Министерство транспорта Российской Федерации
Федеральное агентство железнодорожного транспорта
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Дальневосточный государственный университет путей сообщения»

Кафедра «Высшая математика»

Виноградова П.В., Королева Т.Э.

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА
Контрольные работы №3 и №4 для направления подготовки 13.03.02

Рекомендовано
Методическим советом по качеству
образовательной деятельности ДВГУПС
в качестве методического пособия

Хабаровск
Издательство ДВГУПС
2023

УДК
ББК

Рецензенты:

Кафедра прикладной математики
Тихоокеанского государственного университета
(заведующая кафедрой кандидат физико – математических наук,
доцент *Т.М. Попова*);

кандидат педагогических наук,
доцент кафедры математики и информационных технологий
Педагогического института Тихоокеанского государственного университета
И.В. Карпова

Составители: Виноградова П.В., Королева Т.Э.

Высшая математика
[методическое пособие] / составители: П.В. Виноградова, Т.Э. Королева. – Хабаровск : Изд-во ДВГУПС, 2023. – 26 с.

Соответствует рабочей программе дисциплины «Высшая математика».

Состоит из четырех разделов. В каждом их них изложен теоретический материал, рассмотрены примеры с решениями и приведены контрольные вопросы для самопроверки.

Методическое пособие предназначено для студентов 2-го курса заочной формы обучения по направлению подготовки 13.03.02 «Электроэнергетика и электротехника» для выполнения контрольных работ №3 и №4, предназначено для самостоятельного изучения материала и для подготовки к экзамену.

УДК
ББК

© ДВГУПС, 2023

ВВЕДЕНИЕ

Данное методическое пособие содержит контрольные работы №3 и №4, рассчитанные на 1 и 2 семестры второго года обучения.

В пособие включены методические указания по выполнению заданий. Весь материал, содержащийся в контрольных работах, разбит на разделы. Такое разбиение выбрано для того, чтобы студент мог самостоятельно пополнить материал, выдаваемый преподавателем за короткое время, отведенное на аудиторные занятия. В конце каждого раздела находятся теоретические вопросы, которые даны студенту в помощь при подготовке к сдаче экзамена. Отвечая на вопросы устно, студент выстраивает последовательность ответа, что способствует повышению уровня самоорганизации. Содержащиеся в пособии практические задания требуется выполнить в тетради и сдать на проверку. В данном пособии теоретические вопросы и практические задания выступают как средства развития интеллектуальных способностей.

Нумерация заданий в контрольных работах соответствует последней цифре шифра зачетной книжки студента. Примечание: если последняя цифра в шифре 0, то ей соответствует 10 вариант.

В пособие включен список литературы, которой студентам, по необходимости, рекомендуется пользоваться при выполнении заданий контрольных работ и для подготовки к сдаче экзамена или зачета.

Материал в пособии выстроен таким образом, чтобы помочь студенту выйти на уровень самоорганизации, самообразования и самовоспитания при подготовке к экзамену (зачету).

Контрольная работа № 3

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Раздел 1. Дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами

Определение 1. Дифференциальным уравнением называется соотношение, связывающее независимую переменную x, неизвестную функцию y, и ее производные y', y'' и т. д., причем порядок уравнения равен порядку наивысшей производной.

Рассмотрим уравнение 2-го порядка:

$$y''+ay'+by= f(x), \tag{1}$$

где a, b – постоянные действительные коэффициенты; $f(x)$ – неизвестная функция.

Уравнение (1) дополняется начальными условиями

$$y(0)= y_0;\ y'(0)= y'_0. \tag{2}$$

Общее решение уравнения (1) представляет собой сумму: $y= \bar{y}+ y^*$, где y^* – частное решение уравнения (1), а $\bar{y}$ – решение однородного уравнения:

$$\bar{y}'' + a\bar{y}' + b\bar{y} = 0. \tag{3}$$

1.1. Однородное дифференциальное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами

Решение уравнения (3) будем искать в виде $y= e^{kx}$, тогда для определения числа k получаем характеристическое уравнение:

$$k^2 + ak + b = 0, \tag{4}$$

решение которого имеет вид:

$$k_{1,2} = -\frac{a}{2} \pm \sqrt{\frac{a^2}{4} - b} = -\frac{a}{2} \pm \sqrt{D},$$

где $D = \frac{a^2}{4} - b$ – дискриминант.

Рассмотрим три случая решения характеристического уравнения.

1. Если $D>0$, т. е. корни характеристического уравнения действительные и разные $k_1 \neq k_2$. Тогда обе функции $e^{k_1 x}$ и $e^{k_2 x}$ удовлетворяют уравнению (3), и общее решение имеет вид

$$y = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x}.$$

Для нахождения частного решения необходимо использовать условия (2).

Пример 1

Найти частное решение дифференциального уравнения $y''-5y'+4y=0$ с начальными условиями $y(0)=1,\ y'(0)=2$.

Решение:

Соответствующее характеристическое уравнение имеет вид:

$$k^2 - 5k + 4 = 0.$$

Определим значение дискриминанта $D = \frac{(-5)^2}{4} - 4 = 2{,}25 > 0$ и найдем корни $k_{1,2} = -\frac{-5}{2} \pm \sqrt{\frac{(-5)^2}{4} - 4} \Rightarrow\ k_1 = 1;\ k_2 = 4$ – действительные и разные $k_1 \neq k_2$.

Тогда решение дифференциального уравнения:

$$y = C_1 e^{1\cdot x} + C_2 e^{4\cdot x}.$$

Для нахождения частного решения найдем производную y' от полученного уравнения:

$$y' = C_1 e^{x} + 4C_2 e^{4x}. \qquad (5)$$

Подставляя начальные условия при $x=0$ в найденные $y(x)$ и $y'(x)$, получим систему для определения постоянных C_1 и C_2:

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 1; \\ C_1 + 4C_2 = 2; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 = 1 - C_2; \\ 1 - C_2 + 4C_2 = 2. \end{cases}$$

Отсюда

$$C_2 = \frac{1}{3}; \qquad C_1 = \frac{2}{3}.$$

Подставляем коэффициенты C_1 и C_2 в уравнение (5), тогда частное решение исходного уравнения примет вид:

$$y(x)=\frac{1}{3}e^{x}+\frac{2}{3}e^{4x}.$$

2. Если $D=0$, корни характеристического уравнения действительные и равные $k_1=k_2=k$, тогда общее решение записывается в виде:

$$y=(C_1+C_2x)e^{kx}.$$

Пример 2

Найти частное решение уравнения: $y''+4y'+4y=0$, с начальными условиями $y(0)=2$, $y'(0)=1$.

Решение:

Составим соответствующее характеристическое уравнение:

$$k^2+4k+4=0.$$

Вычислим дискриминант $D=\frac{4^2}{4}-4=0$ и корни уравнения

$$k_{1,2}=-\frac{4}{2}\pm\sqrt{\frac{4^2}{4}-4}\Rightarrow k_1=k_2=-2.$$

Таким образом, общее решение имеет вид:

$$y(x)=(C_1+C_2x)e^{-2x}.$$

Найдем производную от полученного уравнения:

$$y'(x)=C_2e^{-2x}-2e^{-2x}(C_1+C_2x). \qquad (6)$$

Подставим начальные условия при $x=0$ в $y(x)$ и $y'(x)$. Таким образом, получим систему:

$$\begin{cases}C_1=2;\\ C_2-2C_1=1;\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}C_1=2;\\ C_2=2C_1+1.\end{cases}\Rightarrow C_1=2,\ C_2=5.$$

При подстановке C_1 и C_2 в уравнение (6) частное решение примет вид:

$$y(x)=(2+5x)e^{-2x}.$$

3. Если $D<0$, в этом случае корни характеристического уравнения комплексные:

$$k_{1,2}=-\frac{a}{2}\pm\sqrt{\frac{a^2}{4}-b}=\alpha\pm\beta i,$$

где $\alpha=-\frac{a}{2},\beta=\sqrt{\frac{a^2}{4}-b}$. Общее решение однородного дифференциального уравнения имеет вид:

$$y(x)=e^{\alpha x}(C_1\cos\beta x+C_2\sin\beta x).$$

Пример 3

Найти общее решение дифференциального уравнения $y''+4y'+13y=0$.

Решение:

Соответствующее характеристическое уравнение имеет вид:

$$k^2+4k+13=0.$$

Определим знак дискриминанта $D=\frac{4^2}{4}-13=-9<0$ и корни уравнения:

$$k_{1,2}=-\frac{4}{2}\pm\sqrt{\frac{4^2}{4}-13}=-2\pm3i,\ \text{где}\ i=\sqrt{-1}.$$

где $k_{1,2}=-2\pm3i$, $\alpha=-2$; $\beta=3$.

Тогда общее решение запишется в виде:

$$y(x)=e^{-2x}(C_1\cos3x+C_2\sin3x).$$

Задание 1 к разделу 1

1. *а*) $2y''-14y'+12y=0; y(0)=-1; y'(0)=1;$

   б) $y''+8y'+16y=0; y(0)=y'(0)=2;$

2. *а*) $3y''-12y'+9y=0; y(0)=2; y'(0)=1;$

   б) $y''-12y'+36y=0; y(0)=y'(0)=4;$

3. *а*) $-2y''-16y'-30y=0; y(0)=1; y'(0)=-2;$

   б) $y''+14y'+49y=0; y(0)=y'(0)=3;$

4. *а*) $4y''-32y'+48y=0; y(0)=-2; y'(0)=3;$

   б) $y''-12y'+36y=0; y(0)=y'(0)=6.$

5. *а*) $-3y''+18y'=0; y(0)=-3; y'(0)=2;$

   б) $y''-2y'+y=0; y(0)=y'(0)=7;$

6. *а*) $8y''-8y'=0; y(0)=2; y'(0)=3;$

   б) $y''+4y'+4y=0; y(0)=y'(0)=5;$

7. *а*) $7y''-35y'+28y=0; y(0)=-3; y'(0)=4;$

   б) $y''-6y'+9y=0; y(0)=y'(0)=8;$

8. *а*) $-9y''+27y'-18y=0; y(0)=4; y'(0)=7;$

   б) $y''+2y'+y=0; y(0)=y'(0)=2;$

9. *а*) $6y''-36y'+30y=0; y(0)=-3; y'(0)=2;$

   б) $y''-10y'+25y=0; y(0)=y'(0)=4;$

10. *а*) $7y''-28y=0; y(0)=5; y'(0)=-1;$

    б) $y''+6y'-9y=0; y(0)=y'(0)=6.$

1.2. Неоднородное дифференциальное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами

Рассмотрим построение общего решения уравнения (1).

Решение этого уравнения имеет вид:

$y(x)=\bar{y}(x)+y^*(x)$, где $\bar{y}$ – решение соответствующего однородного уравнения (см. подраздел 1.1 раздела 1).

Для нахождения функции $y^*(x)$ воспользуемся методом подбора.

Предположим, что выбор функции $y^*(x)$ не зависит от решения однородного уравнения.

Пусть правая часть дифференциального уравнения (1) имеет вид:

1) $f(x)=ae^{\alpha x}, \alpha \neq k_1 \neq k_2$, тогда $y^*(x)=Ae^{\alpha x}$;

2) $f(x)=\sum_{i=0}^{n} a_i x^i, a \neq 0$, тогда $y^*(x)=\sum_{i=1}^{n} A_i x^i$;

3) $f(x)=a\sin\beta x, \beta \neq k_1 \neq k_2$, тогда $y^*(x)=A_1 \sin\beta x+ A_2 \cos\beta x$;

4) $f(x)=a\cos\beta x, \beta \neq k_1 \neq k_2$, тогда $y^*(x)=A_1 \sin\beta x+ A_2 \cos\beta x$;

причем A, $A_i (i=1,2,...,n)$, A_1, A_2 – неопределенные коэффициенты, k_1, k_2 – корни характеристического уравнения.

Пример 4

Найти частное решение уравнения: $y''-2y'+y=3e^{2x}$ с начальными условиями $y(0)=1; y'(0)=3$.

Решение:

Общее решение дифференциального уравнения будем искать в виде суммы:

$$y(x)=\bar{y}(x)+y^*(x),$$

где $\bar{y}(x)=e^x(C_1+C_2 x)$ (см. подраздел 1.1 раздела 1).

Исходя из вида правой части исходного уравнения, выберем $y^*(x)$:

$$y^* = Ae^{2x}.$$

Для того чтобы вычислить значение неопределенного коэффициента A, находим производные:

$$(y^*)'=2Ae^{2x}; (y^*)''=4Ae^{2x}$$

и подставляем их в левую часть исходного дифференциального уравнения, получим:

$$4Ae^{2x}-4Ae^{2x}+Ae^{2x}=3e^{2x}.$$

Откуда следует, что $A=3$ и $y^*(x)=3e^{2x}$.

Следовательно, общее решение неоднородного уравнения имеет вид:

$$y(x)=(C_1+C_2x)e^x+3e^{2x}.$$

Найдем производную $y'(x)$ от полученного решения, учитывая, что C_1 и C_2 – некоторые постоянные:

$$y'(x)=C_2e^x+(C_1+C_2x)e^x+6e^{2x},$$

и подставим начальные условия при $x=0$ в $y(x)$ и $y'(x)$, тогда:

$$\begin{cases} C_1+3=1; \\ C_2+C_1+6=3, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1=-2; \\ C_2-2+6=3, \end{cases} \Rightarrow C_1=-2; C_2=-1.$$

Таким образом, частное решение окончательно примет вид:

$$y=3e^{2x}-(1+2x)e^{x}.$$

Пример 5

Найти частное решение: $y''-2y'-3y=3x^2+4$ с начальными условиями $y(0)=3;\ y'(0)=5$.

Решение:

Общее решение дифференциального уравнения имеет вид:

$$y(x)=\bar{y}+y^*,$$

где $\bar{y}=C_1e^{-x}+C_2e^{3x}$ (см. подраздел 1.1 раздела 1).

Опираясь на вид правой части исходного уравнения, выбираем $y^*(x)$:

$$y^*(x)=Ax^2+Bx+C,$$

где A,B,C – неопределенные коэффициенты.

Для того чтобы вычислить значения неопределенных коэффициентов A,B,C, находим $(y^*)'$ и $(y^*)''$:

$$(y^*)'=2Ax+B;(y^*)''=2A.$$

Полученные производные подставляем в левую часть исходного дифференциального уравнения:

$$2A-2(2Ax+B)-3(Ax^2+Bx+C)=3x^2+4;$$
$$-3Ax^2+(-4A-3B)x+(2A-2B-3C)=3x^2+4.$$

Находим коэффициенты A,B,C следующим образом: приравниваем коэффициенты левой и правой части полученного уравнения при одинаковых степенях x:

$$\begin{array}{lll} при & x^2 & -3A=3 \\ при & x^1 & -4A-3B=0 \\ при & x^0 & 2A-2B-3C=4 \end{array}.$$

Решением описанной выше системы из трех уравнений является:

$$A=-1; B=\frac{4}{3}; C=-\frac{26}{9}.$$

Следовательно, общее решение имеет вид:

$$y=C_1e^{-x}+C_2e^{3x}-x^2+\frac{4}{3}x-\frac{26}{9}.$$

Используя начальные условия, вычислим коэффициенты C_1 и C_2. Находим производную:

$$y'=-C_1e^{-x}+3C_2e^{3x}-2x+\frac{4}{3}.$$

Подставляем начальные условия при $x=0$ в $y(x)$ и $y'(x)$, тогда получим систему:

$$\begin{cases} C_1+C_2-\frac{26}{9}=3; \\ -C_1+3C_2+\frac{4}{3}=5, \end{cases}$$

откуда $C_1=\frac{7}{2}; C_2=\frac{43}{18}$, а, следовательно, частное решение имеет вид:

$$y=\frac{7}{2}e^{-x}+\frac{43}{18}e^{3x}-x^2+\frac{4}{3}x-\frac{26}{9}.$$

Теоретические вопросы к разделу 1

1. Определение дифференциального уравнения, начальные условия.
2. Структура общего решения дифференциального уравнения второго порядка, частное решение.
3. Однородное дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами, характеристическое уравнение.
4. Три случая решения характеристического уравнения и соответствующее общее решение однородного уравнения.

5. Структура общего решения дифференциального уравнения второго порядка.

6. Метод подбора частного решения неоднородного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами.

Задание 2 к разделу 1

Найти частные решения, удовлетворяющие начальным условиям (начальные условия для обоих уравнений одинаковы):

1. *а*) $-y''+4y'-4y=3e^{5x}$;
   б) $2y''-14y'-16y=4+2x-6x^2$;
   $y(0)=y'(0)=2$;
2. *а*) $3y''-21y'+30y=5e^{-3x}$;
   б) $-y''-4y'-3y=-5-2x^2$;
   $y(0)=y'(0)=4$;
3. *а*) $5y''+5y'=7e^{4x}$;
   б) $4y''-20y'+14y=4x+20x^2$;
   $y(0)=y'(0)=5$;
4. *а*) $6y''-42y'+36y=8e^{2x}$;
   б) $-2y''+4y'-2y=-2x^2+2x+2$;
   $y(0)=y'(0)=-2$;
5. *а*) $-3y''+9y'-6y=-4e^{x}$;
   б) $2y''-18y'+28y=2x^2+2x+6$;
   $y(0)=y'(0)=-4$;
6. *а*) $5y''-30y'+40y=4e^{-2x}$;
   б) $2y''-8y'+6y=2x^2+16x-4$;
   $y(0)=y'(0)=3$;
7. *а*) $6y''+6y=11e^{6x}$;
   б) $7y''-21y'+14y=42x-49x^2$;
   $y(0)=y'(0)=-5$;
8. *а*) $3y''-9y'-12y=14e^{-3x}$;
   б) $-5y''+40y'-75y=-20x^2+35$;
   $y(0)=y'(0)=-1$;
9. *а*) $-4y''+20y'=7e^{4x}$;
   б) $8y''-56y'+84y=-24x^2+8$;
   $y(0)=y'(0)=1$;
10. *а*) $2y''-10y'+12y=3e^{5x}$;
    б) $-y''+6y'-9y=-2x^2-x+3$;
    $y(0)=y'(0)=6$.

Контрольная работа № 4
РЯДЫ И ИХ ПРИМЕНЕНИЕ

Раздел 2. Числовые ряды

Определение 1. Числовым рядом называется бесконечная сумма членов последовательности:

$$u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots = \sum_{i=1}^{\infty} u_i .$$

Признаки сходимости знакоположительного числового ряда можно разделить на необходимый и достаточные.
Необходимый признак сходимости состоит в том, что:

$$\lim_{n\to\infty} u_n = 0 .$$

Если этот признак не выполняется, то ряд расходится.

Рассмотрим четыре достаточных признака сходимости числового ряда $\sum_{i=1}^{\infty} u_i$.

1. Признак Даламбера.

Если $\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = q$, то $\begin{cases} при \quad q<1 \quad ряд \quad сходит ся, \\ при \quad q>1 \quad ряд \quad расходит ся, \end{cases}$

при $q = 1$ получаем неопределенность, надо применить другой признак.

2. Радикальный признак Коши.

Если $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = q$, $\begin{cases} при \quad q<1 \quad ряд \quad сходит ся, \\ при \quad q>1 \quad ряд \quad расходит ся, \end{cases}$

при $q = 1$ получаем неопределенность, следовательно, необходимо выбрать другой признак сходимости.

3. Интегральный признак Коши.

Если $\int_1^{\infty} u_n dn$ существует, то ряд сходится; если интеграл не существует (т. е. равен $\pm\infty$) – ряд расходится.

4. Признак сравнения.

Если $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ сходится и $u_n \le v_n$, то $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ также сходится, если $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ расходится и $u_n \ge v_n$, то $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ также расходится.

Второй признак сравнения. Рассмотрим два ряда $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$. Если существует конечный, отличный от нуля предел $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{u_n}{v_n}$, то оба ряда сходятся или расходятся одновременно.

Для признака сравнения в качестве ряда $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ часто используется гармонический ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$, который всегда расходится. Также для сравнения используется обобщенный гармонический ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$, который при $\alpha > 1$ сходится, при $\alpha \leq 1$ расходится. Таким образом, ряд вида $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{A}{n^{\alpha}}$ будет $\begin{cases} при \quad \alpha > 1 \quad ряд \quad сходится, \\ при \quad \alpha \leq 1 \quad ряд \quad расходится, \end{cases}$ где $A-$ произвольная постоянная величина; причем $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{u_n}{v_n} \neq 0$.

Пример 1

Исследовать ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{n+1}}{(n+1)!}$ на сходимость.

Решение:
Применим признак Даламбера:

$$u_n = \frac{3^{n+1}}{(n+1)!};\ u_{n+1} = \frac{3^{n+1+1}}{((n+1)+1)!} = \frac{3^{n+2}}{(n+2)!};$$

$$\lim_{n \to \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n \to \infty} \frac{3^{n+2} \cdot (n+1)!}{3^{n+1} \cdot (n+2)!} = \lim_{n \to \infty} \frac{3^n 3^2 \cdot (n+1)!}{3^n 3^1 \cdot (n+1)!(n+2)} =$$

$$= \lim_{n \to \infty} \frac{3}{n+2} = \frac{3}{\infty + 2} = 0 < 1 \Rightarrow \text{ ряд сходится.}$$

Пример 2

Исследовать ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n^2 + 1}{1 + n + 3n^2} \right)^{3n}$ на сходимость.

Решение:
Применим радикальный признак Коши:

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{n^2+1}{1+n+3n^2}\right)^{3n}}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2+1}{1+n+3n^2}\right)^3=\left(\frac{1}{3}\right)^3=\frac{1}{27}<1.$$

Отсюда следует, что ряд сходится.

Замечание: $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n^2+1}{1+n+3n^2}\right)^3$ вычисляем следующим образом: так как в числителе и знаменателе дроби старшие степени переменной n равны, то выписываем коэффициенты при n^2 соответственно из числителя и знаменателя.

Пример 3

Исследовать ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\ln n}{3n}$ на сходимость.

Решение:

Применим интегральный признак Коши:

$$\int_1^{\infty}\frac{\ln x}{3x}dx=\left|\begin{array}{c}\ln x=t\\ dt=\dfrac{dx}{x}\\ x_0=1\Rightarrow t_0=\ln 1=0\\ x_1=\infty\Rightarrow t_1=\ln\infty=\infty\end{array}\right|=\int_0^{\infty}\frac{t}{3}dt=\frac{1}{3}\int_0^{\infty}tdt=$$

$$=\frac{1}{3}\int_0^{\infty}tdt=\frac{1}{3}\cdot\frac{t^2}{2}\Big|_0^{\infty}=\frac{1}{3}\cdot\frac{\infty^2}{2}-\frac{1}{3}\cdot\frac{0^2}{2}=\infty\ ,$$

так как интеграл не существует, то ряд расходится.

Пример 4

Исследовать ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{4}{n^2+n-3}$ на сходимость.

Решение:

Сравним ряд с $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{4}{n^2}$, который сходится, так как степень α переменной n: $\alpha=2>1$. При этом $\frac{4}{n^2+n-3}<\frac{4}{n^2}$, следовательно ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{4}{n^2+n-3}$ также сходится.

Пример 5

Исследовать на сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n^3+2n-1}$.

Решение. Общий член данного ряда $a_n = \frac{n}{n^3 + 2n - 1}$. Рассмотрим ряд $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$, где $b_n = \frac{1}{n^2}$ (*). В дальнейшем будет показано, что ряд (*) сходится. Применим к данным рядам второй признак сравнения. Имеем $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^3}{n^3 + 2n - 1} = 1$. Тогда по второму признаку сравнения исследуемый ряд сходится.

Теоретические вопросы к разделу 2

1. Необходимый признак сходимости числового ряда.
2. Достаточный признак Даламбера.
3. Радикальный признак Коши.
4. Интегральный признак Коши.
5. Признаки сравнения.

Задание 1 к разделу 2

Выписать три первых члена и исследовать сходимость числовых рядов:

1. а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n}{\sqrt{n} \cdot n!}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{ln(n+1)}{n+1}$;
2. а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^{n-1} \cdot n^2}{5^n \cdot (n-1)!}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^4}{(n^5 + 4n + 2)^2}$;
3. а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{7^{n+2}}{3^{n-2} \cdot (n+1)!}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\cos n}{\sqrt{n^3}}$;
4. а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^{2n}(n-1)}{n \cdot (n+2)!}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4n}{\sqrt[3]{n^5 + n^2 - 4}}$;
5. а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n \cdot n^3}{n!(n-1)}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n^3 + 3\sqrt{n} - 1}$;
6. а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{3^{n-1}\sqrt{n}}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n-4) \cdot ln(n-4)}$;
7. а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{7^{n+2}}{3^{2n} \cdot \sqrt[4]{2n-1}}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2e^n}{4 + e^{n2}}$;
8. а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^{3n-1} \cdot (n-1)!}{(n+1)!}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n^2 - 5n}}{2n\sqrt{n}}$;

9. а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n-1)!}{4^n \cdot (n!)}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{8}{\sqrt[3]{n^2}(n-3)}$;

10. а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!(n+1)!}{3^{2n-3} \cdot n}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+n^2}{n^6+5n^3-n}$.

Раздел 3. Степенные ряды

Определение 2. Степенные ряды имеют вид:

$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ – ряд по степеням x;

$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$ – ряд по степеням $(x-x_0)$.

Определение 3. Если степенной ряд сходится на интервале $(-R;R)$, то этот интервал называется областью сходимости ряда, т. е. для любого значения $x \in (-R;R)$ числовой ряд сходится. Половина этого интервала называется радиусом сходимости.

Для определения радиуса сходимости применяются следующие формулы:

$$R = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{a_{n+1}}; \quad R = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{a_n}}.$$

Затем определяется сходимость на концах интервала. Если на правой границе интервала ряд сходится, то на левой также сходится $(-R \le x \le R)$, так как соответствующий числовой ряд будет знакопеременным.

Если на правой границе интервала ряд расходится, то границы интервала не включаются в область сходимости $(-R < x < R)$.

Рассмотрим примеры.

Пример 5

Определить область сходимости степенного ряда и проверить сходимость на границах интервала:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n \cdot x^n}{3n^2+1}.$$

Решение:

$$a_n = \frac{5^n}{3n^2+1}; \quad a_{n+1} = \frac{5^{n+1}}{3(n+1)^2+1}.$$

Находим R:

$$R = \lim_{n\to\infty} \frac{5^n \cdot (3(n+1)^2+1)}{(3n^2+1)\cdot 5^{n+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{5^n \cdot (3n^2+6n+4)}{(3n^2+1)\cdot 5^n \cdot 5^1} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{5} \cdot \frac{3}{3} = \frac{1}{5},$$

т.е. область сходимости $\left(-\frac{1}{5};\frac{1}{5}\right)$.

Проверим сходимость на границах интервала. На правой границе интервала $x=\frac{1}{5}$, соответствующий числовой ряд имеет вид:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5^n\cdot\left(\frac{1}{5}\right)^n}{3n^2+1}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3n^2+1}.$$

Для проверки сходимости ряда сравним его с обобщенным гармоническим рядом $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$, который сходится, так как степень α переменной n: $\alpha=2>1$. При этом $\frac{1}{3n^2+1}<\frac{1}{n^2}$, тогда ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3n^2+1}$ также сходится $\Rightarrow$ $-\frac{1}{5}\le x\le\frac{1}{5}$ – интервал сходимости.

Пример 6

Определить область сходимости степенного ряда и проверить сходимость на границах интервала:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n\cdot(x-1)^n}{3^{n-1}n}.$$

Решение:

$$a_n=\frac{2^n}{3^{n-1}n};\ a_{n+1}=\frac{2^{n+1}}{3^{n+1-1}(n+1)}=\frac{2^{n+1}}{3^n(n+1)}.$$

Находим R:

$$R=\lim_{n\to\infty}\frac{2^n(n+1)3^n}{3^{n-1}n\cdot 2^{n+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{2^n(n+1)3^n}{3^n3^{-1}n\cdot 2^n2^1}=\frac{1}{3^{-1}\cdot 2}=\frac{3}{2}.$$

Тогда область сходимости

$$-\frac{3}{2}<x-1<\frac{3}{2}\Rightarrow-\frac{3}{2}+1<x<\frac{3}{2}+1\Rightarrow-\frac{1}{2}<x<\frac{5}{2}.$$

Проверим сходимость на правой границе интервала $x=\frac{5}{2}$:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n\cdot\left(\frac{5}{2}\right)^n}{3^{n-1}n}=\sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{5^n}{3^{n-1}n}.$$

Для проверки сходимости ряда применим признак Даламбера:

$$u_n=\frac{5^n}{3^{n-1}n};u_{n+1}=\frac{5^{n+1}}{3^{n+1-1}(n+1)}=\frac{5^{n+1}}{3^n(n+1)},$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{5^{n+1}3^{n-1}n}{3^n(n+1)\cdot 5^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{5^n5^1 3^n3^{-1}n}{3^n(n+1)\cdot 5^n}=\frac{5\cdot 3^{-1}}{1}=\frac{5}{3}>1\Rightarrow$$

ряд расходится. Значит, границы не включаются в область сходимости $-\frac{1}{2}<x<\frac{5}{2}$.

Теоретические вопросы к разделу 3

1. Степенной ряд по степеням x, $(x-x_0)$.
2. Область сходимости степенного ряда, радиус сходимости.
3. Формулы вычисления радиуса сходимости степенного ряда.

Задание 1 к разделу 3

Найти область сходимости и проверить сходимость на границах интервала:

1. а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^{n+1}n}{2n-1}\cdot x^n$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4^n(x-1)^n}{2^{n-1}n}$;
2. а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4^{n+1}\cdot x^n}{5^n n^2\sqrt{n}}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{2n}(x+2)^n}{(n-1)3^{n-1}}$;
3. а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^{2n}\cdot x^n}{(n^2+1)\sqrt{n^3-2}}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{n-1}\sqrt{n}(x-2)^n}{(n+1)4^{n+1}}$;
4. а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{5^n}\cdot x^n}{3(n^3+2)}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)5^{n-}(x-1)^n}{n^2 2^{3n+1}}$;
5. а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\cdot x^n}{2^n(n+5)!}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(5n-1)(x-2)^n}{(2n^3+1)5^n}$;

6. а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4^{2n+1}\cdot x^n}{3^{2n-1}\cdot(n^2-n+1)}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n(n+2)(x-1)^n}{7^{n+2}n^2}$;

7. а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^{n-1}\cdot x^n}{(n^3+4n+2)\cdot 2^{n-1}}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{2n}n^3(x-2)^n}{3^n(\sqrt{n^3}+5n)}$;

8. а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt[3]{2^n}x^n}{n^2\cdot(\sqrt[3]{n^2}+\sqrt{n-1})}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4^{n+3}(n+1)(x-1)^n}{2^{n-1}n^2}$;

9. а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{n+3}\cdot x^n}{5^{2n-3}(n^2-3)}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^{n+1}(n^3+2)(x-1)^n}{(2+n^2)\sqrt{n}}$;

10. а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^{n-1}n!\cdot x^n}{2^n(2n)!}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n^2+3)(x-2)^n}{3^{2n-1}n^2 4^{3n}}$.

Раздел 4. Приложение степенных рядов

4.1. Приближенное вычисление определенных интегралов

В курсе высшей математики доказывается, что функцию $f(x)$, которая бесконечное число раз дифференцируемая, в точке $x=0$ можно записать в виде ряда:

$$f(x)=f(0)+\frac{x}{1}f'(0)+\frac{x^2}{2!}f''(0)+\ldots+\frac{x^n}{n!}f^{(n)}(0)+\ldots,$$

который называется рядом Маклорена.

Рассмотрим примеры разложений функций в ряд:

1. $\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+\ldots+(-1)^{n+1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}+R_n(x),$ (7)

2. $\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\ldots\frac{x^n}{n!}+R_n(x),$

3. $e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}+R_n(x),$

4. $e^{-x}=1-x+\frac{x^2}{2!}-\frac{x^3}{3!}+\ldots+(-1)^n\frac{x^n}{n!}+R_n(x),$

5. $\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\ldots+(-1)^{n+1}\frac{x^n}{n}+R_n(x),$

6. $\frac{1}{1+x}=1-x+x^2-x^3+\ldots+(-1)^n\cdot x^n+R_n(x),$

где $R_n(x)$ – называют остаточным членом ряда, причем для знакопеременных рядов его величина ограничена последним отбрасываемым членом, $n = 0,1,2,...$

Пример 7

Вычислить $sin10^\circ$ с точностью до 10^{-3}.

Решение:

Так как $10^\circ = \frac{\pi}{18} \approx 0,174533$, то, подставляя $x = \frac{\pi}{18}$ в разложение функции $\sin x$ в ряд (7), получим $sin10^\circ = \frac{\pi}{18} - \frac{1}{3!}\left(\frac{\pi}{18}\right)^3 + \frac{1}{5!}\left(\frac{\pi}{18}\right)^5 - \frac{1}{7!}\left(\frac{\pi}{18}\right)^7 ...$, причем, ограничиваясь первым двумя членами, получим $sin10^\circ \approx \frac{\pi}{18} - \frac{1}{3!}\left(\frac{\pi}{18}\right)^3 = 0,17364$, а точность приближения не превышает величины $\delta < \frac{1}{5!}\left(\frac{\pi}{18}\right)^5 < 1,35 \cdot 10^{-6}$.

Пример 8

Вычислить определенный интеграл с точностью до 0,001:

Решение:

$$\int_0^1 \frac{\sin x}{x} dx = \int_0^1 \frac{1}{x}\left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + ...\right) dx = \int_0^1 \left(1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \frac{x^6}{7!} + ...\right) dx =$$

$$\approx \left(x - \frac{x^3}{3 \cdot 3!} + \frac{x^5}{5 \cdot 5!} - \frac{x^7}{7 \cdot 7!}\right)\Bigg|_0^1 = 1 - \frac{1}{3 \cdot 3!} + \frac{1}{5 \cdot 5!} - \frac{1}{7 \cdot 7!} = 1 - \frac{1}{18} + \frac{1}{600} - \frac{1}{35280} \approx$$

$\approx 0,945786.$

Причем точность вычисления $\delta < \frac{1}{9!} = 2,7 \cdot 10^{-6}$.

Задание 1 к разделу 3

Вычислить определенный интеграл с точностью до 0.001.

1. $\int_0^1 x^{-2} \cdot e^x dx$; 2. $\int_0^1 \frac{ln(1+x)}{\sqrt{x}} dx$; 3. $\int_0^1 \sqrt[5]{x^3} \cdot \cos x \, dx$;

4. $\int_0^1 \frac{\cos x}{5\sqrt{x}}\,dx$; 5. $\int_0^1 \frac{\sqrt{x}\sin x}{3}dx$; 6. $\int_0^1 \frac{e^{-x}}{\sqrt{x^3}}dx$;

7. $\int_0^1 \frac{\sin\sqrt{x}}{5x^2}\,dx$; 8. $\int_0^1 5e^{-3x}\,dx$; 9. $\int_0^1 \frac{\cos x^2}{x}\,dx$;

10. $\int_0^1 \frac{\sqrt{x}}{6}\sin x^2\,dx$.

4.2. Интегрирование дифференциальных уравнений с помощью рядов

Рассмотрим уравнение вида: $y' = f(x; y)$ с начальным условием $y(0) = y_0$.

Решение уравнения представляет собой степенной ряд:

$$y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \ldots + a_n x^n + \ldots \qquad (8)$$

Задача заключается в последовательном нахождении коэффициентов $a_i, i = 1,2,3,\ldots,n,\ldots$.

Вычислим коэффициент a_0, подставив в начальное условие решение в виде ряда:

$$y(0) = a_0 + a_1 \cdot 0 + a_2 \cdot 0^2 + a_3 \cdot 0^3 + \ldots +$$
$$+ a_n \cdot 0^n + \ldots \Rightarrow y(0) = a_0 \Rightarrow a_0 = y_0 .$$

Подставим теперь начальное условие в правую часть дифференциального уравнения:

$$y' = f(0; y_0) = y'_0 .$$

Найдем производную от выражения (8), учитывая, что коэффициенты a_i, ($i = 1,2,3,\ldots,n,\ldots$) – некоторые постоянные:

$$y' = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \ldots + na_n x^{n-1} + \ldots$$

Подставим начальное условие в полученное выражение, тогда:

$$y'(0) = a_1 + 2a_2 \cdot 0 + 3a_3 \cdot 0^2 + \ldots +$$
$$+na_n \cdot 0^{n-1} + \ldots \Rightarrow y'(0) = a_1 \Rightarrow a_1 = y_0'.$$

Таким образом, последовательно дифференцируя решение уравнения (8) и, подставляя каждый раз в полученную производную начальное условие, находим необходимое количество коэффициентов $a_i, i = 1,2,3,\ldots,n,\ldots$.

Пример 9

Найти первые три отличных от нуля члена ряда:

$$y' = y^2 + x^2 + e^{-x}, y(0) = 2.$$

Решение:

Разложение в ряд имеет следующий вид:

$$y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \ldots \qquad (9)$$

Из начального условия следует

$$a_0 = y_0 = y(0) = 2.$$

Подставляем начальное условие в правую часть исходного уравнения:

$$y'(0) = y_0^2 + 0^2 + e^{-0} = 2^2 + 0 + 1 = 5.$$

Продифференцируем решение (9):

$$y' = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \ldots$$

Подставим в полученное выражение начальное условие, тогда:

$$y'(0) = a_1 + 2a_2 \cdot 0 + 3a_3 \cdot 0^2 + \ldots \Rightarrow y'(0) = a_1 = 5.$$

Продифференцируем левую и правую часть исходного дифференциального уравнения:

$$y'' = 2y \cdot y' + 2x - e^{-x}$$

и подставим в полученное выражение начальное условие:

$$y''(0) = 2y(0) \cdot y'(0) + 2 \cdot 0 - e^{-0} = 2 \cdot 2 \cdot 5 + 0 - 1 = 19$$

С другой стороны, вторая производная от уравнения (9) равна:

$$y'' = 2a_2 + 6a_3 x + \ldots \Rightarrow y''(0) = 2a_2 + 6a_3 \cdot 0 + \ldots \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y''(0) = 2a_2 \Rightarrow a_2 = \frac{y''(0)}{2}.$$

Тогда $a_2 = \frac{19}{2}$.

Таким образом, искомое решение в виде ряда:

$$y = 2 + 5x + \frac{19}{2} x^2.$$

Задание 2 к разделу 4

Найти три первых значащих члена разложения в степенной ряд решения дифференциального уравнения с заданным начальным условием:

1. $y' = yx + x^2 + 2e^{2x}, \quad y(0) = 3;$
2. $y' = y^2 + 5x\ e^x, \quad y(0) = -2;$
3. $y' = x^2 y + y^2 - xe^{-x}, \quad y(0) = 1;$
4. $y' = ye^x + y^2 - x, \quad y(0) = 4;$
5. $y' = e^x + 2xy^2 - 1, \quad y(0) = -2;$
6. $y' = x^2 + y^2 + xe^{-2x}, \quad y(0) = 2;$
7. $y' = 2x^2 y^2 + ye^x, \quad y(0) = 2;$
8. $y' = x^2 - y^2 - xy + e^x, \quad y(0) = -1;$
9. $y' = xy + x^2 y^2 + e^{-x}, \quad y(0) = -3;$
10. $y' = x - y^3 + xe^{-x}, \quad y(0) = -4.$

СПИСОК РЕКОМЕНДОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Данко, П.Е. Высшая математика в упражнениях и задачах : учеб. пособие для втузов. В 2 ч. Ч. 1 / П.Е. Данко, А.Г. Попов, Т.Я. Кожевникова. – М. : ОНИКС, 2007. – 304 с.

2. Шипачев, В.С. Высшая математика : учеб. пособие для втузов / В.С. Шипачев. – М. : Высш. шк., 2006. – 479 с.

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ 3

Контрольная работа № 3. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА 4

Раздел 1. Дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами 4

Контрольная работа № 4. РЯДЫ И ИХ ПРИМЕНЕНИЕ 133

Раздел 2. Числовые ряды 133

Раздел 3. Степенные ряды 177

Раздел 4. Приложение степенных рядов 20

СПИСОК РЕКОМЕНДОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ 25