\cos\alpha) - \kappa\sin\alpha)}$
	22	90°	$\omega = \frac{1}{r}\sqrt{\pi N g\,(6r - (\kappa + 2rf))}$
	23	α	$\omega = \frac{4}{r}\sqrt{\frac{\pi N g}{11}\,(3r\,(4-\cos\alpha) - \kappa\sin\alpha)}$
	24	90°	$\omega = \frac{4}{r}\sqrt{\frac{\pi N g}{11}\,(12r - (\kappa + 2fr))}$

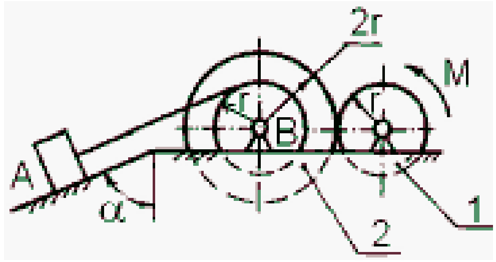
Вариант 25–30

Перемещение тела A (в вариантах 25–26 – это поступательно движущийся груз, в вариантах 27–30 (табл. 2.21) – это каток, перекатывающийся по плоскости без скольжения) обеспечивается тросом лебедки, который наматывается на барабан B, жестко связанный с зубчатым колесом 2. Колесо 2 находится в зацеплении с приводным колесом 1. Система приводится в движение из состояния покоя постоянным крутящим моментом M, приложенным к колесу 1. Вес груза A равен 4 P. Каток A – однородный сплошной диск весом 4 P, радиусом r. Общий вес барабана и колеса 2 равен 2 P, радиус инерции их относительно оси вращения ρ = r. Колесо 1 – однородный сплошной диск весом P, радиусом r. Определить скорость центра масс тела A, когда приводное колесо 1 сделает N оборотов. В варианте 25 учесть трение скольжения груза A по плоскости, коэффициент трения скольжения – f. В вариантах 27 и 29 учесть сопротивление качению катка A, коэффициент трения качения – к.

Вариант 25 Вариант 26

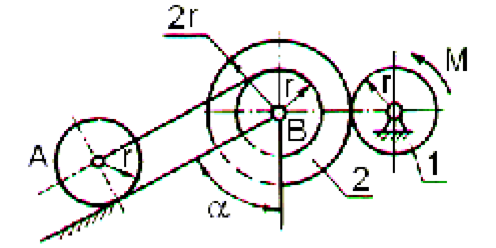
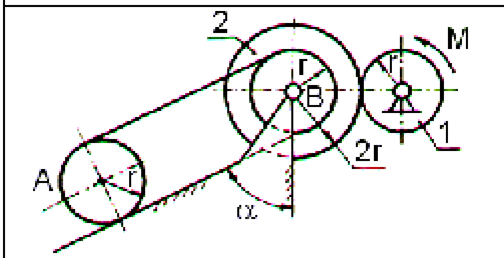


Ответ: $V_A = \sqrt{\frac{\pi g}{2P}(M - 2Prf)N}$.



Ответ: $V_A = \sqrt{\frac{\pi g}{2P}(M - 2Pr\cos\alpha)N}$.

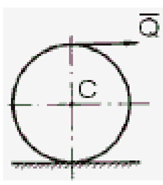
Таблица 2.21

Рисунок	№ вар.	Дано α	Ответ
	27	90°	$V_A = \sqrt{\frac{2\pi g}{5P}(M - 2P\kappa)N}$
	28	α	$V_A = \sqrt{\frac{2\pi g}{5P}(M - 2Pr\cos\alpha)N}$
	29	90°	$V_A = \sqrt{\frac{2\pi g}{11P}(M - P\kappa)N}$
	30	α	$V_A = \sqrt{\frac{2\pi g}{11P}(M - Pr\cos\alpha)N}$

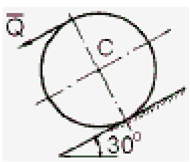
Задача № 16. Вариант 1–30

Колесо весом P катится по прямолинейному участку пути под действием собственного веса и силы Q (для вариантов 1–24 Q = P, для вариантов 25–30 Q = $\sqrt{2}$ P). Полагая, что R = 2 r, где R и r – радиусы большой и малой окружности, найти ускорение a_C центра тяжести колеса, а также наименьшую величину коэффициента трения f, при котором возможно качение без скольжения. Радиус инерции колеса относительно центральной оси, перпендикулярной плоскости колеса, ρ = r. Сопротивлением качению пренебречь.

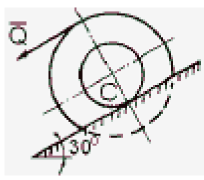
№16-1



№16-2



№16-3

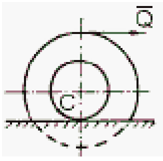


Ответ:
f $\geq$ 0,6; a_C = 1,6 g

Ответ:
f $\geq \frac{1}{\sqrt{3}}$; a_C = 2 g

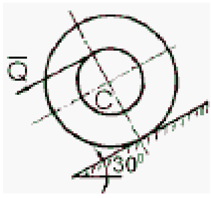
Ответ:
f $\geq \frac{\sqrt{3}}{6}$; a_C = 1,75 g

№16-4



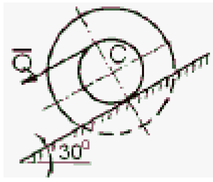
Ответ:
f $\geq$ 0,5; a_C = 1,5 g

№16-5



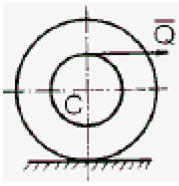
Ответ:
f $\geq \frac{\sqrt{3}}{15}$; a_C = 1,6 g

№16-6



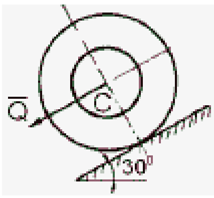
Ответ:
f $\geq \frac{\sqrt{3}}{6}$; a_C = 1,25 g

№16-7



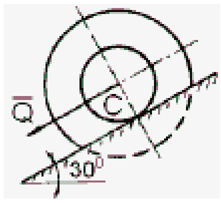
Ответ:
f $\geq$ 0,2; a_C = 1,2 g

№16-8



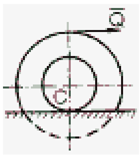
Ответ:
f $\geq 0{,}2\sqrt{3}$; a_C = 1,2 g

№16-9



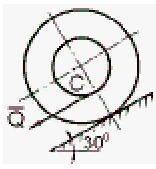
Ответ:
f $\geq 0{,}5\sqrt{3}$; a_C = 0,75 g

№16-10



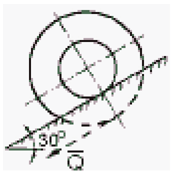
Ответ:
f $\geq$ 0; a_C = g

№16-11



Ответ:
f $\geq \frac{7\sqrt{3}}{15}$; a_C = 0,8 g

№16-12

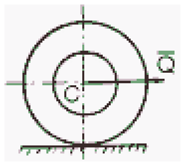


Ответ:
f $\geq \frac{7\sqrt{3}}{6}$; a_C = 0,25 g

№16-13

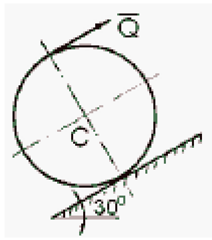
№16-14

№16-15



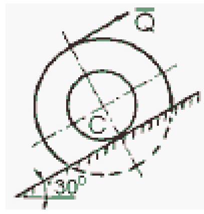
Ответ:

$f \geq 0{,}2$; $a_C = 0{,}8\,g$



Ответ:

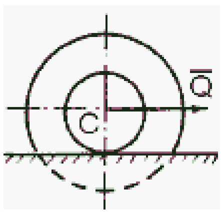
$f \geq \dfrac{7\sqrt{3}}{15}$; $a_C = 1{,}2\,g$



Ответ:

$f \geq 0{,}5\sqrt{3}$; $a_C = 1{,}25\,g$

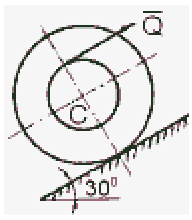
№16-16



Ответ:

$f \geq 0{,}5$; $a_C = 0{,}5\,g$

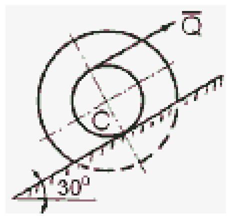
№16-17



Ответ:

$f \geq 0{,}2\sqrt{3}$; $a_C = 0{,}8\,g$

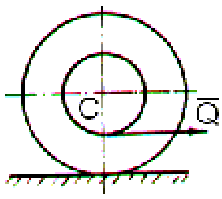
№16-18



Ответ:

$f \geq \dfrac{\sqrt{3}}{6}$; $a_C = 0{,}75\,g$

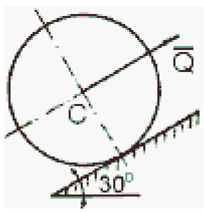
№16-19



Ответ:

$f \geq 0{,}6$; $a_C = 0{,}4\,g$

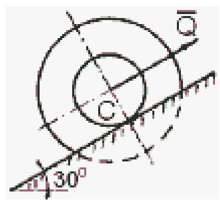
№16-20



Ответ:

$f \geq \dfrac{\sqrt{3}}{15}$; $a_C = 0{,}4\,g$

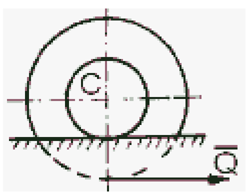
№16-21



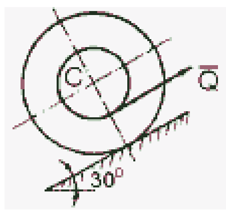
Ответ:

$f \geq \dfrac{\sqrt{3}}{6}$; $a_C = 0{,}25\,g$

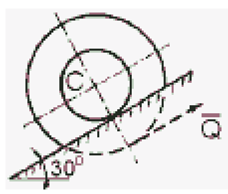
№16-22



№16-23



№16-24

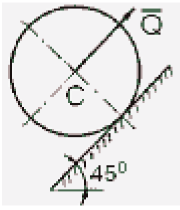


Ответ:
$f \geq 1{,}5;\ a_C = 0{,}5\,g$

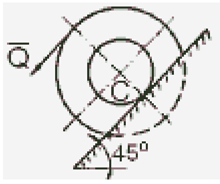
Ответ:
$f \geq \frac{\sqrt{3}}{6};\ a_C = 0{,}25\,g$

Ответ:
$f \geq \frac{5}{6}\sqrt{3};\ a_C = 0{,}75\,g$

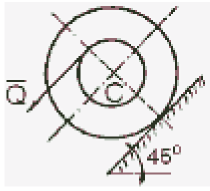
№16-25



№16-26



№16-27

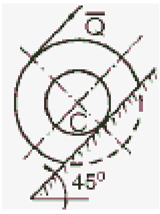


Ответ:
$f \geq 0{,}2;\ a_C = 0{,}4\sqrt{2}\,g$

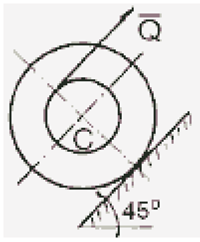
Ответ:
$f \geq 0{,}5;\ a_C = 1{,}75\sqrt{2}\,g$

Ответ:
$f \geq 0{,}2;\ a_C = 1{,}6\sqrt{2}\,g$

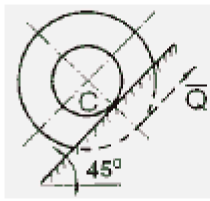
№16-28



№16-29



№16-30



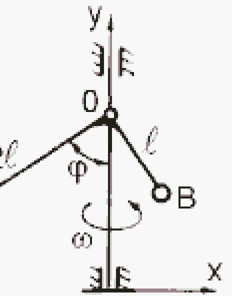
Ответ:
$f \geq 1{,}5;\ a_C = 1{,}25\sqrt{2}\,g$

Ответ:
$f \geq 0{,}6;\ a_C = 0{,}8\sqrt{2}\,g$

Ответ:
$f \geq 2{,}5;\ a_C = 0{,}75\sqrt{2}\,g$

3. АНАЛИТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА

Задача № 17. Вариант 1



Жесткий прямой угол AOB, образуемый двумя стержнями длиной ℓ и 2ℓ, шарнирно прикреплен вершиной 0 к вертикальному валу так, что может поворачиваться вокруг точки 0 в вертикальной плоскости и вращаться вместе с валом вокруг его оси y. На концах A и B стержней прикреплены точечные грузы одинакового веса P. Пренебрегая весом стержней, найти при какой установившейся

угловой скорости вращения вокруг оси y стержень A0 будет составлять с вертикалью заданный угол φ.

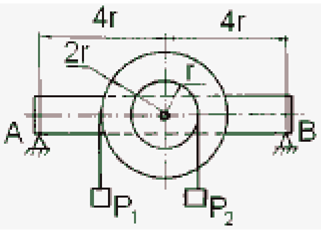
Ответ: $\omega = \dfrac{(2\,\mathrm{tg}\varphi - 1)\,g}{3\,\ell\,\sin\varphi}$.

Вариант 2

В условиях варианта 1 определить реакцию шарнира 0 при вращении угла A0B вокруг оси y с постоянной угловой скоростью, соответствующей заданному углу φ.

Ответ: $X_0 = \dfrac{2}{3}P\,(2\,\mathrm{tg}\,\varphi - 1); \quad Y_0 = 2P$.

Варианты 3–4



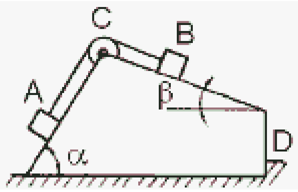
Два груза весом P_1 и P_2 (табл. 3.1) подвешены на двух невесомых нерастяжимых нитях, концы которых навернуты, как показано на рисунке, на ступенчатый барабан, имеющий радиусы r и 2 r. Ось барабана закреплена в середине балки AB весом Q и длиной 8 r. Грузы движутся под действием силы тяжести.

Пренебрегая весом барабана и сопротивлением движению, определить угловое ускорение барабана и реакцию опор A и B.

Таблица 3.1

№ вар.	Дано	Ответ
3	$P_1 = P_2 = \dfrac{Q}{4}$	$\varepsilon = \dfrac{g}{5r}$; $R_A = R_B = \dfrac{29}{40}Q$
4	$P_1 = \dfrac{Q}{8}$; $P_2 = \dfrac{Q}{2}$	$\varepsilon = \dfrac{g}{4r}$; $R_A = R_B = \dfrac{25}{32}Q$

Варианты 5–6



Грузы А и В одинакового веса Р, соединенные нерастяжимой нитью, переброшенной через блок, скользят под действием сил тяжести по гладким граням призмы, стоящей на горизонтальном полу. Углы наклона граней к горизонту даны в табл. 3.2.

Пренебрегая массой блока, определить ускорение грузов и давление призмы на выступ D.

Таблица 3.2

№ вар.	Дано		Ответ	
	α	β	a	N
5	90°	β	$-\dfrac{g}{2}(1-\sin\beta)$	$\dfrac{P}{4}(2\cos\beta-\sin2\beta)$
6	α	0	$\dfrac{g}{2}\sin\alpha$	$\dfrac{P}{4}(2\sin\alpha+\sin2\alpha)$

Вариант 7

В условиях варианта 5 определить давление призмы на выступ Д, считая, что грани призмы, по которым скользят грузы А и В, шероховатые, коэффициент трения скольжения равен f.

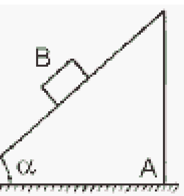
Ответ: $N=\dfrac{P}{2}(1-\sin\beta-f\cos\beta)\cos\beta$ **.**

Вариант 8

В условиях варианта 6 определить наименьший коэффициент трения скольжения призмы по полу, при котором призма оставалась бы в покое при отсутствии выступа D, вес призмы равен 4P.

Ответ: $f_{min}=\dfrac{2\sin\alpha+\sin2\alpha}{2(12-\sin^2\alpha)}$ **.**

Вариант 9



По боковой грани призмы А весом Р, стоящей на горизонтальном полу, опускается тело В весом Q под действием силы тяжести. Коэффициент трения скольжения тела о грань призмы равен f, угол наклона этой грани призмы к горизонту равен α ($\mathrm{tg}\alpha > f$). Определить

наименьший коэффициент трения скольжения призмы по полу f_{min}, при котором опускание тела В не вызовет смещения призмы.

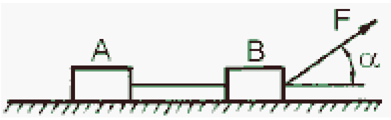
Ответ: $f_{min} = \dfrac{Q(\sin\alpha - f\cos\alpha)\cos\alpha}{P + Q\cos\alpha\,(\cos\alpha + f\sin\alpha)}$.

Вариант 10

В условиях варианта 9 определить, с каким ускорением должна двигаться призма по полу, чтобы тело В не перемещалось по наклонной грани призмы.

Ответ: $g\dfrac{tg\alpha + f}{1 - f\,tg\alpha} \geq a \geq g\dfrac{tg\alpha - f}{1 + f\,tg\alpha}$.

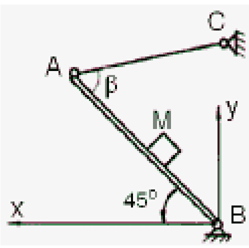
Вариант 11



Два груза А и В весом Р каждый, соединенные между собой нерастяжимой нитью, перемещаются по шероховатой горизонтальной плоскости постоянной силой Р, ***составляющей угол α с направлением движения. Коэффициент трения скольжения грузов по плоскости равен f. Определить натяжение нити.***

Ответ: $N = \dfrac{F}{2}(\cos\alpha + f\sin\alpha)$.

Варианты 12–13



Балка АВ весом Р, прикрепленная шарниром В к неподвижному основанию, удерживается под углом 45° к горизонту тросом АС, составляющим с балкой угол β (табл. 3.3). По балке опускается под действием силы тяжести тело М, вес которого в четыре раза меньше веса балки. Определить реакцию шарнира В и натяжение троса в ***момент, когда тело окажется на середине балки. Размерами тела и трением пренебречь.***

Таблица 3.3

№ вар.	Дано	Ответ
12	$\beta = 135^\circ$	$x_B = -\frac{P}{8}$; $y_B = \frac{1}{2}P$; $T = \frac{5}{8}P$
13	$\beta = 45^\circ$	$x_B = \frac{P}{2}$ $y_B = \frac{9}{8}P$; $T = \frac{5}{8}P$

Вариант 14

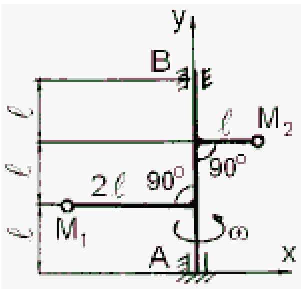
В условиях варианта 12 определить реакцию шарнира В и натяжение троса АС, учитывая трение скольжения тела по балке, коэффициент трения скольжения равен 0,25.

Ответ: $x_B = -\frac{7}{64}P$; $y_B = \frac{47}{64}P$; $T = \frac{5}{8}P$.

Варианты 15–18

Два точечных груза M_1 и M_2 весом Р каждый, прикрепленные стержнями к вертикальному валу, как показано на рисунке, вращаются вокруг оси вала с постоянной угловой скоростью ω. Пренебрегая весом вала и стержней, определить реакции в подпятнике А и в подшипнике В.

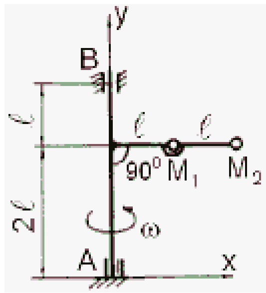
№ 17–15



Ответ:

$x_A = \frac{P}{g}\omega^2\ell - \frac{P}{3}$; $y_A = 2P$; $x_B = \frac{P}{3}$.

№ 17–16

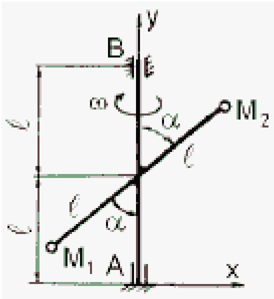


Ответ:

$x_A = -\frac{P}{g}\omega^2\ell + P$; $y_A = 2P$; $x_B = -\left(2\frac{P}{g}\omega^2\ell + P\right.$

№ 17–17

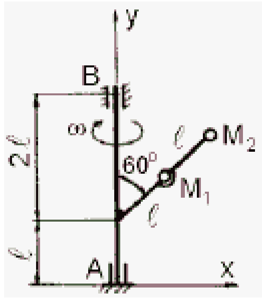
№ 17–18



Ответ:

$x_A = \frac{P}{2g}\omega^2\ell\sin 2\alpha$; $y_A = 2P$;

$x_B = -\frac{P}{2g}\omega^2\ell\sin 2\alpha$.

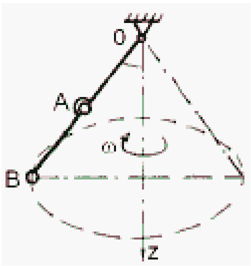


Ответ:

$x_A = \frac{\sqrt{3}}{2}P\left(1-\frac{7\omega^2}{6g}\ell\right)$; $y_A = 2P$;

$x_B = -\frac{\sqrt{3}}{2}P\left(1+\frac{11\omega^2}{6g}\ell\right)$.

Вариант 19



Стержень 0B вращается с постоянной скоростью ω вокруг вертикальной оси 0z (в точке 0 шаровой шарнир). На стержне закреплены два точечных груза A и B одинакового веса P, OA = AB = ℓ. Пренебрегая весом стержня, определить угол α отклонения стержня от оси 0z.

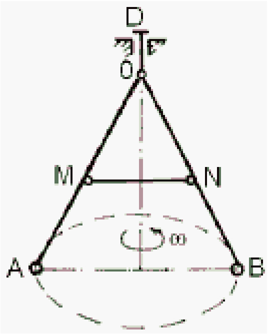
Ответ: $\cos\alpha = \frac{3g}{5\omega^2\ell}$.

Вариант 20

В условиях варианта 19 определить реакцию шарнира 0.

Ответ: $N_0 = \frac{P}{5g}\sqrt{225\omega^4\ell^2 + 19g^2}$.

Вариант 21



Два стержня 0A и 0B длиной 2ℓ каждый, шарнирно прикрепленные в точке 0 к вертикальному валу 0D, вращаются вместе с валом вокруг его оси с постоянной угловой скоростью ω . Стержни посередине соединены между собой горизонтальной нитью MN длиной ℓ . На концах A и B стержней прикреплены точечные грузы одинакового веса P. Пренебрегая весом стержней и нити, определить усилие в нити MN

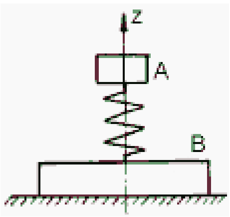
Ответ: $S = 2P\left(\dfrac{\omega^2\ell}{g} - \dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)$.

Вариант 22

В условиях варианта 21, считая, что нить длиной ℓ соединяет концы A и B стержней, определить усилия в нити и в стержнях A0 и B0.

Ответ: $S_{AB} = \dfrac{P}{2\sqrt{15}\,g}(\sqrt{15}\,\omega^2\ell - 2g),\ S_{A0} = S_{B0} = \dfrac{4}{\sqrt{15}}P$.

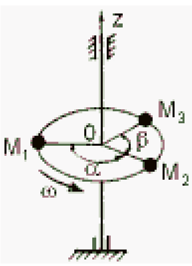
Вариант 23



Тело A весом P и тело B весом Q соединены между собой пружиной, как показано на рисунке. Тело A совершает гармонические колебания по вертикальной прямой с амплитудой ℓ и периодом T, тело B лежит на горизонтальном полу. Пренебрегая массой пружины, определить наибольшее давление грузов на пол.

Ответ: $N_{max} = Q + P\left(1 + \dfrac{4\pi^2\ell}{T^2 g}\right)$.

Варианты 24–25



Три точечных груза M_1, M_2 и M_3 одинакового веса P закреплены на окружности горизонтального диска радиусом r, как показано на рисунке (величины углов α и β даны в табл. 3.4). Диск вращается вокруг вертикальной оси z с постоянной угловой скоростью ω . Пренебрегая весом диска, определить горизонтальное давление диска на ось в точке 0.

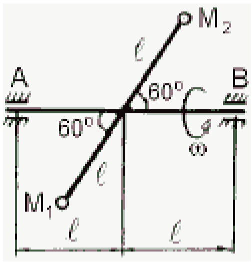
Таблица 3.4

№ вар.	Дано		Ответ
	α	β	
24	60°	60°	$N_{xy} = 2\frac{P}{g}\omega^2 r$
25	90°	45°	$N_{xy} = \sqrt{3}\,\frac{P}{g}\omega^2 r$

Варианты 26–27

Два точечных груза M_1 и M_2 одинакового веса P, прикрепленные к горизонтальному валу, как показано на рисунке, вращаются вокруг оси вала с постоянной угловой скоростью ω. Пренебрегая весом вала и стержней, определить давление на опоры A и B в момент, когда оба груза находятся в вертикальной плоскости.

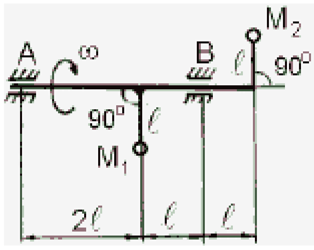
№ 17–26



Ответ:

$R_A = P\left(1+\frac{\sqrt{3}\,\omega^2}{4\,g}\ell\right)$; $R_B = P\left(1-\frac{\sqrt{3}\,\omega^2}{4\,g}\ell\right)$.

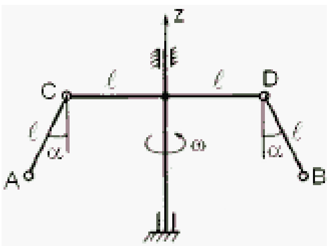
№ 17–27



Ответ:

$R_A = \frac{2}{3}P\frac{\omega^2}{g}\ell$; $R_B = P\left(2-\frac{2\,\omega^2}{3\,g}\ell\right.$

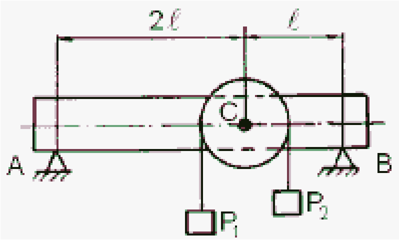
Вариант 28



Точечные грузы A и B весом Q каждый вращаются вокруг вертикальной оси z вместе со стержневой конструкцией, изображенной на рисунке (в точках C и D шарниры). Пренебрегая весом стержней, определить при какой установившейся угловой скорости ω стержни BD и AC будут составлять с вертикалью заданный угол α .

Ответ: $\omega = \sqrt{\frac{g\,\mathrm{tg}\alpha}{(1+\sin\alpha)\,\ell}}$ **.**

Варианты 29–30



В точке С однородной балки АВ весом Q закреплена ось блока, через который перекинута невесомая нерастяжимая нить. К концам нити прикреплены грузы P_1 и P_2 (см. табл. 3.5). Грузы движутся под действием сил тяжести. Пренебрегая весом блока и сопротивлением движению, определить ускорение грузов и реакции опор А и В.

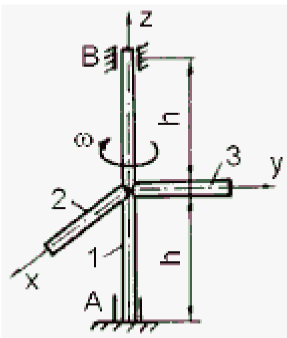
Таблица 3.5

№ вар.	Дано		Ответ		
	P_1	P_2	a	R_A	R_B
29	2 P	P	$\frac{1}{3}g$	$\frac{1}{2}Q+\frac{1}{9}P$	$\frac{1}{2}Q+\frac{16}{9}P$
30	P	3 P	$\frac{1}{2}g$	$\frac{1}{2}Q+P$	$\frac{1}{2}Q+2P$

Задача № 18. Варианты 1–4

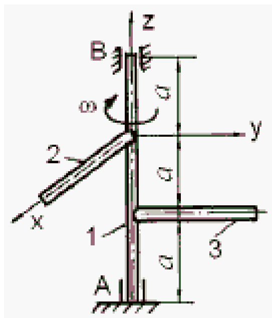
К валу 1, вращающемуся вокруг оси z с постоянной угловой скоростью ω, жестко присоединены своими концами два однородных, перпендикулярных к нему стержня 2 и 3 длиной 2ℓ и массой m каждый. Определить динамические давления на опоры А и В вала.

№ 18–1



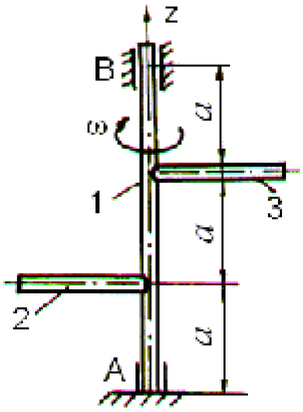
Ответ: $N_A = N_B = \frac{\sqrt{2}}{2} m \ell \omega^2$.

№ 18–2



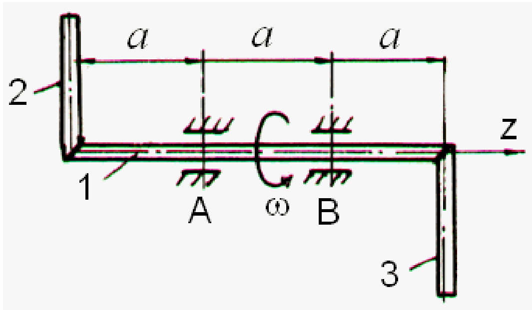
Ответ: $N_A = N_B = \frac{\sqrt{5}}{3} m \ell \omega^2$.

№ 18–3



Ответ: $N_A = N_B = \frac{1}{3} m \ell \omega^2$.

№ 18–4

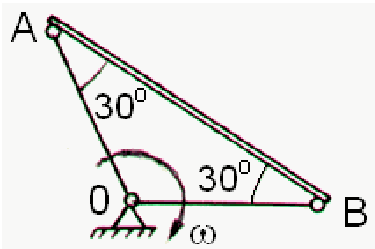


Ответ: $N_A = N_B = 3 m \ell \omega^2$.

Варианты 5–8

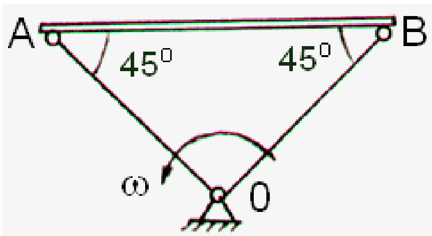
Тонкий однородный стержень AB массой m, длиной 2a вращается в горизонтальной плоскости вокруг точки 0 с угловой скоростью ω. Определить натяжения нитей 0A и 0B, соединяющих концы стержня с точкой 0.

№ 18–5



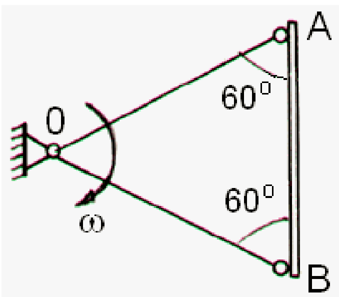
Ответ: $T_A = T_B = \frac{\sqrt{3}}{3} m a \omega^2$.

№ 18–6

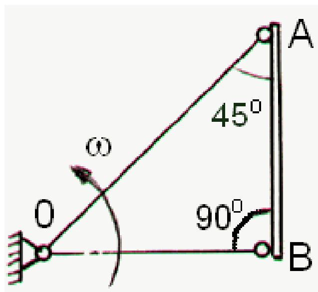


Ответ: $T_A = T_B = \frac{\sqrt{2}}{2} m a \omega^2$.

№ 18–7



№ 18–8



Ответ: $T_A = T_B = m\,a\,\omega^2$.

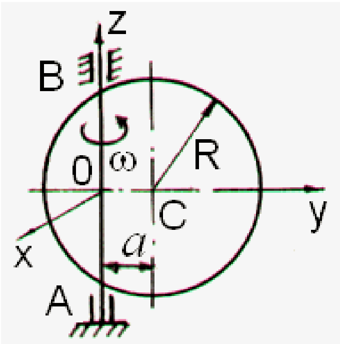
Ответ: $T_A = m\,a\,\omega^2$; $T_B = \sqrt{2}\,m\,a\,\omega^2$.

Варианты 9–12

Однородная тонкая пластинка массой m равномерно вращается с угловой скоростью ω вокруг неподвижной оси z, расположенной в одной плоскости с пластинкой. Определить динамические давления на подпятник A и подшипник B. Оси x и y неизменно связаны с пластинкой.

№ 18–9

0A = 0B

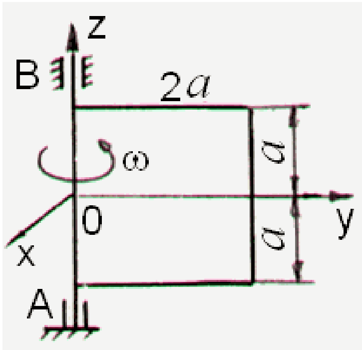


Ответ: $x_A = x_B = 0$;

$y_A = y_B = -\dfrac{m\,a\,\omega^2}{2}$.

№ 18–10

0A = 0B

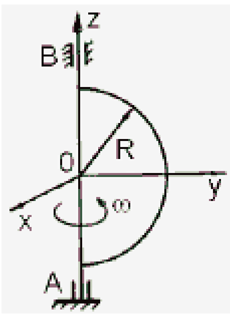


Ответ: $x_A = x_B = 0$;

$y_A = y_B = -\dfrac{m\,a\,\omega^2}{2}$.

№ 18–11

0A = 0B



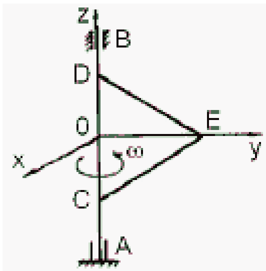
Ответ: $x_A = x_B = 0$;

$y_A = y_B = \dfrac{2\,m\,R}{3\,\pi}\omega^2$.

№ 18–12

0A = 0B,

CD = DE = CE = a



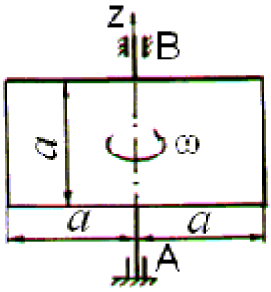
Ответ: $x_A = x_B = 0$;

$y_A = y_B = \dfrac{\sqrt{3}}{12} m\,a\,\omega^2$.

Варианты 13–16

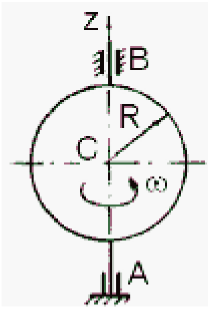
Однородная тонкая пластинка весом Р вращается с угловой скоростью ω вокруг вертикальной оси z. Определить силу, разрывающую пластинку в направлении, перпендикулярном к оси вращения, в сечении, проходящем через ось вращения.

№ 18–13



Ответ: $S = \dfrac{P a \omega^2}{4 g}$.

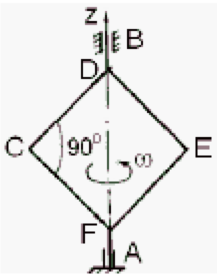
№ 18–14



Ответ: $S = \dfrac{2 P R \omega^2}{3 \pi g}$.

№ 18–15

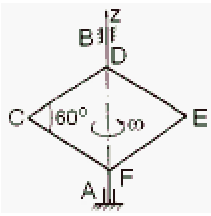
FC = CD = DE = EF = a



Ответ: $S = \dfrac{\sqrt{2} P a \omega^2}{12 g}$.

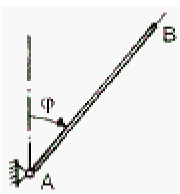
№ 18–16

FC = CD = DE = EF = a



Ответ: $S = \dfrac{\sqrt{3} P a \omega^2}{12 g}$.

Варианты 17–20

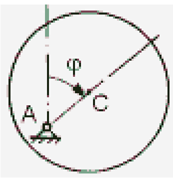


Тонкий однородный стержень АВ весом Р падает в вертикальной плоскости, поворачиваясь вокруг неподвижного конца А. Определить реакцию опоры А, когда конец стержня В займет наинизшее положение. В начальный момент стержень составлял с вертикалью угол φ (табл. 3.6), его угловая скорость была равна нулю.

Таблица 3.6

№ вар.	Дано	Ответ
	φ_0	R_A
17	0°	4 P
18	60°	3,25 P
19	90°	2,5 P
20	120°	1,75 P

Варианты 21–24



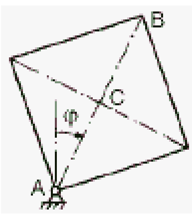
Однородный круглый диск весом P, радиусом r падает, поворачиваясь вокруг горизонтальноі оси, проходящей через точку A перпендикулярно плоскости диска. Определить давление на опору A в момент, когда центр диска займет нижнее положение. В начальный момент отрезо OC

составлял с вертикалью угол φ_0, (табл. 3.7), его угловая скорость была равна нулю.

Таблица 3.7

№ вар.	Дано		Ответ
	φ_0	OC	R_A
21	0°	0,5 r	$\frac{7}{3}$ P
22	60°	r	3 P
23	90°	0,5 r	$\frac{5}{3}$ P
24	120°	r	$\frac{5}{3}$ P

Варианты 25–27



Однородная квадратная пластинка весом P со стороной $2a$ падает из заданного положения без начальной скорости, поворачиваясь вокруг горизонтальной оси, проходящей через вершину A перпендикулярно плоскости пластинки. Определить давление на опору A, когда центр пластинки C займет наинизшее положение. В начальный момент

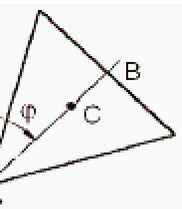
диагональ АВ квадрата составляла с вертикалью угол φ_0 (табл. 3.8). Момент инерции пластинки относительно центральной оси, перпендикулярной ее плоскости,

$$J_c = \frac{2}{3} m a^2$$ ***.***

Таблица 3.8

№ вар.	Дано	Ответ
	φ_0	R_A
25	0°	4 Р
26	60°	3,25 Р
27	90°	2,5 Р

Варианты 28–30



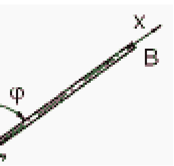
Однородная пластинка весом Р, имеющая форму равностороннего треугольника со стороной $2a$, падает из заданного положения без начальной скорости, поворачиваясь вокруг горизонтальной оси, проходящей через вершину А перпендикулярно плоскости пластинки. Определить давление на опору А в момент, когда центр пластинки С

займет наинизшее положение. В начальный момент высота АВ пластинки составляла с вертикалью угол φ_0 (табл. 3.9). Момент инерции пластинки относительно центральной оси, перпендикулярной ее плоскости, $J_c = \frac{1}{3} m a^2$ ***.***

Таблица 3.9

№ вар.	Дано	Ответ
	φ_0	R_A
28	0°	4,2 Р
29	60°	3,4 Р
30	90°	2,6 Р

Задача № 19. Варианты 1–8

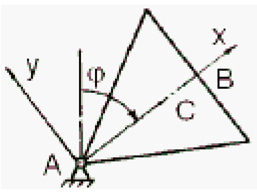


Тонкий однородный стержень АВ весом Р, длиной $2a$ начинает падать без начальной скорости, поворачиваясь вокруг неподвижной горизонтальной оси, проходящей перпендикулярно стержню через его конец А. Определить реакцию оси R_A (x_A; y_A) в момент, когда стержень составляет с вертикалью угол φ_1. В начальный момент этот угол равен φ_0 (табл. 3.10). Оси x и y неизменно связаны со стержнем.

Таблица 3.10

№ вар.	Дано		Ответ	
	φ_0	φ_1	x_A	y_A
1	0°	90°	–1,5 P	0,25 P
2	30°	30°	$0{,}5\sqrt{3}$ P	0,125 P
3	30°	150°	$-2\sqrt{3}$ P	0,125 P
4	45°	90°	–0,75 P	0,25 P
5	60°	60°	0,5 P	$0{,}125\sqrt{3}$ P
6	60°	120°	–2 P	$0{,}125\sqrt{3}$ P
7	90°	120°	–1,25 P	$0{,}125\sqrt{3}$ P
8	90°	150°	$-1{,}25\sqrt{3}$ P	0,125 P

Варианты 9–15



Однородная пластинка весом P, имеющая форму равностороннего треугольника со стороной $2a$, падает без начальной скорости, поворачиваясь вокруг неподвижной горизонтальной оси, проходящей через вершину A перпендикулярно плоскости пластинки. Определить реакцию оси R_A (x_A; y_A) в момент, когда высота AB треугольника образует с вертикалью угол φ_1. В

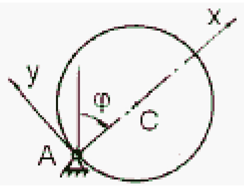
начальный момент этот угол равен φ_0 (табл. 3.11). Оси x и y неизменно связаны с пластинкой. Момент инерции пластинки относительно центральной оси, перпендикулярный ее плоскости, определяется по формуле $J_c = \dfrac{2}{3} m a^2$.

Таблица 3.11

№	Дано	Ответ

вар.	φ_0	φ_1	x_A	y_A
9	0°	90°	–1,6 P	0,2 P
10	30°	30°	$0,5\sqrt{3}$ P	0,1 P
11	30°	150°	$–2,1\sqrt{3}$ P	0,1 P
12	45°	90°	$–0,8\sqrt{2}$ P	0,2 P
13	60°	60°	0,5 P	$0,1\sqrt{3}$ P
14	60°	120°	–2,1 P	$0,1\sqrt{3}$ P
15	90°	120°	–1,3 P	$0,1\sqrt{3}$ P

Варианты 16–23

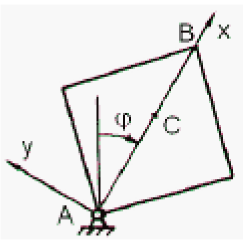


Однородный круглый диск весом P, радиусом r начинает падать без начальной скорости, поворачиваясь вокруг неподвижной горизонтальной оси, проходящей перпендикулярно плоскости диска через точку A на его ободе. Определить реакцию оси R_A (x_A; y_A) в момент, когда диаметр, проходящий через точку A, будет составлять с вертикалью угол φ_1. В начальный момент этот угол равен φ_0 (табл. 3.12). Оси x и y связаны с диском.

Таблица 3.12

№ вар.	Дано		Ответ	
	φ_0	φ_1	x_A	y_A
16	0°	60°	$-\frac{1}{6}$ P	$\frac{\sqrt{3}}{6}$ P
17	0°	120°	$-\frac{5}{2}$P	$\frac{\sqrt{3}}{6}$ P
18	30°	90°	$-\frac{2\sqrt{3}}{3}$P	$\frac{1}{3}$ P
19	45°	45°	$\frac{\sqrt{2}}{2}$ P	$\frac{\sqrt{2}}{2}$ P
20	45°	135°	$-\frac{11\sqrt{2}}{6}$ P	$\frac{\sqrt{2}}{6}$ P
21	60°	90°	$-\frac{2}{3}$ P	$\frac{1}{3}$ P
22	90°	90°	0	$\frac{1}{3}$ P
23	90°	135°	$-\frac{7\sqrt{2}}{6}$ P	$\frac{2}{6}$ P

Варианты 24–30



Однородная квадратная пластинка весом P падает без начальной скорости, поворачиваясь вокруг неподвижной горизонтальной оси, проходящей через вершину A перпендикулярно плоскости пластинки. Определить реакцию оси R_A (x_A; y_A) в момент, когда диагональ AB квадрата образует с вертикалью угол φ_1. В начальный момент этот угол равен φ_0 (табл. 3.13). Сторона квадрата равна $2a$. Оси x и y неизменно связаны с пластинкой. Момент инерции пластинки относительно центральной оси, перпендикулярной ее плоскости, определяется по формуле $J_c = \frac{2}{3} m a^2$.

Таблица 3.13

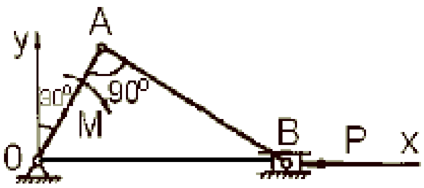
№ вар.	Дано		Ответ	
	φ_0	φ_1	x_A	y_A
24	0°	90°	–1,5 P	0,25 P
25	30°	30°	$0{,}5\sqrt{3}$ P	0,125 P

26	30°	150°	$-2\sqrt{3}$ P	0,125 P
27	45°	90°	$-0{,}75\sqrt{2}$ P	0,25 P
28	60°	60°	0,5 P	$0{,}125\sqrt{3}$ P
29	60°	120°	–2 P	$0{,}125\sqrt{3}$ P
30	90°	120°	–1,25 P	$0{,}125\sqrt{3}$ P

Задача № 20. Варианты 1–4

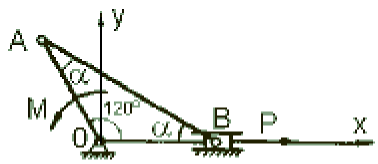
Для заданного положения кривошипно-шатунного механизма (см. рисунок) найти зависимость между моментом M, действующим на кривошип 0A, и силой давления P на поршень при равновесии. Длина кривошипа OA равна r. Весом звеньев механизма и трением пренебречь.

№ 20–1



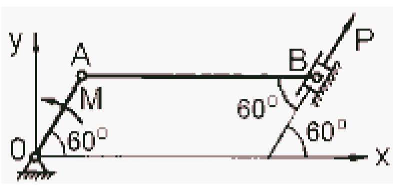
Ответ: $M = \dfrac{2Pr}{\sqrt{3}}$.

№ 20–2



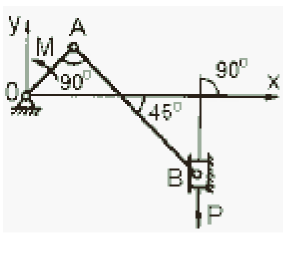
Ответ: $M = \dfrac{Pr}{\sqrt{3}}$.

№ 20–3



Ответ: $M = Pr\sqrt{3}$.

№ 20–4

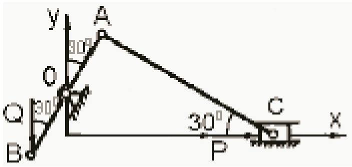


Ответ: $M = Pr\sqrt{2}$.

Варианты 5–8

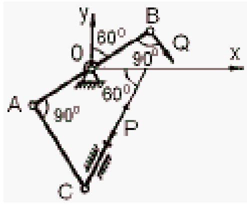
На четырехзвенный механизм действуют силы P и Q. Найти зависимость между ними при равновесии механизма в положении, указанном на рисунке. 0A = 0B = r. Вес звеньев механизма не учитывать. Трением пренебречь.

№ 20–5



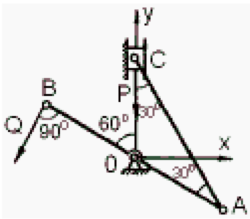
Ответ: $Q = \frac{4}{3}\sqrt{3}$ P.

№ 20–6



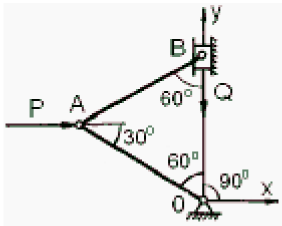
Ответ: Q = 2 P.

№ 20–7



Ответ: $Q = \frac{P}{\sqrt{3}}$.

№ 20–8

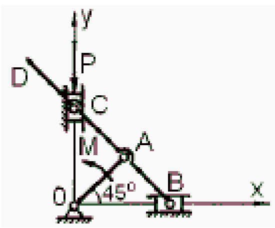


Ответ: $Q = \frac{P}{2\sqrt{3}}$ P.

Варианты 9–10

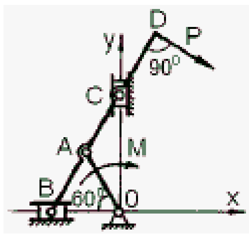
Найти зависимость между моментом M, действующим на кривошип OA, и силой P при равновесии механизма в положении, указанном на рисунке. 0A = AB = AC = CD = r. Весом звеньев механизма и трением пренебречь.

№ 20–9



Ответ: $M = \sqrt{2}\,P\,r$.

№ 20–10

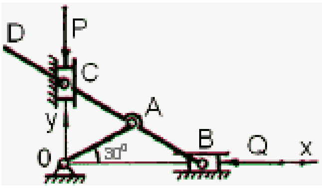


Ответ: $M = \frac{3}{2}P\,r$.

Варианты 11–12

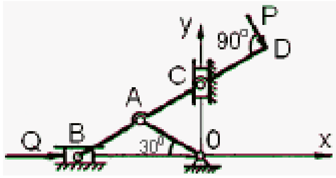
На механизм действуют силы P и Q. Найти зависимость между ними при равновесии механизма в положении, указанном на рисунке. 0A = AB = AC = CD = r. Весом звеньев механизма и трением пренебречь.

№ 20–11



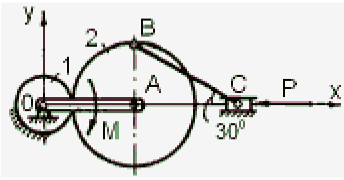
Ответ: Q = $\sqrt{3}$ P.

№ 20–12



Ответ: Q = $\frac{5}{2}$ P.

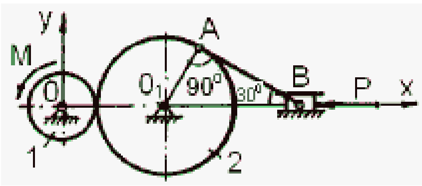
Вариант 13



Для заданного положения механизма найти зависимость между моментом M, действующим на кривошип 0A, и силой давления P на поршень, считая, что механизм находится в равновесии. Радиусы колес 1 и 2 соответственно равны r_1 = и $r_2 = 2$ r. Весом звеньев механизма и трением пренебречь.

Ответ: M = (3 + $\sqrt{3}$) P r.

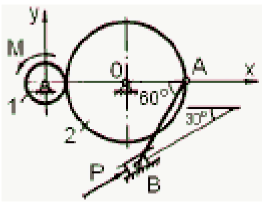
Вариант 14



Для заданного положения механизма при равновесии найти зависимость между моментом M, действующим на ведущее колесо 1, и силой давления P на поршень. Радиусы колес 1 и 2 соответственно равны r_1 = r и $r_2 = 2$ r. Весо звеньев механизма и трением пренебречь.

Ответ: M = $\frac{2}{\sqrt{3}}$ Pr.

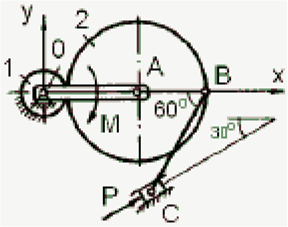
Вариант 15



Найти зависимость между моментом M, действующим на ведущее колесо 1, и силой P при равновесии механизма в положении, указанном на рисунке. Радиусы колес 1 и 2 соответственно равны r_1 = r и $r_2 = 3$ r. Весом звеньев механизма и трением пренебречь.

Ответ: M = P r.

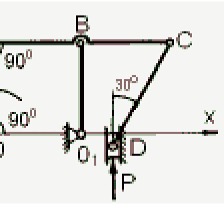
Вариант 16



Для заданного положения механизма при равновесии найти зависимость между моментом М, действующим на кривошип 0А, и силой давления Р на ползун. Радиусы колес 1 и 2 соответственно равны $r_1 = r$ и $r_2 = 3$ r. Весом звеньев механизма и трением пренебречь.

Ответ: М = 8 Pr.

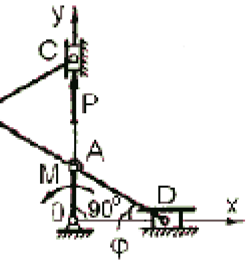
Вариант 17



Для заданного положения механизма найти зависимость между моментом М, действующим на кривошип 0А, и силой давления Р на поршень, считая, что механизм находится в равновесии. 0А = АВ = ВС = 00_1 = r. Весом звеньев механизма и трением пренебречь.

Ответ: М = $\sqrt{3}$ P r.

Вариант 18



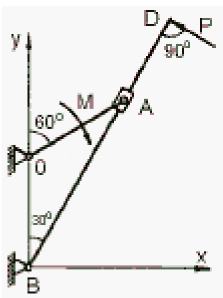
Для заданного положения механизма найти зависимости между моментом М, действующим на кривошип 0А, и силой давления Р на ползун С, считая, что механизм находится в равновесии. 0А = r, AD = АВ = ВС = 2 r. Весом звеньев механизма и трением пренебречь.

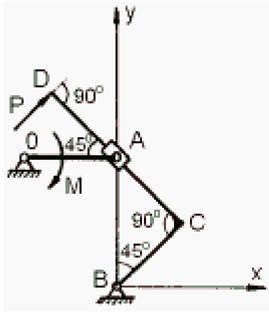
Ответ: М = $\sqrt{3}$ Pr.

Варианты 19–20

Для заданного положения кулисного механизма найти зависимость между моментом М, действующим на кривошип 0А, и силой Р, считая, что механизм находится в равновесии, 0А = r. Недостающие размеры указаны на чертеже. Весом звеньев механизма и трением пренебречь.

№ 20–19	№ 20–20
BD = 2,5 r	BC = r, CD = 2r





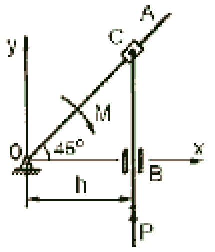
Ответ: M = 1,25 Pr.

Ответ: M = $\sqrt{2}$ Pr.

Варианты 21–22

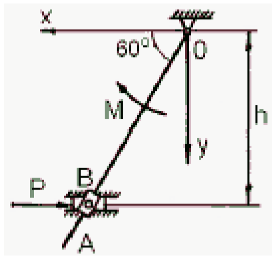
Для заданного положения кулисного механизма найти зависимость между моментом M, действующим на кулису 0A, и силой P, считая, что механизм находится в равновесии. Размеры указаны на чертеже. Весом звеньев механизма и трением пренебречь.

№ 20–21



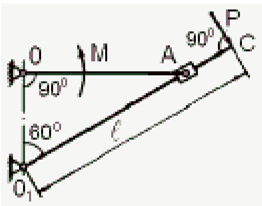
Ответ: M = 2 P h.

№ 20–22



Ответ: M = $\frac{4}{3}$ P h.

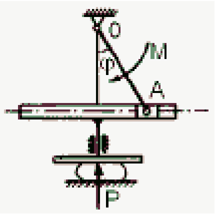
Вариант 23



На кривошип 0A кулисного механизма действует момент M. Определить, какую силу P надо приложить перпендикулярно кулисе 0_1C, чтобы уравновесить механизм в положении, указанном на чертеже. Весом звеньев механизма и трением пренебречь.

Ответ: P = $\frac{4}{3}\frac{M}{\ell}$.

Вариант 24



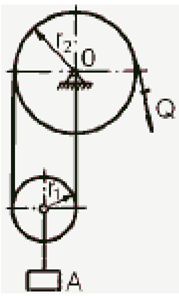
Пресс приводится в движение кулисным механизмом, к кривошипу 0A которого приложен момент M. Найти давление P, оказываемое прессом н сжимаемый предмет, в зависимости от угла j , 0A = ℓ. Трением и весом звеньев механизма пренебречь.

Ответ: P = $\dfrac{M}{\ell \sin\varphi}$.

Варианты 25–28

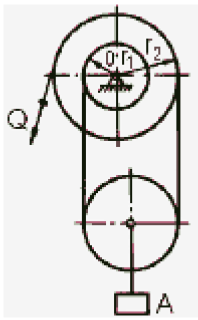
Для полиспаста определить зависимость между величиной силы Q и весом P груза A при равновесии, если r_1 = r и r_2 = 2 r. Весом блоков и трением пренебречь.

№ 20–25



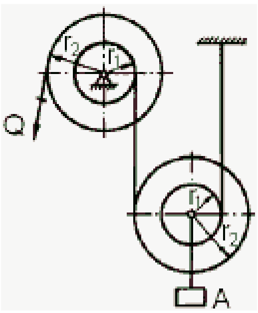
Ответ: Q = $\dfrac{P}{2}$.

№ 20–26



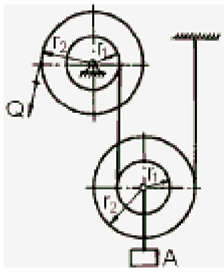
Ответ: Q = $\dfrac{P}{4}$.

№ 20–27



Ответ: Q = $\dfrac{P}{6}$.

№ 20–28

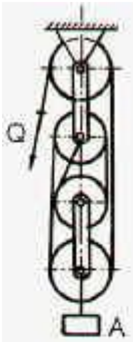


Ответ: Q = $\dfrac{P}{3}$.

Варианты 29–30

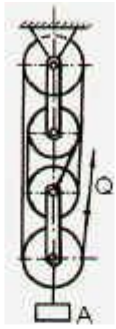
В кратном полиспасте определить зависимость между величиной силы Q и весом P груза A при равновесии. Весом блоков и трением в осях пренебречь. Считать все части тросов между блоками параллельными.

№ 20–29



Ответ: $Q = \frac{P}{4}$.

№ 20–30

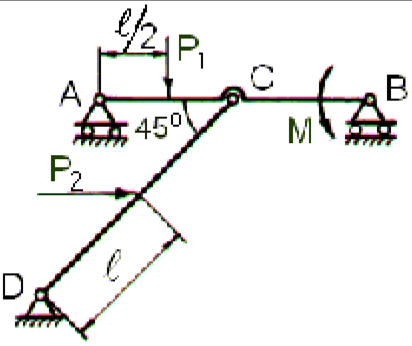


Ответ: $Q = \frac{P}{5}$.

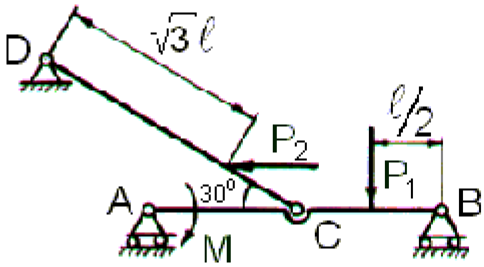
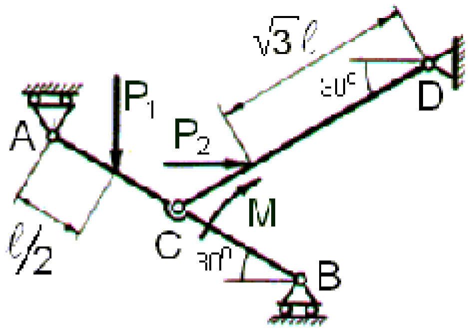
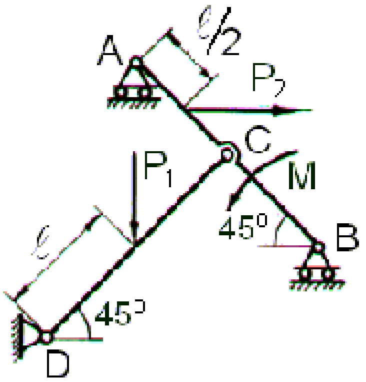
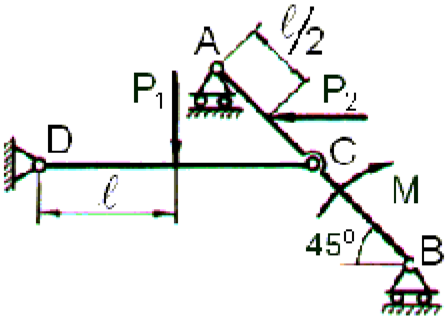
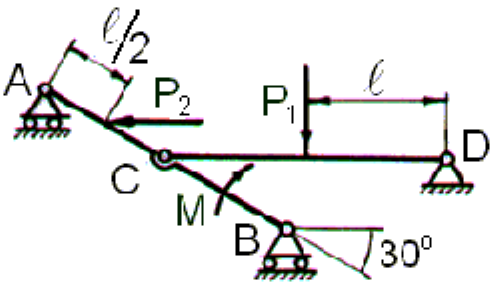
Задача № 21. Варианты 1–30

Две балки AB и CD длиною 2ℓ каждая соединены между собою шарниром C и прикреплены к стойке, как показано на чертеже, AC = CB = ℓ. Балки нагружены вертикальной силой P_1, горизонтальной силой P_2 ($P_1 = P_2 = P$) и парой сил с моментом M, величина которого указана в табл. 3.14. Пренебрегая весом балок, определить усилия в заданном шарнире.

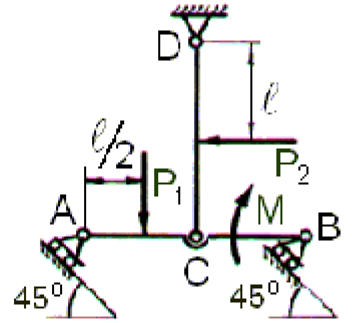
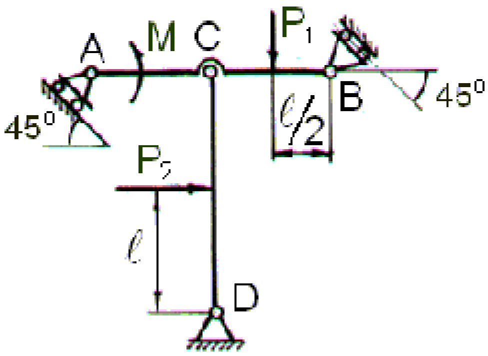
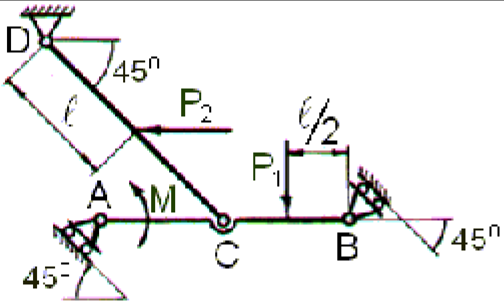
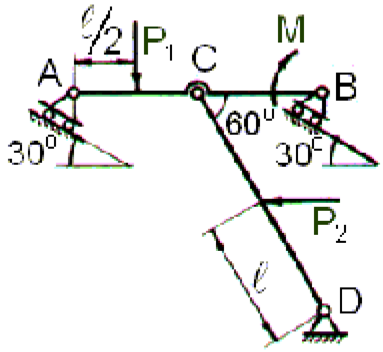
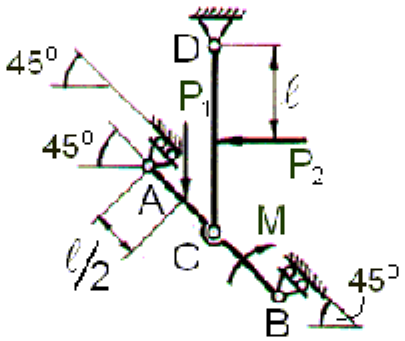
Таблица 3.14

№ вар.	Схема	M	Шарнир	Ответ
1		$M = P\ell$	A	$R_A = \frac{3}{2}P$
2			B	$R_B = 0$

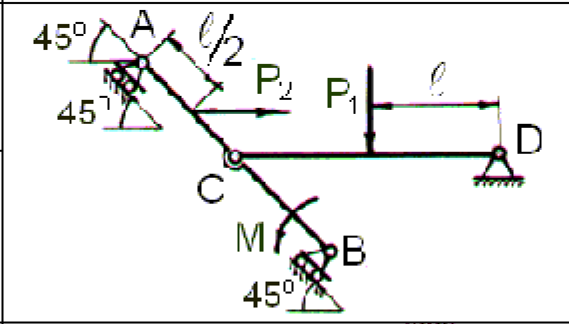
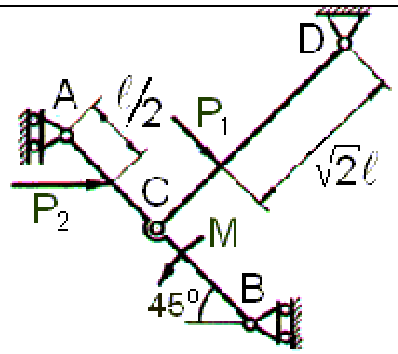
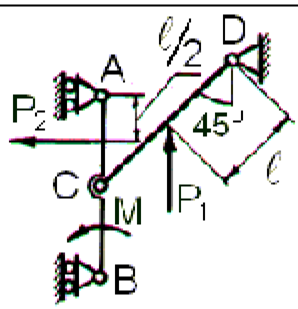
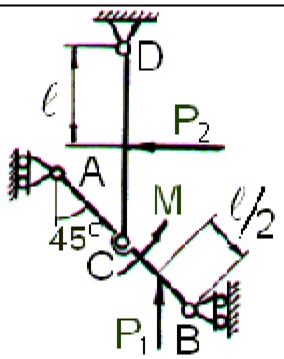
Продолжение табл. 3.14

№ вар.	Схема	M	Шарнир	Ответ
3		$M = P\ell$	A	$R_A = 0$
4			B	$R_B = \dfrac{3}{2}P$
5		$M = \sqrt{3}P\ell$	A	$R_A = 0$
6			B	$R_B = \dfrac{3}{2}P$
7		$M = \sqrt{2}\,P\ell$	A	$R_A = \dfrac{3}{2}P$
8			B	$R_B = 0$
9		$M = \dfrac{\sqrt{2}}{2}P\ell$	A	$R_A = 0$
10			B	$R_B = \dfrac{1}{2}P$
11		$M = \dfrac{1}{4}\,P\ell$	A	$R_A = \dfrac{P}{4}$
12			B	$R_B = \dfrac{P}{4}$

Продолжение табл. 3.14

№ вар.	Схема	M	Шарнир	Ответ
13		$M = P\ell$	A	$R_A = 0$
14			B	$R_B = \frac{\sqrt{2}}{2}P$
15		$M = P\ell$	A	$R_A = 0$
16			B	$R_B = -\frac{P\sqrt{2}}{2}$
17		$M = P\ell$	A	$R_A = \frac{5}{8}\sqrt{2}\,P$
18			B	$R_B = \frac{\sqrt{2}}{8}P$
19		$M = \frac{\sqrt{3}}{4}P\ell$	A	$R_A = \frac{\sqrt{3}}{3}P$
20			B	$R_B = \frac{P}{2}$
21		$M = \frac{3\sqrt{2}}{4}P\ell$	A	$R_A = 0$
22			B	$R_B = \frac{P\sqrt{2}}{2}$

Окончание табл. 3.14

№ вар.	Схема	M	Шарнир	Ответ
23		$M = \frac{\sqrt{2}}{4} P\ell$	A	$R_A = \frac{P\sqrt{2}}{4}$
24			B	$R_B = \frac{P\sqrt{2}}{4}$
25		$M = \frac{5\sqrt{2}}{4} P\ell$	A	$R_A = 0$
26			B	$R_B = 2P$
27		$M = P\ell$	A	$R_A = \frac{3}{2}P$
28			B	$R_B = 0$
29		$M = \frac{\sqrt{2}}{2} P\ell$	A	$R_A = P$
30			B	$R_B = \frac{P}{2}$

Задача № 22. Варианты 1–30

Для механической системы, изображенной на чертеже, определить ускорение заданной точки (табл. 3.15). Плоскость чертежа предполагается вертикальной, углы α и β , которые образуют наклонные плоскости с горизонтом, даны в таблице. Цифрами обозначены:

1 – колесо весом P, радиусом r, масса колеса равномерно распределена по его ободу;

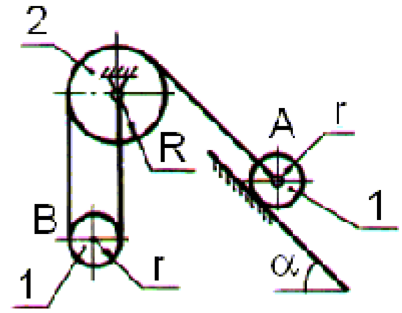
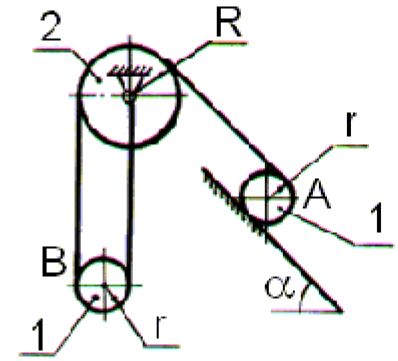
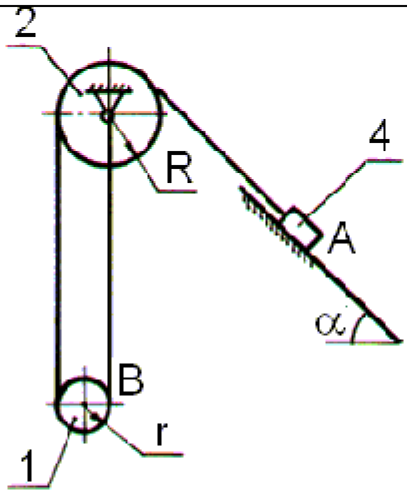
2 – колесо весом Q, радиусом R = 2 r, масса колеса равномерно распределена по его ободу;

3 – ступенчатый барабан весом Q, малый радиус барабана равен r, большой – R = 2 r, масса барабана распределена равномерно по окружности большого радиуса R;

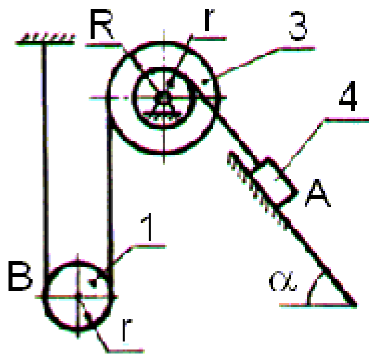
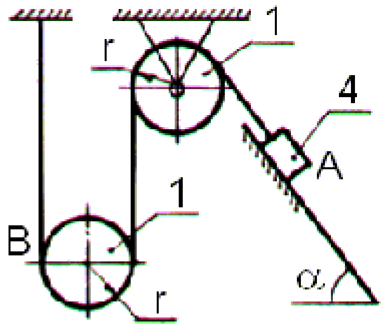
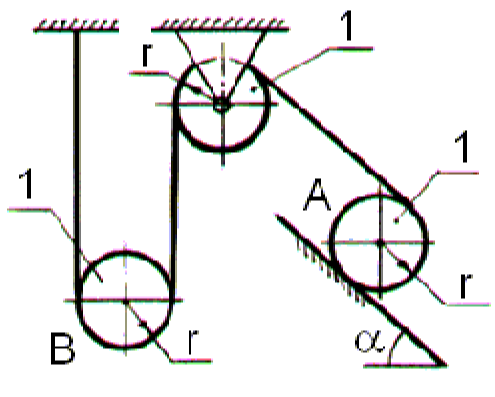
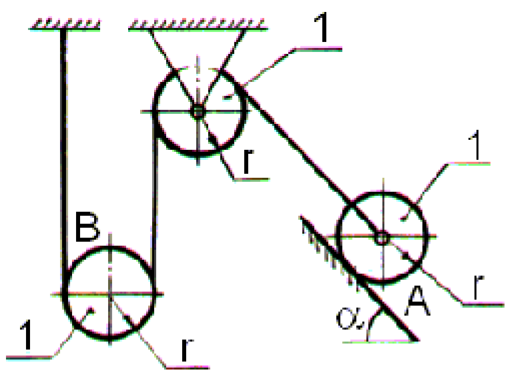
4 – груз весом P.

Движение системы происходит под действием сил тяжести. Считать, что колесо катится по плоскости без проскальзывания. Весом нитей и сопротивлением движению пренебречь.

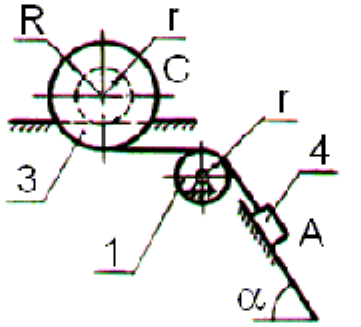
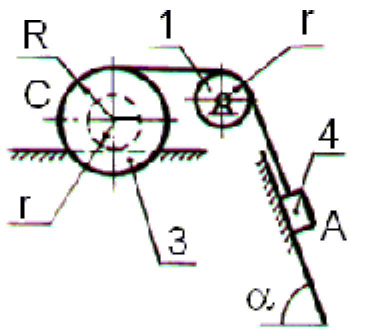
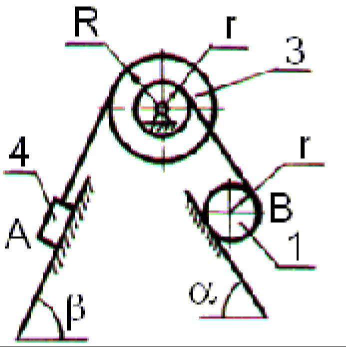
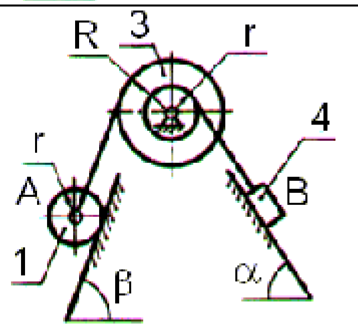
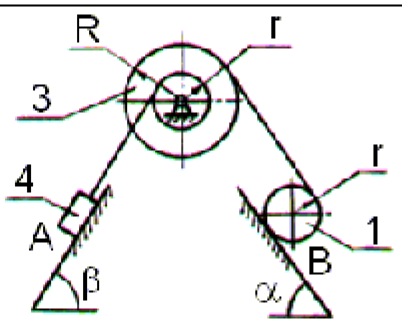
Таблица 3.15

№ вар.	Схема	Точка	α	Ответ
1		A	α	$a_A = \dfrac{P\,g\,(2\sin\alpha - 1)}{5\,P + 2\,Q}$
2		B	0	$a_B = \dfrac{Pg}{2(5\,P + 2\,Q)}$
3		A	α	$a_A = \dfrac{P\,g\,(1 - \sin\alpha)}{4\,(P + Q)}$
4		B	0	$a_B = \dfrac{P\,g}{4\,(P + Q)}$
5		A	α	$a_A = \dfrac{P\,g\,(2\sin\alpha - 1)}{3\,P + 2\,Q}$
6		B	0	$a_B = \dfrac{P\,g}{2\,(3\,P + 2\,Q)}$
7		A	$\dfrac{\pi}{2}$	$a_A = \dfrac{P\,g}{3\,P + 2\,Q}$

Продолжение табл. 3.15

№ вар.	Схема	Точка	α	Ответ
8		A	α	$a_A = \dfrac{P\,g\,(1-\sin\alpha)}{3\,P+4\,Q}$
9		B	0	$a_B = \dfrac{P\,g}{3\,P+4\,Q}$
10		A	$\dfrac{\pi}{2}$	$a_A = 0$
11		A	α	$a_A = \dfrac{g\,(2\sin\alpha-1)}{5}$
12		B	0	$a_B = \dfrac{g}{10}$
13		A	$\dfrac{\pi}{2}$	$a_A = \dfrac{g}{5}$
14		A	α	$a_A = \dfrac{g}{8}(1-\sin\alpha)$
15		B	0	$a_B = \dfrac{g}{8}$
16		A	α	$a_A = \dfrac{g}{7}(2\sin\alpha-1)$
17		B	0	$a_B = \dfrac{g}{14}$

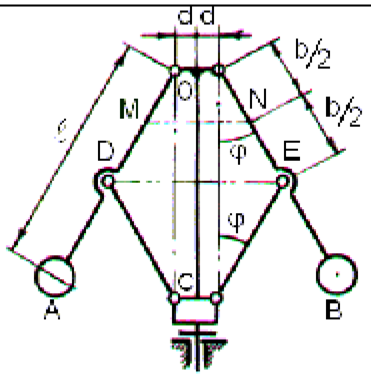
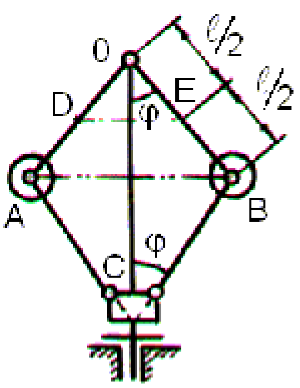
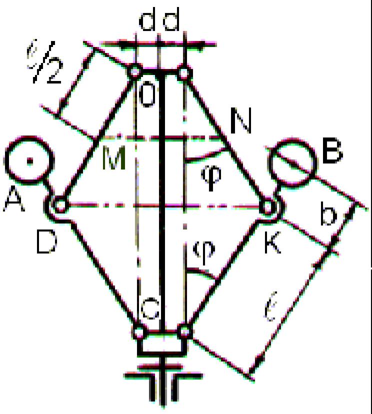
Окончание табл. 3.15

№ вар.	Схема	Точка	α	β	Ответ
18		A	α	–	$a_A = \dfrac{P\,g\sin\alpha}{2P+5Q}$
19		C	$\dfrac{\pi}{2}$	–	$a_C = \dfrac{P\,g}{2P+5Q}$
20		A	α	–	$a_A = \dfrac{9P\,g\sin\alpha}{18P+5Q}$
21		C	$\dfrac{\pi}{2}$	–	$a_C = \dfrac{3Pg}{18P+5Q}$
22		B	α	β=α	$a_B = \dfrac{3P\,g\sin\alpha}{2(9P+8Q)}$
23		B	α	$\dfrac{\pi}{2}$	$a_B = \dfrac{P\,g(4-\sin\alpha)}{2(9P+8Q)}$
24		A	0	$\dfrac{\pi}{2}$	$a_A = \dfrac{8P\,g}{9P+8Q}$
25		A	α	β=α	$a_A = \dfrac{2P\,g\sin\alpha}{9P+4Q}$
26		A	α	0	$a_A = \dfrac{2P\,g\sin\alpha}{9P+4Q}$
27		A	0	β	$a_A = \dfrac{4P\,g\sin\beta}{9P+4Q}$
28		B	α	β=α	$a_B = 0$
29		A	α	$\dfrac{\pi}{2}$	$a_A = \dfrac{P(1-\sin\alpha)}{3P+4Q}g$
30		B	0	$\dfrac{\pi}{2}$	$a_B = \dfrac{P}{3P+4Q}g$

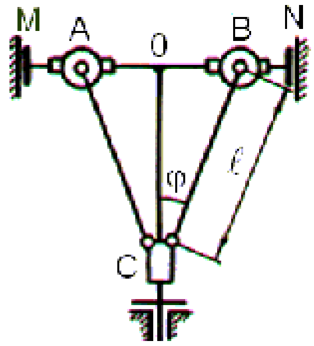
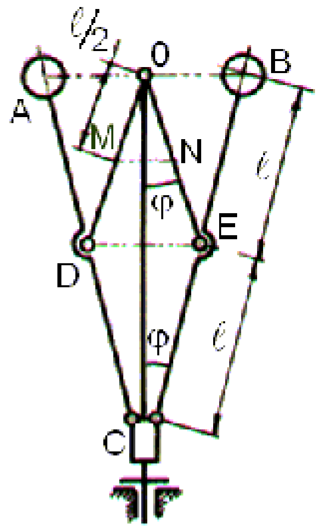
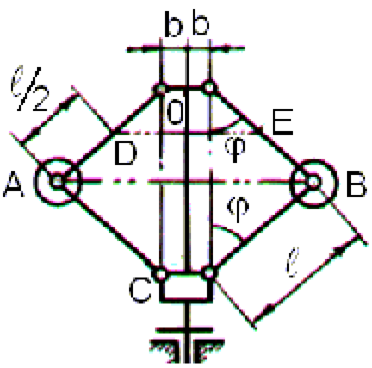
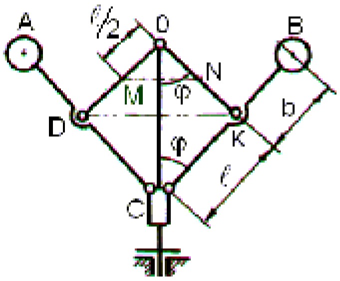
Задача № 23. Варианты 1–30

Центробежный регулятор, изображенный на рисунке, вращается с постоянной угловой скоростью ω вокруг вертикальной оси ОС.
В регуляторе имеется пружина (на рисунке не показана), концы которой прикреплены в точках, указанных в табл. 3.16, Коэффициент жесткости пружины равен с. При значениях угла $\varphi = \varphi_0$ (табл. 3.16) пружина не деформирована. Определить зависимость между угловой скоростью регулятора и углом φ отклонения его стержней от вертикали. Вес каждого шара ровен Р, вес муфты С равен Q (в вариантах 7–9 и 20–22 вес муфты не учитывается). Весом стержней пренебречь.

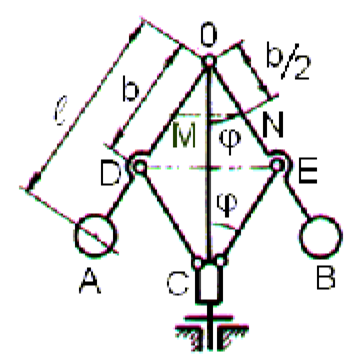
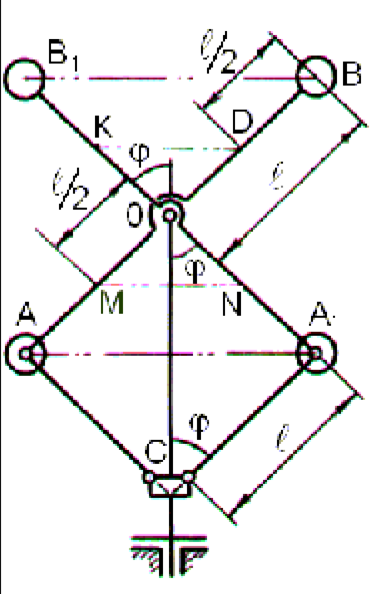
Таблица 3.16

№ вар.	Схема	Точка прикрепления пружины	φ_0	Ответ
1		O, C	0	$\omega^2 = g\dfrac{P\ell + [Q + 2cb(1-\cos\varphi)]b}{P\ell(d+\ell\sin\varphi)\operatorname{ctg}\varphi}$
2		D, E	0	$\omega^2 = g\dfrac{P\ell + Qb + 2cb^2\cos\varphi}{P\ell(d+\ell\sin\varphi)\operatorname{ctg}\varphi}$
3		M, N	0	$\omega^2 = g\dfrac{2(P\ell + Qb) + cb^2\cos\varphi}{2P\ell(d+\ell\sin\varphi)\operatorname{ctg}\varphi}$
4		O, C	$\dfrac{\pi}{3}$	$\omega^2 = g\dfrac{P + Q + c\ell(1-2\cos\varphi)}{P\ell\cos\varphi}$
5		A, B	$\dfrac{\pi}{6}$	$\omega^2 = g\dfrac{(P+Q)\operatorname{tg}\varphi + c\ell(2\sin\varphi - 1)}{P\ell\sin\varphi}$
6		D, E	$\dfrac{\pi}{6}$	$\omega^2 = g\dfrac{4(P+Q)\operatorname{tg}\varphi + c\ell(2\sin\varphi - 1)}{4P\ell\sin\varphi}$
7		D, K	0	$\omega^2 = g\dfrac{[P(\ell-b) + 2c\ell^2\cos\varphi]\operatorname{tg}\varphi}{P[d+(\ell+b)\sin\varphi](\ell+b)}$
8		O, C	0	$\omega^2 = g\dfrac{[P(\ell-b) + 2c\ell^2(1-\cos\varphi)]\operatorname{tg}\varphi}{P[d+(\ell+b)\sin\varphi](\ell+b)}$
9		M, N	0	$\omega^2 = g\dfrac{[2P(\ell-b) + c\ell^2\cos\varphi]\operatorname{tg}\varphi}{2P[d+(\ell+b)\sin\varphi](\ell+b)}$

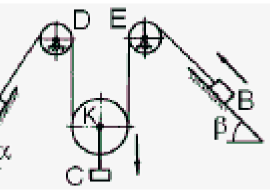
Продолжение табл. 3.16

№ вар.	Схема	Точка прикрепления пружины	φ_0	Ответ
10		O, C	$\frac{\pi}{3}$	$\omega^2 = g\frac{2Q + c\ell(1-2\cos\varphi)}{4P\ell\cos\varphi}$
11		A, B	$\frac{\pi}{6}$	$\omega^2 = g\frac{Q\,\mathrm{tg}\varphi + 2c\ell(2\sin\varphi - 1)}{2P\ell\sin\varphi}$
12		M, A, B, N	$\frac{\pi}{6}$	$\omega^2 = g\frac{Q\,\mathrm{tg}\varphi + c\ell(2\sin\varphi - 1)}{2P\ell\sin\varphi}$
13		O, C	$\frac{\pi}{3}$	$\omega^2 = g\frac{Q + c\ell(1-2\cos\varphi)}{4P\ell\cos\varphi}$
14		D, E	$\frac{\pi}{6}$	$\omega^2 = g\frac{Q\,\mathrm{tg}\varphi + c\ell(2\sin\varphi - 1)}{4P\ell\sin\varphi}$
15		A, B	$\frac{\pi}{6}$	$\omega^2 = g\frac{Q\,\mathrm{tg}\varphi + 4c\ell(2\sin\varphi - 1)}{4P\ell\sin\varphi}$
16		M, N	$\frac{\pi}{6}$	$\omega^2 = g\frac{4Q\,\mathrm{tg}\varphi + c\ell(2\sin\varphi - 1)}{16P\ell\sin\varphi}$
17		O, C	0	$\omega^2 = g\frac{P + Q + 2c\ell(1-\cos\varphi)}{P(b+\ell\sin\varphi)}\mathrm{tg}\varphi$
18		D, E	0	$\omega^2 = g\frac{2(P+Q) + c\ell\cos\varphi}{2P(b+\ell\sin\varphi)}\mathrm{tg}\varphi$
19		A, B	0	$\omega^2 = g\frac{P + Q + 2c\ell\cos\varphi}{P(b+\ell\sin\varphi)}\mathrm{tg}\varphi$
20		M, N	$\frac{\pi}{4}$	$\omega^2 = g\frac{4P(\ell-b)\mathrm{tg}\varphi + c\ell^2(2\sin\varphi - \sqrt{2})}{4P(\ell+b)^2\sin\varphi}$
21		O, C	0	$\omega^2 = g\frac{P(\ell-b) + 2c\ell^2(1-\cos\varphi)}{P(\ell+b)^2\sin\varphi}$
22		D, K	$\frac{\pi}{4}$	$\omega^2 = g\frac{P(\ell-b)\,\mathrm{tg}\varphi + c\ell^2(2\sin\varphi - \sqrt{2})}{P(\ell+b)^2\sin\varphi}$

Окончание табл. 3.16

№ вар.	Схема	Точка прикрепления пружины	φ_0	Ответ
23		O, C	$\frac{\pi}{3}$	$\omega^2 = g\frac{P\ell + [Q + c\ell(1-2\cos\varphi)]\,b}{P\ell^2\cos\varphi}$
24		D, E	$\frac{\pi}{6}$	$\omega^2 = g\frac{(P\ell + Qb)\mathrm{tg}\varphi + cb^2(2\sin\varphi - 1)}{P\ell^2\sin\varphi}$
25		M, N	$\frac{\pi}{6}$	$\omega^2 = g\frac{4\,(P\ell + Qb)\,\mathrm{tg}\varphi + c\,b^2(2\sin\varphi - 1)}{4P\ell^2\sin\varphi}$
26		O, C	$\frac{\pi}{3}$	$\omega^2 = g\frac{Q + c\ell(1-2\cos\varphi)}{2P\ell\cos\varphi}$
27		B, B_1	$\frac{\pi}{6}$	$\omega^2 = g\frac{Q\,\mathrm{tg}\varphi + c\ell(2\sin\varphi - 1)}{2P\ell\sin\varphi}$
28		A, A_1	$\frac{\pi}{4}$	$\omega^2 = g\frac{Q\,\mathrm{tg}\varphi + c\ell(2\sin\varphi - \sqrt{2})}{2P\ell\sin\varphi}$
29		M, N	$\frac{\pi}{4}$	$\omega^2 = g\frac{4\,Q\,\mathrm{tg}\varphi + c\ell(2\sin\varphi - \sqrt{2})}{2P\ell\sin\varphi}$
30		K, D	$\frac{\pi}{6}$	$\omega^2 = g\frac{4\,Q\,\mathrm{tg}\varphi + c\ell(2\sin\varphi - 1)}{8P\ell\sin\varphi}$

Задача № 24. Варианты 1–15



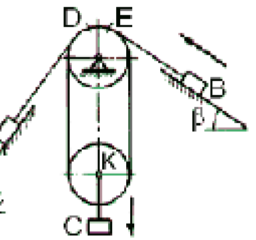
К концам невесомой нерастяжимой нити привязаны груз A весом P_1 и груз B весом P_2. Нить переброшена через неподвижные блоки D и E и охватывает снизу подвижный блок K. К оси подвижного блока прикреплен груз C весом P_3. Определить ускорения грузов A, B и C, пренебрегая массой блоков. Трением грузов о плоскости пренебречь (табл. 3.17).

Указание. При решении считать, что движение каждого груза происходит в направлении, указанном соответствующей стрелкой.

Таблица 3.17

№		Дано				Ответ		
вар.	α	β	P_1	P_2	P_3	a_A	a_B	a_C
1	0°	30°	P	2P	4P	g	0	$\frac{g}{2}$
2	0°	60°	P	2P	2P	$\frac{4+\sqrt{3}}{7}g$	$\frac{2-3\sqrt{3}}{7}g$	$\frac{3-\sqrt{3}}{7}g$
3	0°	45°	P	3P	2P	$\frac{12+3\sqrt{2}}{20}g$	$\frac{4-9\sqrt{2}}{20}g$	$\frac{8-3\sqrt{2}}{20}g$
4	30°	30°	2P	P	4P	$\frac{1}{10}g$	$\frac{7}{10}g$	$\frac{2}{5}g$
5	30°	60°	2P	P	6P	$\frac{2+3\sqrt{3}}{26}g$	$\frac{30-7\sqrt{3}}{26}g$	$\frac{8-\sqrt{3}}{13}g$
6	30°	45°	4P	P	8P	$-\frac{2-\sqrt{2}}{14}g$	$\frac{20-3\sqrt{2}}{14}g$	$\frac{9-\sqrt{2}}{14}g$
7	30°	0°	P	4P	8P	$\frac{13}{14}g$	$\frac{5}{14}g$	$\frac{9}{14}g$
8	45°	0°	P	2P	4P	$\frac{8-3\sqrt{2}}{10}g$	$\frac{4+\sqrt{2}}{10}g$	$\frac{6-\sqrt{2}}{10}g$
9	45°	30°	2P	P	4P	$\frac{5-4\sqrt{2}}{10}g$	$\frac{5+2\sqrt{2}}{10}g$	$\frac{5-\sqrt{2}}{10}g$
10	45°	45°	2P	P	2P	$\frac{4-5\sqrt{2}}{14}g$	$\frac{8-3\sqrt{2}}{14}g$	$\frac{3-2\sqrt{2}}{7}g$
11	45°	60°	P	2P	2P	$\frac{8-5\sqrt{2}+2\sqrt{3}}{14}g$	$\frac{4+\sqrt{2}-6\sqrt{3}}{14}g$	$\frac{3-\sqrt{2}-\sqrt{3}}{7}g$
12	60°	0°	2P	P	8P	$\frac{4-3\sqrt{3}}{8}g$	$\frac{\sqrt{3}+4}{4}g$	$\frac{12-\sqrt{3}}{16}g$
13	60°	30°	2P	4P	8P	$\frac{10-3\sqrt{3}}{10}g$	$\frac{\sqrt{3}}{10}g$	$\frac{5-\sqrt{3}}{10}g$
14	60°	45°	P	2P	8P	$\frac{4-\sqrt{3}+\sqrt{2}}{4}g$	$\frac{4+\sqrt{3}-3\sqrt{2}}{8}g$	$\frac{12-\sqrt{3}-\sqrt{2}}{16}g$
15	60°	60°	4P	P	8P	$\frac{4-5\sqrt{3}}{14}g$	$\frac{16+\sqrt{3}}{14}g$	$\frac{5-\sqrt{3}}{7}g$

Варианты 16–30



К концам невесомой нерастяжимой нити привязаны груз А весом P_1 и груз В весом P_2. От груза А нить идет через неподвижный блок D, охватывает подвижный блок К, а затем через подвижный блок Е, находящийся на одной оси с блоком D, идет к грузу В. К оси подвижного блока К прикреплен груз С весом P_3. Определить, пренебрегая массой блоков, ускорения грузов А, В и С. Трением грузов о плоскости пренебречь. Значения углов α и β , а также веса грузов приведены в табл. 3.18.

Указание. При решении считать, что движение каждого груза происходит в направлении, указанном соответствующей стрелкой.

Таблица 3.18

№ вар.	Дано					Ответ		
	α	β	P_1	P_2	P_3	a_A	a_B	a_C
16	0°	90°	4P	4P	8P	$\frac{5}{8}g$	$\frac{1}{8}g$	$\frac{3}{8}g$
17	0°	45°	4P	4P	8P	$\frac{4+\sqrt{2}}{8}g$	$\frac{4-3\sqrt{2}}{8}g$	$\frac{4-\sqrt{2}}{8}g$
18	0°	60°	P	2P	4P	$\frac{4+\sqrt{3}}{5}g$	$\frac{2-2\sqrt{3}}{5}g$	$\frac{6-\sqrt{3}}{10}g$
19	30°	60°	4P	2P	4P	$\frac{-2+\sqrt{3}}{14}g$	$\frac{10-5\sqrt{3}}{14}g$	$\frac{2-\sqrt{3}}{7}g$
20	30°	45°	P	2P	8P	$\frac{3+\sqrt{2}}{4}g$	$\frac{5-3\sqrt{2}}{8}g$	$\frac{11-\sqrt{2}}{16}g$
21	30°	0°	2P	P	8P	$\frac{1}{8}g$	$\frac{5}{4}g$	$\frac{11}{16}g$
22	45°	60°	2P	P	4P	$\frac{4+\sqrt{3}-4\sqrt{2}}{10}g$	$\frac{8-3\sqrt{3}+2\sqrt{2}}{10}g$	$\frac{6-\sqrt{3}-\sqrt{2}}{10}g$
23	45°	45°	4P	2P	2P	$\frac{4-9\sqrt{2}}{22}g$	$\frac{8-7\sqrt{2}}{22}g$	$\frac{3-4\sqrt{2}}{11}g$
24	45°	30°	6P	4P	8P	$\frac{10-9\sqrt{2}}{22}g$	$\frac{4+3\sqrt{2}}{22}g$	$\frac{7-3\sqrt{2}}{22}g$
25	45°	0°	P	P	2P	$\frac{4-3\sqrt{2}}{8}g$	$\frac{4+\sqrt{2}}{8}g$	$\frac{4-\sqrt{2}}{8}g$

Окончание табл. 3.18

№ вар.	Дано					Ответ		
	α	β	P_1	P_2	P_3	a_A	a_B	a_C
26	60°	60°	P	2P	8P	g	$\frac{2-\sqrt{3}}{4}g$	$\frac{6-\sqrt{3}}{8}g$
27	60°	45°	2P	P	4P	$\frac{4+\sqrt{2}-4\sqrt{3}}{10}g$	$\frac{8-3\sqrt{2}+2\sqrt{3}}{10}g$	$\frac{6-\sqrt{2}-\sqrt{3}}{10}g$
28	60°	30°	2P	2P	6P	$\frac{15-7\sqrt{3}}{20}g$	$\frac{5+3\sqrt{3}}{20}g$	$\frac{5-\sqrt{3}}{10}g$
29	60°	0°	2P	P	4P	$\frac{2-2\sqrt{3}}{5}g$	$\frac{4+\sqrt{3}}{5}g$	$\frac{6-\sqrt{3}}{10}g$
30	30°	30°	P	2P	8P	g	$\frac{1}{4}g$	$\frac{5}{8}g$

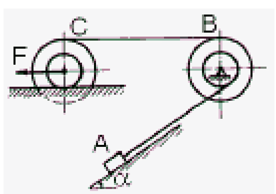
4. УРАВНЕНИЯ ЛАГРАНЖА ВТОРОГО РОДА

Задача № 25.
Задача № 26.
Задача № 27.
Задача № 28.
Задача № 29.

Задача № 25. Варианты 1–4

Механическая система, состоящая из груза A весом P, блока B и катка C, приводится в движение силой F = 6 P. Блок B и каток C представляют собой одинаковые ступенчатые барабаны; вес барабана равен 2 P, большой радиус – 2 r, малый – r, радиус инерции относительно продольной центральной оси ρ = r. Определить угловое ускорение блока B. Считать, что каток катится без скольжения. Весом нити и трением скольжения груза A по плоскости пренебречь.

№ 25–1

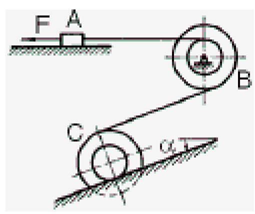


Ответ:

$$\varepsilon = \frac{9\,(4-\sin\alpha)}{43\,r}g$$

.

№ 25–2

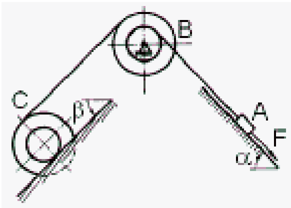


Ответ:

$$\varepsilon = \frac{6\,(9-2\sin\alpha)}{43\,r}g$$

.

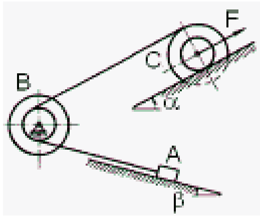
№ 25–3



Ответ:

$$\varepsilon = \frac{3\,(18 + 3\sin\alpha - 4\sin\beta)}{43\,r}\,g.$$

№ 25–4



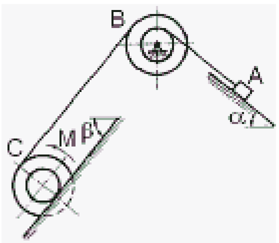
Ответ:

$$\varepsilon = \frac{3\,(6 - 2\sin\alpha - 3\sin\beta)}{31\,r}\,g.$$

Варианты 5–7

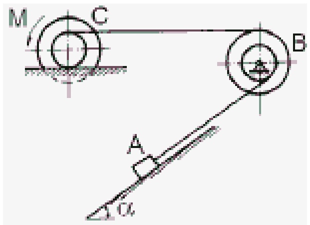
Механическая система, состоящая из груза А весом 4Р, блока В и катка С, приводится в движение парой сил с моментом М = 12 Р r, приложенной к катку С. Блок В и каток С представляют собой одинаковые ступенчатые барабаны весом 4 Р каждый. Большой радиус барабана равен 2 r, малый – r, радиус инерции относительно продольной центральной оси ρ = r. Определить ускорение центра катка. Считать, что каток катится без скольжения. Весом нити и трением скольжения груза А по плоскости пренебречь.

№ 25–5



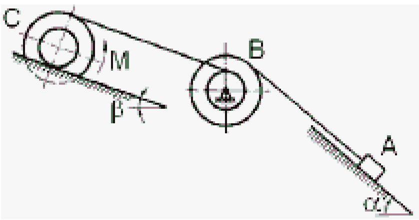
Ответ: $$a_C = g\frac{6 + 2\sin\beta - 3\sin\alpha}{13}.$$

№ 25–6



Ответ: $$a_C = \frac{3 - \sin\alpha}{13}\,g.$$

№ 25–7

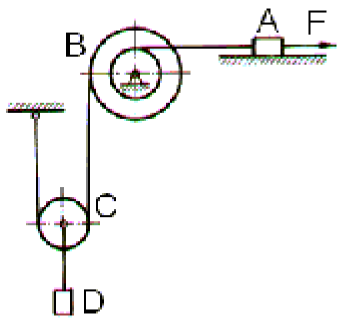


Ответ: $$a_C = \frac{3 - \sin\beta - 6\sin\alpha}{47}\,g.$$

Варианты 8–10

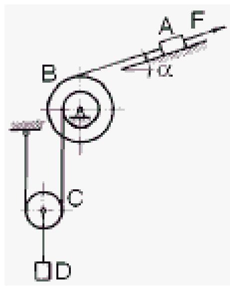
Механическая система состоит из грузов A и D весом P каждый, блоков B и C. Блок B представляет собой ступенчатый барабан весом 4 P, его большой радиус равен 2 r, малый – r, радиус инерции относительно продольной центральной оси ρ = r. Блок C – однородный круглый диск весом 2 P, радиусом r. Система приводится в движение силой F = 12 P, приложенной к телу A. Определить ускорение груза A. Весом нити и силой трения груза A по плоскости пренебречь.

№ 25–8



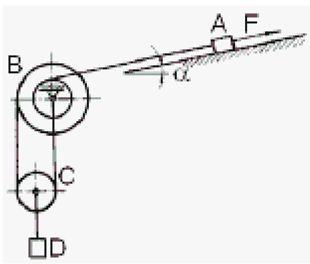
Ответ: $a_A = g$.

№ 25–9



Ответ: $a_A = \dfrac{45 - 4\sin\alpha}{9} g$.

№ 25–10



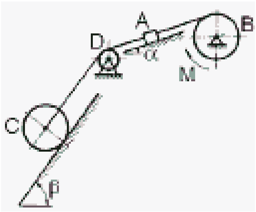
Ответ: $a_A = \dfrac{9 - \sin\alpha}{9} g$.

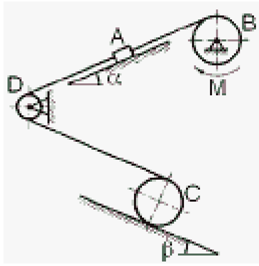
Варианты 11–13

Груз A весом P и каток C приводятся в движение по наклонным плоскостям за счет наматывания каната на барабан B лебедки. К барабану приложен вращающий момент M = 8 P r. Определить угловое ускорение барабана лебедки, считая, что барабан и каток – однородные круглые цилиндры весом 4 P, радиусом r. Каток катится без скольжения. Весом блока D, весом каната и трением скольжения груза A по плоскости пренебречь.

№ 25–11

№ 25–12

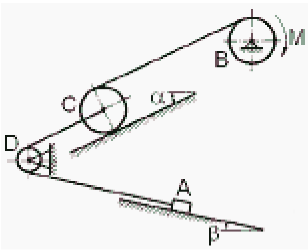




Ответ: $\varepsilon = \dfrac{8 - \sin\alpha - 4\sin\beta}{9\,r}\,g$.

Ответ: $\varepsilon = \dfrac{2\,(8 - \sin\alpha - 2\sin\beta)}{9\,r}\,g$.

№ 25–13

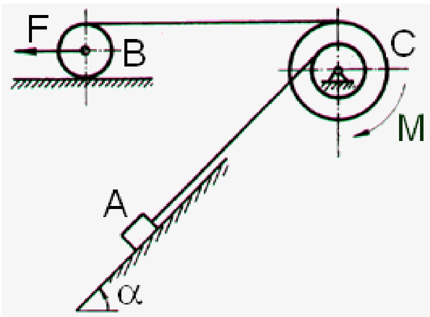


Ответ: $\varepsilon = \dfrac{2\,(16 - 4\sin\alpha - \sin\beta)}{15\,r}\,g$.

Варианты 14–16

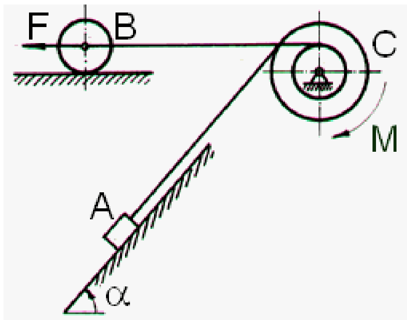
Груз A весом P и каток B приводятся в движение за счет наматывания канатов на ступенчатый барабан лебедки. К барабану приложен вращающий момент M = 12 P r, на систему действует также сила F = 6 P. Определить ускорение центра катка B, считая, что каток – однородный круглый цилиндр весом 2 P, радиусом r; ступенчатый барабан лебедки имеет вес 4 P, его большой радиус равен 2 r, малый – r, радиус инерции относительно продольной центральной оси ρ = r. Каток катится без скольжения, весом канатов и трением скольжения груза A по плоскости пренебречь.

№ 25–14



Ответ: $a_B = \dfrac{6 - \sin\alpha}{8}\,g$.

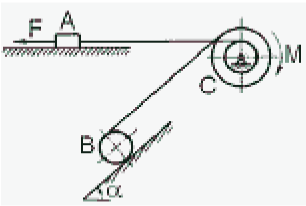
№ 25–15



Ответ: $a_B = \dfrac{2(3 - \sin\alpha)}{11}\,g$.

Ответ: $a_B = \frac{3 - \sin\alpha}{4} g$.

№ 25–16

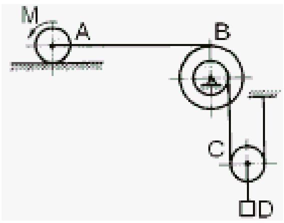


Ответ: $a_B = \frac{3 - \sin\alpha}{4} g$.

Варианты 17–19

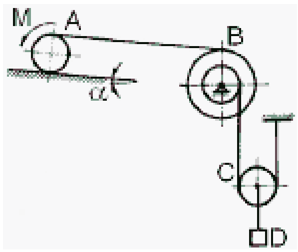
Механическая система, состоящая из катка A , блоков B и C и груза D приводится в движение парой сил с моментом M = 8 P r, приложенной к катку A. Определить ускорение центра катка, считая, что каток A – однородный круглый цилиндр весом 4 P, радиусом r; блок B – ступенчатый барабан весом 4 P, его большой радиус равен 2 r, малый – r, радиус инерции относительно продольной центральной оси ρ = r; блок C – однородный круглый диск весом 2 P, радиусом r; вес груза D равен 2 P. Каток катится без скольжения. Весом каната пренебречь.

№ 25–17



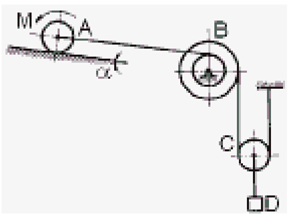
Ответ: $a_A = \frac{112}{117} g$.

№ 25–18



Ответ: $a_A = \frac{8(3 - 2\sin\alpha)}{45} g$.

№ 25–19

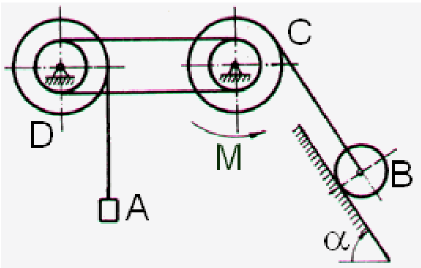


Ответ: $a_A = \frac{4(1 - \sin\alpha)}{15} g$.

Варианты 20–23

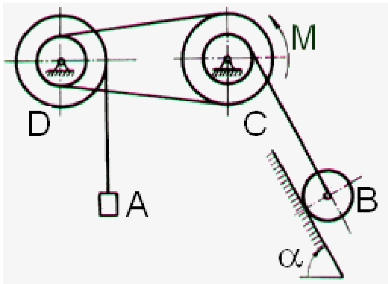
Механическая система приводится в движение вращающим моментом M = 20 P r, приложенным к ступенчатому барабану C, который соединяется с таким же барабаном D ременной передачей. Груз A и каток B движутся за счет наматывания канатов на барабаны, при этом каток B катится без скольжения. Определить угловое ускорение барабана C, считая, что барабаны D и C имеют вес 2 P каждый, большие радиусы их равны 2 r, малые – r, радиусы инерции относительно продольной центральной оси ρ = r, каток B – однородный круглый цилиндр весом 4 P, радиусом r; вес груза A равен 4 P. Весом канатов и ремня пренебречь.

№ 25–20



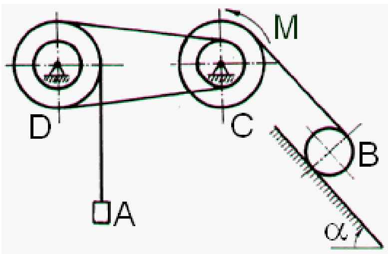
Ответ: $\varepsilon = \dfrac{3 - 2\sin\alpha}{11r}g$.

№ 25–21



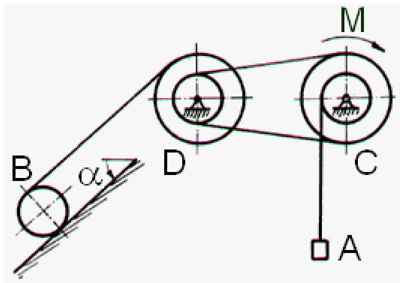
Ответ: $\varepsilon = \dfrac{1 - \sin\alpha}{20r}g$.

№ 25–22



Ответ: $\varepsilon = \dfrac{4(9 - 2\sin\alpha)}{19r}g$.

№ 25–23

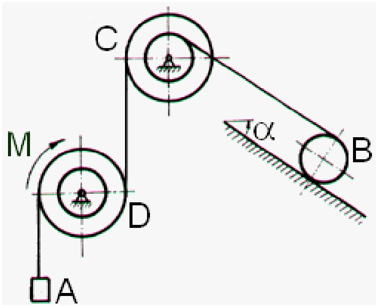


Ответ: $\varepsilon = \dfrac{4(2 - \sin\alpha)}{19r}g$.

Варианты 24–27

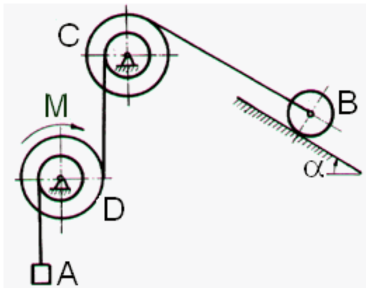
Механическая система, состоящая из груза A, катка B и двух одинаковых ступенчатых барабанов C и D, приводится в движение вращающим моментом M = 20 P r, приложенным к барабану D. Определить угловое ускорение барабана D, считая, что барабаны C и D имеют вес 2 P каждый, большие радиусы их равны 2 r, малые – r, радиусы инерции относительно продольной центральной оси ρ = r; каток B – однородный круглый цилиндр весом 4 P, радиусом r; вес груза A равен 4 P; каток B катится без скольжения. Весом канатов пренебречь.

№ 25–24



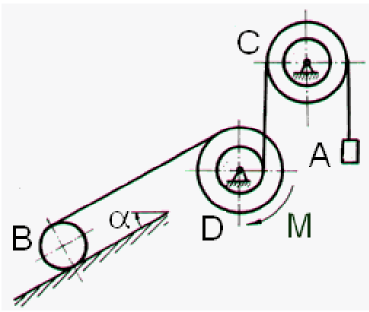
Ответ: $\varepsilon = \dfrac{8\,(12 - \sin\alpha)}{151 r} g$.

№ 25–25



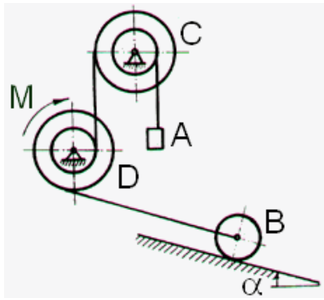
Ответ: $\varepsilon = \dfrac{16\,(1 - \sin\alpha)}{110 r} g$.

№ 25–26



Ответ: $\varepsilon = \dfrac{8\,(4 - \sin\alpha)}{25 r} g$.

№ 25–27



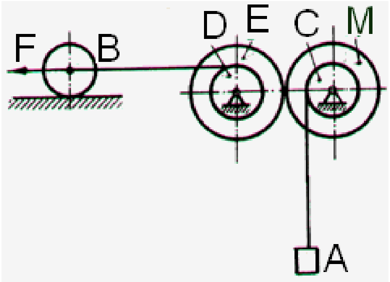
Ответ: $\varepsilon = \dfrac{4\,(9 - 4\sin\alpha)}{55 r} g$.

Варианты 28–30

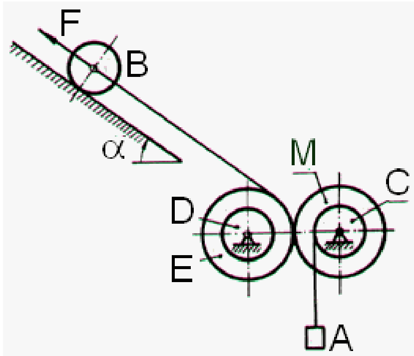
Механическая система, состоящая из груза A, катка B радиусом r, двух барабанов D и C радиусом r, жестко соединенных соответственно с зубчатыми колесами E и M радиусом 2 r, приводится в движение силой F = 12 P, приложенной к центру катка B. Определить ускорение груза A, считая, что его вес равен 4 P, общий вес каждого барабана с зубчатым колесом – 2 P и радиус инерции относительно оси вращения ρ = r, каток B – однородный круглый цилиндр весом 4 P, радиусом r. Каток катится без скольжения.

№ 25–28

№ 25–29

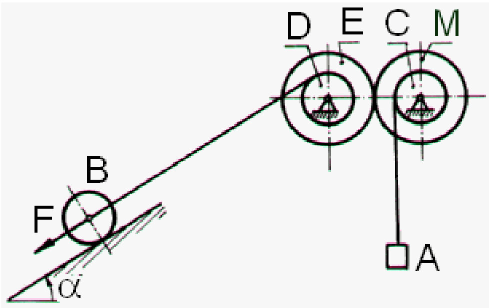


Ответ: $a_A = \frac{4}{7}g$.



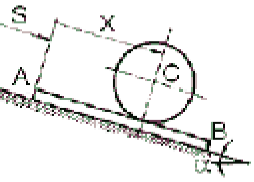
Ответ: $a_A = \frac{2(2 - \sin\alpha)}{7}g$.

№ 25–30



Ответ: $a_A = \frac{2(2 + \sin\alpha)}{7}g$.

Задача № 26. Вариант 1

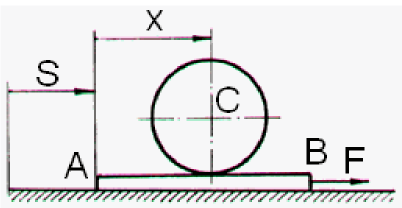


Доска АВ весом 3Р движется по наклонной плоскости, составляющей 30° с горизонтом. По ней может катиться без скольжения сплошной однородный цилиндр весом Р, радиусом r. Определить ускорение доски и ускорение центра тяжести цилиндра относительно доски, если коэффициент трения

скольжения между доской и плоскостью равен $f = \frac{\sqrt{3}}{4}$. Трением качения пренебречь.

Ответ: $\ddot{x} = \frac{3}{10}g \quad \ddot{S} = \frac{1}{20}g$.

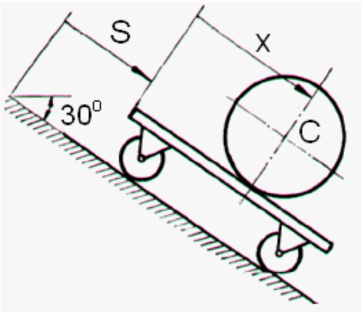
Вариант 2



Решить предыдущую задачу (вариант 1) в предположении, что доска движется по горизонтальной шероховатой плоскости с коэффициентом трения $f = \frac{1}{2}$ под действием постоянной силы F = 4 Р.

Ответ: $\ddot{x} = -\frac{2}{5}g, \quad \ddot{S} = \frac{3}{5}g$.

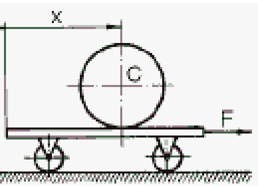
Вариант 3



Тележка, состоящая из корпуса весом 2 Р и четырех колес общим весом 2 Р, скатывается по наклонной плоскости, составляющей 30° с горизонтом. По тележке может катиться без скольжения сплошной однородный цилиндр весом Р. Определить ускорение тележки и ускорение центра тяжести цилиндра относительно тележки. Трением качения пренебречь.

Ответ: $\ddot{x} = \frac{1}{16}g, \quad \ddot{S} = \frac{13}{32}g$.

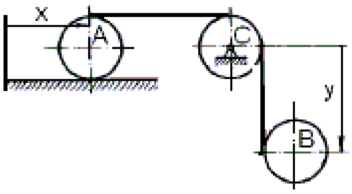
Вариант 4



Решить предыдущую задачу (вариант 3) в предположении, что тележка движется по горизонтальной плоскости под действием постоянной силы F, принимая F = 4 P.

Ответ: $\ddot{x} = -\frac{1}{2}g, \quad \ddot{S} = \frac{3}{4}g$.

Вариант 5

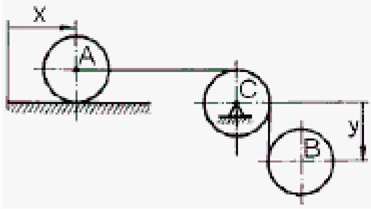


Каток А и цилиндр В связаны тонкой нерастяжимой нитью. Нить одним концом намотана на каток А, переброшена через блок С и намотана вторым концом на цилиндр В. Определить ускорение оси катка и ускорение центра тяжести цилиндра.

Каток, блок и цилиндр считать однородными сплошными цилиндрами одинакового веса и радиуса. Трением качения пренебречь.

Ответ: $\ddot{x} = \frac{4}{29}g, \quad \ddot{y} = \frac{22}{29}g$.

Вариант 6

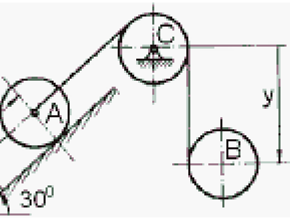


Каток A и цилиндр B связаны тонкой нерастяжимой нитью. Нить, привязанная к оси катка A, переброшена через блок C и намотана свободным концом на цилиндр B. Определить ускорение оси катка и ускорение центра тяжести цилиндра.

Каток, блок и цилиндр считать однородными сплошными цилиндрами одинакового веса и радиуса. Трением качения пренебречь.

Ответ: $\ddot{x} = \frac{1}{7}g, \quad \ddot{y} = \frac{5}{7}g$.

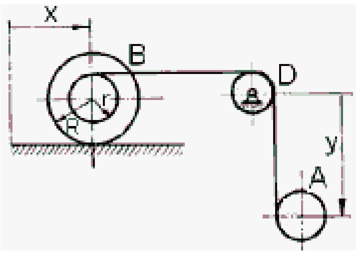
Вариант 7



В условиях варианта 6 решить задачу, считая, что каток катится без скольжения по наклонной плоскости, составляющей 30° с горизонтом.

Ответ: $\ddot{x} = -\frac{1}{14}g, \quad \ddot{y} = \frac{9}{14}g$.

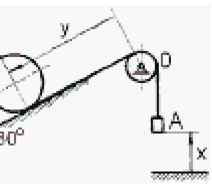
Вариант 8



Однородный сплошной цилиндр A весом P, радиусом r, падая под действием силы тяжести, приводит в движение каток B посредством тонкой нерастяжимой нити, намотанной на цилиндр и на барабан катка радиусом r. Определить ускорения оси катка и центра тяжести цилиндра. Вес катка равен P, его момент инерции относительно оси, проходящей через центр тяжести, равен $J = \frac{2Pr^2}{g}$. Наружный радиус катка R = 2 r. Массой блока D пренебречь. Каток катится без скольжения.

Ответ: $\ddot{x} = \frac{2}{9}g, \quad \ddot{y} = \frac{7}{9}g$.

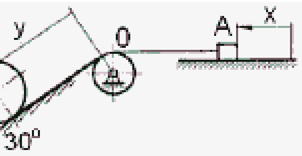
Вариант 9



Однородный сплошной цилиндр весом 4 P движется по гладкой наклонной плоскости, составляющей с горизонтом угол 30° . Цилиндр обмотан нитью, перекинутой через блок 0 и прикрепленной к грузу A весом P. Найти ускорение груза и центра тяжести цилиндра. Массой блока 0 пренебречь.

Ответ: $\ddot{x} = -\frac{1}{7}g, \quad \ddot{y} = \frac{2}{7}g$.

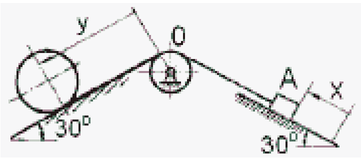
Вариант 10



В условиях варианта 9 решить задачу, если груз А движется по гладкой горизонтальной плоскости.

Ответ: $\ddot{x} = \frac{2}{7}g, \quad \ddot{y} = \frac{3}{7}g$.

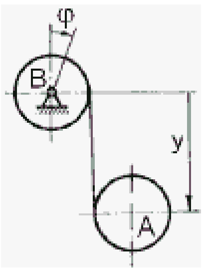
Вариант 11



В условиях варианта 9 решить задачу, если груз А движется по гладкой наклонной плоскости, составляющей 30° с горизонтом.

Ответ: $\ddot{x} = \frac{1}{14}g, \quad \ddot{y} = \frac{5}{14}g$.

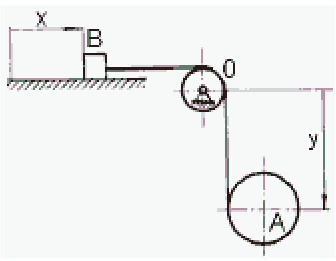
Вариант 12



Однородный сплошной цилиндр А весом Р, радиусом r, падая под действием силы тяжести, приводит в движение с помощью нити блок В того же веса и радиуса. Найти угловое ускорение блока и ускорение центра тяжести цилиндра.

Ответ: $\ddot{\varphi} = \frac{2}{5\,r}g, \quad \ddot{y} = \frac{4}{5}g$.

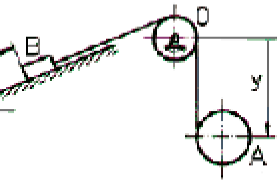
Вариант 13



Однородный сплошной цилиндр А весом 4 Р, падая под действием силы тяжести, приводит в движение груз В весом Р, находящийся на гладкой горизонтальной плоскости, посредством тонкой нерастяжимой нити, намотанной на цилиндр и переброшенной через блок 0. Определить ускорения груза и центра тяжести цилиндра. Массой блока 0 пренебречь.

Ответ: $\ddot{x} = \frac{4}{7}g, \quad \ddot{y} = \frac{6}{7}g$.

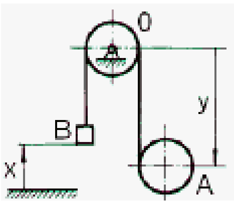
Вариант 14



В условиях варианта 13 решить задачу, считая, что груз движется по наклонной плоскости, угол $\alpha = 30°$.

Ответ: $\ddot{x} = \frac{5}{14}g, \quad \ddot{y} = \frac{11}{14}g$.

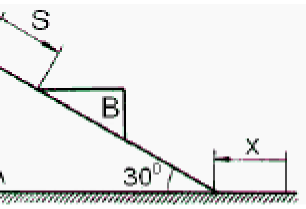
Вариант 15



В условиях варианта 13 решить задачу, считая, что груз поднимается вертикально вверх

Ответ: $\ddot{x} = \frac{1}{7}g, \quad \ddot{y} = \frac{5}{7}g$.

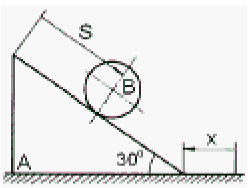
Вариант 16



На призму A весом 3 P, лежащую на горизонтальной поверхности положена призма B весом P. Определить ускорение призмы A и относительное ускорение призмы B. Трением пренебречь.

Ответ: $\ddot{x} = \frac{\sqrt{3}}{25}g, \quad \ddot{S} = \frac{14}{25}g$.

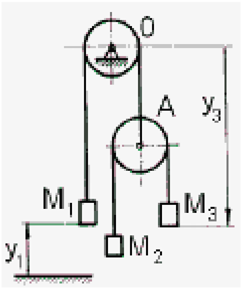
Вариант 17



На призму A весом 2 P, лежащую на гладкой горизонтальной поверхности, положен однородный сплошной цилиндр B весом P, который может катиться по призме без проскальзывания. Определить ускорение призмы и ускорение центра тяжести цилиндра относительно призмы.

Ответ: $\ddot{x} = \frac{\sqrt{3}}{15}g, \quad \ddot{S} = \frac{2}{5}g$.

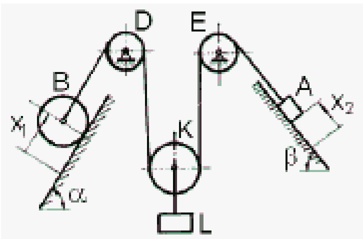
Вариант 18



Через неподвижный блок 0 перекинута тонкая нерастяжимая нить, на одном конце которой находится груз М весом 2 Р, а на другом – блок А. Через блок А в свою очередь перекинута нить, на концах которой подвешены грузы M_2 и M_3 весом Р и 4 Р. Найти ускорения грузов M_1 и M_3. Массой блоков пренебречь.

Ответ: $\ddot{y} = \frac{3}{13}g, \quad \ddot{y} = \frac{9}{13}g$.

Варианты 19–22

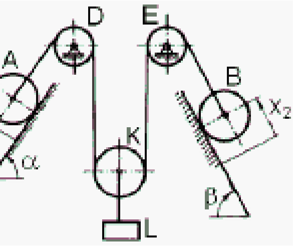


К концам тонкой нерастяжимой нити привязаны груз А весом 2 Р и каток В весом Р. Нить переброшена через блоки D и E и охватывает снизу подвижный блок K. К оси подвижного блока прикреплен груз L весом 4 Р. Груз А и каток движутся по наклонным плоскостям, соответственно расположенным под углами α и β к горизонту (табл. 4.1). Каток катится без скольжения. Найти ускорения груза А и ускорение центра тяжести катка В. Массой блоков пренебречь. Каток В считать однородным сплошным цилиндром. Трение качения катка В и трение скольжения груза А по плоскости не учитывать.

Таблица 4.1

№ вар.	Дано		Ответ	
	α	β	$\ddot{x}_1$	$\ddot{x}_2$
19	0°	30°	$\frac{10}{13}g$	$\frac{1}{13}g$
20	30°	30°	$\frac{7}{13}g$	$\frac{2}{13}g$
21	0°	0°	$\frac{8}{13}g$	$\frac{6}{13}g$
22	30°	0°	$\frac{5}{13}g$	$\frac{7}{13}g$

Варианты 23–26



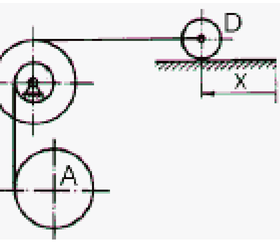
К концам тонкой нерастяжимой нити привязаны катки А и В весом Р, радиусом r каждый. Нить переброшена через блоки D и Е и охватывает снизу подвижный блок К. К оси подвижного блока прикреплен груз L весом 4 Р. Катки А и В катятся без проскальзывания по наклонным плоскостям, соответственно расположенным под углами α и β к горизонту (табл. 4.2).

Найти ускорения центров тяжести катков А и В. Массой блоков пренебречь. Катки считать однородными сплошными цилиндрами. Трение качения не учитывать.

Таблица 4.2

№ вар.	Дано		Ответ	
	α	β	$\ddot{x}_1$	$\ddot{x}_2$
23	0°	30°	$\frac{2}{3}g$	$\frac{1}{3}g$
24	30°	30°	$\frac{3}{7}g$	$\frac{3}{7}g$
25	0°	0°	$\frac{4}{7}g$	$\frac{4}{7}g$
26	30°	0°	$\frac{1}{3}g$	$\frac{2}{3}g$

Вариант 27



Однородный сплошной цилиндр А весом 4 Р, радиусом R, падая под действием силы тяжести, приводит в движение с помощью нитей ступенчатый блок В и каток D весом Р каждый. Каток D катится без скольжения по горизонтальной поверхности. Определить ускорение центров тяжести цилиндра и катка.

Каток считать сплошным диском радиусом r. Большой и малый радиусы блока равны 2 r и r, момент инерции блока относительно оси вращения равен $J = \frac{2Pr^2}{g}$. Трением качения пренебречь.

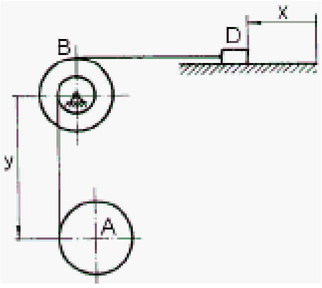
Ответ: $\ddot{x} = \frac{2}{7}g, \quad \ddot{y} = \frac{5}{7}g$.

Вариант 28

В условиях варианта 27 решить задачу, если каток катится по наклонной плоскости, составляющей с горизонтом угол 30°.

Ответ: $\ddot{x} = \frac{1}{14} g, \quad \ddot{y} = \frac{19}{28} g$.

Вариант 29



Однородный сплошной цилиндр А весом 4 Р, радиусом R, падая под действием силы тяжести, приводит в движение с помощью нити ступенчатый блок В и груз D весом Р. Определить ускорение груза и ускорение центра тяжести цилиндра. Большой и малый радиусы ступенчатого блока равны 2 r и r,

момент инерции блока относительно оси вращения $J = \frac{2 P r^2}{g}$. Трением скольжения пренебречь. R = 2 r.

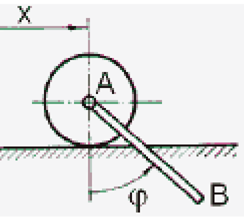
Ответ: $\ddot{x} = \frac{4}{11} g, \quad \ddot{y} = \frac{8}{11} g$.

Вариант 30

В условиях варианта 29 решить задачу, если груз движется по наклонной плоскости, составляющей с горизонтом угол 30°.

Ответ: $\ddot{x} = \frac{1}{11} g, \quad \ddot{y} = \frac{15}{22} g$.

Задача № 27. Вариант 1



Эллиптический маятник состоит из сплошного однородного цилиндра весом Р и прикрепленного к его оси с помощью шарнира стержня АВ весом Q, длиной ℓ. Цилиндр находится на горизонтальной шероховатой плоскости. Составить дифференциальные уравнения движения системы, принимая за

обобщенные координаты угол φ отклонения стержня от вертикали и расстояние x, проходимое центром тяжести цилиндра.

Ответ: $(3 P + 2 Q)\ddot{x} + Q\ell\ddot{\varphi}\cos\varphi - Q\ell\dot{\varphi}^2\sin\varphi = 0$, $\ddot{x}\cos\varphi + \frac{2}{3}\ell\ddot{\varphi} + g\sin\varphi = 0$.

Вариант 2

В условиях варианта 1 решить задачу, если цилиндр заменен ползуном, который может двигаться по гладкой горизонтальной плоскости.

Ответ: $(P+Q)\ddot{x}+\frac{1}{2}Q\ell\ddot{\varphi}\cos\varphi-\frac{1}{2}Q\ell\dot{\varphi}^2\sin\varphi=0$, $\ddot{x}\cos\varphi+\frac{2}{3}\ell\ddot{\varphi}+g\sin\varphi=0$.

Вариант 3

В условиях варианта 1 решить задачу, если стержень AB заменен математическим маятником весом Q, длиной ℓ.

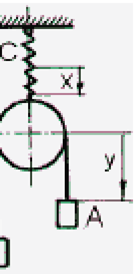
Ответ: $(3P+2Q)\ddot{x}+2Q\ell\ddot{\varphi}\cos\varphi-2Q\ell\dot{\varphi}^2\sin\varphi=0$,
$\ddot{\varphi}\ell+\ddot{x}\cos\varphi+g\sin\varphi=0$.

Вариант 4

В условиях варианта 1 решить задачу, если цилиндр заменен ползуном, а стержень AB заменен математическим маятником весом Q, длиной ℓ.

Ответ: $(P+Q)\ddot{x}+Q\ell\ddot{\varphi}\cos\varphi-Q\ell\dot{\varphi}^2\sin\varphi=0$, $\ddot{\varphi}\ell+\ddot{x}\cos\varphi+g\sin\varphi=0$.

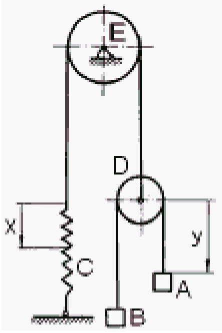
Вариант 5



Через блок перекинута нить с двумя грузами A и B массой m_1 и m_2 на концах. Блок подвешен к вертикальной пружине жесткостью c. Выбирая за обобщенные координаты удлинение x пружины от положения статического равновесия и расстояние y груза A от оси блока, составить дифференциальные уравнения движения системы. Массой нити и блока пренебречь.

Ответ: $(m_1+m_2)\ddot{x}+(m_1-m_2)\ddot{y}=-cx+(m_1+m_2)g$,
$(m_1-m_2)\ddot{x}+(m_1+m_2)\ddot{y}=(m_1-m_2)g$.

Вариант 6

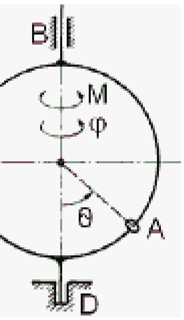


Через неподвижный блок E перекинута нить, один конец которой прикреплен к пружин жесткостью c, а второй – прикреплен к оси подвижного блока D. Через блок D также перекинута нить с двумя грузами A и B массой m_1 и m_2 на концах. Пренебрегая массой нити и блоков, составить дифференциальные уравнения движения системы, выбирая за обобщенные координаты удлинение x пружины от положения статического равновесия и расстояние y груза A от оси блока D.

Ответ: $(m_1 - m_2)\,\ddot{y} + (m_1 + m_2)\,\ddot{x} = -cx + (m_1 + m_2)\,g$,

$$(m_1 + m_2)\,\ddot{y} + (m_1 - m_2)\,\ddot{x} = (m_1 - m_2)\,g.$$

Вариант 7

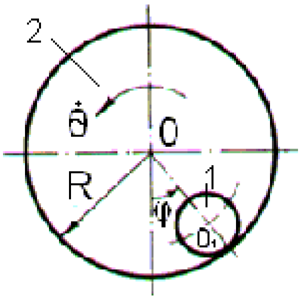


Колечко A массой m движется по проволочной окружности радиусом R, которая вращается вокруг вертикального диаметра BD под действием постоянного момента M. Момент инерции проволочной окружности относительно оси вращения равен J. Составить дифференциальные уравнения движения системы, выбирая за обобщенные координаты угол φ поворота окружности и угол θ , определяющий положение колечка A на окружности.

Ответ: $R^2\,\ddot{\theta} - R^2\,\dot{\varphi}^2 \sin\theta\cos\theta + g\,R\sin\theta = 0$,

$$J\,\ddot{\varphi} + m\,R^2\ddot{\varphi}\sin^2\theta + m\,R^2\,\dot{\varphi}\,\dot{\theta}\sin 2\theta = M.$$

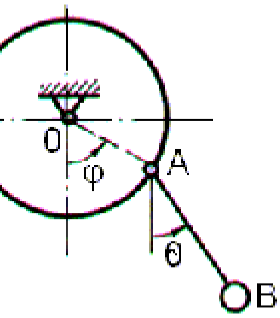
Вариант 8



Однородный сплошной цилиндр 1 массой m, радиусом r перекатывается без скольжения по внутренней поверхности полого цилиндра 2 массой M, радиусом R, который может поворачиваться около своей горизонтальной оси 0. Составить уравнения движения системы, выбирая за обобщенные координаты угол θ поворота полого цилиндра 2 и угол φ отклонения линии центров 00_1, от вертикали.

Ответ: $2MR\ddot{\theta} - mR\ddot{\theta} - m(R-r)\ddot{\varphi} = 0$, $3\ddot{\varphi}(R-r) - \ddot{\theta}R + 2g\sin\varphi = 0$

Вариант 9

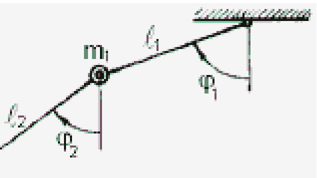


Однородный диск радиусом R, весом 4 P, поворачиваясь вокруг своей горизонтальной оси 0, приводит в движение математический маятник AB длиной ℓ, весом P. Составить уравнения движения системы, выбирая за обобщенные координаты угол φ поворота диска и угол θ отклонения нити AB от вертикали.

Ответ: $3R\ddot{\varphi} + \ell\ddot{\theta}\cos(\varphi-\theta) + \ell\dot{\theta}^2\sin(\varphi-\theta) + g\sin\varphi = 0$,

$$\ell\ddot{\theta} + R\ddot{\varphi}\cos(\varphi-\theta) - R\dot{\varphi}^2\sin(\varphi-\theta) + g\sin\theta = 0.$$

Вариант 10



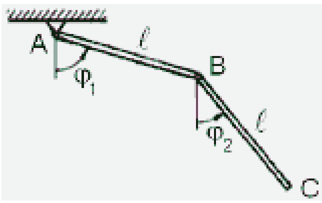
Составить дифференциальные уравнения движения двойного математического маятника, у которого $m_2 = 2\,m_1$. Маятник движется в вертикальной плоскости. За обобщенные координаты принять углы φ_1 и φ_2 отклонения маятников от

вертикали.

Ответ: $3\ell_1\ddot{\varphi}_1 + 2\ell_2\cos(\varphi_2-\varphi_1)\ddot{\varphi}_2 - 2\ell_2\dot{\varphi}_2^2\sin(\varphi_2-\varphi_1) + 3g\sin\varphi_1 = 0$,

$$\ell_2\ddot{\varphi}_2 + \ell_1\ddot{\varphi}_1\cos(\varphi_2-\varphi_1) + \ell_1\dot{\varphi}_1^2\sin(\varphi_2-\varphi_1) + g\sin\varphi_2 = 0.$$

Вариант 11

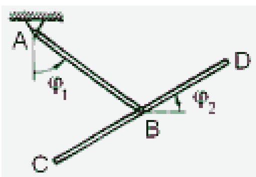


Составить дифференциальные уравнения движения двойного физического маятника, состоящего из двух однородных тонких стержней массой m, длиной ℓ. Оси A и B параллельны. В качестве обобщенных координат принять углы φ_1 и φ_2 отклонения стержней от вертикали.

Ответ: $8\ell\ddot{\varphi}_1 + 3\ell\ddot{\varphi}_2\cos(\varphi_1-\varphi_2) - 3\ell\dot{\varphi}_2^2\sin(\varphi_1-\varphi_2) + 9g\sin\varphi_1 = 0$,

$$2\ell\ddot{\varphi}_2 + 3\ell\ddot{\varphi}_1\cos(\varphi_1-\varphi_2) + 3\ell\dot{\varphi}_1^2\sin(\varphi_1-\varphi_2) + 3g\sin\varphi_2 = 0.$$

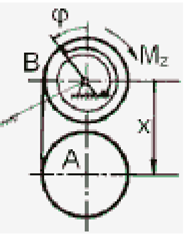
Вариант 12



Составить дифференциальные уравнения движения системы, состоящей из однородного тонкого стержня AB массой m, длиной ℓ, шарнирно закрепленного в точке A, и такого же стержня CD, шарнирно соединенного в своем центре тяжести с концом B первого стержня. Движение стержней происходит в вертикальной плоскости. В качестве обобщенных координат принять углы φ_1 и φ_2 поворота стержней.

Ответ: $8\ell\ddot{\varphi}_1 + 9g\sin\varphi_1 = 0, \quad \ddot{\varphi}_2 = 0$.

Вариант 13

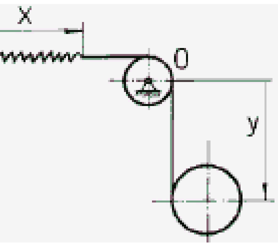


Однородный сплошной цилиндр A весом P, радиусом r, падая под действием силы тяжести, приводит в движение с помощью гибкой нити блок B того же веса и радиуса. Спиральная пружина с коэффициентом жесткости c при повороте цилиндра B вокруг горизонтальной оси z на угол φ создает момент сил упругости $M_z = -c\varphi$. Принимая за обобщенные координаты угол j и абсциссу x

центра цилиндра A, составить дифференциальные уравнения движения системы. Весом нити и пружины пренебречь.

Ответ: $-Pr\ddot{x} + 2Pr^2\ddot{\varphi} = 2gc\varphi, \quad 3\ddot{x} - r\ddot{\varphi} = 2g$.

Вариант 14



Однородный сплошной цилиндр весом P, радиусом r падает, разматывая нить, перекинутую через неподвижный блок и прикрепленную к пружине жесткостью c. Составить дифференциальные уравнения движения системы, принимая за обобщенные координаты длину пружины x и расстояние y центра тяжести цилиндра от оси неподвижного блока по вертикали.

Длина пружины в недеформированном состоянии равна ℓ. Массой блока и пружины пренебречь.

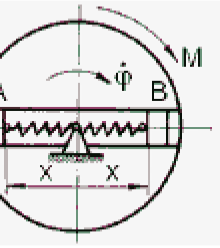
Ответ: $3\ddot{y} - \ddot{x} = 2g; \quad P\ddot{x} - P\ddot{y} + 2cg(x - \ell) = 0$.

Вариант 15

В условиях варианта 14 решить задачу, учитывая массу блока 0. Считать блок 0 однородным сплошным диском весом P, радиусом r.

Ответ: $3\ddot{y} - \ddot{x} = 2g; \quad 2P\ddot{x} - P\ddot{y} = -2cg(x - \ell)$.

Вариант 16

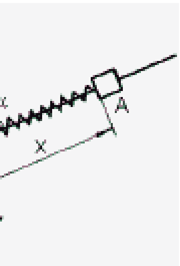


Сплошной однородный диск весом P, радиусом r вращается в горизонтальной плоскости под действием постоянного вращающего момента M. В центре тяжести диска прикреплены две одинаковые пружины жесткостью c, на концах которых находятся точечные грузы A и B весом Q каждый. Составить дифференциальные

уравнения движения системы, принимая за обобщенные координаты угол φ поворота диска и длину пружины x. Длина каждой пружины в недеформированном состоянии равна ℓ. Массой пружины и трением пренебречь.

Ответ: $$\frac{1}{2}P\,r^2\,\ddot{\varphi} + 2\,Q\,x^2\,\ddot{\varphi} + 4\,Q\,x\,\dot{x}\,\dot{\varphi} = M\,g,$$
$$2\,Q\,\ddot{x} - 2\,Q\,x\,\dot{\varphi}^2 = -2\,c\,g\,(x-\ell).$$

Вариант 17

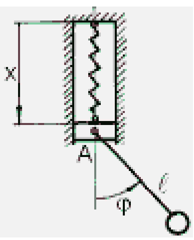


Вертикальный вал с жестко приделанным к нему под углом α стержнем вращается вокруг вертикальной оси под действием постоянного момента M. Вдоль стержня скользит груз A весом P, прикрепленный к свободному концу пружины жесткостью c. Второй конец пружины закреплен на валу в точке 0. Составить дифференциальные уравнения движения системы, считая, что момент инерции вала со стержнем относительно оси вращения

равен J. Длина недеформированной пружины равна ℓ. За обобщенные координаты принять длину пружины x и угол φ поворота вала. Массой пружины и трением пренебречь.

Ответ: $$J\,\ddot{\varphi} + \frac{P}{g}x^2\,\ddot{\varphi}\sin^2\alpha + 2\frac{P}{g}x\,\dot{x}\,\dot{\varphi}\sin^2\alpha = M,$$
$$\frac{P}{g}\ddot{x} - \frac{P}{g}x\,\dot{\varphi}^2\,\sin^2\alpha = -P\cos\alpha - c(x-\ell).$$

Вариант 18



Математический маятник массой m, длиной ℓ прикреплен к ползуну A, связанному с концом вертикальной пружины жесткостью c. Пренебрегая весом пружины и ползуна и его трением о направляющие, составить дифференциальные уравнения движения маятника.

За обобщенные координаты принять длину пружины x и угол φ отклонения маятника от вертикали. Длина пружины в недеформированном состоянии равна λ .

Ответ: $m\ddot{x} - m\ell\ddot{\varphi}\sin\varphi - m\ell\dot{\varphi}^2\cos\varphi = -c(x-\lambda) + mg$,
$\ell\ddot{\varphi} + \ddot{x}\sin\varphi = -g\sin\varphi$.

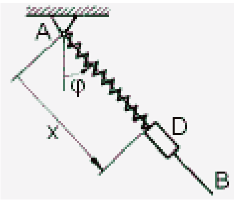
Вариант 19

В условиях варианта 18 решить задачу, если математический маятник заменен тонким однородным стержнем весом P, длиной ℓ.

Ответ: $2P\ddot{x} - P\ell\ddot{\varphi}\sin\varphi - P\ell\dot{\varphi}^2\cos\varphi = 2Pg - 2cg(x-\lambda)$,

$$2\ell\ddot{\varphi} - 3\ddot{x}\sin\varphi + 3g\sin\varphi = 0.$$

Вариант 20



На тонкий однородный стержень AB весом P, длиной ℓ, поворачивающийся в вертикальной плоскости вокруг A, навита пружина жесткостью c, на конце которой прикреплен груз весом Q. Второй конец пружины закреплен в точке A. Составить дифференциальные уравнения движения системы, принимая за обобщенные координаты угол φ отклонение стержня от вертикали

и длину x пружины. Длина пружины в недеформированном состоянии равна λ . Вес пружины и трение не учитывать.

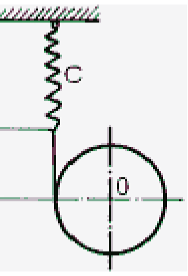
Ответ: $\frac{1}{3}P\ell^2\ddot{\varphi} + Qx^2\ddot{\varphi} + 2Qx\dot{x}\dot{\varphi} = Qgx\sin\varphi$,
$Q\ddot{x} - Qx\dot{\varphi}^2 = Qg\cos\varphi - cg(x-\lambda)$.

Вариант 21

В условиях варианта 20 решить задачу, если стержень вращается вокруг точки A в горизонтальной плоскости под действием постоянного вращающего момента M.

Ответ: $\frac{1}{3}P\ell^2\ddot{\varphi} + Qx^2\ddot{\varphi} + 2Qx\dot{x}\dot{\varphi} = M$, $Q\ddot{x} - Qx\dot{\varphi}^2 = -cg(x-\lambda)$.

Вариант 22



Однородный сплошной цилиндр весом P, радиусом r падает, разматывая нить, второй конец A которой прикреплен к вертикальной пружине жесткостью c. Составить дифференциальные уравнения движения системы, принимая за обобщенные координаты длину x_1 пружины и расстояние x_2 от точки A до центра тяжести цилиндра.

Длина пружины в недеформированном состоянии равна ℓ. Массой пружины пренебречь.

Ответ: $3\ddot{x}_2 + 2\ddot{x}_1 = 2g$, $P\ddot{x}_1 + P\ddot{x}_2 + cg(x_1 - \ell) = Pg$.

Варианты 23–30

Один конец невесомой нерастяжимой нити прикреплен к вертикальной пружине жесткостью c, второй конец – к телу A .Телом A могут быть следующие объекты (табл. 4.3):

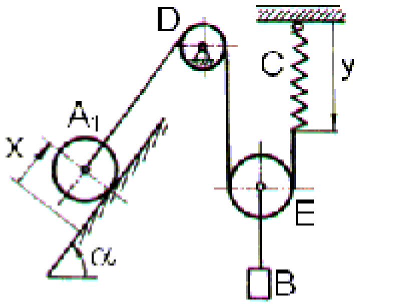
A_1 – сплошной однородный цилиндр весом P, радиусом r (вар. 23–26);

A_2 – ступенчатый каток весом P с моментом инерции J относительно оси, проходящей через центр тяжести, R = 2 r (вар. 27–28);

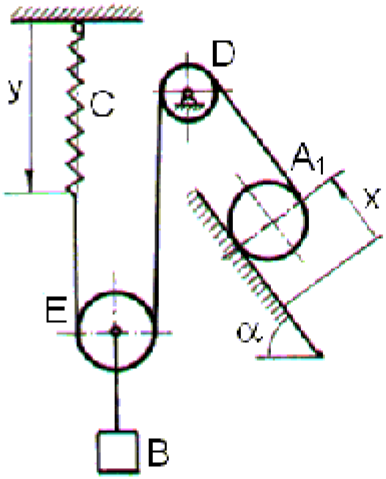
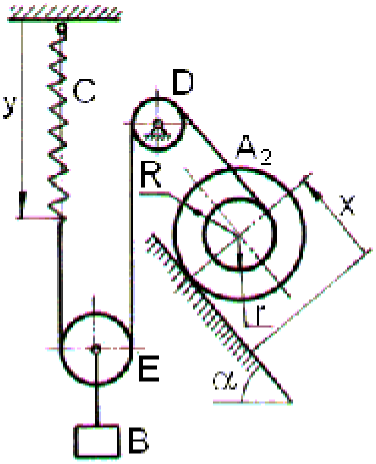
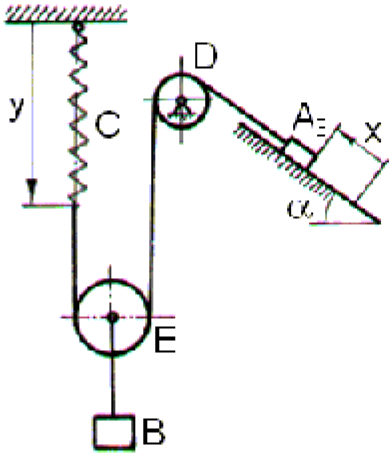
A_3 – груз весом P (вар. 29–30).

Нить переброшена через неподвижный блок D и охватывает снизу подвижный блок E. К оси блока E прикреплен груз B весом Q. Пренебрегая массой блоков и пружины, составить дифференциальные уравнения движения системы. За обобщенные координаты принять длину пружины y и расстояние x, проходимое центром тяжести тела A. Длина пружины в недеформированном состоянии равна ℓ. Считать, что цилиндр (каток) катится без проскальзывания.

Таблица 4.3

№ вар.	Схема	Дано α	Ответ
23		0°	$6P\ddot{x} + Q(\ddot{x} + \ddot{y}) = 2Qg,$ $Q(\ddot{x} + \ddot{y}) = 2Qg - 4cg(y - \ell)$
24		30°	$6P\ddot{x} + Q(\ddot{x} + \ddot{y}) = 2(Q - P)g,$ $Q(\ddot{x} + \ddot{y}) = 2Qg - 4cg(y - \ell)$

Окончание табл. 4.3

№ вар.	Схема	Дано α	Ответ
25		0°	$3P\ddot{x}+2Q\ddot{x}+Q\ddot{y}=2Qg,$ $Q(2\ddot{x}+\ddot{y})=2Qg-4cg(y-\ell)$
26		30°	$3P\ddot{y}+2Q\ddot{x}+Q\ddot{y}=2Qg-Pg,$ $Q\ddot{y}+2Q\ddot{x}=2Qg-4cg(y-\ell)$
27		0°	$\frac{4J}{r^2}\ddot{x}+16P\ddot{x}+9Q\ddot{x}+6Q\ddot{y}=12Qg,$ $2Q\ddot{y}+3Q\ddot{x}=4Qg-8cg(y-\ell)$
28		30°	$\frac{4J}{r^2}\ddot{x}+16P\ddot{x}-9Q\ddot{x}+6Q\ddot{y}=12Qg-8Pg,$ $2Q\ddot{y}+3Q\ddot{x}=4Qg-8cg(y-\ell)$
29		0°	$4P\ddot{x}+Q(\ddot{x}+\ddot{y})=2Qg,$ $Q\ddot{y}+Q\ddot{x}=2Qg-4cg(y-\ell)$
30		30°	$4P\ddot{x}+Q(\ddot{x}+\ddot{y})=2(Q-P)g,$ $Q\ddot{x}+Q\ddot{y}=2Qg-4cg(y-\ell)$

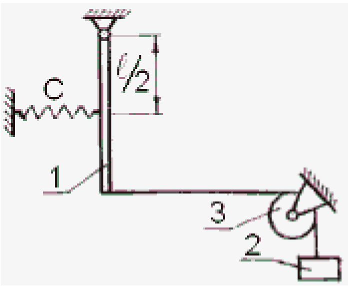
Задача № 28. Варианты 1–30

Определить период малых колебаний механической системы с одной степенью свободы, изображенной на чертеже. Плоскость чертежа является вертикальной плоскостью. В изображенном положении система находится в устойчивом равновесии, пружина имеет соответствующую статическую деформацию. Коэффициент жесткости пружины равен с. Цифрами на чертеже обозначено:

1 – однородный тонкий стержень массой m_1, длиной ℓ;
2 – груз массой m_2;
3 – блок, масса которого не учитывается;
4 – однородный сплошной диск массой m_4, радиусом R;
5 – обойма, масса которой не учитывается;
6 – блок массой m_6, радиусом R, масса равномерно распределена по ободу блока;
7 – ступенчатый диск массой m_7, большой радиус диска равен R, малый – r = $\frac{1}{2}$ r, радиус инерции относительно центральной оси – ρ = r.

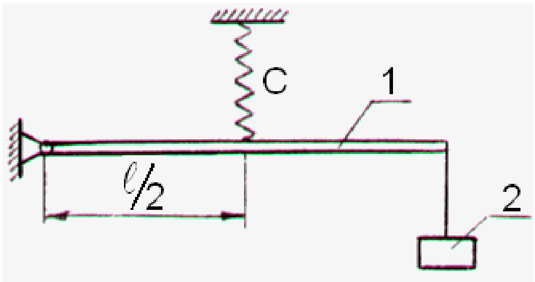
Массой нитей и пружины, а также сопротивлением движению пренебречь. Качение дисков по плоскости происходит без проскальзывания.

№ 28–1



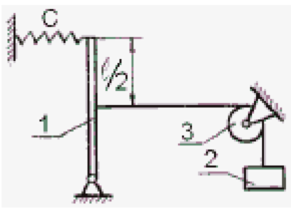
Ответ: $T = 4\pi\sqrt{\frac{(m_1 + 3m_2)}{3(c\ell + 2m_1 g)}\ell}$.

№ 28–2

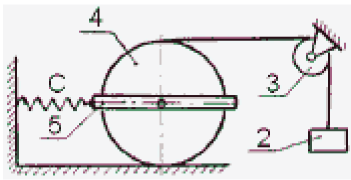


Ответ: $T = 4\pi\sqrt{\frac{m_1 + 3m_2}{3c}}$.

№ 28–3

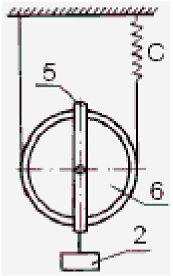


№ 28–4



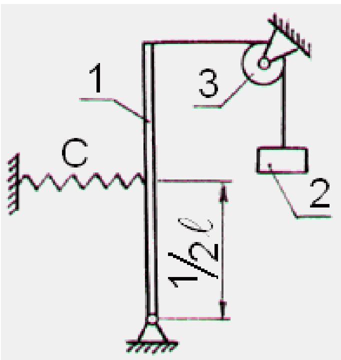
Ответ: $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{(4m_1 + 3m_2)}{6(2c\ell + m_1 g)}\ell}$.

№ 28–5



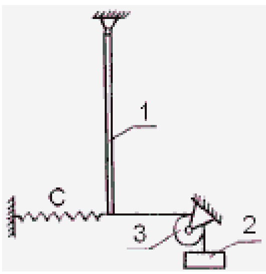
Ответ: $T = \pi\sqrt{\dfrac{m_2 + 2m_6}{c}}$.

№ 28–7



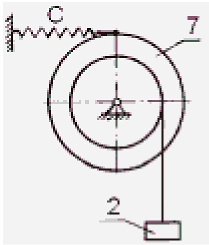
Ответ: $T = 4\pi\sqrt{\dfrac{(m_1 + 3m_2)\ell}{3(c\ell + 2m_1 g)}}$.

№ 28–9



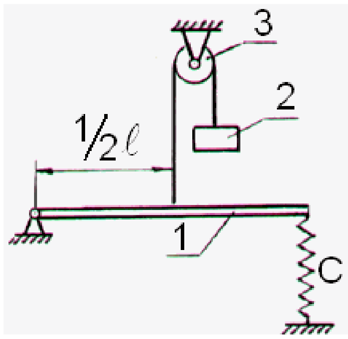
Ответ: $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{8m_2 + 3m_4}{2c}}$.

№ 28–6



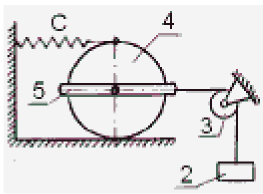
Ответ: $T = \pi\sqrt{\dfrac{m_2 + m_7}{c}}$.

№ 28–8



Ответ: $T = \pi\sqrt{\dfrac{4m_1 + 3m_2}{3c}}$.

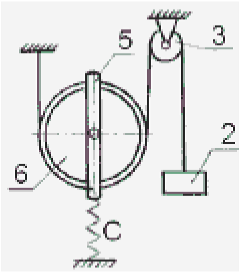
№ 28–10



Ответ: $$T = 2\pi\sqrt{\frac{2(m_1+3m_2)\ell}{3(2c\ell+2m_1g)}}.$$

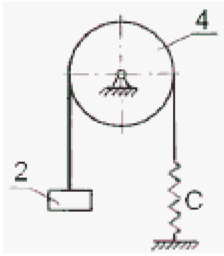
Ответ: $$T = \pi\sqrt{\frac{2m_2+3m_4}{2c}}.$$

№ 28–11



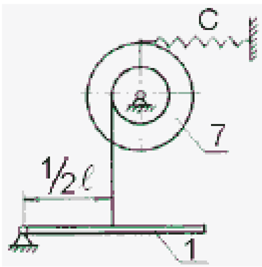
Ответ: $$T = 2\pi\sqrt{\frac{4m_2+2m_6}{c}}.$$

№ 28–12



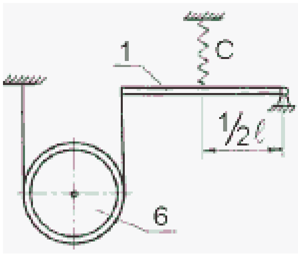
Ответ: $$T = 2\pi\sqrt{\frac{2m_2+m_4}{2c}}.$$

№ 28–13



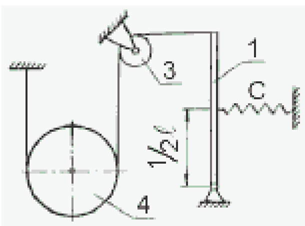
Ответ: $$T = \pi\sqrt{\frac{4m_1+3m_7}{3c}}.$$

№ 28–14



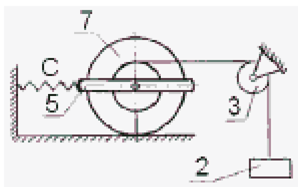
Ответ: $$T = 2\pi\sqrt{\frac{2(2m_1+3m_6)}{3c}}.$$

№ 28–15



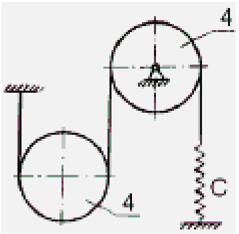
Ответ: $$T = 2\pi\sqrt{\frac{(8m_1+9m_4)\ell}{6(c\ell+2m_1g)}}.$$

№ 28–16



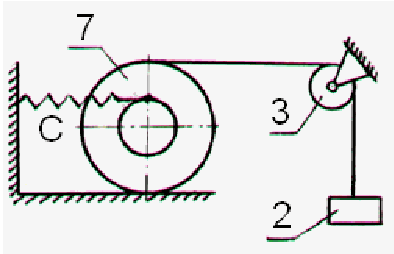
Ответ: $$T = \pi\sqrt{\frac{9m_2+5m_7}{c}}.$$

№ 28–17



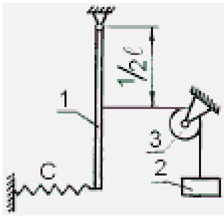
Ответ: $T = \pi\sqrt{\dfrac{7\,m_4}{2\,c}}$.

№ 28–18



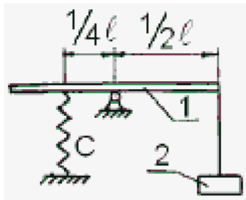
Ответ: $T = \dfrac{2}{3}\pi\sqrt{\dfrac{16\,m_2 + 5\,m_7}{c}}$.

№ 28–19



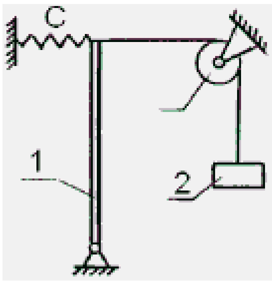
Ответ: $T = 2\,\pi\sqrt{\dfrac{(4\,m_1 + 3\,m_2)\,\ell}{6\,(2\,c\,\ell + m_1\,g)}}$.

№ 28–20



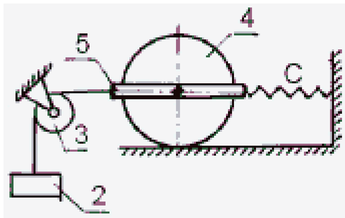
Ответ: $T = 4\,\pi\sqrt{\dfrac{m_1 + 3\,m_2}{3\,c}}$.

№ 28–21



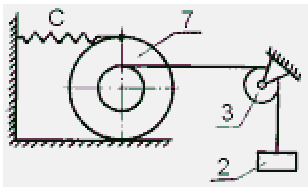
Ответ: $T = 2\,\pi\sqrt{\dfrac{2\,(m_1 + 3\,m_2)\,\ell}{3\,(2\,c\,\ell + m_1\,g)}}$.

№ 28–22

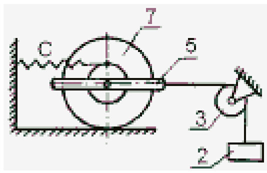


Ответ: $T = 2\,\pi\sqrt{\dfrac{2\,m_2 + 3\,m_4}{2\,c}}$.

№ 28–23

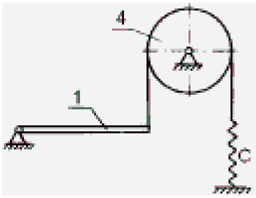


№ 28–24



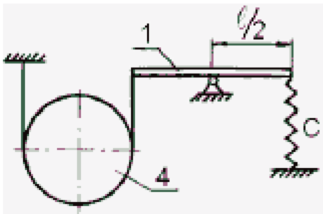
Ответ: $T = \frac{1}{2}\pi\sqrt{\frac{9m_2 + 5m_7}{c}}$.

№ 28–25



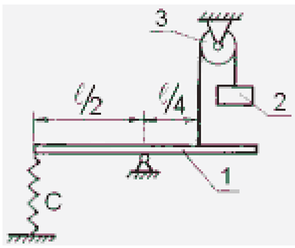
Ответ: $T = 2\pi\sqrt{\frac{2m_1 + 3m_4}{6c}}$.

№ 28–27



Ответ: $T = \pi\sqrt{\frac{8m_1 + 9m_4}{6c}}$.

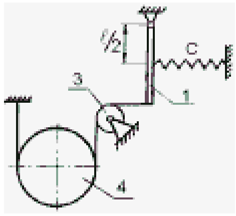
№ 28–29



Ответ: $T = \pi\sqrt{\frac{4m_1 + 3m_2}{3c}}$.

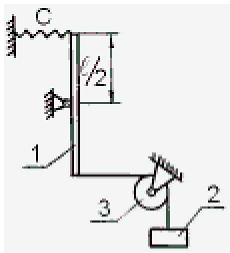
Ответ: $T = \frac{2}{3}\pi\sqrt{\frac{4m_2 + 5m_7}{c}}$.

№ 28–26



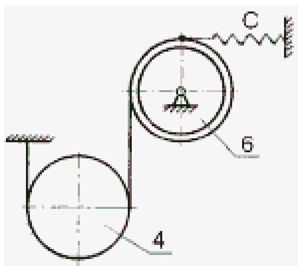
Ответ: $T = 2\pi\sqrt{\frac{(8m_1 + 9m_4)\,\ell}{6(c\,\ell + 2m_1 g)}}$.

№ 28–28



Ответ: $T = 2\pi\sqrt{\frac{m_1 + 3m_2}{3c}}$.

№ 28–30



Ответ: $T = \pi\sqrt{\frac{3m_4 + 8m_6)}{2c}}$.

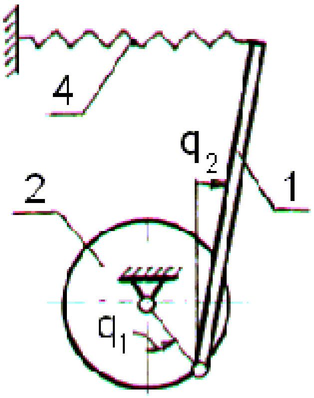
Задача № 29. Варианты 1–30

Система (см. схему в табл. 4.4) совершает малые колебания в вертикальной плоскости, совпадающей с плоскостью чертежа. Цифрами обозначены:

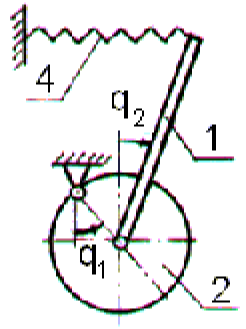
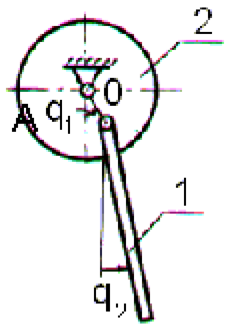
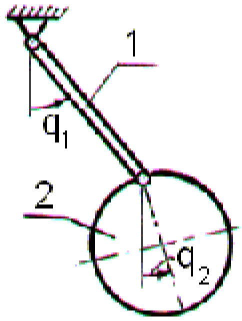
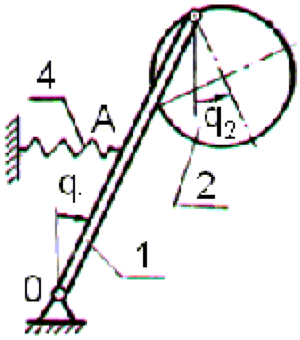
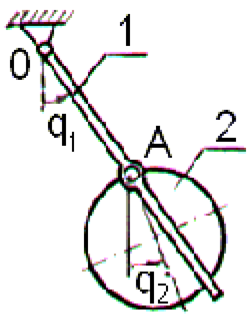
1 – тонкий однородный стержень длиной ℓ, массой m_1;
2 – однородный сплошной диск радиусом r, массой m_2;
3 – ползун массой m_3;
4 – пружина жесткостью с, масса пружины не учитывается;
5 – обойма, масса которой не учитывается.

В положении устойчивого равновесия системы обобщенные координаты q_1 и q_2 равны нулю. Определить частоты K_1 и K_2, и отношения амплитуд $\beta_1 = \dfrac{A_1^{(1)}}{A_2^{(1)}}$ и $\beta_2 = \dfrac{A_1^{(2)}}{A_2^{(2)}}$ главных колебаний системы.

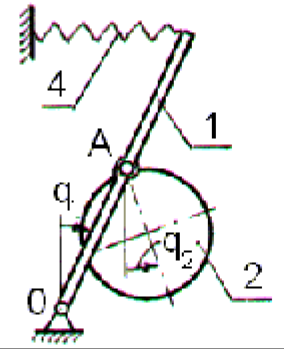
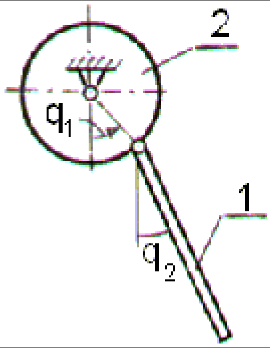
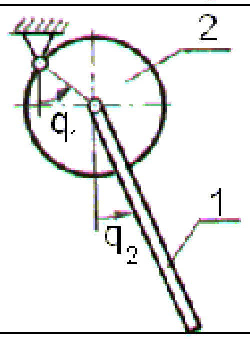
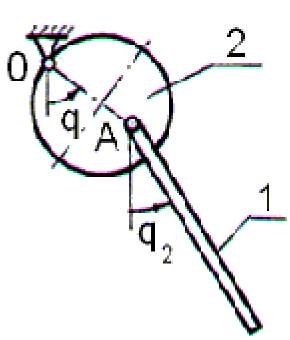
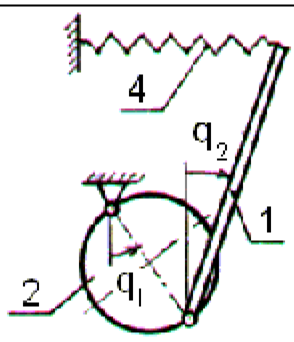
Таблица 4.4

№ вар.	Схема	Дополнительные данные	Ответ
1		$\ell = 6r$; $m_2 = 2m_1$; $c = \dfrac{m_1 g}{6r}$	$K_{1,2} = \sqrt{\dfrac{14 \pm \sqrt{46}}{30}\dfrac{g}{r}}$; $\beta_1 = \dfrac{12 + 3\sqrt{46}}{7 - 2\sqrt{46}}$; $\beta_2 = \dfrac{12 - 3\sqrt{46}}{7 + 2\sqrt{46}}$

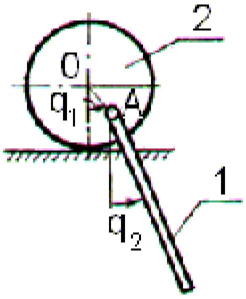
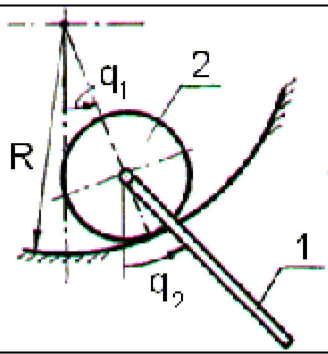
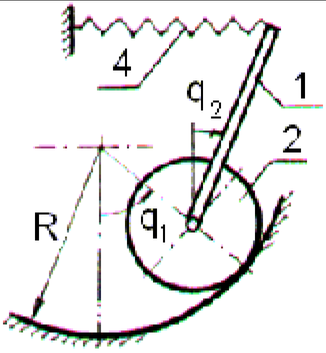
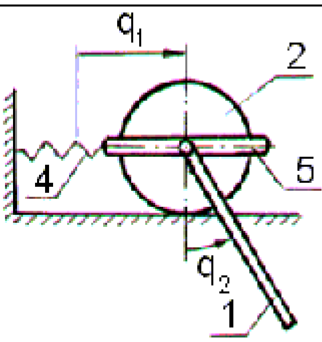
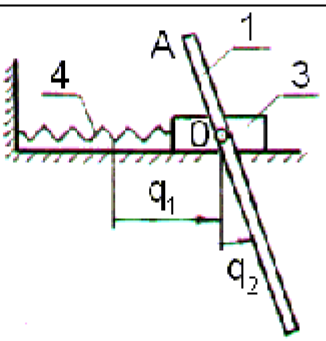
Продолжение табл. 4.4

№ вар.	Схема	Дополнительные данные	Ответ
2		$\ell = 6\,r$; $m_2 = 2\,m_1$; $c = \dfrac{m_1\,g}{2\,r}$	$K_{1,2} = \sqrt{\dfrac{28 \pm \sqrt{30}}{26}\,\dfrac{g}{r}}$; $\beta_1 = \dfrac{6+\sqrt{30}}{-21-4\sqrt{30}}$; $\beta_2 = \dfrac{6-\sqrt{30}}{-21+4\sqrt{30}}$
3		$0A = \dfrac{1}{2}\,r$; $\ell = 6\,r$; $m_2 = 2\,m_1$	$K_{1,2} = \sqrt{\dfrac{13 \pm \sqrt{33}}{34}\,\dfrac{g}{r}}$; $\beta_1 = \dfrac{6(13+\sqrt{33})}{3-5\sqrt{33}}$; $\beta_2 = \dfrac{6(13-\sqrt{33})}{3+5\sqrt{33}}$
4		$m_1 = 3\,m_2$; $\ell = 2\,r$;	$K_{1,2} = \sqrt{\dfrac{31 \pm \sqrt{321}}{32}\,\dfrac{g}{r}}$; $\beta_1 = \dfrac{-31-\sqrt{321}}{4(11+\sqrt{321})}$; $\beta_2 = \dfrac{-31+\sqrt{321}}{4(11-\sqrt{321})}$
5		$0A = \dfrac{\ell}{2}$; $m_1 = 2\,m_2$; $\ell = 3\,r$; $c = \dfrac{16\,m_2\,g}{\ell}$	$K_{1,2} = \sqrt{\dfrac{8 \pm 2\sqrt{7}}{9}\,\dfrac{g}{r}}$; $\beta_1 = \dfrac{-4+\sqrt{7}}{11+5\sqrt{7}}$; $\beta_2 = \dfrac{4-\sqrt{7}}{-11+5\sqrt{7}}$
6		$0A = \dfrac{\ell}{2}$; $m_2 = 2\,m_1$; $\ell = 6\,r$	$K_{1,2} = \sqrt{\dfrac{29 \pm \sqrt{409}}{36}\,\dfrac{g}{r}}$; $\beta_1 = -\dfrac{29+\sqrt{409}}{91+5\sqrt{409}}$; $\beta_2 = \dfrac{29-\sqrt{409}}{-91+5\sqrt{409}}$

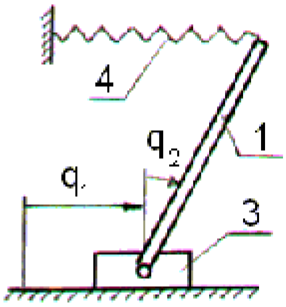
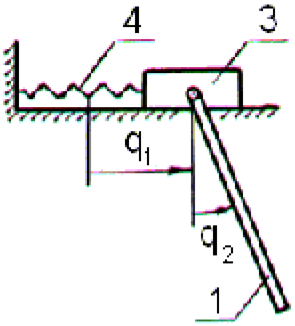
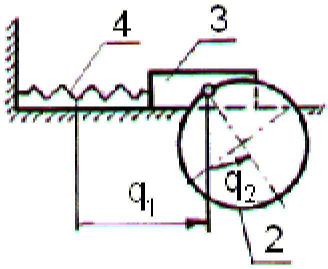
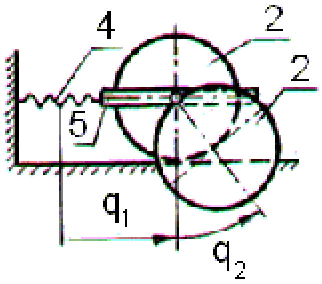
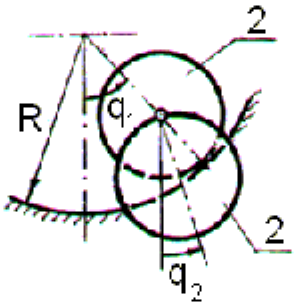
Продолжение табл. 4.4

№ вар.	Схема	Дополнительные данные	Ответ
7		$0A = \dfrac{\ell}{2}$; $m_2 = 2\,m_1$; $\ell = 6\,r$; $c = \dfrac{m_1 g}{3\,r}$	$K_{1,\,2} = \sqrt{\dfrac{23 \pm \sqrt{385}}{36}\,\dfrac{g}{r}}$; $\beta_1 = \dfrac{23 + \sqrt{385}}{-97 - 5\sqrt{385}}$; $\beta_2 = \dfrac{23 - \sqrt{385}}{-97 + 5\sqrt{385}}$
8		$m_2 = 2\,m_1$; $\ell = 6\,r$;	$K_1 = \sqrt{\dfrac{g}{r}}$; $K_2 = \sqrt{\dfrac{g}{5r}}$; $\beta_1 = -3$; $\beta_2 = 1$
9		$m_2 = 2\,m_1$; $\ell = 6\,r$;	$K_1 = \sqrt{\dfrac{g}{r}}$; $K_2 = \sqrt{\dfrac{3}{13}\,\dfrac{g}{r}}$; $\beta_1 = -3$; $\beta_2 = \dfrac{1}{3}$
10		$0A = \dfrac{3}{2}r$; $m_2 = m_1$; $\ell = 3\,r$	$K_{1,\,2} = \sqrt{\dfrac{35 \pm \sqrt{565}}{33}\,\dfrac{g}{r}}$; $\beta_1 = -\dfrac{3(35 + \sqrt{565})}{5(13 + \sqrt{565})}$; $\beta_2 = \dfrac{3(35 - \sqrt{565})}{-5(13 - \sqrt{565})}$
11		$m_2 = 2\,m_1$; $\ell = 6\,r$; $c = \dfrac{m_1 g}{4\,r}$	$K_1 = \sqrt{\dfrac{7\,g}{8\,r}}$; $K_2 = \sqrt{\dfrac{g}{2\,r}}$; $\beta_1 = -2$; $\beta_2 = 0$

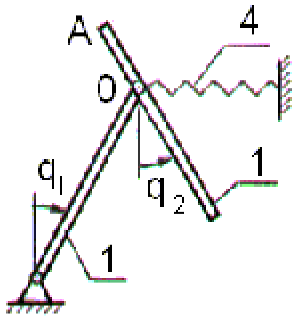
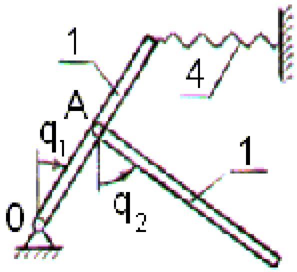
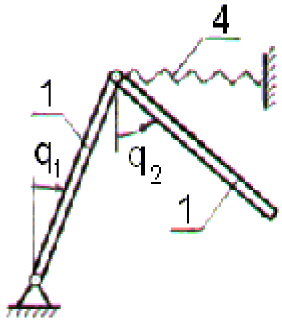
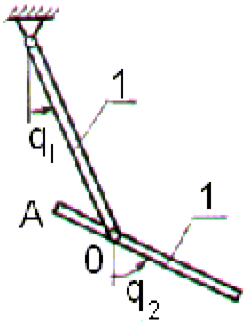
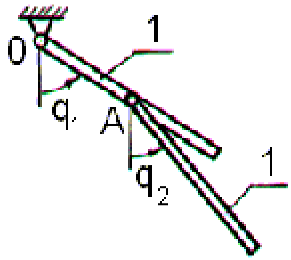
Продолжение табл. 4.4

№ вар.	Схема	Дополнительные данные	Ответ
12		$0A = \frac{r}{2}$; $m_1 = 2\,m_2$; $\ell\ = 6\,r$	$K_{1,2} = \sqrt{\frac{6 \pm \sqrt{10}}{13}\frac{g}{r}}$; $\beta_1 = \frac{3(6+\sqrt{10})}{1-2\sqrt{10}}$; $\beta_2 = \frac{3(6-\sqrt{10})}{1+2\sqrt{10}}$
13		$R = 3\,r$; $m_2 = 2\,m_1$; $\ell\ = 6\,r$	$K_{1,2} = \sqrt{\frac{10 \pm \sqrt{22}}{26}\frac{g}{r}}$; $\beta_1 = \frac{-3(10+\sqrt{22})}{2+8\sqrt{22}}$; $\beta_1 = \frac{3(10-\sqrt{22})}{-2+8\sqrt{22}}$
14		$m_2 = 2\,m_1$; $R = 3\,r$; $\ell\ = 6\,r$; $c = \frac{m_1\,g}{4\,r}$	$K_1 = \sqrt{\frac{g}{2\,r}}$; $K_2 = \sqrt{\frac{11g}{26\,r}}$; $\beta_1 = 0$; $\beta_2 = -2$
15		$m_2 = 2\,m_1$; $c = \frac{m_1\,g}{\ell}$	$K_{1,2} = \sqrt{\frac{14 \pm \sqrt{118}}{13}\frac{g}{r}}$; $\beta_1 = \frac{-(14+\sqrt{118})\ell}{86+8\sqrt{118}}$; $\beta_2 = \frac{(14-\sqrt{118})\ell}{-86+8\sqrt{118}}$
16		$m_3 = 2\,m_1$; $0A = \frac{\ell}{3}$; $c = \frac{2\,m_1\,g}{\ell}$	$K_{1,2} = \sqrt{\frac{13 \pm \sqrt{37}}{11}\frac{g}{r}}$; $\beta_1 = \frac{-(13+\sqrt{37})\ell}{102+18\sqrt{37}}$; $\beta_2 = \frac{(13-\sqrt{37})\ell}{-102+18\sqrt{37}}$

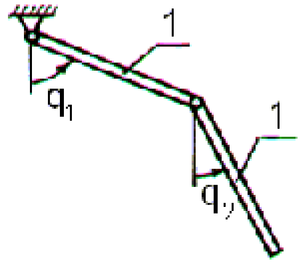
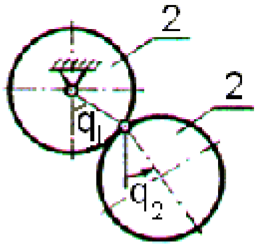
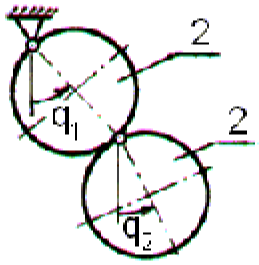
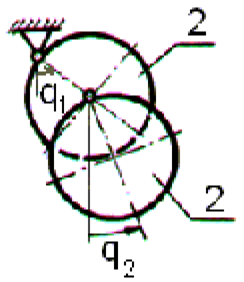
Продолжение табл. 4.4

№ вар.	Схема	Дополнительные данные	Ответ
17		$m_3 = 2\,m_1$; $c = \dfrac{3\,m_1\,g}{2\,\ell}$	$K_{1,2} = \sqrt{\dfrac{4 \pm \sqrt{7}}{3}\,\dfrac{g}{r}}$; $\beta_1 = \dfrac{(5-\sqrt{7})\ell}{15+6\sqrt{7}}$; $\beta_2 = \dfrac{(5+\sqrt{7})\ell}{15-6\sqrt{7}}$
18		$m_3 = 2\,m_1$; $c = \dfrac{3\,m_1\,g}{4}$	$K_{1,2} = \sqrt{\dfrac{4 \pm \sqrt{7}}{3}\,\dfrac{g}{r}}$; $\beta_1 = \dfrac{-(4+\sqrt{7})\ell}{15+6\sqrt{7}}$; $\beta_2 = \dfrac{(4-\sqrt{7})\ell}{-15+6\sqrt{7}}$
19		$m_3 = 2\,m_2$; $c = \dfrac{m_2\,g}{r}$	$K_1 = \sqrt{\dfrac{g}{r}}$; $K_2 = \sqrt{\dfrac{2g}{7r}}$; $\beta_1 = -\dfrac{r}{2}$; $\beta_2 = 2r$
20		$c = \dfrac{m_2\,g}{r}$	$K_{1,2} = \sqrt{\dfrac{8 \pm 2\sqrt{5}}{11}\,\dfrac{g}{r}}$; $\beta_1 = \dfrac{-2(4-\sqrt{5})r}{9+5\sqrt{5}}$; $\beta_1 = \dfrac{2(4-\sqrt{5})r}{5\sqrt{5}-9}$
21		$R = 3\,r$	$K_{1,2} = \sqrt{\dfrac{8 \pm 2\sqrt{5}}{11}\,\dfrac{g}{r}}$; $\beta_1 = \dfrac{-(4+\sqrt{5})}{9+5\sqrt{5}}$; $\beta_1 = \dfrac{4-\sqrt{5}}{5\sqrt{5}-9}$

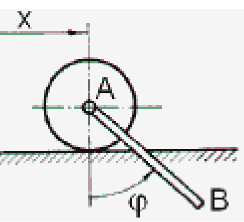
Продолжение табл. 4.4

№ вар.	Схема	Дополнительные данные	Ответ
22		$0A = \frac{\ell}{3}$; $c = \frac{2 m_1 g}{\ell}$	$K_{1,2} = \sqrt{\frac{15 \pm 6\sqrt{3}}{13} \frac{g}{\ell}}$; $\beta_1 = \frac{-(5+2\sqrt{3})}{27+16\sqrt{3}}$; $\beta_2 = \frac{5-2\sqrt{3}}{-27+16\sqrt{3}}$
23		$0A = \frac{\ell}{2}$; $c = \frac{2 m_1 g}{\ell}$	$K_{1,2} = \sqrt{\frac{3(15 \pm \sqrt{73})}{19} \frac{g}{\ell}}$; $\beta_1 = \frac{-3(15+\sqrt{73})}{29+7\sqrt{73}}$; $\beta_2 = \frac{3(15-\sqrt{73})}{7\sqrt{73}-29}$
24		$c = \frac{2 m_1 g}{\ell}$	$K_{1,2} = \sqrt{\frac{15 \pm 9\sqrt{2})}{7} \frac{g}{\ell}}$; $\beta_1 = \frac{-(5+3\sqrt{2})}{11+8\sqrt{2}}$; $\beta_2 = \frac{5-3\sqrt{2})}{8\sqrt{2}-11}$
25		$0A = \frac{\ell}{3}$	$K_{1,2} = \sqrt{\frac{3(7 \pm \sqrt{10})}{19} \frac{g}{\ell}}$; $\beta_1 = \frac{-(7+\sqrt{10})}{17+8\sqrt{10}}$; $\beta_2 = \frac{7-\sqrt{10}}{-17+8\sqrt{10}}$
26		$0A = \frac{\ell}{2}$	$K_{1,2} = \sqrt{\frac{45 \pm 3\sqrt{73})}{19} \frac{g}{\ell}}$; $\beta_1 = \frac{-3(15+\sqrt{73})}{29+7\sqrt{73}}$; $\beta_2 = \frac{3(15-\sqrt{73})}{7\sqrt{73}-29}$

Окончание табл. 4.4

№ вар.	Схема	Дополнительные данные	Ответ
27		–	$K_{1,2}=\sqrt{\dfrac{21\pm 6\sqrt{7})}{7}\,\dfrac{g}{\ell}}$; $\beta_1=\dfrac{-(21+6\sqrt{7})}{35+16\sqrt{7}}$; $\beta_2=\dfrac{21-6\sqrt{7}}{16\sqrt{7}-35}$
28		–	$K_1=\sqrt{\dfrac{2g}{r}}$; $K_2=\sqrt{\dfrac{2g}{5r}}$; $\beta_1=-1$; $\beta_2=1$
29		–	$K_1=\sqrt{\dfrac{2g}{r}}$; $K_2=\sqrt{\dfrac{16g}{17r}}$; $\beta_1=-\dfrac{1}{2}$; $\beta_2=\dfrac{2}{3}$
30		–	$K_{1,2}=\sqrt{\dfrac{11\pm\sqrt{33})}{11}\,\dfrac{g}{\ell}}$; $\beta_1=\dfrac{-2(11+\sqrt{33})}{11+5\sqrt{33}}$; $\beta_2=\dfrac{2(11-\sqrt{33})}{5\sqrt{33}-11}$

Задача № 27. Вариант 1



Эллиптический маятник состоит из сплошного однородного цилиндра весом P и прикрепленного к его оси с помощью шарнира стержня AB весом Q, длиной ℓ. Цилиндр находится на горизонтальной шероховатой плоскости. Составить дифференциальные уравнения движения системы, принимая за

обобщенные координаты угол φ отклонения стержня от вертикали и расстояние x, проходимое центром тяжести цилиндра.

Ответ: $(3P + 2Q)\ddot{x} + Q\ell\ddot{\varphi}\cos\varphi - Q\ell\dot{\varphi}^2\sin\varphi = 0$, $\ddot{x}\cos\varphi + \frac{2}{3}\ell\ddot{\varphi} + g\sin\varphi = 0$.

Вариант 2

В условиях варианта 1 решить задачу, если цилиндр заменен ползуном, который может двигаться по гладкой горизонтальной плоскости.

Ответ: $(P + Q)\ddot{x} + \frac{1}{2}Q\ell\ddot{\varphi}\cos\varphi - \frac{1}{2}Q\ell\dot{\varphi}^2\sin\varphi = 0$, $\ddot{x}\cos\varphi + \frac{2}{3}\ell\ddot{\varphi} + g\sin\varphi = 0$.

Вариант 3

В условиях варианта 1 решить задачу, если стержень AB заменен математическим маятником весом Q, длиной ℓ.

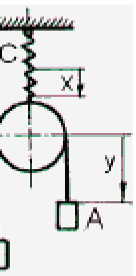
Ответ: $(3P + 2Q)\ddot{x} + 2Q\ell\ddot{\varphi}\cos\varphi - 2Q\ell\dot{\varphi}^2\sin\varphi = 0$,
$\ddot{\varphi}\ell + \ddot{x}\cos\varphi + g\sin\varphi = 0$.

Вариант 4

В условиях варианта 1 решить задачу, если цилиндр заменен ползуном, а стержень AB заменен математическим маятником весом Q, длиной ℓ.

Ответ: $(P + Q)\ddot{x} + Q\ell\ddot{\varphi}\cos\varphi - Q\ell\dot{\varphi}^2\sin\varphi = 0$, $\ddot{\varphi}\ell + \ddot{x}\cos\varphi + g\sin\varphi = 0$.

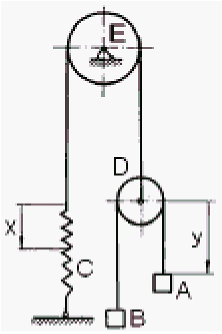
Вариант 5



Через блок перекинута нить с двумя грузами A и B массой m_1 и m_2 на концах. Блок подвешен к вертикальной пружине жесткостью с. Выбирая за обобщенные координаты удлинение x пружины от положения статического равновесия и расстояние y груза A от оси блока, составить дифференциальные уравнения движения системы. Массой нити и блока пренебречь.

Ответ: $(m_1 + m_2)\ddot{x} + (m_1 - m_2)\ddot{y} = -cx + (m_1 + m_2)g$,
$(m_1 - m_2)\ddot{x} + (m_1 + m_2)\ddot{y} = (m_1 - m_2)g$.

Вариант 6

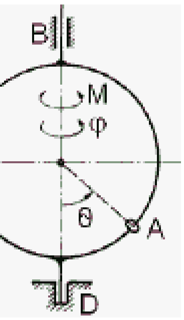


Через неподвижный блок E перекинута нить, один конец которой прикреплен к пружин жесткостью с, а второй – прикреплен к оси подвижного блока D. Через блок D также перекинута нить с двумя грузами A и B массой m_1 и m_2 на концах. Пренебрегая массой нити и блоков, составить дифференциальные уравнения движения системы, выбирая за обобщенные координаты удлинение x пружины от положения статического равновесия и расстояние y груза A от оси блока D.

Ответ: $(m_1 - m_2)\ddot{y} + (m_1 + m_2)\ddot{x} = -cx + (m_1 + m_2)g$,

$$(m_1 + m_2)\ddot{y} + (m_1 - m_2)\ddot{x} = (m_1 - m_2)g.$$

Вариант 7

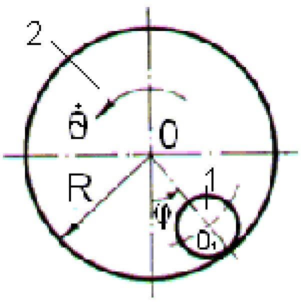


Колечко A массой m движется по проволочной окружности радиусом R, которая вращается вокруг вертикального диаметра BD под действием постоянного момента M. Момент инерции проволочной окружности относительно оси вращения равен J. Составить дифференциальные уравнения движения системы, выбирая за обобщенные координаты угол φ поворота окружности и угол θ , определяющий положение колечка A на окружности.

Ответ: $R^2\ddot{\theta} - R^2\dot{\varphi}^2\sin\theta\cos\theta + gR\sin\theta = 0$,

$J\ddot{\varphi} + mR^2\ddot{\varphi}\sin^2\theta + mR^2\dot{\varphi}\dot{\theta}\sin 2\theta = M$.

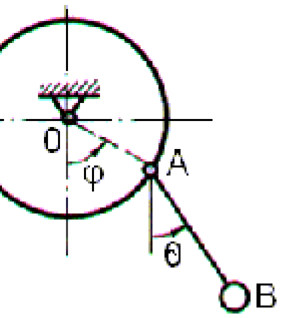
Вариант 8



Однородный сплошной цилиндр 1 массой m, радиусом r перекатывается без скольжения по внутренней поверхности полого цилиндра 2 массой M, радиусом R, который может поворачиваться около своей горизонтальной оси 0. Составить уравнения движения системы, выбирая за обобщенные координаты угол θ поворота полого цилиндра 2 и угол φ отклонения линии центров 00_1, от вертикали.

Ответ: $2MR\ddot{\theta} - mR\ddot{\theta} - m(R-r)\ddot{\varphi} = 0$, $3\ddot{\varphi}(R-r) - \ddot{\theta}R + 2g\sin\varphi = 0$

Вариант 9

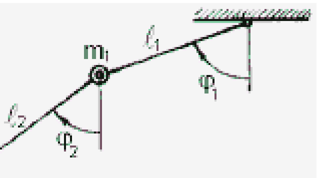


Однородный диск радиусом R, весом 4 P, поворачиваясь вокруг своей горизонтальной оси 0, приводит в движение математический маятник AB длиной ℓ, весом P. Составить уравнения движения системы, выбирая за обобщенные координаты угол φ поворота диска и угол θ отклонения нити AB от вертикали.

Ответ: $3 R \ddot{\varphi} + \ell \ddot{\theta} \cos(\varphi - \theta) + \ell \dot{\theta}^2 \sin(\varphi - \theta) + g \sin\varphi = 0$,

$$\ell \ddot{\theta} + R \ddot{\varphi} \cos(\varphi - \theta) - R \dot{\varphi}^2 \sin(\varphi - \theta) + g \sin\theta = 0.$$

Вариант 10



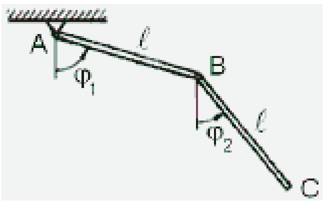
Составить дифференциальные уравнения движения двойного математического маятника, у которого $m_2 = 2\, m_1$. Маятник движется в вертикальной плоскости. За обобщенные координаты принять углы φ_1 и φ_2 отклонения маятников от

вертикали.

Ответ: $3 \ell_1 \ddot{\varphi}_1 + 2 \ell_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1) \ddot{\varphi}_2 - 2 \ell_2 \dot{\varphi}_2^2 \sin(\varphi_2 - \varphi_1) + 3 g \sin\varphi_1 = 0$,

$$\ell_2 \ddot{\varphi}_2 + \ell_1 \ddot{\varphi}_1 \cos(\varphi_2 - \varphi_1) + \ell_1 \dot{\varphi}_1^2 \sin(\varphi_2 - \varphi_1) + g \sin\varphi_2 = 0.$$

Вариант 11

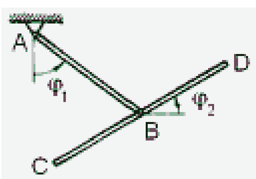


Составить дифференциальные уравнения движения двойного физического маятника, состоящего из двух однородных тонких стержней массой m, длиной ℓ. Оси A и B параллельны. В качестве обобщенных координат принять углы φ_1 и φ_2 отклонения стержней от вертикали.

Ответ: $8 \ell \ddot{\varphi}_1 + 3 \ell \ddot{\varphi}_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2) - 3 \ell \dot{\varphi}_2^2 \sin(\varphi_1 - \varphi_2) + 9 g \sin\varphi_1 = 0$,

$$2 \ell \ddot{\varphi}_2 + 3 \ell \ddot{\varphi}_1 \cos(\varphi_1 - \varphi_2) + 3 \ell \dot{\varphi}_1^2 \sin(\varphi_1 - \varphi_2) + 3 g \sin\varphi_2 = 0.$$

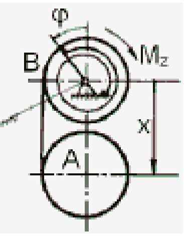
Вариант 12



Составить дифференциальные уравнения движения системы, состоящей из однородного тонкого стержня AB массой m, длиной ℓ, шарнирно закрепленного в точке A, и такого же стержня CD, шарнирно соединенного в своем центре тяжести с концом B первого стержня. Движение стержней происходит в вертикальной плоскости. В качестве обобщенных координат принять углы φ_1 и φ_2 поворота стержней.

Ответ: $8\ell\ddot{\varphi}_1 + 9g\sin\varphi_1 = 0, \quad \ddot{\varphi}_2 = 0$.

Вариант 13

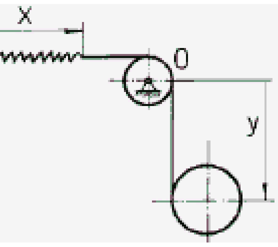


Однородный сплошной цилиндр А весом P, радиусом r, падая под действием силы тяжести, приводит в движение с помощью гибкой нити блок В того же веса и радиуса. Спиральная пружина с коэффициентом жесткости с при повороте цилиндра В вокруг горизонтальной оси z на угол φ создает момент сил упругости $M_z = -c\varphi$. Принимая за обобщенные координаты угол j и абсциссу x

центра цилиндра А, составить дифференциальные уравнения движения системы. Весом нити и пружины пренебречь.

Ответ: $-Pr\ddot{x} + 2Pr^2\ddot{\varphi} = 2gc\varphi, \quad 3\ddot{x} - r\ddot{\varphi} = 2g$.

Вариант 14



Однородный сплошной цилиндр весом P, радиусом r падает, разматывая нить, перекинутую через неподвижный блок и прикрепленную к пружине жесткостью с. Составить дифференциальные уравнения движения системы, принимая за обобщенные координаты длину пружины x и расстояние y центра тяжести цилиндра от оси неподвижного блока по вертикали.

Длина пружины в недеформированном состоянии равна ℓ. Массой блока и пружины пренебречь.

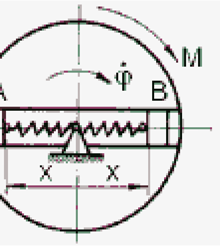
Ответ: $3\ddot{y} - \ddot{x} = 2g; \quad P\ddot{x} - P\ddot{y} + 2cg(x - \ell) = 0$.

Вариант 15

В условиях варианта 14 решить задачу, учитывая массу блока 0. Считать блок 0 однородным сплошным диском весом P, радиусом r.

Ответ: $3\ddot{y} - \ddot{x} = 2g; \quad 2P\ddot{x} - P\ddot{y} = -2cg(x - \ell)$.

Вариант 16



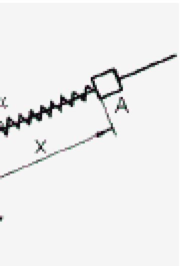
Сплошной однородный диск весом P, радиусом r вращается в горизонтальной плоскости под действием постоянного вращающего момента M. В центре тяжести диска прикреплены две одинаковые пружины жесткостью c, на концах которых находятся точечные грузы A и B весом Q каждый. Составить дифференциальные

уравнения движения системы, принимая за обобщенные координаты угол φ поворота диска и длину пружины x. Длина каждой пружины в недеформированном состоянии равна ℓ. Массой пружины и трением пренебречь.

Ответ: $\frac{1}{2}P\,r^2\,\ddot{\varphi} + 2\,Q\,x^2\,\ddot{\varphi} + 4\,Q\,x\,\dot{x}\,\dot{\varphi} = M\,g$,

$2\,Q\,\ddot{x} - 2\,Q\,x\,\dot{\varphi}^2 = -2\,c\,g\,(x-\ell)$.

Вариант 17



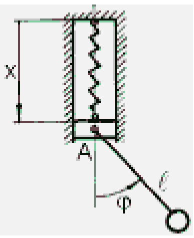
Вертикальный вал с жестко приделанным к нему под углом α стержнем вращается вокруг вертикальной оси под действием постоянного момента M. Вдоль стержня скользит груз A весом P, прикрепленный к свободному концу пружины жесткостью c. Второй конец пружины закреплен на валу в точке 0. Составить дифференциальные уравнения движения системы, считая, что момент инерции вала со стержнем относительно оси вращения

равен J. Длина недеформированной пружины равна ℓ. За обобщенные координаты принять длину пружины x и угол φ поворота вала. Массой пружины и трением пренебречь.

Ответ: $J\,\ddot{\varphi} + \frac{P}{g}x^2\,\ddot{\varphi}\,\sin^2\alpha + 2\frac{P}{g}x\,\dot{x}\,\dot{\varphi}\,\sin^2\alpha = M$,

$\frac{P}{g}\ddot{x} - \frac{P}{g}x\,\dot{\varphi}^2\,\sin^2\alpha = -P\cos\alpha - c(x-\ell)$.

Вариант 18



Математический маятник массой m, длиной ℓ прикреплен к ползуну A, связанному с концом вертикальной пружины жесткостью c. Пренебрегая весом пружины и ползуна и его трением о направляющие, составить дифференциальные уравнения движения маятника.

За обобщенные координаты принять длину пружины x и угол φ отклонения маятника от вертикали. Длина пружины в недеформированном состоянии равна λ .

Ответ: $m\ddot{x} - m\ell\ddot{\varphi}\sin\varphi - m\ell\dot{\varphi}^2\cos\varphi = -c(x-\lambda) + mg$,
$\ell\ddot{\varphi} + \ddot{x}\sin\varphi = -g\sin\varphi$.

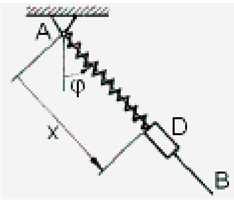
Вариант 19

В условиях варианта 18 решить задачу, если математический маятник заменен тонким однородным стержнем весом P, длиной ℓ.

Ответ: $2P\ddot{x} - P\ell\ddot{\varphi}\sin\varphi - P\ell\dot{\varphi}^2\cos\varphi = 2Pg - 2cg(x-\lambda)$,

$$2\ell\ddot{\varphi} - 3\ddot{x}\sin\varphi + 3g\sin\varphi = 0.$$

Вариант 20



На тонкий однородный стержень AB весом P, длиной ℓ, поворачивающийся в вертикальной плоскости вокруг A, навита пружина жесткостью c, на конце которой прикреплен груз весом Q. Второй конец пружины закреплен в точке A. Составить дифференциальные уравнени движения системы, принимая за обобщенные координаты угол φ отклонение стержня от вертикали

и длину x пружины. Длина пружины в недеформированном состоянии равна λ . Вес пружины и трение не учитывать.

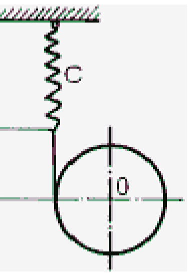
Ответ: $\frac{1}{3}P\ell^2\ddot{\varphi} + Qx^2\ddot{\varphi} + 2Qx\dot{x}\dot{\varphi} = Qgx\sin\varphi$,
$Q\ddot{x} - Qx\dot{\varphi}^2 = Qg\cos\varphi - cg(x-\lambda)$.

Вариант 21

В условиях варианта 20 решить задачу, если стержень вращается вокруг точки A в горизонтальной плоскости под действием постоянного вращающего момента M.

Ответ: $\frac{1}{3}P\ell^2\ddot{\varphi} + Qx^2\ddot{\varphi} + 2Qx\dot{x}\dot{\varphi} = M$, $Q\ddot{x} - Qx\dot{\varphi}^2 = -cg(x-\lambda)$.

Вариант 22



Однородный сплошной цилиндр весом P, радиусом r падает, разматывая нить, второй конец A которой прикреплен к вертикальной пружине жесткостью c. Составить дифференциальные уравнения движения системы, принимая за обобщенные координаты длину x_1 пружины и расстояние x_2 от точки A до центра тяжести цилиндра.

Длина пружины в недеформированном состоянии равна ℓ. Массой пружины пренебречь.

Ответ: $3\ddot{x}_2 + 2\ddot{x}_1 = 2g$, $P\ddot{x}_1 + P\ddot{x}_2 + cg(x_1 - \ell) = Pg$.

Варианты 23–30

Один конец невесомой нерастяжимой нити прикреплен к вертикальной пружине жесткостью c, второй конец – к телу A .Телом A могут быть следующие объекты (табл. 4.3):

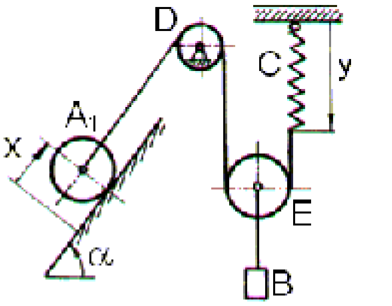
A_1 – сплошной однородный цилиндр весом P, радиусом r (вар. 23–26);

A_2 – ступенчатый каток весом P с моментом инерции J относительно оси, проходящей через центр тяжести, R = 2 r (вар. 27–28);

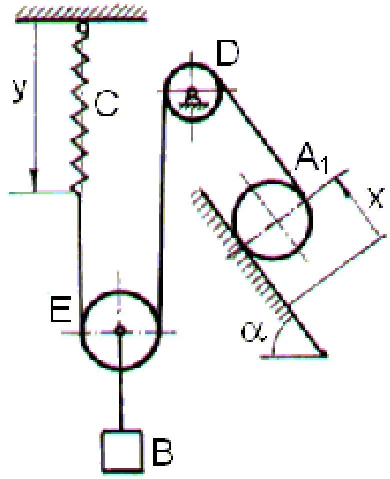
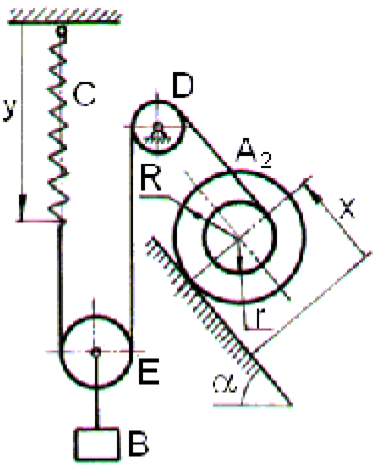
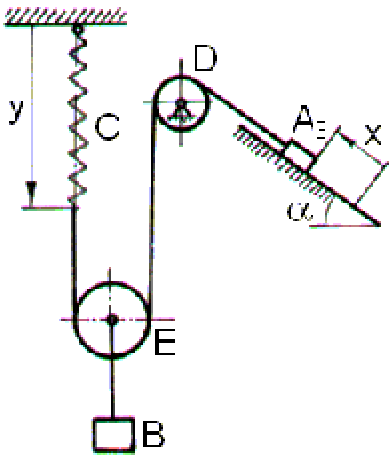
A_3 – груз весом P (вар. 29–30).

Нить переброшена через неподвижный блок D и охватывает снизу подвижный блок E. К оси блока E прикреплен груз B весом Q. Пренебрегая массой блоков и пружины, составить дифференциальные уравнения движения системы. За обобщенные координаты принять длину пружины y и расстояние x, проходимое центром тяжести тела A. Длина пружины в недеформированном состоянии равна ℓ. Считать, что цилиндр (каток) катится без проскальзывания.

Таблица 4.3

№ вар.	Схема	Дано α	Ответ
23		0°	$6P\ddot{x} + Q(\ddot{x} + \ddot{y}) = 2Qg$, $Q(\ddot{x}+\ddot{y}) = 2Qg - 4cg(y-\ell)$
24		30°	$6P\ddot{x} + Q(\ddot{x} + \ddot{y}) = 2(Q-P)g$, $Q(\ddot{x}+\ddot{y}) = 2Qg - 4cg(y-\ell)$

Окончание табл. 4.3

№ вар.	Схема	Дано α	Ответ
25		0°	$3P\ddot{x}+2Q\ddot{x}+Q\ddot{y}=2Qg,$ $Q(2\ddot{x}+\ddot{y})=2Qg-4cg(y-\ell)$
26		30°	$3P\ddot{y}+2Q\ddot{x}+Q\ddot{y}=2Qg-Pg,$ $Q\ddot{y}+2Q\ddot{x}=2Qg-4cg(y-\ell)$
27		0°	$\frac{4J}{r^2}\ddot{x}+16P\ddot{x}+9Q\ddot{x}+6Q\ddot{y}=12Qg,$ $2Q\ddot{y}+3Q\ddot{x}=4Qg-8cg(y-\ell)$
28		30°	$\frac{4J}{r^2}\ddot{x}+16P\ddot{x}-9Q\ddot{x}+6Q\ddot{y}=12Qg-8Pg,$ $2Q\ddot{y}+3Q\ddot{x}=4Qg-8cg(y-\ell)$
29		0°	$4P\ddot{x}+Q(\ddot{x}+\ddot{y})=2Qg,$ $Q\ddot{y}+Q\ddot{x}=2Qg-4cg(y-\ell)$
30		30°	$4P\ddot{x}+Q(\ddot{x}+\ddot{y})=2(Q-P)g,$ $Q\ddot{x}+Q\ddot{y}=2Qg-4cg(y-\ell)$

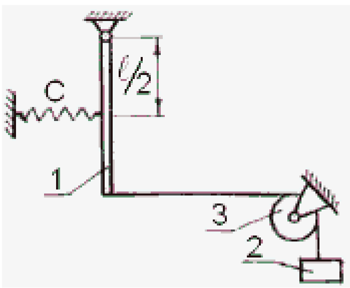
Задача № 28. Варианты 1–30

Определить период малых колебаний механической системы с одной степенью свободы, изображенной на чертеже. Плоскость чертежа является вертикальной плоскостью. В изображенном положении система находится в устойчивом равновесии, пружина имеет соответствующую статическую деформацию. Коэффициент жесткости пружины равен с. Цифрами на чертеже обозначено:

1 – однородный тонкий стержень массой m_1, длиной ℓ;
2 – груз массой m_2;
3 – блок, масса которого не учитывается;
4 – однородный сплошной диск массой m_4, радиусом R;
5 – обойма, масса которой не учитывается;
6 – блок массой m_6, радиусом R, масса равномерно распределена по ободу блока;
7 – ступенчатый диск массой m_7, большой радиус диска равен R, малый – $r = \frac{1}{2} r$, радиус инерции относительно центральной оси – $\rho = r$.

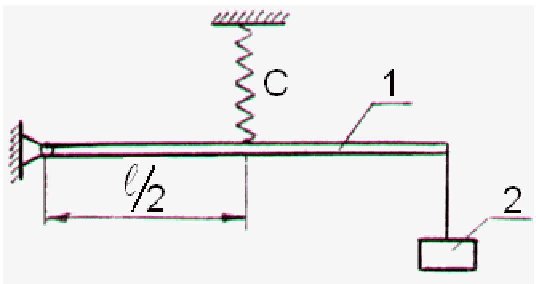
Массой нитей и пружины, а также сопротивлением движению пренебречь. Качение дисков по плоскости происходит без проскальзывания.

№ 28–1



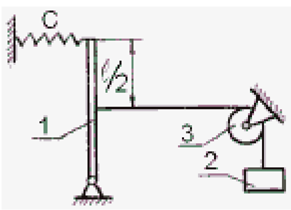
Ответ: $T = 4\pi\sqrt{\dfrac{(m_1 + 3m_2)}{3(c\,\ell + 2m_1 g)}\ell}$.

№ 28–2

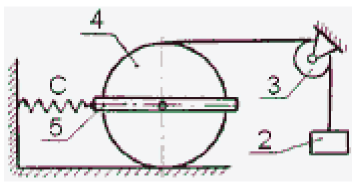


Ответ: $T = 4\pi\sqrt{\dfrac{m_1 + 3m_2}{3c}}$.

№ 28–3



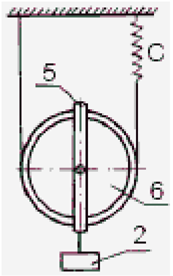
№ 28–4



Ответ: $T = 2\pi \sqrt{\dfrac{(4m_1 + 3m_2)}{6(2c\ell + m_1 g)}\ell}$.

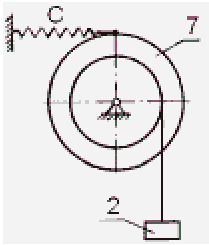
Ответ: $T = 2\pi \sqrt{\dfrac{8m_2 + 3m_4}{2c}}$.

№ 28–5



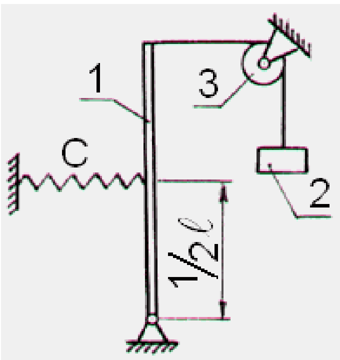
Ответ: $T = \pi \sqrt{\dfrac{m_2 + 2m_6}{c}}$.

№ 28–6



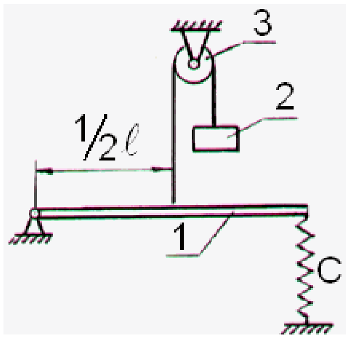
Ответ: $T = \pi \sqrt{\dfrac{m_2 + m_7}{c}}$.

№ 28–7



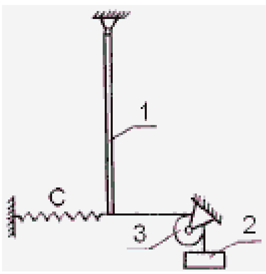
Ответ: $T = 4\pi \sqrt{\dfrac{(m_1 + 3m_2)\ell}{3(c\ell + 2m_1 g)}}$.

№ 28–8

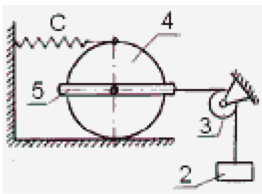


Ответ: $T = \pi \sqrt{\dfrac{4m_1 + 3m_2}{3c}}$.

№ 28–9



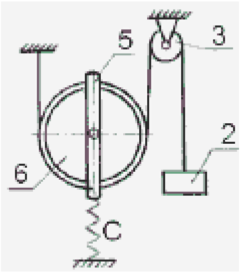
№ 28–10



Ответ: $T = 2\pi \sqrt{\dfrac{2(m_1 + 3m_2)\ell}{3(2c\ell + 2m_1 g)}}$.

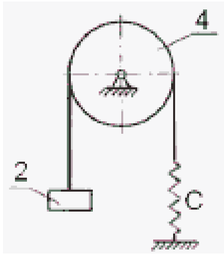
Ответ: $T = \pi \sqrt{\dfrac{2m_2 + 3m_4}{2c}}$.

№ 28–11



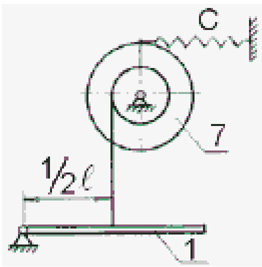
Ответ: $T = 2\pi \sqrt{\dfrac{4m_2 + 2m_6}{c}}$.

№ 28–12



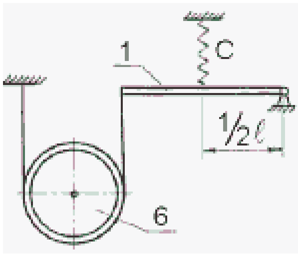
Ответ: $T = 2\pi \sqrt{\dfrac{2m_2 + m_4}{2c}}$.

№ 28–13



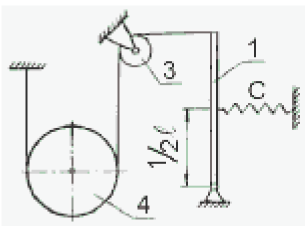
Ответ: $T = \pi \sqrt{\dfrac{4m_1 + 3m_7}{3c}}$.

№ 28–14



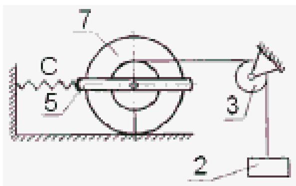
Ответ: $T = 2\pi \sqrt{\dfrac{2(2m_1 + 3m_6)}{3c}}$.

№ 28–15



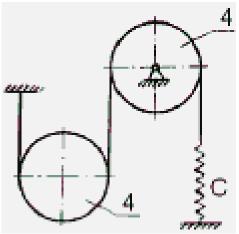
Ответ: $T = 2\pi \sqrt{\dfrac{(8m_1 + 9m_4)\ell}{6(c\ell + 2m_1 g)}}$.

№ 28–16



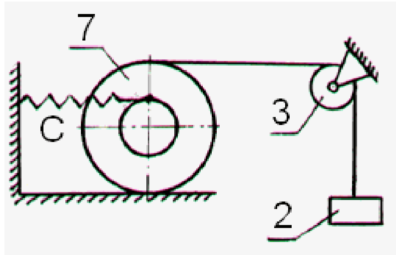
Ответ: $T = \pi \sqrt{\dfrac{9m_2 + 5m_7}{c}}$.

№ 28–17



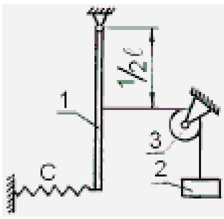
Ответ: $$T = \pi \sqrt{\frac{7\,m_4}{2\,c}}$$.

№ 28–18



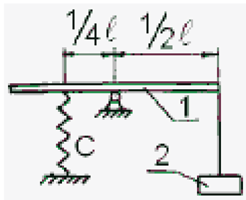
Ответ: $$T = \frac{2}{3}\pi \sqrt{\frac{16\,m_2 + 5\,m_7}{c}}$$.

№ 28–19



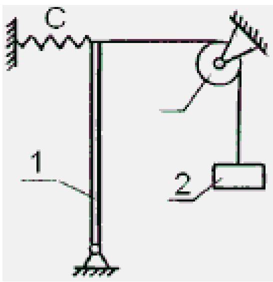
Ответ: $$T = 2\,\pi \sqrt{\frac{(4\,m_1 + 3\,m_2)\,\ell}{6\,(2\,c\,\ell + m_1\,g)}}$$.

№ 28–20



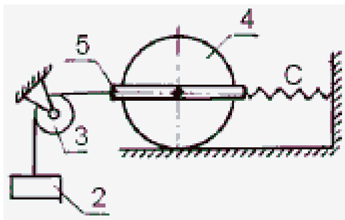
Ответ: $$T = 4\,\pi \sqrt{\frac{m_1 + 3\,m_2}{3\,c}}$$.

№ 28–21



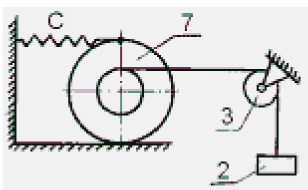
Ответ: $$T = 2\,\pi \sqrt{\frac{2\,(m_1 + 3\,m_2)\,\ell}{3\,(2\,c\,\ell + m_1\,g)}}$$.

№ 28–22

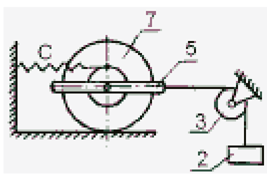


Ответ: $$T = 2\,\pi \sqrt{\frac{2\,m_2 + 3\,m_4}{2\,c}}$$.

№ 28–23



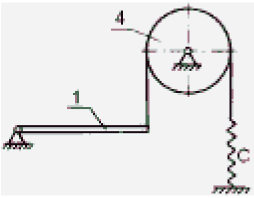
№ 28–24



Ответ: $$T = \frac{1}{2}\pi\sqrt{\frac{9\,m_2 + 5\,m_7}{c}}.$$

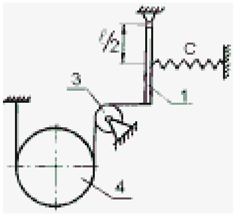
Ответ: $$T = \frac{2}{3}\pi\sqrt{\frac{4\,m_2 + 5\,m_7}{c}}.$$

№ 28–25



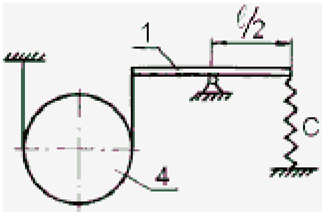
Ответ: $$T = 2\pi\sqrt{\frac{2\,m_1 + 3\,m_4}{6\,c}}.$$

№ 28–26



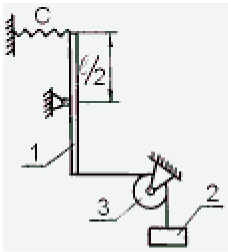
Ответ: $$T = 2\pi\sqrt{\frac{(8\,m_1 + 9\,m_4)\,\ell}{6\,(c\,\ell + 2\,m_1\,g)}}.$$

№ 28–27



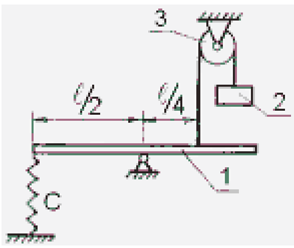
Ответ: $$T = \pi\sqrt{\frac{8\,m_1 + 9\,m_4}{6\,c}}.$$

№ 28–28



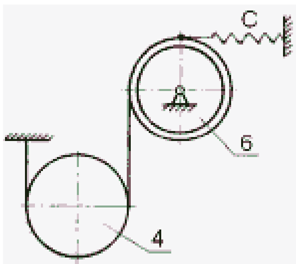
Ответ: $$T = 2\pi\sqrt{\frac{m_1 + 3\,m_2}{3\,c}}.$$

№ 28–29



Ответ: $$T = \pi\sqrt{\frac{4\,m_1 + 3\,m_2}{3\,c}}.$$

№ 28–30



Ответ: $$T = \pi\sqrt{\frac{3\,m_4 + 8\,m_6)}{2\,c}}.$$

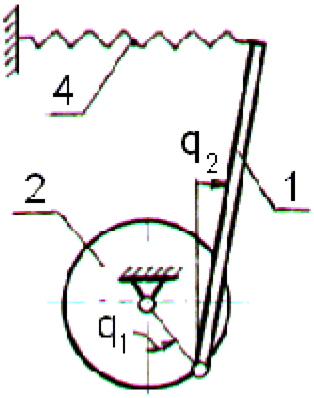
Задача № 29. Варианты 1–30

Система (см. схему в табл. 4.4) совершает малые колебания в вертикальной плоскости, совпадающей с плоскостью чертежа. Цифрами обозначены:

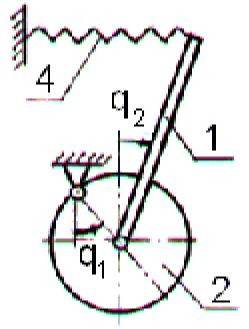
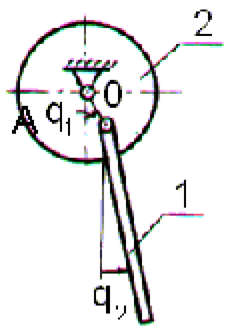
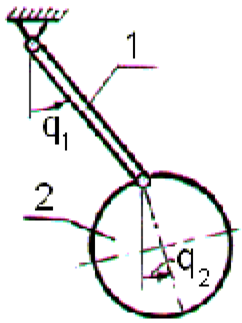
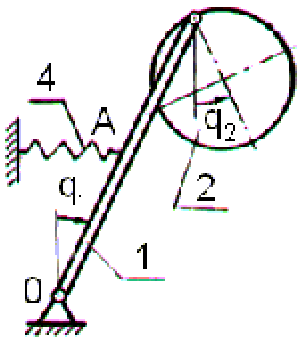
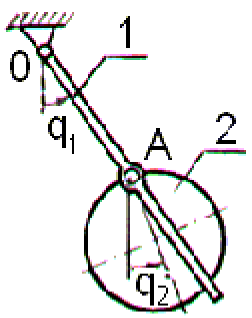
1 – тонкий однородный стержень длиной ℓ, массой m_1;
2 – однородный сплошной диск радиусом r, массой m_2;
3 – ползун массой m_3;
4 – пружина жесткостью с, масса пружины не учитывается;
5 – обойма, масса которой не учитывается.

В положении устойчивого равновесия системы обобщенные координаты q_1 и q_2 равны нулю. Определить частоты K_1 и K_2, и отношения амплитуд $\beta_1 = \dfrac{A_1^{(1)}}{A_2^{(1)}}$ и $\beta_2 = \dfrac{A_1^{(2)}}{A_2^{(2)}}$ главных колебаний системы.

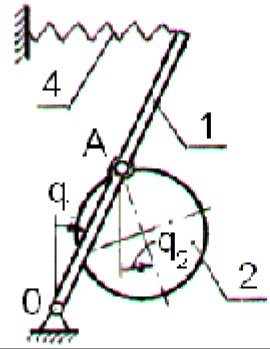
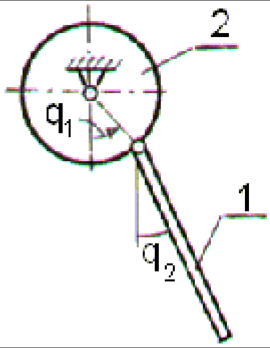
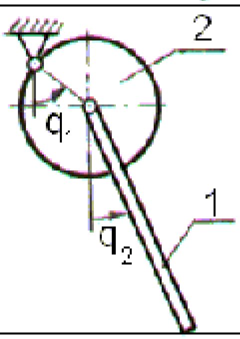
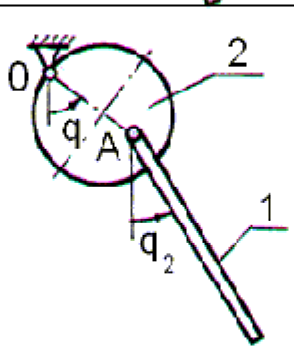
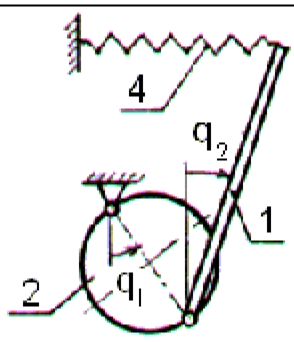
Таблица 4.4

№ вар.	Схема	Дополнительные данные	Ответ
1		$\ell = 6r$; $m_2 = 2m_1$; $c = \dfrac{m_1 g}{6r}$	$K_{1,2} = \sqrt{\dfrac{14 \pm \sqrt{46}}{30}\dfrac{g}{r}}$; $\beta_1 = \dfrac{12 + 3\sqrt{46}}{7 - 2\sqrt{46}}$; $\beta_2 = \dfrac{12 - 3\sqrt{46}}{7 + 2\sqrt{46}}$

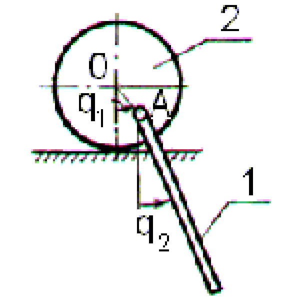
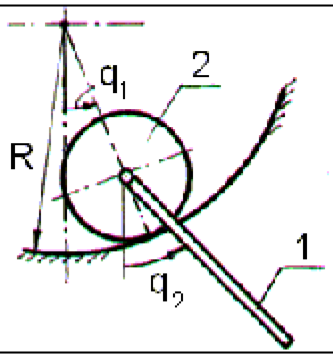
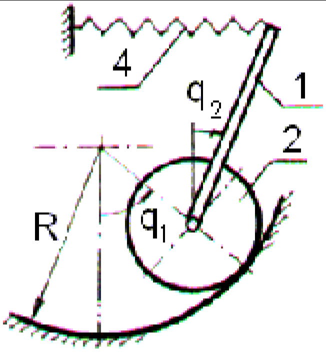
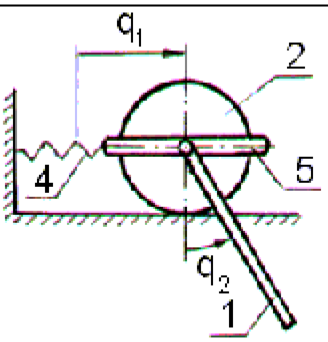
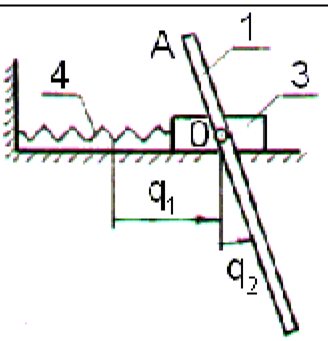
Продолжение табл. 4.4

№ вар.	Схема	Дополнительные данные	Ответ
2		$\ell = 6\,r$; $m_2 = 2\,m_1$; $c = \dfrac{m_1\,g}{2\,r}$	$K_{1,2} = \sqrt{\dfrac{28 \pm \sqrt{30}}{26}\,\dfrac{g}{r}}$; $\beta_1 = \dfrac{6 + \sqrt{30}}{-21 - 4\sqrt{30}}$; $\beta_2 = \dfrac{6 - \sqrt{30}}{-21 + 4\sqrt{30}}$
3		$0A = \dfrac{1}{2}\,r$; $\ell = 6\,r$; $m_2 = 2\,m_1$	$K_{1,2} = \sqrt{\dfrac{13 \pm \sqrt{33}}{34}\,\dfrac{g}{r}}$; $\beta_1 = \dfrac{6(13 + \sqrt{33})}{3 - 5\sqrt{33}}$; $\beta_2 = \dfrac{6(13 - \sqrt{33})}{3 + 5\sqrt{33}}$
4		$m_1 = 3\,m_2$; $\ell = 2\,r$;	$K_{1,2} = \sqrt{\dfrac{31 \pm \sqrt{321}}{32}\,\dfrac{g}{r}}$; $\beta_1 = \dfrac{-31 - \sqrt{321}}{4(11 + \sqrt{321})}$; $\beta_2 = \dfrac{-31 + \sqrt{321}}{4(11 - \sqrt{321})}$
5		$0A = \dfrac{\ell}{2}$; $m_1 = 2\,m_2$; $\ell = 3\,r$; $c = \dfrac{16\,m_2\,g}{\ell}$	$K_{1,2} = \sqrt{\dfrac{8 \pm 2\sqrt{7}}{9}\,\dfrac{g}{r}}$; $\beta_1 = \dfrac{-4 + \sqrt{7}}{11 + 5\sqrt{7}}$; $\beta_2 = \dfrac{4 - \sqrt{7}}{-11 + 5\sqrt{7}}$
6		$0A = \dfrac{\ell}{2}$; $m_2 = 2\,m_1$; $\ell = 6\,r$	$K_{1,2} = \sqrt{\dfrac{29 \pm \sqrt{409}}{36}\,\dfrac{g}{r}}$; $\beta_1 = -\dfrac{29 + \sqrt{409}}{91 + 5\sqrt{409}}$; $\beta_2 = \dfrac{29 - \sqrt{409}}{-91 + 5\sqrt{409}}$

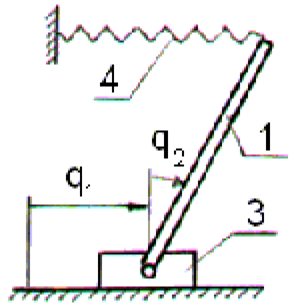
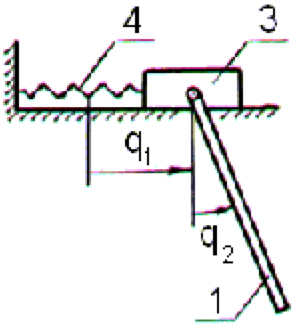
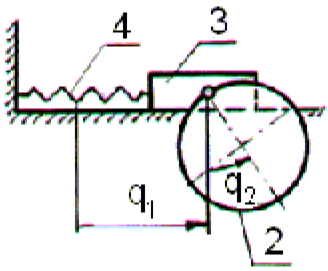
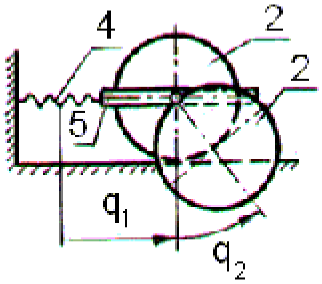
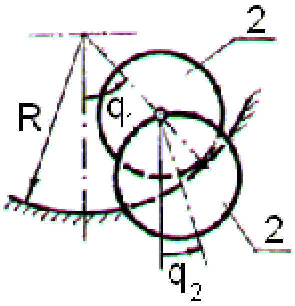
Продолжение табл. 4.4

№ вар.	Схема	Дополнительные данные	Ответ
7		$0A = \dfrac{\ell}{2}$; $m_2 = 2\,m_1$; $\ell = 6\,r$; $c = \dfrac{m_1\,g}{3\,r}$	$K_{1,\,2} = \sqrt{\dfrac{23 \pm \sqrt{385}}{36}\,\dfrac{g}{r}}$; $\beta_1 = \dfrac{23+\sqrt{385}}{-97-5\sqrt{385}}$; $\beta_2 = \dfrac{23-\sqrt{385}}{-97+5\sqrt{385}}$
8		$m_2 = 2\,m_1$; $\ell = 6\,r$;	$K_1 = \sqrt{\dfrac{g}{r}}$; $K_2 = \sqrt{\dfrac{g}{5r}}$; $\beta_1 = -3$; $\beta_2 = 1$
9		$m_2 = 2\,m_1$; $\ell = 6\,r$;	$K_1 = \sqrt{\dfrac{g}{r}}$; $K_2 = \sqrt{\dfrac{3}{13}\,\dfrac{g}{r}}$; $\beta_1 = -3$; $\beta_2 = \dfrac{1}{3}$
10		$0A = \dfrac{3}{2}r$; $m_2 = m_1$; $\ell = 3\,r$	$K_{1,\,2} = \sqrt{\dfrac{35 \pm \sqrt{565}}{33}\,\dfrac{g}{r}}$; $\beta_1 = -\dfrac{3(35+\sqrt{565})}{5(13+\sqrt{565})}$; $\beta_2 = \dfrac{3(35-\sqrt{565})}{-5(13-\sqrt{565})}$
11		$m_2 = 2\,m_1$; $\ell = 6\,r$; $c = \dfrac{m_1\,g}{4\,r}$	$K_1 = \sqrt{\dfrac{7\,g}{8\,r}}$; $K_2 = \sqrt{\dfrac{g}{2\,r}}$; $\beta_1 = -2$; $\beta_2 = 0$

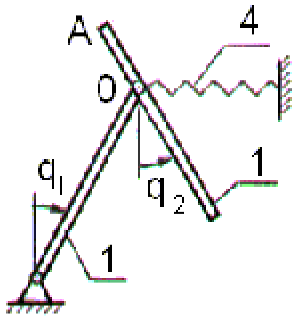
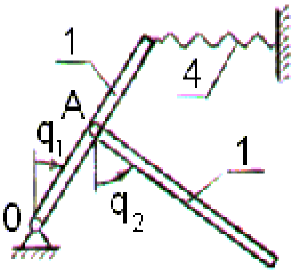
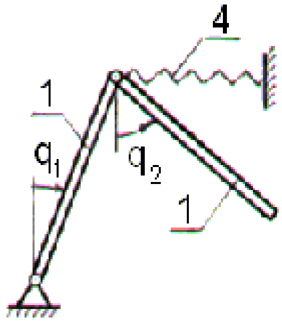
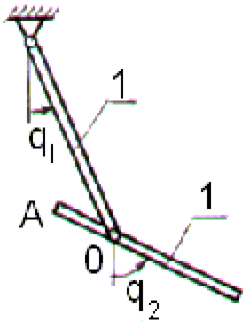
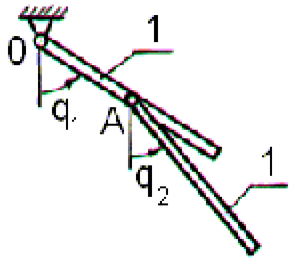
Продолжение табл. 4.4

№ вар.	Схема	Дополнительные данные	Ответ
12		$0A = \frac{r}{2}$; $m_1 = 2\,m_2$; $\ell = 6\,r$	$K_{1,2} = \sqrt{\frac{6 \pm \sqrt{10}}{13}\frac{g}{r}}$; $\beta_1 = \frac{3(6+\sqrt{10})}{1-2\sqrt{10}}$; $\beta_2 = \frac{3(6-\sqrt{10})}{1+2\sqrt{10}}$
13		$R = 3\,r$; $m_2 = 2\,m_1$; $\ell = 6\,r$	$K_{1,2} = \sqrt{\frac{10 \pm \sqrt{22}}{26}\frac{g}{r}}$; $\beta_1 = \frac{-3(10+\sqrt{22})}{2+8\sqrt{22}}$; $\beta_1 = \frac{3(10-\sqrt{22})}{-2+8\sqrt{22}}$
14		$m_2 = 2\,m_1$; $R = 3\,r$; $\ell = 6\,r$; $c = \frac{m_1\,g}{4\,r}$	$K_1 = \sqrt{\frac{g}{2\,r}}$; $K_2 = \sqrt{\frac{11g}{26\,r}}$; $\beta_1 = 0$; $\beta_2 = -2$
15		$m_2 = 2\,m_1$; $c = \frac{m_1\,g}{\ell}$	$K_{1,2} = \sqrt{\frac{14 \pm \sqrt{118}}{13}\frac{g}{r}}$; $\beta_1 = \frac{-(14+\sqrt{118})\ell}{86+8\sqrt{118}}$; $\beta_2 = \frac{(14-\sqrt{118})\ell}{-86+8\sqrt{118}}$
16		$m_3 = 2\,m_1$; $0A = \frac{\ell}{3}$; $c = \frac{2\,m_1\,g}{\ell}$	$K_{1,2} = \sqrt{\frac{13 \pm \sqrt{37}}{11}\frac{g}{r}}$; $\beta_1 = \frac{-(13+\sqrt{37})\ell}{102+18\sqrt{37}}$; $\beta_2 = \frac{(13-\sqrt{37})\ell}{-102+18\sqrt{37}}$

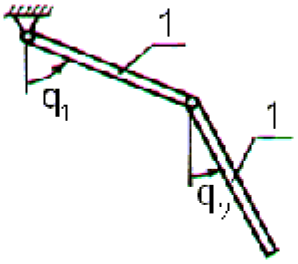
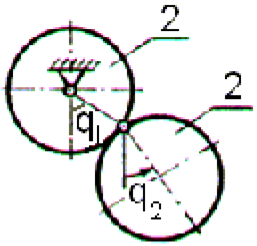
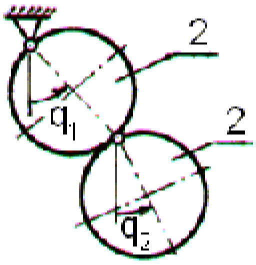
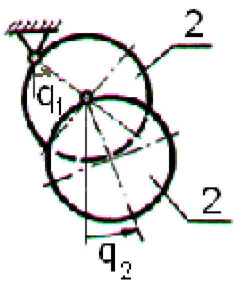
Продолжение табл. 4.4

№ вар.	Схема	Дополнительные данные	Ответ
17		$m_3 = 2\,m_1$; $c = \dfrac{3\,m_1\,g}{2\,\ell}$	$K_{1,2} = \sqrt{\dfrac{4 \pm \sqrt{7}}{3}\,\dfrac{g}{r}}$; $\beta_1 = \dfrac{(5-\sqrt{7})\ell}{15+6\sqrt{7}}$; $\beta_2 = \dfrac{(5+\sqrt{7})\ell}{15-6\sqrt{7}}$
18		$m_3 = 2\,m_1$; $c = \dfrac{3\,m_1\,g}{4}$	$K_{1,2} = \sqrt{\dfrac{4 \pm \sqrt{7}}{3}\,\dfrac{g}{r}}$; $\beta_1 = \dfrac{-(4+\sqrt{7})\ell}{15+6\sqrt{7}}$; $\beta_2 = \dfrac{(4-\sqrt{7})\ell}{-15+6\sqrt{7}}$
19		$m_3 = 2\,m_2$; $c = \dfrac{m_2\,g}{r}$	$K_1 = \sqrt{\dfrac{g}{r}}$; $K_2 = \sqrt{\dfrac{2g}{7r}}$; $\beta_1 = -\dfrac{r}{2}$; $\beta_2 = 2r$
20		$c = \dfrac{m_2\,g}{r}$	$K_{1,2} = \sqrt{\dfrac{8 \pm 2\sqrt{5}}{11}\,\dfrac{g}{r}}$; $\beta_1 = \dfrac{-2(4-\sqrt{5})r}{9+5\sqrt{5}}$; $\beta_1 = \dfrac{2(4-\sqrt{5})r}{5\sqrt{5}-9}$
21		$R = 3\,r$	$K_{1,2} = \sqrt{\dfrac{8 \pm 2\sqrt{5}}{11}\,\dfrac{g}{r}}$; $\beta_1 = \dfrac{-(4+\sqrt{5})}{9+5\sqrt{5}}$; $\beta_1 = \dfrac{4-\sqrt{5}}{5\sqrt{5}-9}$

Продолжение табл. 4.4

№ вар.	Схема	Дополнительные данные	Ответ
22		$0A = \frac{\ell}{3}$; $c = \frac{2m_1 g}{\ell}$	$K_{1,2} = \sqrt{\frac{15 \pm 6\sqrt{3}}{13}\,\frac{g}{\ell}}$; $\beta_1 = \frac{-(5+2\sqrt{3})}{27+16\sqrt{3}}$; $\beta_2 = \frac{5-2\sqrt{3}}{-27+16\sqrt{3}}$
23		$0A = \frac{\ell}{2}$; $c = \frac{2m_1 g}{\ell}$	$K_{1,2} = \sqrt{\frac{3(15 \pm \sqrt{73})}{19}\,\frac{g}{\ell}}$; $\beta_1 = \frac{-3(15+\sqrt{73})}{29+7\sqrt{73}}$; $\beta_2 = \frac{3(15-\sqrt{73})}{7\sqrt{73}-29}$
24		$c = \frac{2m_1 g}{\ell}$	$K_{1,2} = \sqrt{\frac{15 \pm 9\sqrt{2})}{7}\,\frac{g}{\ell}}$; $\beta_1 = \frac{-(5+3\sqrt{2})}{11+8\sqrt{2}}$; $\beta_2 = \frac{5-3\sqrt{2})}{8\sqrt{2}-11}$
25		$0A = \frac{\ell}{3}$	$K_{1,2} = \sqrt{\frac{3(7 \pm \sqrt{10})}{19}\,\frac{g}{\ell}}$; $\beta_1 = \frac{-(7+\sqrt{10})}{17+8\sqrt{10}}$; $\beta_2 = \frac{7-\sqrt{10}}{-17+8\sqrt{10}}$
26		$0A = \frac{\ell}{2}$	$K_{1,2} = \sqrt{\frac{45 \pm 3\sqrt{73})}{19}\,\frac{g}{\ell}}$; $\beta_1 = \frac{-3(15+\sqrt{73})}{29+7\sqrt{73}}$; $\beta_2 = \frac{3(15-\sqrt{73})}{7\sqrt{73}-29}$

Окончание табл. 4.4

№ вар.	Схема	Дополнительные данные	Ответ
27		–	$K_{1,2}=\sqrt{\frac{21\pm 6\sqrt{7})}{7}\frac{g}{\ell}}$; $\beta_1=\frac{-(21+6\sqrt{7})}{35+16\sqrt{7}}$; $\beta_2=\frac{21-6\sqrt{7}}{16\sqrt{7}-35}$
28		–	$K_1=\sqrt{\frac{2g}{r}}$; $K_2=\sqrt{\frac{2g}{5r}}$; $\beta_1=-1$; $\beta_2=1$
29		–	$K_1=\sqrt{\frac{2g}{r}}$; $K_2=\sqrt{\frac{16g}{17r}}$; $\beta_1=-\frac{1}{2}$; $\beta_2=\frac{2}{3}$
30		–	$K_{1,2}=\sqrt{\frac{11\pm\sqrt{33})}{11}\frac{g}{\ell}}$; $\beta_1=\frac{-2(11+\sqrt{33})}{11+5\sqrt{33}}$; $\beta_2=\frac{2(11-\sqrt{33})}{5\sqrt{33}-11}$