МИНИСТЕРСТВО ПУТЕЙ СООБЩЕНИЯ РФ
ИРКУТСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ПУТЕЙ СООБЩЕНИЯ



ВВЕДЕНИЕ В АНАЛИЗ

Учебное пособие
для студентов заочного отделения
всех специальностей

ИРКУТСК
2003

КОМПЛЕКС МЕТОДИЧЕСКИХ ПОСОБИЙ ПО МАТЕМАТИКЕ ДЛЯ ЗАОЧНОГО ОБУЧЕНИЯ

Под редакцией доктора технических наук,
профессора А. П. Хоменко

- Комплексные числа. Основы линейной алгебры. Системы линейных уравнений
- Векторная алгебра и аналитическая геометрия
- **Введение в анализ**
- Дифференциальное исчисление функций одной переменной
- Дифференциальное исчисление функций нескольких переменных
- Линейное программирование. Динамическое программирование
- Интегральное исчисление функций одной переменной
- Кратные, криволинейные и поверхностные интегралы. Элементы теории поля
- Обыкновенные дифференциальные уравнения
- Ряды
- Теория функций комплексной переменной. Операционное исчисление
- Вариационное исчисление. Уравнения математической физики
- Теория вероятностей
- Математическая статистика
- Марковские случайные процессы и теория игр
- Дискретная математика

МИНИСТЕРСТВО ПУТЕЙ СООБЩЕНИЯ РФ

ИРКУТСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ПУТЕЙ СООБЩЕНИЯ

ВВЕДЕНИЕ В АНАЛИЗ

Учебное пособие
для студентов заочного отделения
всех специальностей

Под редакцией
доктора технических наук, профессора А. П. Хоменко

ИРКУТСК
2003

ББК 22.161
УДК 517.1
Б 23
Банина Н.В., Синеговская Т. С. Введение в анализ: Учебное пособие. Иркутск, 2003. 82 с.

В учебном пособии изложены основные вопросы раздела «Введение в анализ», соответствующие требованиям к минимуму основной обязательной программы по подготовке дипломированных специалистов. Пособие содержит подробно разобранные примеры, геометрические иллюстрации и приложения. В пособие включены вопросы для самоконтроля и десять вариантов заданий для контрольной работы по данному разделу.

Пособие предназначено для студентов всех специальностей первого курса заочной формы обучения, но может быть полезно студентам дневного отделения при изучении курса математического анализа.

Ил. 22. Табл. 2. Библиогр.: 11 назв.

Рецензенты: канд. физ.-мат. наук, доц. С. В. Тимофеев (БГУЭиП);
д-р техн. наук, проф. Л.А. Астраханцев (ИрГУПС),

© Иркутский государственный университет путей сообщения, 2003

Введение

Развитие науки и техники на определенном этапе для дальнейшего продвижения вперед потребовало более глубокого изучения законов и процессов, протекающих в природе. В окружающем человека мире ничто не остается неизменным: одни процессы протекают быстрее, другие медленнее, но, так или иначе, все величины, участвующие в этих процессах, изменяются и притом во взаимной связи. Поэтому стал необходим такой математический аппарат, с помощью которого можно было бы исследовать переменные величины и процессы. Математический анализ – значительный раздел высшей математики, изучающий эти переменные величины в их взаимосвязи. Точным математическим понятием, выражающим такую взаимосвязь переменных, является понятие функции. Таким образом, математический анализ занимается исследованием функций на основе теории пределов.

«Введение в анализ» представляет собой раздел математического анализа, объединяющий теорию действительных чисел и теорию пределов, обосновывающий понятия числового множества, числовой последовательности и ее предела, функции, бесконечно малой величины, предела и непрерывности функции. На этих понятиях основывается изучение других частей математического анализа таких, как дифференциальное и интегральное исчисления, ряды и интегралы Фурье.

Настоящее пособие содержит методические указания и задания к контрольной работе по теме «Введение в анализ». Перед выполнением контрольной работы студент должен изучить теоретический материал и разобрать решения типовых примеров, которые приводятся в данном пособии. Рекомендуется ознакомиться с соответствующими главами курса по рекомендуемой литературе и ответить на контрольные вопросы.

Контрольная работа должна быть сделана в отдельной тетради в клетку. На обложке студенту следует разборчиво написать свою фамилию, инициалы, учебный номер (шифр), номер контрольной работы, название дисциплины, название учебного заведения, дату отправки работы в университет и адрес студента. Решение задач необходимо приводить в той же последовательности, что и в условиях задач, сохраняя номер задачи. При этом условие задачи должно быть полностью переписано перед ее решением. Каждое решение должно заканчиваться словом «ответ» (где это возможно). В прорецензированной работе студент должен исправить отмеченные рецензентом ошибки и недочеты и учесть его рекомендации и советы. Номер варианта контрольной работы соответствует последней цифре учебного номера (шифра) (цифра 0 соответствует 10 варианту). Студент должен выполнить шесть заданий, согласно номеру своего варианта, по одному из каждой задачи.

1. Функция и её основные характеристики

1.1. Множества. Операции над множествами. Понятие множества является одним из основных неопределяемых понятий математики. Под *множеством* понимают совокупность (собрание, семейство, система,...) некоторых объектов, объединенных по какому-либо признаку. Так можно говорить о множестве песчинок на морском берегу, о множестве точек окружности, о множестве слов на данной странице и т.д.

Объекты, из которых состоит данное множество, называются *элементами множества*. Множества принято обозначать заглавными буквами латинского алфавита A, B, C, X, а элементы множеств – строчными буквами - a, b, c, x.

Принадлежность элемента a множеству A обозначается $a \in A$, непринадлежность - $a \notin A$ или $a \overline{\in} A$.

Множества разделяются на конечные и бесконечные. Множество называется *конечным*, если оно состоит из конечного числа элементов,и *бесконечным* – в противном случае. Множество, не содержащее ни одного элемента, называется *пустым* и обозначается символом $\varnothing$.

Множество можно задать перечислением принадлежащих ему элементов или указанием свойств, которым элементы множества должны удовлетворять. Если $x_1, x_2, ..., x_n$, все элементы множества A, то используется обозначение $A = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$. Пусть имеется свойство P, которым могут обладать элементы некоторого множества A и не обладают элементы, не принадлежащие данному множеству. Тогда множества A задается так: $A = \{x : x$ обладает свойством $P\}$. Например, множество A арабских цифр можно задать двояко: перечислением $A = \{0, 1, 2, ..., 9\}$ или посредством свойства $A = \{x : x$ - арабская цифра$\}$.

Пусть A и B два непустых множества. Множество A является *подмножеством* B, если каждый элемент множества A является одновременно и элементом множества B. Символически это обозначается так: $A \subseteq B$ (A включено в B) или $B \supseteq A$ (B включает в себя A). Пустое множество $\varnothing$ является *подмножеством любого множества,* в том числе и пустого. Два множества A и B называются *равными* $(A = B)$, если выполняются два включения $A \subseteq B$ и $B \subseteq A$. Другими словами, множества, состоящие из одних и тех же элементов, называются равными.

Объединением множеств A и B называется множество, обозначаемое $A \cup B$, состоящее из всех тех элементов, которые принадлежат хотя бы одному из множеств A, B (рис. 1.1, заштрихованная область соответствует объединению множеств). Символически это можно записать так $A \cup B = \{x : x \in A \text{ или } x \in B\}$.

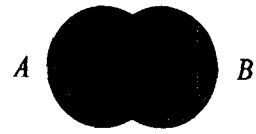


Рис. 1.1.

Пересечением множеств A и B называется множество, обозначаемое $A \cap B$ и состоящее из всех тех и только тех элементов, которые принадлежат обоим множествам A и B (рис. 1.2, заштрихованная область соответствует пересечению множеств). Символически можно записать так: $A \cap B = \{x : x \in A \text{ и } x \in B\}$.

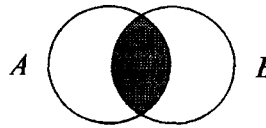


Рис. 1.2.

Разностью двух множеств A и B называется множество, обозначаемое $A \setminus B$, состоящее из всех тех и только тех элементов, которые принадлежат множеству A и не принадлежат множеству B (рис. 1.3, заштрихованная область соответствует разности $A \setminus B$). Символически: $A \setminus B = \{x : x \in A \text{ и } x \notin B\}$.

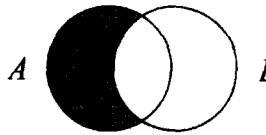


Рис. 1.3.

Пример 1.1. Даны множества $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{1, 4, 5\}$. Найти: $A \cup B$; $A \cap B$; $A \setminus B$; $B \setminus A$.

Решение:

$$A \cup B = \{1, 2, 3\} \cup \{1, 4, 5\} = \{1, 2, 3, 4, 5\};$$
$$A \cap B = \{1, 2, 3\} \cap \{1, 4, 5\} = \{1\};$$
$$A \setminus B = \{1, 2, 3\} \setminus \{1, 4, 5\} = \{2, 3\};$$
$$B \setminus A = \{1, 4, 5\} \setminus \{1, 2, 3\} = \{4, 5\}. \blacksquare$$

Пусть A и B – некоторые множества. Говорят, что между двумя этими установлено *взаимно-однозначное соответствие*, если ***1)***каждому элементу множества A поставлен в соответствие некоторый определенный элемент множества B; ***2)*** каждый элемент множества B соответствует одному и только одному элементу множества A. Между двумя конечными множествами A и B можно установить взаимно-однозначное соответствие тогда и только тогда, когда множества A и B имеют одинаковое число элементов. Множества, между которыми установлено взаимно - однозначное соответствие, называются *эквивалентными*.

В дальнейшем для сокращения записей используются некоторые простейшие логические символы:

запись $\alpha \Rightarrow \beta$ означает, что из α следует β;

запись $\alpha \Leftrightarrow \beta$ означает, что α и β равносильны, т.е. из α следует β и из β следует α;

символ : заменяет слова: «имеет место», «такое, что»;

символ $\forall$ - *квантор всеобщности* заменяет слова: «для любого», «для всякого»;

символ $\exists$ - *квантор существования* заменяет слова: «существует», «найдется».

1.2. Числовые множества. Множества, все элементы которых являются числа, называются *числовыми*. Примерами числовых множеств являются:

$N = \{1; 2; 3; \ldots; n; \ldots\}$ - множества натуральных чисел;

$Z_0 = \{0; 1; 2; 3; \ldots; n; \ldots\}$ - множества целых неотрицательных чисел;

$Z = \{0; \pm 1; \pm 2; \pm 3; \ldots; \pm n; \ldots\}$ - множества целых чисел;

$Q = \left\{ \frac{m}{n} : m \in Z, n \in N \right\}$ - множество рациональных чисел;

I – множество иррациональных чисел – бесконечных непериодических десятичных дробей (например, $-\sqrt{5}$, $\lg 3$, π, $\sin 10^\circ$);

$R = Q \cup I$ – множество действительных чисел.

Между этими множествами существует соотношение

$$N \subseteq Z_0 \subseteq Z \subseteq Q \subseteq R.$$

Между множеством действительных чисел и точками прямой можно установить взаимно однозначное соответствие. Делается это так. На некоторой прямой выберем положительное направление, начало отсчета точку O и единицу масштаба (рис. 1.4). Для изображения положительного числа a берется на прямой справа от начала O точка M на расстоянии (в принятом масштабе), равном данному числу a; для изображении отрицательного числа a выбирается точка слева от начала O на расстоянии, равном $|a|$; числу $a = 0$ будет отвечать точка O – начало отсчета. Таким приемом установлено взаимно однозначное соответствие между всеми точками прямой и множеством действительных чисел: каждое действительное число будет изображено одной определенной точкой прямой, и наоборот, каждая точка прямой будет изображением одного определенного действительного числа. Прямая, для всех точек кото-

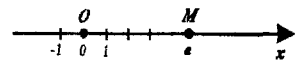


Рис. 1.4

рой установлено указанное взаимно однозначное соответствие с множеством всех действительных чисел, называется *числовой осью* или *числовой прямой*.

Дадим определения простейших числовых множеств, являющихся подмножествами множества R, называемых *числовыми промежутками*. Пусть a и b – действительные числа, причем $a < b$.

1. Множество всех действительных чисел x (всех точек числовой оси), удовлетворяющих условию $a \le x \le b$, называется *отрезком* (*сегментом*) и обозначается $[a, b]$. Символически это можно записать так : $[a, b] = \{x : a \le x \le b\}$.
2. Множество всех действительных чисел x, удовлетворяющих условию $a < x < b$, называется *интервалом* и обозначается (a, b). Символически это можно записать так : $(a, b) = \{x : a < x < b\}$.
3. Множество всех действительных чисел x, определяемых неравенствами $a \le x < b$, $a < x \le b$, называется *полуинтервалами* (*полуотрезками*) и обозначается соответственно $[a, b)$ и $(a, b]$. Символически это можно записать так : $[a, b) = \{x : a \le x < b\}$, $(a, b] = \{x : a < x \le b\}$.

Числа a и b называются соответственно *левым* и *правым концами* этих промежутков. Точки, удовлетворяющие условию $a < x < b$, называются *внутренними точками*. Кроме конечных интервалов, рассмотренных выше, часто встречаются бесконечные интервалы и полуинтервалы, которые определяются условиями:

4. $(a, +\infty) = \{x : x > a\}$;
5. $[a, +\infty) = \{x : x \ge a\}$;
6. $(-\infty, b) = \{x : x < b\}$;
7. $(-\infty, b] = \{x : x \le b\}$;
8. $(-\infty, +\infty) = \{x : -\infty < x < +\infty\} = R$.

Символы $-\infty$ («минус бесконечность») и $+\infty$ («плюс бесконечность») не числа, это символическое обозначение бесконечного удаления точек числовой оси от начала O влево и вправо.

Пусть x_0 - любое действительное число (точка на числовой оси). *Окрестностью точки* x_0 называется любой интервал, содержащий точку x_0. В частности, интервал $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) = \{x : |x - x_0| < \varepsilon, \varepsilon > 0\}$ называется ε-*окрестностью точки* x_0 (рис 1.5).

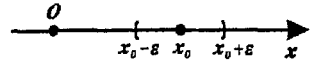


Рис. 1.5

Число x_0 называется *центром*, а число ε - *радиусом*. Интервал $(x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon)$, из которого выброшена точка x_0, называется *проколотой* ε-*окрестностью точки* x_0. Это -- совокупность всех действительных чисел x, определяемых условием:

$$(x_0-\varepsilon, x_0)\cup(x_0, x_0+\varepsilon)=\{x:|x-x_0|<\varepsilon, x\neq x_0, \varepsilon>0\}.$$

1.3. Постоянные и переменные величины. При изучении процессов различной природы приходится встречаться с физическими величинами, такими, как время, длина, площадь, температура, давление и др. Все эти величины, качественно отличаясь друг от друга, имеют общее свойство – каждая из них может быть измерена. В результате измерений получаются действительные числа, которые называются численными значениями соответствующих величин. В различных явлениях некоторые величины изменяются, т.е. меняются их численные значения, другие величины сохраняют свое численное значение. Например, при равномерном прямолинейном движении тела меняются время и расстояние, а скорость тела остается постоянной.

Переменной величиной (или просто *переменной*) называется величина, которая в рассматриваемых условиях принимает различные численные значения. Величина, численные значения которой не меняются, называется *постоянной величиной*. Постоянную величину принято рассматривать как частный случай переменной, у которой все значения равны между собой.

При изучении конкретных физических процессов может оказаться, что величина с одним и тем же названием может в одном явлении быть постоянной, а в другом – переменной. Например, скорость v равномерного движения есть величина постоянная, а скорость равноускоренного движения – величина переменная. Величины, которые сохраняют свое значения в любом явлении, называются *абсолютными постоянными* Например, отношение длины окружности к ее диаметру есть постоянная величина $\pi=3.14159....$

1.4. Функция. Основные понятия. Пусть даны два непустых множества действительных чисел X и Y. Если каждому элементу x из множества X по определенному правилу ставится в соответствие один и только один элемент y из множества Y, то говорят, что на множестве X задана *действительная функция* со множеством значений Y и пишут: $y=f(x)$ или $y=y(x), x\in X$.

При этом переменная величина x называется *независимой переменной* (или *аргументом*), а переменная y – *зависимой переменной* (или *функцией*). Множество X называется *областью определения* функции и обо -

значается $D(f)$, множество значений функции $Y=\{y\in R: y=f(x), x\in X\}$ называется *областью значений* и обозначается $E(f)$. Значение функции $f(x)$ при $x=a$, где $a\in D(f)$, называется *частным значением* функции и обозначается $f(a)$ или $y|_{x=a}=f(a)$.

Графиком функции $y=f(x)$ называется множество точек (x, y) координатной плоскости xOy таких, что $x\in D(f)$ и $y=f(x)$.

Наиболее часто встречаются следующие способы задания действительной функции:

1) Аналитический способ задания функции состоит в том, что функция задается формулой, указывающей, какие математические действия нужно произвести над значением аргумента x, чтобы найти значение функции y.

При аналитическом способе функция может быть задана:

- Явно, когда y выражается через x формулой $y=f(x)$. Например, $y=2x-5$. Или функция может быть задана несколькими формулами на различных участках ее области определения:
$$y=\begin{cases}2^x & \text{при } x>0,\\ 0 & \text{при } x=0,\\ x-1 & \text{при } x<0.\end{cases}$$
- Неявно, когда x и y связаны между собой уравнением $F(x,y)=0$. Например, $y^2x-yx^3+3=0$.
- Параметрически, когда соответствующие друг другу значения x и y выражены через третью переменную величину t, называемую параметром, т.е. $\begin{cases}x=\varphi(t),\\ y=\psi(t),\end{cases} t\in T$. Например, $\begin{cases}x=\cos t,\\ y=\sin t,\end{cases} t\in[0;2\pi]$.

2) Если функция задана своим графиком – это графический способ задания функции.

3) Табличный способ подразумевает задание функции при помощи таблицы, содержащей конечную совокупность соответствующих друг другу значений x и y.

Пусть y есть функция от аргумента u, т.е. $y=f(u)$, а u есть функция от x, т.е. $u=\varphi(x)$, тогда $y=f(\varphi(x))$ называется *сложной функцией*, x *– независимым аргументом*, u *– промежуточным аргументом*. Область

определения сложной функции $y = f(\varphi(x))$ - это те значения x, для которых значения функции $u = \varphi(x)$ входят в область определения функции $y = f(u)$.

Операция составления из двух функций $u = \varphi(x)$ и $y = f(u)$ сложной функции $y = f(\varphi(x))$ называется *суперпозицией* (или *композицией*) *функций*. Суперпозицию $f(\varphi(x))$ можно осуществить тогда и только тогда, когда $D(f) \cap E(\varphi) \neq \varnothing$.

Пример 1.2. Найти область определения следующих функций:

а) $f(x) = \dfrac{x+1}{x^2 - x - 2}$;

б) $f(x) = \dfrac{\log_3 x}{x-5} + \sqrt{2^x - 2}$;

в) $f(x) = \arccos(x^2 - 1)$.

Решение:

а) Область определения заданной функции состоит из тех значений x, при которых знаменатель не обращается в ноль. Это все числа действительной оси, за исключением $x = -1$ и $x = 2$.

Таким образом, $D(f) = (-\infty; -1) \cup (-1; 2) \cup (2; +\infty)$.

б) Логарифмическая функция в первом слагаемом определена только для положительных значений своего аргумента, поэтому $x > 0$. Кроме того, первое слагаемое $\dfrac{\log_3 x}{x-5}$ определено для тех значений x, при которых знаменатель не обращается в нуль, т.е. $x - 5 \neq 0 \Rightarrow x \neq 5$.

Второе слагаемое принимает действительные значения только при тех значениях x, при которых подкоренное выражение будет неотрицательным, т.е. $2^x - 2 \geq 0 \Rightarrow 2^x \geq 2 \Rightarrow x \geq 1$.

Заданная функция $f(x)$ имеет смысл только тогда, когда эти неравенства выполняются одновременно. Таким образом, решая систему неравенств:

$$\begin{cases} x > 0, \\ x \geq 1, \\ x \neq 5, \end{cases}$$

находим область определения функции $f(x)$: $D(f) = [1,5) \cup (5, +\infty)$

в) Функция $f(t)=\arccos t$ определена при $-1\le t\le 1$. Следовательно, данная функция $f(x)=\arccos(x^2-1)$ определена только для тех значений x, для которых

$$-1\le x^2-1\le 1.$$

Отсюда,

$$0\le x^2\le 2\Leftrightarrow\begin{cases}x^2\ge 0,\\ x^2\le 2,\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}|x|\ge 0,\\ |x|\le\sqrt{2},\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-\infty<x<+\infty,\\ -\sqrt{2}\le x\le\sqrt{2}.\end{cases}$$

Таким образом, область определения заданной функции $D(f)=[-\sqrt{2},\sqrt{2}]$.

Ответ: *а)* $D(f)=(-\infty;-1)\cup(-1;2)\cup(2;+\infty)$;
б) $D(f)=[1,5)\cup(5,+\infty)$;
в) $D(f)=[-\sqrt{2},\sqrt{2}]$.

Пример 1.3. Найти область значений следующих функций:
а) $f(x)=\sqrt{2+3x-x^2}$; *б)* $y=\dfrac{1}{4-\sin^2 x}$.

Решение:

а) Выделим в выражении $2+3x-x^2$ полный квадрат:

$$2+3x-x^2=-\left(x^2-2\cdot\frac{3}{2}x+\frac{9}{4}\right)+\frac{9}{4}+2=\frac{17}{4}-\left(x-\frac{3}{2}\right)^2.$$

Поскольку $\dfrac{17}{4}-\left(x-\dfrac{3}{2}\right)^2\le\dfrac{17}{4}$ и так как это выражение находится под знаком корня четной степени, то $\dfrac{17}{4}-\left(x-\dfrac{3}{2}\right)^2\ge 0$.

Следовательно, $0\le\sqrt{\dfrac{17}{4}-\left(x-\dfrac{3}{2}\right)^2}\le\sqrt{\dfrac{17}{4}}$ и $E(f)=\left[0;\dfrac{\sqrt{17}}{2}\right]$.

б) Так как область значений функции $y=\sin x$ есть множество $y\in[-1;1]$, то для выражения $\sin^2 x$ справедливы следующие неравенства: $0\le\sin^2 x\le 1$.

Тогда

$$0 \le \sin^2 x \le 1 \Rightarrow -1 \le -\sin^2 x \le 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4-1 \le 4-\sin^2 x \le 4+0 \Rightarrow 3 \le 4-\sin^2 x \le 4$$

и

$$\frac{1}{3} \ge \frac{1}{4-\sin^2 x} \ge \frac{1}{4}.$$

Значит, $E(f)=\left[\frac{1}{4};\frac{1}{3}\right]$.

Ответ: *а)* $E(f)=\left[0;\frac{\sqrt{17}}{2}\right]$; *б)* $E(f)=\left[\frac{1}{4};\frac{1}{3}\right]$.

1.5. Обратная функция. Пусть задана функция $y=f(x)$ с областью определения $D(f)$ и областью значений $E(f)$. Если каждому значению $y \in E(f)$ поставлено в соответствие единственное значение $x \in D(f)$, такое, что $f(x)=y$, то тем самым определена функция с областью определения $E(f)$ и областью значений $D(f)$, которая называется *обратной* к функции $y=f(x)$ и обозначается $x=f^{-1}(y)$.

Если функция $x=f^{-1}(y)$ - обратная к функции $y=f(x)$, то, очевидно, функция $y=f(x)$ является обратной к функции $x=f^{-1}(y)$. Поэтому функции $f(x)$ и $f^{-1}(y)$ называются *взаимно обратными*. Для взаимно обратных функций имеют место соотношения:

$f^{-1}[f(x)] \equiv x$, при всех $x \in D(f)$ и $f[f^{-1}(y)] \equiv y$ при всех $y \in E(f)$

Графики функций $y=f(x)$ и $x=f^{-1}(y)$ симметричны относительно прямой $y=x$.

Чтобы найти функцию $x=f^{-1}(y)$, обратную к функции $y=f(x)$, нужно решить уравнение $f(x)=y$ относительно x.

Пример 1.4. Найти функцию, обратную к функции $y=\frac{-x}{x+3}$.

Решение:

Функция $y=\frac{-x}{x+3}$ определена при всех $x \neq -3$. Выразим в уравнении переменную x через y:

$$y=\frac{-x}{x+3}\Rightarrow y(x+3)=-x\Rightarrow yx+3y+x=0\Rightarrow x(y+1)=-3y\Rightarrow x=\frac{-3y}{y+1}$$

Таким образом, $f^{-1}(y)=\frac{-3y}{y+1}$, $y\neq -1$, является обратной к функции $f(x)=\frac{-x}{x+3}$.

Ответ: $f^{-1}(y)=\frac{-3y}{y+1}$, $y\neq -1$.

1.6. Элементарные функции, их классификация. *Основными элементарными функциями* называются следующие функции: степенная функция $y=x^{\alpha}, \alpha\in R$; показательная функция $y=a^{x}, a>0, a\neq 1$; логарифмическая $y=\log_a x, a>0, a\neq 1$; тригонометрические функции $y=\sin x$, $y=\cos x$, $y=\operatorname{tg}x$, $y=\operatorname{ctg}x$; обратные тригонометрические функции $y=\arcsin x$, $y=\arccos x$, $y=\operatorname{arctg}x$, $y=\operatorname{arcctg}x$. Функции, получающиеся из основных элементарных функций с помощью арифметических операций (сложения, вычитания, умножения и деления) и операции суперпозиции, примененных конечное число раз, называются *элементарными функциями*. Именно элементарные функции наиболее часто встречаются на практике в задачах физики и техники. Основные элементарные функции и их графики приведены в **Приложении 1**.

Элементарные функции принято разделять на следующие классы. *Целой рациональной функцией* или *многочленом* называется функция вида

$$y=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_n,$$

где $a_0, a_1, \ldots, a_n$ - действительные числа, называемые *коэффициентами*; n – целое неотрицательное число, называемое *степенью многочлена*. *Дробно-рациональной функцией* называется функция, определенная как отношение двух многочленов:

$$y=\frac{a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_n}{b_0x^m+b_1x^{m-1}+\ldots+b_m}.$$

Совокупность целых рациональных и дробно-рациональных функций образует множество *рациональных функций*. *Иррациональной функцией* называется функция, образованная с помощью суперпозиции рациональных функций и степенных функций с рациональными нецелыми показателями. Например, $y=\frac{\sqrt[3]{x}+1}{x^2+2}$. Множество рациональных и иррациональных функций образует класс *алгебраических функций*. Все элементарные функ-

ции, не являющиеся алгебраическими, называются *трансцендентными функциями*. Например, $y = \sin x$, $y = x2^x$, $y = \lg x$.

Примерами *неэлементарных функций* могут служить функции:

$$y = \begin{cases} 1 & \text{при } x > 0, \\ 0 & \text{при } x = 0, \\ -1 & \text{при } x < 0; \end{cases} \qquad y = \begin{cases} x^2 + 1, & \text{при } x \le 0, \\ x, & \text{при } x > 0. \end{cases}$$

1.7. Основные характеристики функции. Множество точек X числовой прямой называется *симметричным относительно начала координат* (или нуля), если для любого числа $x \in X$ число $-x$ также принадлежит X. Функция $y = f(x)$, определенная на симметричном относительно начала координат множестве X,называется:

- *четной*, если $f(-x) = f(x)$ для любого $x \in X$;
- *нечетной*, если $f(-x) = -f(x)$ для любого $x \in X$;
- *ни четной, ни нечетной* (или *общего вида*), если для хотя бы одного $x \in X$ оказалось $f(-x) \neq f(x)$ и хотя бы одного $x \in X$ оказалось $f(-x) \neq -f(x)$.

График четной функции симметричен относительно оси Oy, график нечетной центрально симметричен относительно начала координат.

Пример 1.5. Определить четность или нечетность функций:

а) $f(x) = \cos x + \sqrt{1 - x^2}$

б) $f(x) = 3x - 2\sqrt[3]{x} + \sin x$;

в) $f(x) = \sin x + \cos x$.

Решение:

а) Область определения заданной функции состоит из всех x, таких, что

$$1 - x^2 \ge 0 \Rightarrow x^2 \le 1 \Rightarrow |x| \le 1 \Rightarrow -1 \le x \le 1.$$

Учитывая, что область определения данной функции $D(f) = [-1; 1]$ симметрична относительно начала координат и $\cos(-x) = \cos x$, имеем

$$f(-x) = \cos(-x) + \sqrt{1 - (-x)^2} = \cos x + \sqrt{1 - (-1)^2 \cdot x^2} =$$

$$= \cos x + \sqrt{1 - x^2} = f(x).$$

Значит, функция $f(x) = \cos x + \sqrt{1 - x^2}$ является четной.

б) Данная функция $f(x) = 3x - 2\sqrt[3]{x} + \sin x$ определена на всей числовой оси, т.е. на множестве симметричном относительно начала координат.

Далее, учитывая, что $\sin(-x) = -\sin x$, имеем

$$f(-x) = \cos(-x) + \sqrt{1-(-x)^2} = \cos x + \sqrt{1-(-1)^2 \cdot x^2} =$$

$$= \cos x + \sqrt{1-x^2} = f(x)$$

$$f(-x) = 3(-x) - 2\sqrt[3]{-x} + \sin(-x) = -3x + 2\sqrt[3]{-1} \cdot \sqrt[3]{x} - \sin x =$$

$$= -3x + 2\sqrt[3]{x} - \sin x = -(3x - 2\sqrt[3]{x} + \sin x) = -f(x).$$

Значит, заданная функция является нечетной.

в) Учитывая, что область определения функции $f(x) = \sin x + \cos x$ есть вся числовая ось, т.е. симметрична относительно начала координат, получаем

$$f(-x) = \sin(-x) + \cos(-x) = -\sin x + \cos x$$

для всех точек x действительной оси. Так как $f(-x) \neq f(x)$ и $f(-x) \neq -f(x)$, то функция является ни четной, ни нечетной.

Ответ: ***а)*** четная; ***б)*** нечетная; ***в)*** общего вида.

Функция $y = f(x)$, $x \in X$ называется *неубывающей* (*невозрастающей*), на множестве S, $S \subseteq X$, если для любых двух чисел $x_1 \in S$ и $x_2 \in S$ таких, что $x_1 < x_2$, имеет место неравенство

$$f(x_1) \leq f(x_2) \; (f(x_1) \geq f(x_2)).$$

Функция $y = f(x)$, $x \in X$ называется *возрастающей* (*убывающей*) на множестве S, если из неравенства $x_1 < x_2$, $x_1 \in S$ и $x_2 \in S$, $S \subseteq X$ следует неравенство

$$f(x_1) < f(x_2) \quad (f(x_1) > f(x_2)).$$

Функция $y = f(x)$, $x \in X$ называется ***а)*** *монотонной* на множестве S, $S \subseteq X$, если она не возрастает или не убывает на этом множестве;

б) *строго монотонной* на множестве S, $S \subseteq X$, если она убывает или возрастает на этом множестве.

Если существует точка $x_0 \in S, S \subseteq X$, такая, что при любом $x \in S$ имеет место неравенство

$$f(x) \geq f(x_0) \; (f(x) \leq f(x_0)),$$

то говорят, что функция $y = f(x)$, $x \in X$, на множестве S принимает свое *наименьшее* (*наибольшее*) значение $y_{min} = f(x_0)$ $(y_{max} = f(x_0))$.

Функция $y = f(x)$, $x \in X$ называется *ограниченной сверху (снизу)* на множестве S, $S \subseteq X$, если существует такое число M, что для каждого $x \in S$ выполняется неравенство:

$$f(x) < M \; (f(x) > M).$$

Функция $y = f(x)$, $x \in X$ называется *ограниченной на множестве* S, $S \subseteq X$, если она ограничена как сверху, так и снизу на этом множестве, т.е. или $|f(x)| < M$, $x \in S$, или $f(x) < M_1$ и $f(x) > M_2$, $x \in S$, $M_1 \neq M_2$.

Геометрически понятие ограниченности сверху (снизу) функции $y = f(x)$, $x \in X$, на множестве S, $S \subseteq X$ означает, что график данной функции на этом множестве находится не выше (не ниже) некоторой горизонтальной прямой. Ограниченность функции означает, что ее график находится между двумя горизонтальными прямыми.

Пример 1.6. Выяснить, является ли функция $y = 2\sin 5x + 3\cos 5x$ ограниченной.

Решение:

Так как

$$-1 \le \sin 5x \le 1 \text{ и } -1 \le \cos 5x \le 1,$$

то

$$-2 \le 2\sin 5x \le 2 \text{ и } -3 \le 3\cos 5x \le 3.$$

Следовательно,

$$-5 \le 2\sin 5x + 3\cos 5x \le 5.$$

Таким образом,

$|2\sin 5x + 3\cos 5x| \le 5$, т.е. $y = 2\sin 5x + 3\cos 5x$ - **ограниченная функция** на множестве действительных чисел R. ■

Функция $y = f(x)$ называется *периодической*, если существует такое число $T \neq 0$ (называемое *периодом*), что для любого x из области определения этой функции $x - T \in D(f)$ и $x + T \in D(f)$, причем $f(x+T) = f(x)$ (или $f(x-T) = f(x)$).

Основным или *главным периодом* функции называется наименьший из положительных периодов функции.

Свойства периодической функции:

1. Если число T – период функции $y = f(x)$, то и любое число kT, $k \in Z$, $k \neq 0$ также является периодом этой функции.
2. Если число T – главный период функции $y = f(x)$, то число $\frac{T}{a}$ - главный период функции $y = f(ax + b)$, где $a, b \in R$, $a > 0$.

Чтобы построить график периодической функции, достаточно построить ветвь графика на одном из промежутков оси Ox длиной T, где T – основной период функции, а затем осуществить параллельный перенос этой ветви по оси Ox на $\pm T$, $\pm 2T$, $\pm 3T$ и т.д.

Пример 1.7. Найти период функций $y = \cos(3x+1)$.

Решение:

Согласно второму из приведенных свойств периодической функции для функции $f(x) = \cos(3x+1)$, имеем $a = 3$, и главный период функции $f(u) = \cos u$ равен 2π, следовательно, главным периодом данной функции является число $T = \dfrac{2\pi}{3}$. Действительно, для любого $x \in R$, $x \pm \dfrac{2\pi}{3} \in R$ и

$$f\left(x+\frac{2\pi}{3}\right) = \cos\left(3\left(x+\frac{2\pi}{3}\right)+1\right) = \cos(3x+1+2\pi) =$$

$$= \cos(3x+1) = f(x).$$

Периодом функции $f(x) = \cos(3x+1)$ будет являться также любое число $\dfrac{2\pi}{3}n$, $n \in Z, n \neq 0$.

Ответ: $T = \dfrac{2\pi}{3}$.

1.8. Построение графиков функций

1.8.1. График функции в декартовой системе координат

График функции $y = f(x)$ на плоскости с заданной на ней декартовой системой координат xOy может быть построен по точкам. Для этого:

1. Составляется таблица значений аргумента $x \in D(f)$ и функции y на основе равенства $y = f(x)$.
2. В выбранной системе координат строятся точки (x, y), координатами которых являются соответствующие друг другу значения переменных, содержащиеся в таблице.
3. Полученные точки соединяются плавной линией.

Построенный этим способом график функции будет тем точнее, чем больше значений переменных содержится в таблице, чем больше точек будет нанесено на координатную плоскость.

График функции представляет собой линию на плоскости, уравнением которой является равенство $y = f(x)$.

Построение графика функции по точкам упрощается, если она является четной, нечетной или периодической. В этом случае учитывают, что график четной функции симметричен относительно оси Oy; график нечетной функции симметричен относительно начала координат; график периодической функции получается путем повторения части ее графика, соответствующей одному периоду.

Другим способом построения графика функции в декартовой системе координат xOy является метод сдвигов и деформаций, позволяющий построить графики некоторых сложных функций чисто геометрическим путем, без составления таблицы числовых значений переменных. График функции вида $y = Af[k(x-a)]+b$ может быть построен при помощи преобразований графика функции $y = f(x)$, указанных в таблице 1 **Приложения 2**.

Пример 1.8. Построить график функции $y = x^2 + 4x + 3$ путем сдвигов и деформаций графика $y = x^2$.

Решение: Выделяя полный квадрат, данную функцию можно представить в виде $y = (x+2)^2 - 1$. Построение искомого графика выполняем в следующей последовательности:

1. Строим график функции $y = x^2$.
2. Перенося точки графика функции $y = x^2$ вдоль оси абсцисс на 2 единицы влево, строим график функции $y = (x+2)^2$(рис.1.6).
3. Перенося точки графика функции $y = (x+2)^2$ вдоль оси ординат на 1 единицу вниз, получим график исходной функции $y = (x+2)^2 - 1$. ■

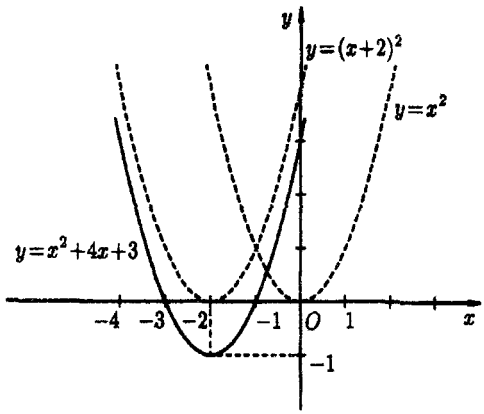


Рис. 1.6

Графиком параметрически заданной функции $\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t), \end{cases} t \in T$ называется множество точек $M(x, y)$ координатной плоскости xOy таких, что $x = \varphi(t)$ и $y = \psi(t)$ для любого $t \in T$.

Пример 1.9. Построить график функции $\begin{cases} x = t - \sin t, \\ y = 1 - \cos t, \end{cases} t \in [-2\pi; 2\pi]$.

Решение: Для построения данной функции составим таблицу значений переменных x и y в зависимости от значений параметра $t \in [-2\pi; 2\pi]$.

t	-2π	$-\frac{3\pi}{2}$	$-\pi$	$-\frac{\pi}{2}$	0
x	$-2\pi \approx$ ≈ -6.28	$-\frac{3\pi}{2} - 1 \approx$ ≈ -5.71	$-\pi \approx$ ≈ -3.14	$-\frac{\pi}{2} + 1 \approx$ ≈ -0.57	0
y	4	1	2	1	0

t	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
x	$\frac{\pi}{2} - 1 \approx$ ≈ 0.57	$\pi \approx$ ≈ 3.14	$\frac{3\pi}{2} + 1 \approx$ ≈ 5.71	$2\pi \approx$ ≈ 6.28
y	1	2	1	0

На координатной плоскости xOy строятся точки с координатами (x, y), которые затем соединяются плавной линией (рис. 1.7).

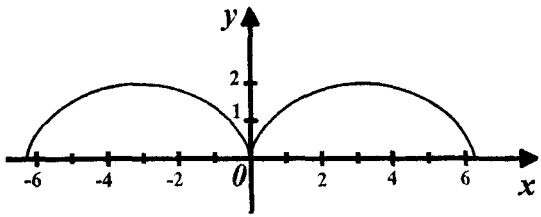


Рис. 1.7

Линия, являющаяся графиком заданной функции, называется циклоидой. ■

Некоторые линии, заданные параметрическими уравнениями, приведены в **Приложении 3**.

1.6.2. График функции в полярной системе координат

Пусть на плоскости задана точка O – *полюс*, из которой выходит направленная полупрямая – *полярная ось*, тогда говорят, что на плоскости определена полярная система координат. Полярными координатами произвольной точки P, лежащей в плоскости, являются *полярный радиус* r – расстояние от точки P до полюса, и *полярный угол* φ - угол между полярной осью и отрезком OP (рис. 1.8).

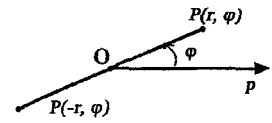


Рис. 1.8

Полярную систему координат на плоскости можно совместить с декартовой, если поместить полюс в начало декартовой системы координат, а полярную ось совместить с осью Ox (рис. 1.9). Тогда между полярными координатами (r, φ) и декартовыми (x, y) каждой точки P будет осуществляться следующая связь:

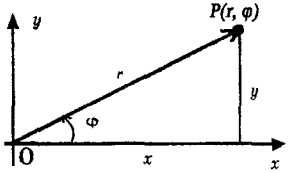


Рис. 1.9

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ x = r\sin\varphi \end{cases} \quad \text{и}$$

$$\begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \varphi = \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x} \end{cases}.$$

Определяя величину φ, следует установить четверть, в которой лежит искомый угол.

Пусть функция $r = f(\varphi)$ каждому значению полярного угла φ ставит в соответствие значение полярного радиуса r. Графиком данной функции является линия на плоскости с заданной полярной системой координат. Чтобы на плоскости изобразить график функции $r = f(\varphi)$, нужно составить таблицу основных значений r и φ, затем построить точки с координатами (r, φ) и соединить их плавной линией. Некоторые линии в полярной системе координат представлены в **Приложении 3**.

Пример 1.10. Построить график функции $r = 2(1 + \cos\varphi)$, $\varphi \in [0; 2\pi]$.

Решение: Составим таблицу значений аргумента φ и функции r. Функция $r = 2(1+\cos\varphi)$ - четная, поэтому при составлении таблицы достаточно вычислить значения функции только для значений аргумента $\varphi \in [0;\pi]$.

φ	0	$\frac{\pi}{12}$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
r	4	$2+2\cos\frac{\pi}{12}\approx$ ≈ 3.93	$2+\sqrt{3}\approx$ ≈ 3.73	$2+\sqrt{2}\approx$ ≈ 3.41	3	2	1	$2-\sqrt{3}\approx$ ≈ 0.27	0

Соединив плавной линией точки с указанными координатами, получим верхнюю часть графика заданной функции. Нижнюю часть построим, отобразив верхнюю зеркально относительно полярной оси (рис. 1.10).

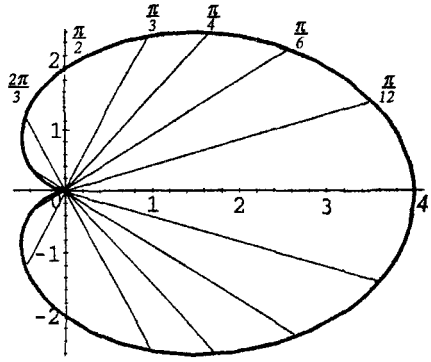


Рис. 1.10

Построенная кривая $r = 2(1+\cos\varphi)$ называется **кардиоидой** (см. **Приложение 3**). ■

2. Числовые последовательности и их свойства

2.1. Числовая последовательность и ее основные характеристики

Если каждому натуральному числу n поставлено в соответствие число x_n, то говорят, что задана *числовая последовательность* (или просто *последовательность*) $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n, \ldots$. Другими словами последова -

тельность есть функция, определенная на множестве натуральных чисел, т.е. $x_n = f(n), n \in N$.

Числа $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ называются *членами* последовательности, x_n - *общим членом* последовательности, число n – *номером* члена x_n.

Последовательность часто обозначают так: $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{x_n\}$ или просто x_n, $n = 1, 2, \ldots$. Если общий член последовательности задан формулой, то в фигурных скобках пишут эту формулу. По этой формуле, задавая различные значения n, можно вычислить любой член последовательности. Например, общим членом последовательности $\left\{\frac{1}{n}\right\}$ является $x_n = \frac{1}{n}$, а сама последовательность имеет вид $1, \frac{1}{2}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots$.

Арифметические операции над числовыми последовательностями:

Пусть $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ две произвольные числовые последовательности.

1) *Суммой* этих последовательностей называется последовательность с общим членом равным $x_n + y_n$, т.е. $\{x_n\} + \{y_n\} = \{x_n + y_n\}$.
2) *Разностью* этих последовательностей называется последовательность с общим членом $x_n - y_n$, т.е. $\{x_n\} - \{y_n\} = \{x_n - y_n\}$.
3) *Произведением* этих последовательностей называется последовательность с общим членом $x_n \cdot y_n$, т.е. $\{x_n\} \cdot \{y_n\} = \{x_n \cdot y_n\}$.
4) *Частным* этих последовательностей называется последовательность с общим членом $\frac{x_n}{y_n}$, при условии, что $y_n \neq 0, n \in N$, т.е. $\frac{\{x_n\}}{\{y_n\}} = \left\{\frac{x_n}{y_n}\right\}$.

Число a называется *пределом* последовательности $\{x_n\}$, если для любого положительного числа ε найдется номер $N = N(\varepsilon)$ такой, что для каждого натурального числа $n > N$ справедливо неравенство $|x_n - a| < \varepsilon$.

То, что число a является пределом последовательности $\{x_n\}$, записывается так: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ или $x_n \to a$ при $n \to \infty$.

Отметим, что значение предела последовательности не зависит от способа стремления членов последовательности $\{x_n\}$, $n > N$, к числу a.

Если последовательность $\{x_n\}$ имеет конечный предел, то она называется *сходящейся*, в противном случае – *расходящейся*.

Так как неравенство $|x_n - a| < \varepsilon$ равносильно неравенству $-\varepsilon < x_n - a < \varepsilon$, т.е. $a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon$, то утверждение о том, что число a является пределом последовательности $\{x_n\}$, означает, что для любого $\varepsilon > 0$ найдется номер N такой, что , начиная с номера $N+1$, все члены последовательности $x_{N+1}, x_{N+2}, \ldots$ принадлежат интервалу $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$, а вне этого интервала находится, быть может, лишь конечное число членов последовательности (не более N).

Теорема 2.1. Сходящаяся последовательность $\{x_n\}$ имеет только один предел.

Доказательство. Предположим противное. Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ и $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = b$, $a < b$, тогда каждый из интервалов $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ и $(b - \varepsilon, b + \varepsilon)$, где $\varepsilon = \dfrac{b-a}{3}$, должен был бы содержать все точки последовательности $\{x_n\}$ за исключением конечного их числа. Но это невозможно, так как при выбранном $\varepsilon = \dfrac{b-a}{3}$ интервалы $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ и $(b - \varepsilon, b + \varepsilon)$ не пересекаются. Получили противоречие.

Следовательно, если последовательность $\{x_n\}$ имеет предел, то он единственный. К аналогичному противоречию можно прийти и в случае $a > b$. ■

Последовательность $\{x_n\}$ называется *ограниченной сверху (снизу)*, если существует действительное число M (число m), такое, что $x_n \le M$ ($x_n \ge m$) для всех $n \in N$.

Последовательность $\{x_n\}$ называется *ограниченной*, если она ограничена и сверху, и снизу, т.е. если существуют числа M и m такие, что $m \le x_n \le M$ (или $|x_n| \le M$) для всех $n \in N$.

Например,

а) последовательность $-1, -4, -9, \ldots, -n^2, \ldots$ ограничена сверху числом $M = -1$ и не ограничена снизу;

б) последовательность $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots$ ограничена, так как $0 < \frac{1}{n} \le 1$ при всех $n \in N$.

Последовательность $\{x_n\}$ называется *неубывающей (невозрастающей)*, если $x_n \le x_{n+1}$ ($x_n \ge x_{n+1}$) для всех $n \in N$.

Последовательность $\{x_n\}$ называется *возрастающей (убывающей)*, если $x_n < x_{n+1}$ ($x_n > x_{n+1}$) для всех $n \in N$.

Неубывающие и невозрастающие последовательности называются *монотонными*, а возрастающие и убывающие последовательности называются *строго монотонными*. Невозрастающая последовательность ограничена сверху, а неубывающая – ограничена снизу своими первыми элементами.

Например,

а) последовательность $1, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \ldots, \frac{1}{n}, \frac{1}{n}, \ldots$ невозрастающая и ограничена сверху своим первым элементом, равным 1;

б) последовательность $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \ldots, \frac{n}{n+1}, \ldots$ возрастающая и ограничена снизу своим первым элементом, равным $\frac{1}{2}$.

Теорема 2.2. Если последовательность $\{x_n\}$ сходится, то она ограничена.

Доказательство. Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$. Тогда для выбранного $\varepsilon = 1$ существует $N = N(\varepsilon)$ такое, что при всех $n > N(\varepsilon)$ выполняется неравенство $|x_n - a| < 1$. Пусть d наибольшее из чисел $1, |x_1 - a|, \ldots, |x_N - a|$. Тогда для всех $n \in N$ справедливо неравенство $|x_n - a| < d$, т.е. $a - d < x_n < a + d$, $n \in N$.

Следовательно, $\{x_n\}$ - ограничена. ■

Обратное утверждение неверно, т.е. не всякая ограниченная последовательность является сходящейся. Следующая теорема устанавливает достаточные условия для сходимости последовательности.

Теорема 2.3. (Больцано-Вейерштрасса). Всякая монотонная ограниченная последовательность сходится.

2.2. Бесконечно малые и бесконечно большие последовательности

Последовательность $\{\alpha_n\}$ называется *бесконечно малой*, если $\lim\limits_{n\to\infty}\alpha_n = 0$, т.е. для любого $\varepsilon > 0$ существует номер $N = N(\varepsilon)$, такой, что при $n > N$ справедливо неравенство $|\alpha_n| < \varepsilon$.

Следующая теорема устанавливает связь между сходящейся последовательностью и бесконечно малой последовательностью.

Теорема 2.4. Последовательность $\{x_n\}$ сходится к числу a при $n \to \infty$, тогда и только тогда, когда последовательность $\{x_n - a\}$ является бесконечно малой последовательностью.

Доказательство.

1. Так как $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, то по определению предела последовательности для любого $\varepsilon > 0$ найдется такой номер $N = N(\varepsilon)$, что при $n > N$ справедливо неравенство $|x_n - a| < \varepsilon$. Пусть $x_n - a = \alpha_n$, тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует $N = N(\varepsilon)$ такой, что $|\alpha_n| < \varepsilon$ при $n > N$. Это означает, что $\lim\limits_{n\to\infty}\alpha_n = 0$.

2. Так как $\{x_n - a\}$ бесконечно малая последовательность, то $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n - a) = 0$, т. е. для любого $\varepsilon > 0$ найдется номер $N = N(\varepsilon)$, такой, что при $n > N$ справедливо неравенство $|x_n - a| < \varepsilon$. Это означает, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$. ■

Последовательность $\{\beta_n\}$ называется *бесконечно большой*, если для любого $\varepsilon > 0$ существует номер $N = N(\varepsilon)$, такой, что при $n \geq N$ выполняется неравенство $|\beta_n| > \varepsilon$. В этом случае пишут $\lim\limits_{n\to\infty}\beta_n = \infty$ и говорят, что последовательность имеет *бесконечный предел* и является расходящейся.

Теорема 2.5. Если $\{\beta_n\}$ - бесконечно большая последовательность, то, начиная с некоторого номера N, определена последовательность $\left\{\frac{1}{\beta_n}\right\}$, которая является бесконечно малой последовательностью. Если все элементы бесконечной малой последовательности $\{\alpha_n\}$ не равны нулю, то последовательность $\left\{\frac{1}{\alpha_n}\right\}$ есть бесконечно большая.

Например,

а) последовательность $q, q^2, q^3, \ldots, q^n, \ldots$ при $|q|>1$ является бесконечно большой, а при $|q|<1$ – бесконечно малой;

б) последовательность $\{n^\alpha\}$, $\alpha>1$, является бесконечно большой последовательностью, а $\left\{\frac{c}{n^\alpha}\right\}$, $\alpha>1$, - бесконечно малой.

Приведем два важных свойства, которыми обладают бесконечно малые последовательности.

Теорема 2.6. Сумма (разность) двух бесконечно малых последовательностей $\{\alpha_n\}$ и $\{\beta_n\}$ есть бесконечно малая последовательность $\{\alpha_n+\beta_n\}$ ($\{\alpha_n-\beta_n\}$)

Доказательство. Так как $\lim\limits_{n\to\infty}\alpha_n=0$ и $\lim\limits_{n\to\infty}\beta_n=0$, то для произвольного $\varepsilon>0$ найдется номер $N_1=N_1(\varepsilon)$, начиная с которого $|\alpha_n|<\frac{\varepsilon}{2}$ и найдется номер $N_2=N_2(\varepsilon)$, начиная с которого $|\beta_n|<\frac{\varepsilon}{2}$.

Пусть $N=\max\{N_1,N_2\}$, тогда при $n>N: |\alpha_n+\beta_n|\le|\alpha_n|+|\beta_n|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$. Это означает, что $\lim\limits_{n\to\infty}(\alpha_n+\beta_n)=0$, т.е. последовательность $\{\alpha_n+\beta_n\}$ – бесконечно малая.

Аналогично доказывается, что $\{\alpha_n-\beta_n\}$ – бесконечно малая последовательность. ■

Теорема 2.7. Произведение ограниченной последовательности $\{x_n\}$ на бесконечно малую последовательность $\{\alpha_n\}$ представляет собой бесконечно малую последовательность $\{x_n\cdot\alpha_n\}$.

Доказательство. Так как $\{x_n\}$ - ограниченная последовательность, то существует число $M>0$, такое, что $|x_n|\le M$, $n\in N$. Поскольку последовательность $\{\alpha_n\}$ – бесконечно малая, то для произвольного числа $\frac{\varepsilon}{M}$, где $\varepsilon>0$, можно указать номер $N=N\left(\frac{\varepsilon}{M}\right)$, такой, что при $n\ge N$ выполняется неравенство $|\alpha_n|<\frac{\varepsilon}{M}$. Тогда при $n\ge N$ имеем

$|x_n \cdot \alpha_n| = |x_n| \cdot |\alpha_n| < M \cdot \frac{\varepsilon}{M} = \varepsilon$. Это означает, что $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n \cdot \alpha_n) = 0$,т.е. последовательность $\{x_n \cdot \alpha_n\}$ – бесконечно малая ■

Отметим, что всякая бесконечно малая последовательность является ограниченной, так как она сходящаяся последовательность. Поэтому *произведение двух бесконечно малых последовательностей* $\{\alpha_n\}$ *и* $\{\beta_n\}$ *есть бесконечно малая последовательность* $\{\alpha_n \cdot \beta_n\}$.

2.3. *Свойства сходящихся последовательностей*

Теорема 2.8. Если $x_n = c$, c – константа, $n \in N$, то $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = c$.

Доказательство. Так как $x_n = c$, $n \in N$, то все члены последовательности, начиная с номера $N = 1$, будут принадлежать окрестности точки c. Это означает, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = c$. ■

Теорема 2.9. Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ и $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$, тогда:

а) $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n \pm y_n) = \lim\limits_{n\to\infty} x_n \pm \lim\limits_{n\to\infty} y_n = a \pm b$;

б) $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n \cdot y_n) = \lim\limits_{n\to\infty} x_n \cdot \lim\limits_{n\to\infty} y_n = a \cdot b$;

в) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} x_n}{\lim\limits_{n\to\infty} y_n} = \frac{a}{b}$, если $y_n \neq 0, n \in N, b \neq 0$.

Доказательство.

а) Так как $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ и $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$, то по теореме 2.4 $\{x_n - a\}$ и $\{y_n - b\}$ - бесконечно малые последовательности.

Поскольку

$$\{(x_n \pm y_n) - (a \pm b)\} = \{(x_n - a) \pm (y_n - b)\} = \{x_n - a\} \pm \{y_n - b\}$$

и последовательности $\{x_n - a\} \pm \{y_n - b\}$ являются бесконечно малыми последовательностями по теореме 2.6, следовательно, $\lim\limits_{n\to\infty}[(x_n - a) \pm (y_n - b)] = 0$.

Отсюда, согласно теореме 2.4, имеем

$$\lim_{n\to\infty}(x_n \pm y_n) = \lim_{n\to\infty} x_n \pm \lim_{n\to\infty} y_n = a \pm b.$$

Аналогично доказываются случаи ***б)*** и ***в)***. ■

Пример 2.1. Найти предел последовательности:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1-3n}{4n+5}\right)^3 \cdot \frac{\sqrt{n}+2}{n^2+n+1}.$$

Решение:

Имеем $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1-3n}{4n+5} = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\frac{1}{n}-3}{4+\frac{5}{n}} = \dfrac{\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}-3\right)}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(4+\frac{5}{n}\right)} = \dfrac{0-3}{4+0} = -\dfrac{3}{4}$

и $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n}+2}{n^2+n+1} = \dfrac{n^2\left(\frac{1}{n^{3/2}}+\frac{2}{n^2}\right)}{n^2\left(1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}\right)} = \dfrac{\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^{3/2}}+\frac{2}{n^2}\right)}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}\right)} = \dfrac{0+0}{1+0+0} = 0,$

так как $\left\{\dfrac{1}{n}\right\}, \left\{\dfrac{1}{n^2}\right\}, \left\{\dfrac{2}{n^2}\right\}, \left\{\dfrac{1}{n^{3/2}}\right\}$ - бесконечно малые последовательности.

Тогда, по свойству ***б)*** теоремы 2.9 получаем

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1-3n}{4n+5}\right)^3 \cdot \frac{\sqrt{n}+2}{n^2+n+1} = \left(-\frac{3}{4}\right)^3 \cdot 0 = 0.$$

Ответ: $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1-3n}{4n+5}\right)^3 \cdot \dfrac{\sqrt{n}+2}{n^2+n+1} = 0.$

Следующие две теоремы указывают на свойства сходящихся последовательностей, члены которых удовлетворяют определенным неравенствам.

Теорема 2.10. Если $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ и $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$ и для всех $n \in N$ выполняется неравенство $x_n \le y_n$, то $a \le b$.

Доказательство. Так как $y_n - x_n \ge 0$ при всех $n \in N$, то по теореме 2.9

$$0 \le \lim_{n\to\infty}(y_n - x_n) = \lim_{n\to\infty} y_n - \lim_{n\to\infty} x_n.$$

Отсюда следует, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_n \le \lim\limits_{n\to\infty} y_n$.

Таким образом, имеем, что $a \le b$. ■

Теорема 2.11. Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} z_n = a$ и $x_n \le y_n \le z_n$ при всех $n \in N$, тогда $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = a$.

Доказательство. Докажем, что $\{y_n - a\}$ - бесконечно малая последовательность.

Так как $x_n \le y_n \le z_n$, $n \in N$, то $x_n - a \le y_n - a \le z_n - a$, $n \in N$. Отсюда следует, что $|y_n - a| \le \max\{|x_n - a|, |z_n - a|\}$, $n \in N$.

Так как $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ и $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = a$, то для любого $\varepsilon > 0$ найдется номер $N_1 = N_1(\varepsilon)$, такой, что $|x_n - a| < \varepsilon$ при $n \ge N_1$ и найдется номер $N_2 = N_2(\varepsilon)$, такой, что $|z_n - a| < \varepsilon$ при $n \ge N_2$. Пусть $N = \max\{N_1, N_2\}$. Начиная с этого номера имеет место неравенство $|y_n - a| \le \max\{|x_n - a|, |z_n - a|\} < \varepsilon$, т.е. $|y_n - a| < \varepsilon$.

Значит, имеем $\lim\limits_{n\to\infty}(y_n - a) = 0$ и последовательность $\{y_n - a\}$ - бесконечно малая. ■

3. Предел функции

3.1. Определение предела функции. Пусть функция $y = f(x)$ определена в некоторой окрестности точки x_0, кроме, быть может, самой точки x_0. Сформулируем два, эквивалентных между собой, определения предела функции.

Определение 1 (***на «языке последовательностей», или по Гейне***):
Число A называется *пределом функции* $y = f(x)$ при x, стремящемся к числу x_0, если для любой последовательности значений аргумента $\{x_n\}$, $x_n \ne x_0$, $n \in N$, сходящейся к x_0, т.е. $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$, последовательность значений функции $\{f(x_n)\}$ сходится к числу A, т.е. $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = A$.

В этом случае пишут $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$ или $f(x) \to A$ при $x \to x_0$.

Определение 2 (на «языке $\varepsilon - \delta$», или по Коши).

Число A называется *пределом функции* $y = f(x)$ при x, стремящемся к числу x_0, если для любого $\varepsilon > 0$ существует число $\delta(\varepsilon) > 0$, такое, что для всех $x \neq x_0$, удовлетворяющих неравенству $|x - x_0| < \delta$, выполняется неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$.

Это определение с помощью логических символов можно записать так:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = A \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 \; \forall x \; |x - x_0| < \delta, x \neq x_0 \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon.$$

Геометрический смысл предела функции $y = f(x)$ при $x \to x_0$ состоит в том, что для произвольного $\varepsilon > 0$ можно найти такое положительное $\delta(\varepsilon)$, что для всех x из проколотой δ-окрестности точки x_0, все точки $(x, f(x))$ графика функции $y = f(x)$ будут лежать внутри полосы $A - \varepsilon < y < A + \varepsilon$ (см. рис. 3.1). При этом, если функция $y = f(x)$ определена при x_0, то точка $(x_0, f(x_0))$ не обязательно принадлежит этой области (см. рис. 3.2).

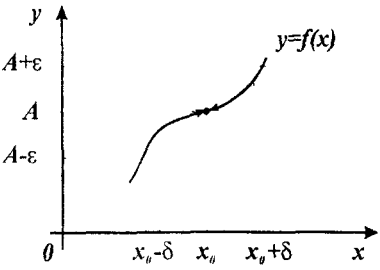


Рис. 3.1

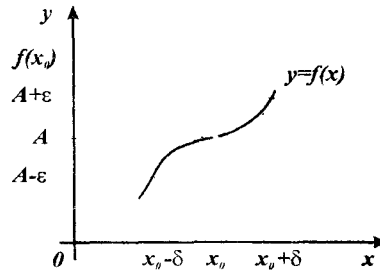


Рис. 3.2

Пусть функция $y = f(x)$ определена на бесконечном промежутке $(-\infty, +\infty)$. Определим предел функции при $x \to \pm\infty$.

Число A называется *пределом функции* $y = f(x)$ *при* $x \to +\infty$ $(x \to -\infty)$ (на языке последовательностей), если для любой бесконечно большой последовательности значений аргумента $\{x_n\}$, такой, что $x_n > 0$ $(x_n < 0)$, $n \in N$, последовательность значений функции $\{f(x_n)\}$ сходится к числу A.

Эквивалентное определение предела функции при $x \to +\infty$ $(x \to -\infty)$ на «языке $\varepsilon - \delta$» будет следующим:

Число A называется *пределом функции* $y = f(x)$ *при* $x \to +\infty$ $(x \to -\infty)$,если для любого $\varepsilon > 0$ существует число $\delta > 0$, такое, что для всех $x > \delta$ $(x < -\delta)$ выполняется неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$.

Символические обозначения предела функции при x, стремящемся к $\pm\infty$: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=A$ и $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=A$.

Число A называется *пределом функции* $y=f(x)$ *при* x, *стремящемся к бесконечности* ($x\to\infty$), если для любого $\varepsilon>0$ существует число $\delta>0$, такое, что для всех $|x|>\delta$, выполняется неравенство $|f(x)-A|<\varepsilon$.

Коротко это определение можно записать так:

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=A \Leftrightarrow \forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0\ \forall x\ |x|>\delta \Rightarrow |f(x)-A|<\varepsilon.$$

Из этих определений следует, что $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=A$ тогда и только тогда, когда одновременно $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=A$ и $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=A$.

Из определения 1 предела функции и теоремы 2.1 об единственности предела последовательности следует, что *если функция* $y=f(x)$ *при* $x\to x_0$ *имеет предел, то этот предел единственный.*

Пример 3.1. Доказать на основании определения 2 предела **функции**, что:

а) $\lim\limits_{x\to1}(3x-8)=-5$; ***б)*** $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{4x^3+1}{x^3-1}=4$.

Решение:

а) Согласно определению 2, нужно доказать, что для любого $\varepsilon>0$ существует такое $\delta(\varepsilon)$, что из неравенства $|x-1|<\delta$ следует неравенство $|f(x)-(-5)|=|f(x)+5|<\varepsilon$, где $f(x)=3x-8$.

$$|f(x)+5|=|3x-8+5|=|3x-3|=3\cdot|x-1|<\varepsilon.$$

Решив полученное неравенство относительно $|x-1|$, имеем $|x-1|<\dfrac{\varepsilon}{3}$. Итак, если $|x-1|<\delta$, $\delta=\dfrac{\varepsilon}{3}$, то

$$|f(x)+5|=3\cdot|x-1|<3\cdot\delta=3\cdot\frac{\varepsilon}{3}=\varepsilon.$$

Таким образом, доказано, что $\lim\limits_{x\to1}(3x-8)=-5$.

б) Нужно доказать, что для любого $\varepsilon>0$ существует такое $\delta(\varepsilon)$, что для всех $x>\delta$ ($x<-\delta$) выполняется неравенство $|f(x)-4|<\varepsilon$, где

$$f(x)=\frac{4x^3+1}{x^3-1}.$$

$$|f(x)-4|=\left|\frac{4x^3+1}{x^3-1}-4\right|=\left|\frac{4x^3+1-4x^3+4}{x^3-1}\right|=\frac{5}{|x^3-1|}<\varepsilon.$$

Разрешим последнее неравенство относительно x, $x\neq 1$

$$|x^3-1|>\frac{5}{\varepsilon}\Rightarrow\left[\begin{array}{l}x^3-1>\dfrac{5}{\varepsilon},\\ x^3-1<-\dfrac{5}{\varepsilon},\end{array}\right.\Rightarrow\left[\begin{array}{l}x>\sqrt[3]{\dfrac{5}{\varepsilon}+1},\\ x<\sqrt[3]{1-\dfrac{5}{\varepsilon}}.\end{array}\right.$$

Если положить $\delta=\sqrt[3]{\dfrac{5}{\varepsilon}+1}$, то при $x>\delta$, выполняется неравенство $|f(x)-4|<\varepsilon$, т.е. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{4x^3+1}{x^3-1}=4$.

Если положить $\delta=\sqrt[3]{1-\dfrac{5}{\varepsilon}}$, то при $x<-\delta$, выполняется неравенство $|f(x)-4|<\varepsilon$, т.е. $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{4x^3+1}{x^3-1}=4$. ■

3.2. Свойства функций, имеющих предел. Пусть функция $y=f(x)$ определена в некоторой окрестности точки x_0, кроме, быть может, самой точки x_0.

Теорема 3.1. Если $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$, то существует окрестность точки x_0 такая, что для каждого x из этой окрестности, кроме, быть может, $x=x_0$, выполняется неравенство $|f(x)|<M$, $M>0$

Доказательство. Так как $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$, то для любого $\varepsilon>0$, в частности, $\varepsilon=1$, существует δ -окрестность точки x_0, такая, что для каждого x из этой окрестности, кроме, быть может, $x=x_0$, выполняется неравенство

$$1>|f(x)-A|\geq|f(x)|-|A|$$

Отсюда следует, что для всех x из указанной окрестности $|f(x)|<1+|A|=M$. ■

Следующие теоремы устанавливают правила вычисления пределов, связанные с арифметическими действиями над функциями.

Теорема 3.2. Если $f(x) \equiv c$, где c - константа, то $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = c$.

Теорема 3.3. Пусть $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$ и $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = B$, тогда:

а) $\lim\limits_{x \to x_0} \big(f(x) \pm g(x)\big) = \lim\limits_{x \to x_0} f(x) \pm \lim\limits_{x \to x_0} g(x) = A \pm B$;

б) $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) \cdot g(x) = \lim\limits_{x \to x_0} f(x) \cdot \lim\limits_{x \to x_0} g(x) = A \cdot B$;

в) $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim\limits_{x \to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x \to x_0} g(x)} = \dfrac{A}{B}$, если $B \neq 0$

Доказательство. Все перечисленные в теореме случаи могут быть доказаны одинаковым способом, основанным на определении 1 предела функции и соответствующих свойствах пределов последовательностей. Докажем, например, случай ***б)***.

Так как $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$ и $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = B$. тогда,согласно определению 1 предела функции, для любой последовательности $\{x_n\}$, $x_n \neq x_0$, $n \in N$, такой, что $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = x_0$, справедливы равенства:

$$\lim_{n \to \infty} f(x_n) = A \text{ и } \lim_{n \to \infty} g(x_n) = B.$$

Так как предел произведения сходящихся последовательностей существует и равен произведению их пределов (теорема 2.9), то имеем

$$\lim_{x \to x_0} f(x) \cdot g(x) = A \cdot B$$

Этот предел не зависит от выбора $\{x_n\}$: он всегда равен $A \cdot B$, потому что, согласно определению 1, доказанное равенство означает, что

$$\lim_{x \to x_0} f(x) \cdot g(x) = A \cdot B = \lim_{x \to x_0} f(x) \cdot \lim_{x \to x_0} g(x). \blacksquare$$

Следствие 3.1. Постоянный множитель можно выносить за знак предела: $\lim\limits_{x \to x_0} c \cdot f(x) = c \cdot \lim\limits_{x \to x_0} f(x)$.

Пусть $g\big(f(x)\big)$ - сложная функция, причем $g(u)$ - элементарная функция, а $f(x)$ имеет конечный предел при $x \to x_0$. Если точка $u = A$ вместе с некоторой окрестностью принадлежит области определения элементарной функции $g(u)$ и $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$, то для предела сложной функции $g\big(f(x)\big)$ справедливо равенство

$$\lim_{x\to x_0} g(f(x)) = g\left(\lim_{x\to x_0} f(x)\right) = g(A). \qquad (*)$$

Из этого свойства следует:

1) правила вычисления пределов некоторых сложных функций:

$$\lim_{x\to x_0} (f(x))^n = \left(\lim_{x\to x_0} f(x)\right)^n,\ n\in N,$$

$$\lim_{x\to x_0} \sqrt[2n-1]{f(x)} = \sqrt[2n-1]{\lim_{x\to x_0} f(x)},\ n\in N,$$

$$\lim_{x\to x_0} \sqrt[2n]{f(x)} = \sqrt[2n]{\lim_{x\to x_0} f(x)},\ \text{если}\ \lim_{x\to x_0} f(x) > 0,\ n\in N;$$

$$\lim_{x\to x_0} a^{f(x)} = a^{\lim\limits_{x\to x_0} f(x)},\ a>0,\ a\neq 1,$$

$$\lim_{x\to x_0} (\log_a f(x)) = \log_a\left(\lim_{x\to x_0} f(x)\right),$$

$$\text{если}\ \lim_{x\to x_0} f(x) > 0,\ a>0,\ a\neq 1;$$

$$\lim_{x\to x_0} (\sin f(x)) = \sin\left(\lim_{x\to x_0} f(x)\right);$$

2) правило замены переменного (или подстановки) в пределе: если в равенстве (*) положить $u = f(x)$, $u \to A$ при $x \to x_0$, то справедливо

$$\lim_{x\to x_0} g(f(x)) = \lim_{u\to A} g(u).$$

Рассмотренные свойства функций, имеющих конечный предел при x, стремящемуся к числу x_0, справедливы и при $x \to \pm\infty$.

Пример 3.2. Найти пределы функций:

а) $\lim\limits_{x\to 2}(4x^4+3x^3-8x-2)$; ***б)*** $\lim\limits_{x\to 5}\log_5(2x^2+8x+35)$;

в) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2+3x+4}{x+2}$; ***г)*** $\lim\limits_{x\to 1}\sqrt[3]{x^2+4}\cdot e^{\frac{1}{x-2}}$, ***д)*** $\lim\limits_{x\to 1}(2+x)^5$.

Решение:

а)
$$\lim_{x\to 2}(4x^4+3x^3-8x-2) = \lim_{x\to 2}4x^4 + \lim_{x\to 2}3x^3 - \lim_{x\to 2}8x - \lim_{x\to 2}2 =$$

$$= 4\lim_{x\to 2}x^4 + 3\lim_{x\to 2}x^3 - 8\lim_{x\to 2}x - 2 =$$

$$= 4\left(\lim_{x\to 2}x\right)^4 + 3\left(\lim_{x\to 2}x\right)^3 - 8\lim_{x\to 2}x - 2 =$$

$$= 4 \cdot 2^4 + 3 \cdot 2^3 - 8 \cdot 2 - 2 = 70.$$

б) $\lim\limits_{x \to 5} \log_5 (2x^2 + 8x + 35) = \log_5 \left(\lim\limits_{x \to 5} (2x^2 + 8x + 35) \right) =$

$$= \log_5 \left(\lim_{x \to 5} 2x^2 + \lim_{x \to 5} 8x + \lim_{x \to 5} 35 \right) =$$

$$= \log_5 \left(2 \cdot 2^2 + 8 \cdot 2 + 35 \right) = \log_5 125 = 3.$$

в) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^2 + 3x + 4}{x + 2} = \dfrac{\lim\limits_{x \to 2} \left(x^2 + 3x + 4 \right)}{\lim\limits_{x \to 2} (x + 2)} = \dfrac{\lim\limits_{x \to 2} x^2 + 3 \lim\limits_{x \to 2} x + \lim\limits_{x \to 2} 4}{\lim\limits_{x \to 2} x + \lim\limits_{x \to 2} 2} =$

$$= \frac{2^2 + 3 \cdot 2 + 4}{2 + 2} = \frac{14}{4}.$$

г) $\lim\limits_{x \to 1} \sqrt[3]{x^2 + 4} \cdot \mathrm{e}^{-\frac{1}{x-2}} = \lim\limits_{x \to 1} \sqrt[3]{x^2 + 4} \cdot \lim\limits_{x \to 1} \mathrm{e}^{-\frac{1}{x-2}} =$

$$= \sqrt[3]{\lim_{x \to 1} \left(x^2 + 4 \right)} \cdot \mathrm{e}^{-\lim\limits_{x \to 1} \frac{1}{x-2}} = \sqrt[3]{1^2 + 4} \cdot \mathrm{e}^{-\frac{1}{1-2}} = \sqrt[3]{5} \cdot \mathrm{e}.$$

д) $\lim\limits_{x \to 1} (2 + x)^5 = \left[\begin{array}{c} u = 2 + x \\ x \to 1 \Rightarrow u \to 3 \end{array} \right] = \lim\limits_{u \to 3} u^5 = 3^5 = 125.$

Ответ: *а)* $\lim\limits_{x \to 2} (4x^4 + 3x^3 - 8x - 2) = 70;$

б) $\lim\limits_{x \to 5} \log_5 (2x^2 + 8x + 35) = 3;$

в) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^2 + 3x + 4}{x + 2} = \dfrac{14}{4};$

г) $\lim\limits_{x \to 1} \sqrt[3]{x^2 + 4} \cdot \mathrm{e}^{-\frac{1}{x-2}} = \sqrt[3]{5} \cdot \mathrm{e};$

д) $\lim\limits_{x \to 1} (2 + x)^5 = 125.$

3.3. Бесконечно малые и бесконечно большие функции. Пусть функция $y = \alpha(x)$ определена в некоторой окрестности точки x_0, кроме, быть может, самой точки x_0.

Функция $\alpha(x)$ называется *бесконечно малой функцией* (сокращенно б.м.ф.) при x стремящемся к x_0, если для любого $\varepsilon > 0$ существует число $\delta(\varepsilon) > 0$, такое, что для всех x, удовлетворяющих неравенству $|x - x_0| < \delta$, выполняется неравенство $|\alpha(x)| < \varepsilon$, т.е. $\lim\limits_{x \to x_0} \alpha(x) = 0$.

Например, функции $y = x^2$ при $x \to 0$, $y = x - 2$ при $x \to 2$ являются бесконечно малыми.

Теорема 3.3 (о связи функции, имеющей предел, с ее пределом и б.м.ф.). Если функция $f(x)$ при $x \to x_0$ имеет конечный предел, равный A, то ее можно представить в виде суммы:

$$f(x) = A + \alpha(x),$$

где $\alpha(x)$ - б.м.ф. при $x \to x_0$.

Доказательство.

1. Пусть $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$. Положим $\alpha(x) = f(x) - A$ и докажем, что $\alpha(x)$ - б.м.ф. при $x \to x_0$.

$$\lim_{x \to x_0} \alpha(x) = \lim_{x \to x_0} \big(f(x) - A\big) = \lim_{x \to x_0} f(x) - A = A - A = 0.$$

Значит, $f(x) = A + \alpha(x)$, где $\alpha(x)$ - б.м.ф. при $x \to x_0$.

2. Наоборот, если $f(x) = A + \alpha(x)$ и $\alpha(x)$ - б.м.ф. при $x \to x_0$, A - постоянная, докажем, что функция $f(x)$ при $x \to x_0$ имеет предел, равный A.

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} \big(A + \alpha(x)\big) = A + \lim_{x \to x_0} \alpha(x) = A + 0 = A. \blacksquare$$

Свойства бесконечно малых функций:

1. Сумма (разность) конечного числа бесконечно малых функций при $x \to x_0$ есть бесконечно малая функция при $x \to x_0$.

2. Произведение бесконечно малой при $x \to x_0$ функции $\alpha(x)$ на ограниченную функцию $f(x)$ есть бесконечно малая функция при $x \to x_0$.

3. Произведение конечного числа бесконечно малых функций есть бесконечно малая функция при $x \to x_0$.

4. Если функция $\alpha(x)$ - б.м.ф. при $x \to x_0$, а функция $f(x)$ имеет отличный от нуля предел при $x \to x_0$, то частное $\dfrac{\alpha(x)}{f(x)}$ есть бесконечно малая функция при $x \to x_0$.

Наряду с понятием бесконечно малых функций вводится понятие бесконечно большой функции.

Пусть функция $y = \beta(x)$ определена в некоторой окрестности точки x_0, кроме, быть может самой точки x_0. Функция $\beta(x)$ называется *бесконечно большой функцией* (сокращенно б.б.ф.) при x, стремящемся к x_0, если для любого $\varepsilon > 0$ существует число $\delta(\varepsilon) > 0$, такое, что для всех x, удовлетворяющих неравенству $|x - x_0| < \delta$, $x \neq x_0$, выполняется неравенство $|\beta(x)| > \varepsilon$. В этом случае пишут $\lim\limits_{x \to x_0} \beta(x) = \infty$ и говорят, что при $x \to x_0$ функция $\beta(x)$ имеет *бесконечный предел.*

Если функция $\beta(x)$ стремится к бесконечности $x \to x_0$ и принимает лишь положительные (отрицательные) значения в некоторой окрестности точки x_0, кроме, быть может, самой точки x_0, то пишут $\lim\limits_{x \to x_0} \beta(x) = +\infty$ ($\lim\limits_{x \to x_0} \beta(x) = -\infty$).

Теорема 3.4. Если $\beta(x)$ - бесконечно большая при $x \to x_0$ функция, то $\dfrac{1}{\beta(x)}$ – бесконечно малая при $x \to x_0$ функция. Наоборот, если $\alpha(x)$ - б.м.ф. при $x \to x_0$ и $\alpha(x) \neq 0$ при $x \neq x_0$, то функция $\dfrac{1}{\alpha(x)}$ - б.б.ф. при $x \to x_0$.

Доказательство. Так как $\lim\limits_{x \to x_0} \beta(x) = \infty$, то для любого $\varepsilon > 0$ найдется такая δ - окрестность точки x_0, что для всех точек x из этой окрестности, кроме, быть может, $x = x_0$ выполняется неравенство

$$|\beta(x)| > \varepsilon,$$

и, следовательно, неравенство

$$\left|\frac{1}{\beta(x)}\right| < \frac{1}{\varepsilon}.$$

Это означает, что $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{1}{\beta(x)}=0$, т.е. функция $\dfrac{1}{\beta(x)}$ - б.м.ф. при $x\to x_0$.

Аналогично доказывается второе утверждение теоремы ■

Все приведенные утверждения справедливы и при $x\to\pm\infty$. Например, $y=x^n$, $n\in N$ - б.б.ф. при $x\to\infty$ функция, а $\dfrac{1}{x^n}$, $x\neq 0$ - б.м.ф. при $x\to\infty$ функция.

Пример 3.3. Найти пределы функций.

а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x^2-3}$; ***б)*** $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x}{x+1}$.

Решение:

а) Так как $\lim\limits_{x\to\infty}\left(x^2-3\right)=\infty$, то $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x^2-3}=0$.

б) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x}{x+1}=\lim\limits_{x\to -1}x\cdot\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{1}{x+1}=(-1)\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{1}{x+1}=\infty$, так как $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{1}{x+1}=\infty$, поскольку $\lim\limits_{x\to -1}x+1=0$.

Ответ: ***а)*** $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x^2-3}=0$;

б) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x}{x+1}=\infty$.

3.4. Математические неопределенности. На бесконечно малые и бесконечно большие функции свойства конечных пределов, связанные с арифметическими действиями над пределами (теорема 3.3), непосредственно не переносятся.

Так, если $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=0$, а также, если $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=\infty$, то вычисление предела $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}$ приводит к отношениями вида $\dfrac{0}{0}$ и $\dfrac{\infty}{\infty}$, т.е. к *неопределенностям вида* $\dfrac{0}{0}$ *и* $\dfrac{\infty}{\infty}$. Если при помощи различных преобразований удается вычислить пределы указанного вида или доказать, что они не существуют, то говорят, что неопределенность раскрыта.

Пример 3.4. Найти пределы функций:

а) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^3-27}{x^2-5x+6}$; ***б)*** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x+25}-5}{x-x^2}$.

Решение:

а) Так как $\lim\limits_{x\to 3}\left(x^3-27\right)=0$ и $\lim\limits_{x\to 3}\left(x^2-5x+6\right)=0$, то имеет место неопределенность вида $\dfrac{0}{0}$.

Для ее раскрытия разложим числитель и знаменатель дроби на множители, затем сократим дробь на множитель, стремящийся к нулю.

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^3-27}{x^2-5x+6}=\lim_{x\to 3}\frac{(x-3)\left(x^2+3x+9\right)}{(x-3)(x-2)}=\lim_{x\to 3}\frac{x^2+3x+9}{x-2}=$$

$$=\frac{\lim\limits_{x\to 3}\left(x^2+3x+9\right)}{\lim\limits_{x\to 3}(x-2)}=\frac{3^2+3\cdot 3+9}{3-2}=27.$$

б) Здесь также имеем неопределенность вида $\dfrac{0}{0}$, так как $\lim\limits_{x\to 0}\left(\sqrt{x+25}-5\right)=0$ и $\lim\limits_{x\to 0}\left(x-x^2\right)=0$.

Числитель содержит иррациональное выражение $\sqrt{x+25}-5$. Избавимся от иррациональности, умножая числитель и знаменатель дроби на выражение, сопряженное к числителю.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+25}-5}{x-x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\left(\sqrt{x+25}-5\right)\left(\sqrt{x+25}+5\right)}{\left(x-x^2\right)\left(\sqrt{x+25}+5\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{(x+25)-5^2}{x(1-x)\left(\sqrt{x+25}+5\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x}{x(1-x)\left(\sqrt{x+25}+5\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1}{(1-x)\left(\sqrt{x+25}+5\right)}=$$

$$=\frac{1}{(1-0)\left(\sqrt{0+25}+5\right)}=\frac{1}{10}$$

Иначе можно решить этот пример путем замены переменной:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+25}-5}{x-x^2}=\begin{bmatrix} u=\sqrt{x+25}, \\ x=u^2-25 \\ x\to 0\Rightarrow u\to 5 \end{bmatrix}=\lim_{u\to 5}\frac{(u-5)}{u^2-25-(u^2-25)^2}=$$

$$=\lim_{u\to 5}\frac{(u-5)}{(u^2-25)(1-u^2+25)}=$$

$$=\lim_{u\to 5}\frac{(u-5)}{(u-5)(u+5)(1-u^2+25)}=$$

$$=\lim_{u\to 5}\frac{1}{(u+5)(1-u^2+25)}=\frac{1}{(5+5)(1-25+25)}=\frac{1}{10}.$$

Ответ: *а)* $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^3-27}{x^2-5x+6}=27;$

б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x+25}-5}{x-x^2}=\dfrac{1}{10}.$

Пример 3.5. Найти пределы рациональных функций:

а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^3+7x^2+8x+1}{5x^4+8x^3+7x^2+5x+1};$

б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2+4x+7}{3-2x-3x^2};$

в) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^3+8x^2+4x+1}{-2x^2+3x+1}.$

Решение:

Так как числители и знаменатели данных функций есть бесконечно большие функции, то имеет место неопределенность вида $\dfrac{\infty}{\infty}$. Чтобы раскрыть эту неопределенность, надо в числителе и знаменателе вынести самую высокую входящую в них степень x за скобку, а затем перейти к пределу, принимая во внимание, что $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{c}{x^n}=0$, где c - константа, $n\in N$.

а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^3+7x^2+8x+1}{5x^4+8x^3+7x^2+5x+1}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^4\left(\frac{3}{x}+\frac{7}{x^2}+\frac{8}{x^3}+\frac{1}{x^4}\right)}{x^4\left(5+\frac{8}{x}+\frac{7}{x^2}+\frac{5}{x^3}+\frac{1}{x^4}\right)}=$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{3}{x}+\frac{7}{x^2}+\frac{8}{x^3}+\frac{1}{x^4}}{5+\frac{8}{x}+\frac{7}{x^2}+\frac{5}{x^3}+\frac{1}{x^4}} = \frac{\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{3}{x}+\frac{7}{x^2}+\frac{8}{x^3}+\frac{1}{x^4}\right)}{\lim\limits_{x\to\infty}\left(5+\frac{8}{x}+\frac{7}{x^2}+\frac{5}{x^3}+\frac{1}{x^4}\right)} = \frac{0}{5} = 0.$$

б) $$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2+4x+7}{3-2x-3x^2} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2\left(1+\frac{4}{x}+\frac{7}{x^2}\right)}{x^2\left(\frac{3}{x^2}-\frac{2}{x}-3\right)} = \lim_{x\to\infty} \frac{1+\frac{4}{x}+\frac{7}{x^2}}{\frac{3}{x^2}-\frac{2}{x}-3} = -\frac{1}{3}.$$

в) $$\lim_{x\to\infty} \frac{3x^3+8x^2+4x+1}{-2x^2+3x+1} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^3\left(3+\frac{8}{x}+\frac{4}{x^2}+\frac{1}{x^3}\right)}{x^3\left(-\frac{2}{x}+\frac{3}{x^2}+\frac{1}{x^3}\right)} =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{3+\frac{8}{x}+\frac{4}{x^2}+\frac{1}{x^3}}{-\frac{2}{x}+\frac{3}{x^2}+\frac{1}{x^3}} = \frac{3}{0} = \infty.$$

Ответ: а) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{3x^3+7x^2+8x+1}{5x^4+8x^3+7x^2+5x+1} = 0;$

б) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^2+4x+7}{3-2x-3x^2} = -\dfrac{1}{3};$

в) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{3x^3+8x^2+4x+1}{-2x^2+3x+1} = \infty.$

Из примера 3.5 следует правило нахождения предела **рациональной** функции при $x \to \infty$:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_0}{b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \ldots + b_0} = \begin{cases} 0, & \text{если } n < m; \\ \dfrac{a_n}{b_m}, & \text{если } n = m; \\ \infty, & \text{если } n > m. \end{cases}$$

Согласно этому правилу, для примера 3.5 получаем:

а) $n = 3$, $m = 4$ и так как $n < m$, то $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{3x^3+7x^2+8x+1}{5x^4+8x^3+7x^2+5x+1} = 0;$

б) $n = 2$, $m = 2$ и так как $n = m$, то $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^2+4x+7}{3-2x-3x^2} = -\dfrac{1}{3};$

в) $n=3$, $m=2$ и так как $n<m$, то $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^3+8x^2+4x+1}{-2x^2+3x+1}=\infty$.

Если $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\infty$ и $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=\infty$, то при вычислении предела $\lim\limits_{x\to x_0}\left(f(x)-g(x)\right)$ возникает выражение вида $\infty-\infty$, тогда говорят, что имеем *неопределенность вида* $\infty-\infty$. Эта неопределенность приводится к неопределенности вида $\dfrac{0}{0}$ или $\dfrac{\infty}{\infty}$ путем преобразования разности функций к виду дроби.

Пример 3.6. Найти пределы функций:

а) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(x-\sqrt{x^2+5x}\right)$ ***б)*** $\lim\limits_{x\to 2}\left(\dfrac{1}{x-2}-\dfrac{4}{x^2-4}\right)$.

Решение:

а) Так как $\lim\limits_{x\to\infty} x=\infty$ и $\lim\limits_{x\to\infty}\sqrt{x^2+5x}=+\infty$, то имеем неопределенность вида $\infty-\infty$.

Умножив и разделив данную функцию на выражение $\left(x+\sqrt{x^2+5x}\right)$, получим

$$\lim_{x\to\infty}\left(x-\sqrt{x^2+5x}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(x-\sqrt{x^2+5x}\right)\left(x+\sqrt{x^2+5x}\right)}{x+\sqrt{x^2+5x}}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-x^2-5x}{x+\sqrt{x^2+5x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{-5x}{x+x\sqrt{1+\dfrac{5}{x}}}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{-5x}{x\left(1+\sqrt{1+\dfrac{5}{x}}\right)}=\lim_{x\to\infty}\frac{-5}{1+\sqrt{1+\dfrac{5}{x}}}=\frac{-5}{1+1}=-\frac{5}{2}.$$

б) В данном случае при $x\to 2$ также имеем неопределенность вида $\infty-\infty$. Приводим дроби к общему знаменателю и полученную в результате дробь сокращаем на множитель $x-2$.

$$\lim_{x\to 2}\left(\frac{1}{x-2}-\frac{4}{x^2-4}\right)=\lim_{x\to 2}\frac{x+2-4}{x^2-4}=\lim_{x\to 2}\frac{x-2}{x^2-4}=\lim_{x\to 2}\frac{1}{x+2}=\frac{1}{4}.$$

Ответ: а) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(x-\sqrt{x^2+5x}\right)=-\dfrac{5}{2}$;

б) $\lim\limits_{x\to 2}\left(\dfrac{1}{x-2}-\dfrac{4}{x^2-4}\right)=\dfrac{1}{4}.$

Кроме рассмотренных выше, неопределенностями также считаются выражения вида: $0\cdot\infty$, 1^{∞}, ∞^{0}, 0^{0}

3.5. Замечательные пределы. Функция $\dfrac{\sin x}{x}$ не определена при $x=0$.

Однако предел этой функции $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}$ существует. Найдем этот предел при $x\to 0$.

Возьмем круг радиуса R с центром в точке $O(0,0)$ Рассмотрим острый угол $\angle BOM$. Проведем хорду BM и проведем перпендикуляр к радиусу OB, который проходит через точку B и пересекается с продолжением радиуса OM в точке C (рис. 3.3).

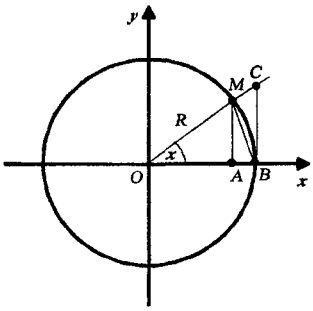


Рис. 3.3

Обозначим радианную меру угла $\angle BOM$ через x, $0<x<\dfrac{\pi}{2}$ Сравним площади трегольника BOM, сектора BOM и треугольника BOC. Площадь $S_{\Delta BOM}=\dfrac{1}{2}OB\cdot AM=\dfrac{1}{2}R^2\sin x$, площадь сектора равна $\dfrac{1}{2}R^2x$, а площадь $S_{\Delta BOC}=\dfrac{1}{2}OB\cdot BC=\dfrac{1}{2}R^2\operatorname{tg}x$. Треугольник BOM является частью сектора BOM, который,в свою очередь, является частью треугольника BOC, поэтому их площади связаны двойным неравенством

$$\frac{1}{2}R^2\sin x<\frac{1}{2}R^2x<\frac{1}{2}R^2\operatorname{tg}x.$$

Отсюда имеем

$$\sin x<x<\operatorname{tg}x.$$

Так как $0<x<\dfrac{\pi}{2}$ и $\sin x>0$, то, разделив полученное неравенство на $\sin x$, получаем

$$1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x}$$

и, следовательно,

$$\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1.$$

Функции $\cos x$ и $\frac{\sin x}{x}$, входящие в последнее двойное неравенство, являются четными, поэтому оно справедливо и для $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, 0\right)$.

Далее воспользуемся следующей теоремой

Теорема 3.5. (о пределе промежуточной функции). Если функция $f(x)$ заключена между двумя функциями $\varphi(x)$ и $g(x)$, стремящимися к одному и тому же пределу, то она также стремится к этому пределу, т.е. если

$$\lim_{x \to x_0} \varphi(x) = A, \ \lim_{x \to x_0} g(x) = A,$$
$$\varphi(x) \le f(x) \le g(x), \text{ то } \lim_{x \to x_0} f(x) = A.$$

Эту теорему иногда шутливо называют «принципом двух милиционеров». Роль «милиционеров» играют функции $\varphi(x)$ и $g(x)$, функция $f(x)$ «следует за милиционерами».

Так как $\lim_{x \to 0} \cos x = 1$ и $\lim_{x \to 0} 1 = 1$, то по теореме 3.5 имеем $\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$.

Найденный предел $\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ называется *первым замечательным пределом.*

С помощью первого замечательного предела можно раскрыть некоторые неопределенности вида $\frac{0}{0}$, $0 \cdot \infty$, возникающие при вычислении пределов, содержащих тригонометрические функции.

Пример 3.7. Используя первый замечательный предел, вычислить:

а) $\lim_{x \to 0} \frac{\sin 7x}{\operatorname{tg} 3x}$; ***б)*** $\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos 2x}{x^2}$; ***в)*** $\lim_{x \to 0} x \cdot \operatorname{ctg} \frac{x}{3}$.

Решение:

а) Так как $\lim\limits_{x\to 0}\sin 7x = 0$ и $\lim\limits_{x\to 0}\operatorname{tg} 3x = 0$, то имеем неопределенность вида $\frac{0}{0}$. Преобразуем функцию следующим образом:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 7x}{tg3x} = \lim_{x\to 0}\frac{\sin 7x\cdot\cos 3x}{\sin 3x} = \lim_{x\to 0}\frac{\sin 7x}{\sin 3x}\cdot\lim_{x\to 0}\cos 3x =$$

$$= \lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin 7x}{7x}\cdot 7x\cdot\frac{3x}{\sin 3x}\cdot\frac{1}{3x}\right)\lim_{x\to 0}\cos 3x =$$

$$= \frac{7}{3}\frac{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 7x}{7x}}{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{3x}}\cdot\lim_{x\to 0}\cos 3x = \frac{7}{3}$$

б) В этом случае тоже возникает неопределенность вида $\frac{0}{0}$, так как $\lim\limits_{x\to 0}(1-\cos 2x) = 0$ и $\lim\limits_{x\to 0}x^2 = 0$.

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 2x}{x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2 x}{x^2} = 2\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 = 2\left(\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\right)^2 = 2\cdot 1^2 = 2.$$

в) При $x\to 0$ получаем неопределенность вида $0\cdot\infty$, так как $\lim\limits_{x\to 0}x = 0$, а $\lim\limits_{x\to 0}\operatorname{ctg}\frac{x}{3} = \infty$.

$$\lim_{x\to 0}x\cdot\operatorname{ctg}\frac{x}{3} = \lim_{x\to 0}x\cdot\frac{\cos\frac{x}{3}}{\sin\frac{x}{3}} = \lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin\frac{x}{3}}\cdot\cos\frac{x}{3} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{3}x}{\sin\frac{x}{3}}\cdot\lim_{x\to 0}\cos\frac{x}{3} = 3\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{3}x}{\sin\frac{x}{3}}\cdot\lim_{x\to 0}\cos\frac{x}{3} = 3\cdot 1\cdot 1 = 3.$$

Ответ: а) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 7x}{\operatorname{tg} 3x} = \frac{7}{3}$,

б) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos 2x}{x^2} = 2$;

в) $\lim\limits_{x\to 0} x\cdot \operatorname{ctg}\dfrac{x}{3}=3$.

Исходя из определения 1 предела функции и теоремы 2.3 (Больцано-Вейерштрасса), для последовательностей следует равенство $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x=e$, *называемое вторым замечательным пределом.* Можно показать, что $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x=\lim\limits_{u\to 0}(1+u)^{1/u}=e$.

Второй замечательный предел используется для раскрытия неопределенности 1^∞ при вычислении пределов вида $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)^{\varphi(x)}$, где $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=1$, а $\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)=\infty$.

Указанный предел может быть найден при помощи следующих преобразований:

$$\lim_{x\to x_0} f(x)^{\varphi(x)}=\lim_{x\to x_0}\left(1+(f(x)-1)\right)^{\varphi(x)}=$$

$$=\lim_{x\to x_0}\left[\left(1+(f(x)-1)\right)^{\frac{1}{f(x)-1}}\right]^{(f(x)-1)\varphi(x)}=$$

$$=e^{\lim\limits_{x\to x_0}(f(x)-1)\varphi(x)}$$

Пример 3.8. Найти пределы функций:

а) $\lim\limits_{x\to 0}\sqrt[x]{1+3x}$; *б)* $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x+1}{3x+2}\right)^{2x}$.

Решение.

а) Поскольку $\lim\limits_{x\to 0}\sqrt[x]{1+3x}=\lim\limits_{x\to 0}(1+3x)^{\frac{1}{x}}$ и $\lim\limits_{x\to 0}(1+3x)=1$, а $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x}=\infty$, то здесь имеет место неопределенность 1^∞. Для ее раскрытия воспользуемся формулой

$$\lim_{x\to x_0} f(x)^{\varphi(x)}=e^{\lim\limits_{x\to x_0}(f(x)-1)\varphi(x)}.$$

$$\lim_{x\to 0}\sqrt[x]{1+3x}=\lim_{x\to 0}(1+3x)^{\frac{1}{x}}=e^{\lim\limits_{x\to 0}(1+3x-1)\cdot\frac{1}{x}}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{3x}{x}}=e^3.$$

б) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x+1}{3x+2}\right)^{2x} = e^{\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{3x+1}{3x+2}-1\right)\cdot 2x} = e^{-\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x}{3x+2}} = e^{-\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x}{x\left(3+\frac{2}{x}\right)}} = e^{-\frac{2}{3}}.$

3.6. Сравнение бесконечно малых функций. Пусть $\alpha_1(x)$ и $\alpha_2(x)$ - бесконечно малые при $x \to x_0$ функции.

1. Если $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\alpha_1(x)}{\alpha_2(x)} = A \neq 0$, A – число, то $\alpha_1(x)$ и $\alpha_2(x)$ называются *бесконечно малыми функциями одного порядка* при $x \to x_0$.

2. Если $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\alpha_1(x)}{\alpha_2(x)} = 0$, то функция $\alpha_1(x)$ называется *бесконечно малой более высокого порядка* при $x \to x_0$, чем $\alpha_2(x)$, при этом пишут $\alpha_1(x) = o(\alpha_2(x))$, где символ «$o$» читается как «$o$ - малое».

3. Если $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\alpha_1(x)}{\alpha_2(x)} = \infty$, то функция $\alpha_1(x)$ называется *бесконечно малой более низкого порядка* при $x \to x_0$, чем $\alpha_2(x)$.

4. Если $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\alpha_1(x)}{\alpha_2(x)}$ не существует (ни конечный, ни бесконечный), то бесконечно малые при $x \to x_0$ функции $\alpha_1(x)$ и $\alpha_2(x)$ называются *несравнимыми.*

Пример 3.9. Сравнить с бесконечно малой $\alpha(x) = x$, $x \in R$ следующие бесконечно малые при $x \to 0$ функции:

а) $\alpha_1(x) = x^2 + 3x$; *б)* $\alpha_2(x) = \dfrac{3x^3}{1-x}$;

в) $\alpha_3(x) = \sqrt[3]{x^2}$; *г)* $\alpha_4(x) = x\sin\dfrac{1}{x}$.

Решение.

а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\alpha_1(x)}{\alpha(x)} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2+3x}{x} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x(x+3)}{x} = \lim\limits_{x\to 0}(x+3) = 3.$

Значит, $\alpha(x)$ и $\alpha_1(x)$ - б.м.ф. одного порядка при $x \to 0$.

б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\alpha_2(x)}{\alpha(x)} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3x^3}{x(1-x)} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3x^2}{1-x} = \dfrac{3\cdot 0}{1} = 0.$

Отсюда следует, что $\alpha_2(x)$ - б.м.ф. более высокого порядка, чем $\alpha(x)$ при $x \to 0$, т.е. $\alpha_2(x) = o(\alpha(x))$.

в) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\alpha_3(x)}{\alpha(x)} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt[3]{x^2}}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{\sqrt[3]{x}} = \infty$, так как $\lim\limits_{x\to 0} \sqrt[3]{x} = 0$.

Следовательно, $\alpha_3(x)$ - б.м.ф. более низкого порядка, чем $\alpha(x)$ при $x \to 0$

г) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\alpha_4(x)}{\alpha(x)} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x \sin \dfrac{1}{x}}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \sin \dfrac{1}{x}$.

Так как $\lim\limits_{x\to 0} \sin \dfrac{1}{x}$ не существует, то $\alpha_4(x)$ и $\alpha(x)$ при $x \to 0$ являются несравнимыми. ■

3.7. Эквивалентные бесконечно малые функции. Остановимся на важном частном случае бесконечно малых одного порядка.

Если $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{\alpha_1(x)}{\alpha_2(x)} = 1$, то бесконечно малые при $x \to x_0$ функции $\alpha_1(x)$ и $\alpha_2(x)$ называются *эквивалентными* и обозначаются $\alpha_1(x) \sim \alpha_2(x)$.

Докажем эквивалентность некоторых бесконечно малых функций при $x \to 0$:

1. Из определения первого замечательного предела $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$, следует, что $\sin x \sim x$.

2. Так как $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{tg} x}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x} \cdot \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{\cos x} = 1$, то $\operatorname{tg} x \sim x$.

3. Поскольку

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{\frac{x^2}{2}} = \lim_{x\to 0} \frac{2\sin^2 \frac{x}{2}}{\frac{x^2}{2}} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin^2 \frac{x}{2}}{\frac{x^2}{4}} = \lim_{x\to 0} \left(\frac{\sin \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}} \right)^2 = 1,$$

следовательно, $1 - \cos x \sim \dfrac{x^2}{2}$.

4. Так как $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin x}{x}=\left[\begin{array}{l}\arcsin x=u,\\ u=\sin x, x\in\left[-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right]\\ x\to 0\Rightarrow u\to 0\end{array}\right]=$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{u}{\sin u}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\dfrac{\sin u}{u}}=1,$$ то

$\arcsin x\sim x$.

5. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\ln(1+x)^{\frac{1}{x}}=\ln\left(\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}\right)=\ln e=1,$ значит

$\ln(1+x)\sim x$.

6. Так как $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}-1}{\dfrac{x}{2}}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\left(\sqrt{1+x}-1\right)\cdot\left(\sqrt{1+x}+1\right)}{\dfrac{x}{2}\cdot\left(\sqrt{1+x}+1\right)}=$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\left(\sqrt{1+x}\right)^2-1}{\dfrac{x}{2}\cdot\left(\sqrt{1+x}+1\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{1+x-1}{\dfrac{x}{2}\cdot\left(\sqrt{1+x}+1\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x}{\dfrac{x}{2}\cdot\left(\sqrt{1+x}+1\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{2}{\sqrt{1+x}+1}=\frac{2}{2}=1,$$

то $\sqrt{1+x}-1\sim\dfrac{x}{2}$ ■

Наряду с перечисленными выше, приведем другие важнейшие эквивалентности для $\alpha(x)\to 0$ при $x\to x_0$, которые используются при вычислении пределов.

1. $\sin\alpha(x)\sim\alpha(x)$;

2. $\ln(1+\alpha(x))\sim\alpha(x)$;

3. $e^{\alpha(x)}-1\sim\alpha(x)$;

4. $a^{\alpha(x)}-1\sim\alpha(x)\ln a$, $a>0, a\neq 1$;

5. $\operatorname{tg}\alpha(x)\sim\alpha(x)$;

6. $\operatorname{arctg}\alpha(x)\sim\alpha(x)$;

7. $\arcsin\alpha(x)\sim\alpha(x)$;

8. $1-\cos\alpha(x)\sim\dfrac{\alpha^2(x)}{2}$;

9. $\sqrt[n]{1+\alpha(x)}-1\sim\dfrac{\alpha(x)}{n}, n\in N$;

10. $(1+\alpha(x))^n-1\sim n\cdot\alpha(x)$, $n\in N$;

Теорема 3.6. Две бесконечно малые при $x \to x_0$ функции $\alpha_1(x)$ и $\alpha_2(x)$ эквивалентны тогда и только тогда, когда разность $\alpha_1(x) - \alpha_2(x)$ есть бесконечно малая более высокого порядка относительно $\alpha_1(x)$ (или $\alpha_2(x)$), т.е. $\alpha_1(x) - \alpha_2(x) = o(\alpha_1(x))$ (или $\alpha_1(x) - \alpha_2(x) = o(\alpha_2(x))$).

Доказательство.

1. Пусть $\alpha_1(x) \sim \alpha_2(x)$ при $x \to x_0$, т.е. $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{\alpha_1(x)}{\alpha_2(x)} = 1$. Тогда

$$\lim_{x \to x_0} \frac{\alpha_1(x) - \alpha_2(x)}{\alpha_1(x)} = \lim_{x \to x_0} \left(1 - \frac{\alpha_2(x)}{\alpha_1(x)}\right) = 1 - \lim_{x \to x_0} \frac{\alpha_2(x)}{\alpha_1(x)} = 1 - 1 = 0.$$

Это означает, что $\alpha_1(x) - \alpha_2(x) = o(\alpha_1(x))$.

Аналогично доказывается, что $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{\alpha_1(x) - \alpha_2(x)}{\alpha_2(x)} = 0$, и, следовательно, что $\alpha_1(x) - \alpha_2(x) = o(\alpha_2(x))$

2. Если $\alpha_1(x) - \alpha_2(x) = o(\alpha_1(x))$, то

$$\lim_{x \to x_0} \frac{\alpha_1(x) - \alpha_2(x)}{\alpha_1(x)} = 0 \Rightarrow \lim_{x \to x_0} \left(1 - \frac{\alpha_2(x)}{\alpha_1(x)}\right) \Rightarrow \lim_{x \to x_0} \frac{\alpha_2(x)}{\alpha_1(x)} = 1.$$

Отсюда следует, что $\alpha_1(x) \sim \alpha_2(x)$ при $x \to x_0$.

Аналогично, если $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{\alpha_1(x) - \alpha_2(x)}{\alpha_2(x)} = 0$, то $\alpha_1(x) \sim \alpha_2(x)$ при $x \to x_0$. ■

Теорема 3.7 (о замене б.м.ф. эквивалентными). Пусть $\alpha(x)$, $\gamma(x)$, $\alpha_1(x)$, $\gamma_1(x)$ - бесконечно малые при $x \to x_0$ функции и $\alpha(x) \sim \alpha_1(x)$, $\gamma(x) \sim \gamma_1(x)$ при $x \to x_0$, тогда

$$\lim_{x \to x_0} \frac{\alpha(x)}{\gamma(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{\alpha_1(x)}{\gamma_1(x)}.$$

Доказательство. Так как $\alpha(x) \sim \alpha_1(x)$ и $\gamma(x) \sim \gamma_1(x)$ при $x \to x_0$, т.е.

$$\lim_{x \to x_0} \frac{\alpha(x)}{\alpha_1(x)} = 1 \text{ и } \lim_{x \to x_0} \frac{\gamma(x)}{\gamma_1(x)} = 1, \text{ то}$$

$$\lim_{x\to x_0}\frac{\alpha(x)}{\gamma(x)}=\lim_{x\to x_0}\left(\frac{\alpha(x)}{\gamma(x)}\cdot\frac{\alpha_1(x)}{\alpha_1(x)}\cdot\frac{\gamma_1(x)}{\gamma_1(x)}\right)=$$

$$=\lim_{x\to x_0}\frac{\alpha(x)}{\alpha_1(x)}\cdot\lim_{x\to x_0}\frac{\gamma_1(x)}{\gamma(x)}\cdot\lim_{x\to x_0}\frac{\alpha_1(x)}{\gamma_1(x)}=$$

$$=1\cdot1\cdot\lim_{x\to x_0}\frac{\alpha_1(x)}{\gamma_1(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{\alpha_1(x)}{\gamma_1(x)}.\ \blacksquare$$

Очевидно также, что

$$\lim_{x\to x_0}\frac{\alpha(x)}{\gamma(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{\alpha_1(x)}{\gamma(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{\alpha(x)}{\gamma_1(x)}.$$

Этой теоремой удобно пользоваться для раскрытия неопределенностей вида $\frac{0}{0}$, возникающих при вычислении пределов функций.

Пример 3.8. Найти пределы функции, заменяя бесконечно малые эквивалентными:

а) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\arcsin^2 x}{3x}$; ***б)*** $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{\operatorname{tg}(x-2)}{x^2-3x+2}$;

в) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\ln(\cos x)}{e^{x^2}-1}$; ***г)*** $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\ln x+x-1}{\sqrt[3]{x}-1}$.

Решение:

а) Здесь имеется неопределенность вида $\frac{0}{0}$, поскольку и числитель, и знаменатель при $x\to0$ стремится к нулю. Так как при $x\to0$ $\arcsin x\sim x$, то, пользуясь теоремой 3.7 о замене б.м.ф. эквивалентными, находим

$$\lim_{x\to0}\frac{\arcsin^2 x}{3x}=\frac{1}{3}\lim_{x\to0}\frac{x\cdot\arcsin^2 x}{x^2}=\frac{1}{3}\lim_{x\to0}x\cdot\lim_{x\to0}\frac{\arcsin^2 x}{x^2}=$$

$$=\frac{1}{3}\lim_{x\to0}x\cdot\lim_{x\to0}\frac{x\cdot x}{x^2}=\frac{1}{3}\cdot0\cdot1=0.$$

$$\text{***б)***}\ \lim_{x\to2}\frac{\operatorname{tg}(x-2)}{x^2-3x+2}=\left[\begin{array}{c}\operatorname{tg}(x-2)\sim(x-2),\\ \text{так как }(x-2)\to0\text{ при }x\to2\end{array}\right]=$$

$$=\lim_{x\to2}\frac{(x-2)}{(x-1)(x-2)}=\lim_{x\to2}\frac{1}{(x-1)}=\frac{1}{2-1}=1.$$

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(\cos x)}{e^{x^2}-1}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\left(1+(\cos x-1)\right)}{e^{x^2}-1}=$

$$=\left[\begin{array}{c}\ln\left(1+(\cos x-1)\right)\sim(\cos x-1),\\ e^{x^2}-1\sim x^2,\ \text{так как}\ (\cos x-1)\to 0\\ \text{и}\ x^2\to 0\ \text{при}\ x\to 0\end{array}\right]=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{x^2}=\left[\begin{array}{c}\cos x-1\sim-\dfrac{x^2}{2}\\ \text{при}\ x\to 0\end{array}\right]=\lim_{x\to 0}\frac{-\frac{x^2}{2}}{x^2}=-\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{x^2}=-\frac{1}{2}.$$

г) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\ln x+x-1}{\sqrt[3]{x}-1}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\ln\left(1+(x-1)\right)+x-1}{\left(1+(x-1)\right)^{1/3}-1}=$

$$=\left[\begin{array}{c}\ln\left(1+(x-1)\right)\sim x-1,\\ \left(1+(x-1)\right)^{1/3}-1\sim\dfrac{x-1}{3},\\ \text{так как}\ x-1\to 0\ \text{при}\ x\to 1\end{array}\right]=\lim_{x\to 1}\frac{x-1+x-1}{\frac{x-1}{3}}=$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{3\cdot 2\cdot(x-1)}{x-1}=\lim_{x\to 1}6=6.$$

Ответ: *а)* $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin^2 x}{3x}=0;$ *б)* $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\operatorname{tg}(x-2)}{x^2-3x+2}=1;$

в) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\ln(\cos x)}{e^{x^2}-1}=-\dfrac{1}{2};$ *г)* $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\ln x+x-1}{\sqrt[3]{x}-1}=6.$

4. Непрерывность функции

4.1. Односторонние пределы. В определении предела функции $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$ считается, что x стремится к x_0, любым способом: оставаясь меньшим, чем x_0 (слева от x_0), большим, чем x_0 (справа от x_0), или колеблясь около точки x_0.

Бывают случаи, когда значение предела функции зависит от способа приближения x к x_0. Поэтому вводят понятия односторонних пределов.

Пусть функция $y = f(x)$ определена на интервале (a, x_0). Число A называется *пределом функции* $y = f(x)$ *слева* при x, стремящемся к x_0, если любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta(\varepsilon) > 0$ такое, что для любого $x \in (x_0 - \delta, x_0)$ выполняется неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$. Предел функции слева обозначается $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x) = A$ или $f(x_0 - 0) = A$.

Пусть функция $y = f(x)$ определена на интервале (x_0, b). Тогда аналогично определяется *предел функции* $y = f(x)$ *справа* при $x \to x_0$ и обозначается $\lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x) = A$ или $f(x_0 + 0) = A$. Коротко это можно записать так:

$$\lim_{x \to x_0 + 0} f(x) = A \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta(\varepsilon) > 0 \; \forall x \in (x_0, x_0 + \delta) \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon.$$

Пределы функции слева и справа называются *односторонними* пределами.

Очевидно, если существует $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$, то существуют пределы слева и справа, причем $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x) = A$. Справедливо и обратное утверждение: если существуют оба односторонних предела и они равны, т.е. $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x) = A$, то существует предел $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$. Если же $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x) \neq \lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x)$, то $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ не существует.

Пример 4.1 Найти односторонние пределы функций.

а) $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{|x - 1|}$ при $x \to 1$; ***б)*** $f(x) = \dfrac{1}{2 - 2^{\frac{1}{x}}}$ при $x \to 0$.

Решение:

а) Если $x \to 1 - 0$, то $x < 1$. Значит $|x - 1| = -(x - 1)$. Тогда

$$f(1 - 0) = \lim_{x \to 1 - 0} \frac{x^2 - 1}{|x - 1|} = \lim_{x \to 1 - 0} \frac{x^2 - 1}{-(x - 1)} = -\lim_{x \to 1 - 0} (x + 1) = -2.$$

Если $x \to 1 + 0$, то $x > 1$. Значит $|x - 1| = x - 1$. Тогда

$$f(1 + 0) = \lim_{x \to 1 + 0} \frac{x^2 - 1}{|x - 1|} = \lim_{x \to 1 + 0} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \lim_{x \to 1 + 0} (x + 1) = 2.$$

б) Если $x \to 0-0$, то $x < 0$ и $\frac{1}{x} \to -\infty$. Тогда $\lim\limits_{x \to 0-0} 2^{\frac{1}{x}} = 0$. Следовательно,

$$f(0-0) = \lim_{x \to 0-0} f(x) = \lim_{x \to 0-0} \frac{1}{2 - 2^{\frac{1}{x}}} = \frac{1}{2-0} = \frac{1}{2}.$$

Если $x \to 0+0$, то $x > 0$ и $\lim\limits_{x \to 0+0} \frac{1}{x} = +\infty$. Тогда $\lim\limits_{x \to 0+0} 2^{\frac{1}{x}} = +\infty$. Значит

$$f(0+0) = \lim_{x \to 0+0} \frac{1}{2 - 2^{\frac{1}{x}}} = 0. \blacksquare$$

4.2. Непрерывность функции в точке. Пусть функция $y = f(x)$ определена в точке x_0 и в некоторой окрестности этой точки.

Определение 1. Функция $y = f(x)$ называется *непрерывной в точке* x_0, если существует предел функции в этой точке и он равен значению функции в точке x_0, т.е. $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

Данное определение эквивалентно выполнению следующих трех условий:

1. Функция определена в самой точке x_0 и некоторой ее окрестности (т.е. на интервале $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, где $\delta > 0$).
2. Функция имеет конечные односторонние пределы: $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x) = A$, $\lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x) = B$.
3. $A = B = f(x_0)$.

Так как $\lim\limits_{x \to x_0} x = x_0$, то равенство $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$ можно записать в следующей форме:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f\left(\lim_{x \to x_0} x\right) = f(x_0).$$

Следовательно, для непрерывной функции символ $\lim$ предельного перехода и символ f функции можно менять местами.

На языке «$\varepsilon - \delta$» можно дать следующее определение непрерывности функции в точке.

Определение 2. Функция $y = f(x)$, называется *непрерывной в точке* x_0, если любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta(\varepsilon) > 0$ такое, что для всех x, удов-

летворяющих неравенству $|x-x_0|<\delta$, выполняется неравенство $|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$.

С помощью логических символов это определение записывается в виде

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=f(x_0) \Leftrightarrow \forall\varepsilon\ \exists\delta(\varepsilon)\ \forall x\ |x-x_0|<\delta \Rightarrow\ f(x)-f(x_0)|<\varepsilon.$$

Пусть функция $y=f(x)$ определена в некотором интервале (a,b). Возьмем произвольную точку точке $x_0\in(a,b)$ Для любого $x\in(a,b)$ разность $x-x_0$ называется *приращением аргумента* x *в точке* x_0 и обозначается $\Delta x=x-x_0$. Отсюда $x=x_0+\Delta x$. Разность соответствующих значений функций $f(x)-f(x_0)$ называется *приращением функции* $f(x)$ *в точке* x_0 и обозначается Δy (или Δf или $\Delta f(x_0)$): $\Delta y=f(x)-f(x_0)$ или $\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x)$ (см рис. 4 1).

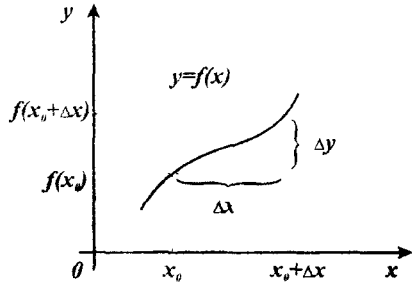


Рис. 4 1

Очевидно, приращения Δx и Δy могут быть как положительными, так и отрицательными числами

Условие непрерывности функции в точке x_0

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$$

можно записать так:

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=\left[\begin{array}{c} x=x_0+\Delta x \\ x\to x_0 \Rightarrow \Delta x\to 0 \end{array}\right]=\lim_{\Delta x\to 0} f(x_0+\Delta x)=f(x_0).$$

Это равносильно тому, что $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\left[f(x_0+\Delta x)-f(x_0)\right]=0$ Используя, что $\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x)$. полученное равенство можно представить в виде $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta y=0$.

Определение 3. Функция $y=f(x)$, называется *непрерывной в точке* x_0, если $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta y=0$, т.е бесконечно малому приращению аргумента Δx соответствует бесконечно малое приращение функции Δy.

Пример 4.2. Исследовать на непрерывность функцию $y=\sin x$.

Решение:

Функция $y=\sin x$ определена при всех $x\in R$.

Возьмем произвольную точку x и найдем приращение Δy

$$\Delta y = \sin(x+\Delta x) - \sin x = 2\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)\cdot\sin\frac{\Delta x}{2}.$$

Тогда $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta y = \lim\limits_{\Delta x\to 0} 2\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)\cdot\sin\frac{\Delta x}{2} = 0$, так как произведение ограниченной функции и бесконечно малой функции есть бесконечно малая функция. ■

В ряде случаев удобно пользоваться определением непрерывности функции в точке на «языке последовательностей».

Определение 4. Пусть функция задана на множестве X и пусть точка $x_0 \in X$. Функция $y = f(x)$ называется *непрерывной в точке* x_0, если для любой последовательности точек $\{x_n\}$, $x_n \in X$, сходящейся к точке x_0, соответствующая последовательность $\{f(x_n)\}$ значений функции сходится к $f(x_0)$.

Все четыре определения непрерывности функции в точке равносильны.

4.3. Свойства функций, непрерывных в точке. Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ определены в точке x_0 и в некоторой окрестности этой точки. Тогда из теоремы 3.3 для пределов функций следует, что функции

$$f(x)\pm g(x),\ f(x)\cdot g(x),\ \frac{f(x)}{g(x)}\ (\text{если } g(x_0)\neq 0)$$

тоже будут непрерывны в точке x_0.

Следующая теорема указывает на условия непрерывности сложной функции в точке x_0.

Теорема 4.1 (о непрерывности сложной функции). Если функция $f(x)$ непрерывна в точке x_0, а функция $g(u)$ непрерывна в точке $u_0 = f(x_0)$, то сложная функция $g(f(x))$ непрерывна в точке x_0, т.е.

$$\lim_{x\to x_0} g(f(x)) = g\left(\lim_{x\to x_0} f(x)\right) = g(f(x_0)).$$

Доказательство. В силу непрерывности функции $u = f(x)$ в точке x_0 имеем $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0) = u_0$, т.е. $u \to u_0$ при $x \to x_0$.

Поэтому из непрерывности функции $g(u)$ следует

$$\lim_{x\to x_0} g(f(x)) = \lim_{u\to u_0} g(u) = g(u_0) = g\left(\lim_{x\to x_0} f(x)\right) = g(f(x_0)).$$

Это означает, что сложная функция $g(f(x))$ непрерывна в точке x_0. ■

Из определения элементарной функции и выше приведенных свойств непрерывных функций следует, что *каждая элементарная функция непрерывна в любой внутренней точке своей области определения.*

4.4. Точки разрыва функции, их классификация. Пусть функция $y = f(x)$ определена в некоторой окрестности точки x_0. Функцию $y = f(x)$, не являющуюся непрерывной в точке x_0, называют *разрывной функцией* в точке x_0, а саму точку x_0 - *точкой разрыва*. Точки разрыва функции классифицируются в зависимости от того, как именно нарушено условие ее непрерывности.

Если в точке x_0 функция $y = f(x)$ имеет конечные предел слева и предел справа и они равны между собой $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$, но сама функция $y = f(x)$ не определена в точке x_0 или $f(x_0) \neq A$, то точка x_0 называется *точкой устранимого разрыва первого рода* функции $y = f(x)$.

Если функция $y = f(x)$ имеет в точке x_0 устранимый разрыв первого рода, то в этой точке она может быть так переопределена или доопределена, что окажется непрерывной в ней. Для этого в качестве нового значения $f(x_0)$ нужно взять число, равное $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$, сохранив все остальные значения функции.

Например, функция $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$ не определена в точке $x = 0$ (рис. 3.5), но существует $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$ (см. раздел 4.2.), следовательно, существуют оба односторонних предела и они равны. Значит, точка $x = 0$ является точкой устранимого разрыва. Доопределим функцию $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x}, & x \neq 0, \\ 1, & x = 0. \end{cases}$

Тогда функция $y = \dfrac{\sin x}{x}$ будет непрерывна в точке $x = 0$.

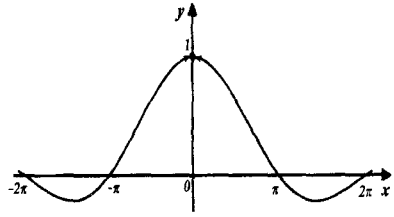


Рис. 4.2.

Если в точке x_0 функция $y = f(x)$ имеет конечные пределы слева и справа, $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x) = A$ и

$\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)=B$, но $A\neq B$, то точка x_0 называется *точкой неустранимого разрыва первого рода* (или просто *точкой разрыва первого рода*) функции $y=f(x)$.

Величина $\delta=|B-A|$ называется *скачком* функции $y=f(x)$ в точке $x=x_0$.

Например, для функции $f(x)=\begin{cases}x-1, & -1\le x<2,\\ 2-x, & 2\le x\le 5\end{cases}$ (рис.4.3) точка $x=2$ есть точка разрыва первого рода, так как

$$\lim_{x\to 2-0} f(x)=\lim_{x\to 2-0}(x-1)=1,$$

$$\lim_{x\to 2+0} f(x)=\lim_{x\to 2+0}(2-x)=0.$$

Скачок функции равен $\delta=|1-0|=1$.

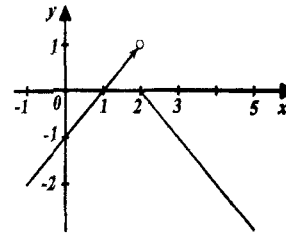


Рис. 4.3

Точка x_0 - точка *разрыва второго рода* функции $y=f(x), x\in D$, если хотя бы один из ее односторонних пределов при $x\to x_0$ равен бесконечности.

Точка разрыва x_0 называется *точкой разрыва второго рода* функции $y=f(x)$, если хотя бы один из ее односторонних пределов при $x\to x_0$ равен бесконечности или не существует.

Например, функция $f(x)=\dfrac{1}{x+2}$ не определена в точке $x=-2$. Эта точка является точкой разрыва второго рода, так как $\lim\limits_{x\to -2-0} f(x)=-\infty$, $\lim\limits_{x\to -2+0} f(x)=+\infty$ (рис. 4.4).

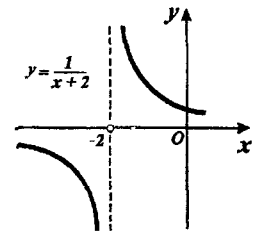


Рис. 4.4

Пример 4.3. Исследовать функцию $f(x)=e^{-\frac{1}{x}}$ на непрерывность в точке $x_0=0$ и указать тип разрыва.

Решение.

Проверим выполнение условий непрерывности функции в точке.

1. Функция $f(x)=e^{-\frac{1}{x}}$ не определена в точке $x=0$, следовательно, это точка разрыва.

2. $f(-0)=\lim\limits_{x\to-0}e^{-\frac{1}{x}}=+\infty$, так как $\lim\limits_{x\to-0}\left(-\frac{1}{x}\right)=+\infty$,

$f(+0)=\lim\limits_{x\to+0}e^{-\frac{1}{x}}=0$, так как $\lim\limits_{x\to+0}\left(-\frac{1}{x}\right)=-\infty$.

Поскольку левый предел заданной функции бесконечен, значит $x=0$ - точка разрыва второго рода.

Исследуем поведение функции на бесконечности:

$\lim\limits_{x\to-\infty}e^{-\frac{1}{x}}=e^{+\frac{1}{\infty}}=e^{+0}=1$, значит функция стремится к прямой $y=1$ сверху (оставаясь больше 1);

$\lim\limits_{x\to+\infty}e^{-\frac{1}{x}}=e^{-\frac{1}{\infty}}=e^{-0}=1$, т.е. функция стремится к 1 снизу (оставаясь меньше 1) (рис. 4.5). ■

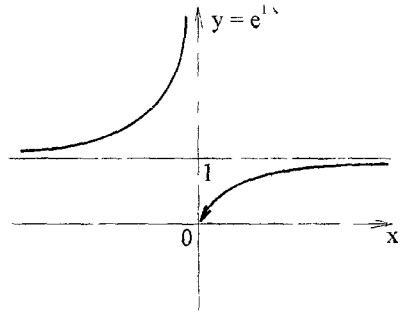


Рис. 4.5

Пример 4.4. Исследовать функцию на непрерывность. Найти точки разрыва функции и определить их тип. Построить схематически график.

$$f(x)=\begin{cases}x^2+1, & x<0,\\ \dfrac{x^2-1}{x-1}, & 0\le x\le 2,\\ 3-x, & x>2.\end{cases}$$

Решение:

Функция $f(x)$ неэлементарная; она задана тремя различными формулами для различных интервалов изменения аргумента x. Область определения заданной функции есть вся числовая ось за исключением точки $x=1$. Это значит, что в точке $x=1$ функция разрывна. Кроме того,

поскольку функция неэлементарная, она может иметь разрыв в точках, где меняется ее аналитическое выражение, т.е в точках $x=0$ и $x=2$.

Исследуем функцию на непрерывность в этих точках, для чего найдем соответствующие значения и односторонние пределы функции.

В точке $x=0$ имеем

1. $f(x)$ определена в точке $x=0$ и $f(0)=\dfrac{0^2-1}{0-1}=1.$
2. $f(-0)=\lim\limits_{x\to-0} f(x)=\lim\limits_{x\to-0}(x^2+2)=1,$

$$f(+0)=\lim_{x\to+0} f(x)=\lim_{x\to+0}\frac{x^2-1}{x-1}=\lim_{x\to0}\frac{(x-1)(x+1)}{x-1}=$$

$$=\lim_{x\to+0}(x+1)=0+1=1.$$

3. $f(-0)=f(+0)=f(0)=1.$

Значит, функция $f(x)$ непрерывна в точке $x=0$, так как все условия непрерывности этой функции в данной точке выполнены.

В точке $x=1$ имеем:

1. $f(x)$ не определена в точке $x=1$
2. Предел в этой точке существует:

$$\lim_{x\to1} f(x)=\lim_{x\to1}\frac{x^2-1}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)\cdot(x+1)}{x-1}=$$

$$=\lim_{x\to1}(x+1)=2,$$

следовательно, $f(1-0)=f(1+0)=2.$

Значит, $x=1$ – точка устранимого разрыва первого рода. Если положить $f(1)=2$, то рассматриваемая функция становится непрерывной в каждой точке интервала $(0,2)$.

В точке $x=2$ имеем·

1. $f(x)$ определена в точке $x=2$ и $f(2)=\dfrac{2^2-1}{2-1}=3.$
2. $f(2-0)=\lim\limits_{x\to2-0} f(x)=\lim\limits_{x\to2-0}\dfrac{x^2-1}{x-1}=\dfrac{4-1}{2-1}=3,$

$f(2+0)=\lim\limits_{x\to2+0} f(x)=\lim\limits_{x\to2+0}(3-x)=1$

3. $f(2)=f(2-0)\neq f(2+0).$

Следовательно, $x=2$ – точка неустранимого разрыва первого рода. Скачок функции в этой точке равен $\delta=|f(2+0)-f(2-0)|=|1-3|=2.$

График функции изображен на рис. 4 6 ■

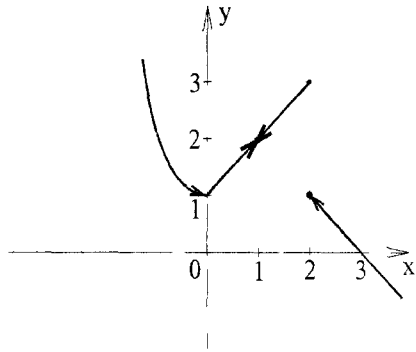


Рис 4.6

4.5. Свойства функций, непрерывные на отрезке. По аналогии с понятием предела слева (справа) вводится понятие непрерывности слева (справа). Пусть функция $y = f(x)$ определена на промежутке $(a, x_0]$ (или на $[x_0, b)$).

Функция $y = f(x)$ называется *непрерывной слева (справа) в точке* x_0, если в этой точке существует конечный предел функции слева (справа) и он равен значению функции в точке x_0, т е $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x) = f(x_0)$ ($\lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x) = f(x_0)$) Таким образом, функция $y = f(x)$ непрерывна в точке x_0 тогда и только тогда, когда она одновременно непрерывна в точке x_0 справа и слева

Функция $y = f(x)$ называется *непрерывной на интервале* (a, b), если она непрерывна в каждой точке этого интервала, и *непрерывной на отрезке* $[a; b]$, если она непрерывна на интервале $(a; b)$, в точке $x = a$ непрерывна справа, а в точке $x = b$ непрерывна слева

Непрерывные на отрезке функции имеют ряд важных свойств. Сформулируем их в виде теорем, не приводя доказательств

Свойства функциц,непрерывной на отрезке:

Теорема 4.2. (первая теорема Вейерштрасса). Непрерывная на отрезке функция является ограниченной на этом отрезке ■

Теорема 4.3. (вторая теорема Вейерштрасса). Если функция непрерывна на отрезке, то она достигает на этом отрезке своего наибольшего и наименьшего значения.

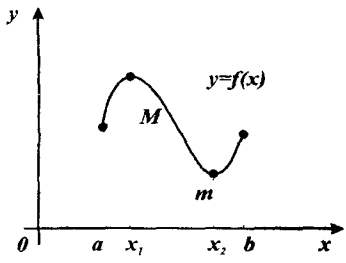


Рис. 4.7.

Изображенная на рис. 4.7 функция $y = f(x)$ непрерывна на $[a;b]$, принимает свое наибольшее значение M в точке x_1, а наименьшее m - в точке x_2. Для любого $x \in [a,b]$ имеет место неравенство $m \le f(x) \le M$.

Теорема 4.4. (теорема Коши о промежуточных значения непрерывной функции). Если функция $y = f(x)$ непрерывна на отрезке $[a;b]$ и принимает на его концах неравные значения $f(a) = A$ и $f(b) = B$, то на этом отрезке она принимает все промежуточные значения между A и B (рис. 4.8).

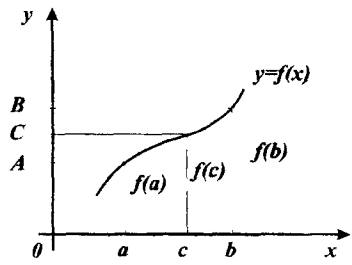


Рис.4.8.

Теорема 4.5. (теорема Больцано-Коши о нуле функции). Если функция $y = f(x)$ непрерывна на отрезке $[a;b]$ и на его концах принимает значения разных знаков, то внутри отрезка $[a;b]$ найдется хотя бы одна точка c, в которой данная функция обращается в нуль, т.е. $f(c) = 0$.

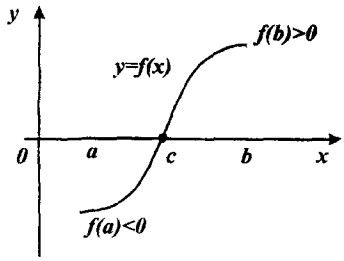


Рис. 4 9.

Геометрический смысл теоремы. Если $f(a) \cdot f(b) < 0$, то точки $(a, f(a))$ и $(b, f(b))$ лежат в разных полуплоскостях, на которые ось Ox делит плоскость xOy. График непрерывной функции $y = f(x)$, соединяющий эти точки, обязательно пересечет ось Ox по крайней мере в одной точке (рис. 4.9).

Теорема 4.6 (теорема об обратной функции). Если функция $f(x)$ непрерывна и строго монотонна на отрезке $[a;b]$, то на отрезке $[f(a), f(b)]$ определена обратная ей функция $x = f^{-1}(y)$, непрерывная и монотонная.

Вопросы для самоконтроля

1. Какая величина называется: а) постоянной; б) переменной? Приведите примеры.
2. Дайте определение функции. Перечислите основные способы задания функции (примеры). Какая функция называется: а) сложной; б) обратной?
3. Какие функции называются элементарными? Приведите примеры основных элементарных функций, их свойства и графики.
4. Какая функция называется. а) четной (нечетной, общего вида); б) монотонной; в) ограниченной; г) периодической?
5. Сформулируйте определения: а) последовательности; б) ограниченной и неограниченной последовательности; в) предела последовательности.
6. Какая последовательность называется сходящейся? Необходимое условие сходимости последовательности. Сходится ли ограниченная последовательность?
7. Бесконечно малые и бесконечно большие последовательности, их свойства и связь. Связь сходящейся и бесконечно малой последовательности.
8. Свойства сходящихся последовательностей.
9. Сформулируйте два определения предела функции. Геометрический смысл предела функции. Предел функции при $x \to \pm\infty$.
10. Свойства функций, имеющих предел.
11. Что такое математические неопределенности? Перечислите основные неопределенности и приемы их раскрытия.
12. Бесконечно малые и бесконечно большие функции, их свойства и связь. Связь функции, её предела и бесконечно малой функции.
13. Сравнение бесконечно малых функций.
14. Замечательные пределы. Доказать, что $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$.
15. Что называется левым (правым) пределом функции? Необходимое и достаточное условие существования предела функции.
16. Какая функция называется непрерывной в точке? Свойства функций, непрерывных в точке. Теорема о непрерывности сложной функции в точке.
17. Какие точки называются точками разрыва функции? Дайте определение точки устранимого разрыва и точек разрыва 1 и 2 рода.
18. Сформулируйте определение непрерывности функции слева (справа) в точке, на интервале, на отрезке. Свойства непрерывной на отрезке функции, их геометрические истолкования. Теорема о непрерывности обратной функции на отрезке.

Задания для контрольной работы

Задача 1. ***Найти область определения функций.***

Варианты:

1. $f(x)=\dfrac{1}{x+2}+\log_{1/5}(-x)$;
2. $f(x)=\dfrac{1}{x^2-1}+\sqrt{4+x}$;
3. $f(x)=\dfrac{x+2}{2+x-x^2}+\log_2 x$;
4. $f(x)=\lg\left(\dfrac{2}{x-5}\right)+\sqrt{x-3}$;
5. $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{5-x}}+\sqrt{3x-1}$;
6. $f(x)=\lg(x+1)+\sin\dfrac{\sqrt{x}}{2}$;
7. $f(x)=\dfrac{1}{4x-2}+\sqrt{x^2-1}$;
8. $f(x)=\log_5(1-3x)+2^{\sqrt{1-x}}$;
9. $f(x)=\dfrac{4-x}{\sqrt{2x+1}}+\cos\dfrac{1}{x}$;
10. $f(x)=\dfrac{\sqrt{x+2}}{x^2+5x+4}+7^{x-2}$.

Задача 2. ***Установить четность или нечетность функций.***

Варианты:

1. *а)* $f(x)=x^4-2x^2+3$; *б)* $f(x)=\dfrac{x}{2^x-1}+x^2$;
2. *а)* $f(x)=\sin x+x^3+\dfrac{5}{x}$; *б)* $f(x)=\dfrac{1}{(1+x)^2}+3^x$;
3. *а)* $f(x)=10^{-x}+10^x$; *б)* $f(x)=x^3+2x^2+3x-1$;
4. *а)* $f(x)=\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x^3}+x^5$; *б)* $f(x)=\dfrac{x}{\sin x}+\sqrt{6-x}$;
5. *а)* $f(x)=2x^4+3x^2-\cos x$; *б)* $f(x)=\left(\dfrac{1}{2}\right)^x-2x+x^3$;
6. *а)* $f(x)=\dfrac{x+5x^3}{\sqrt{x^2-3}}$; *б)* $f(x)=\dfrac{3^x+3^{-x}}{x-4}$,
7. *а)* $f(x)=\dfrac{1}{x^4}+\dfrac{2}{\cos x}$; *б)* $f(x)=\sqrt{1+x+x^2}-3x$;
8. *а)* $f(x)=x^5+\dfrac{\sqrt{1-x^2}}{x}$; *б)* $f(x)=\dfrac{1-x}{1+x}+\sin 2x$;
9. *а)* $f(x)=5^x+5^{-x}+\sqrt{4x^2-3}$; *б)* $f(x)=|x|-x^2+\sin 2x$;
10. *а)* $f(x)=7x+\sin^3 x+\dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}$; *б)* $f(x)=x^2+3x+2$.

Задача 3. ***Построить график функции.***

Варианты:

1. $r^2 = 9\sin 2\varphi$;

2. $\begin{cases} x = 5\cos t, \\ y = 2\sin t \end{cases}$;

3. $r = \dfrac{9}{4 - 5\cos\varphi}$;

4. $\begin{cases} x = 2t - 2\sin t, \\ y = 2 - 2\cos t \end{cases}$;

5. $r = 6\cos\varphi$;

6 $\begin{cases} x = 2\cos^3 t, \\ y = 2\sin^3 t \end{cases}$;

7 $r = 10\sin 3\varphi$;

8 $\begin{cases} x = 4t^2, \\ y = 8t^3 \end{cases}$;

9 $r = \dfrac{9}{5 - 4\cos\varphi}$;

10 $\begin{cases} x = -1 + 2\cos t, \\ y = 3 + 2\sin t \end{cases}$.

Задача 4. ***Найти пределы функций, не пользуясь правилом Лопиталя.***

Варианты:

1. *а)* $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{1 - 3x^2}{x^2 + 7x - 2}$; *б)* $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{\sqrt{2x+3} - 3}{\sqrt{x-2} - 1}$;

в) $\lim\limits_{x\to -3} \dfrac{2x^2 + 11x + 15}{x^2 + 4x - 5}$; *г)* $\lim\limits_{x\to 0} \sqrt[x]{1 + 3x}$; *д)* $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin 5x}{\sin 7x}$.

2. *а)* $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^5 - 2x + 4}{2x^4 + 3x^2 + 1}$; *б)* $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt{2 - x} - 1}{\sqrt{5 - x} - 2}$;

в) $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{6x^3 + 5x^2 - x}{(x^2 + x)(x - 2)}$; *г)* $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{3 + 5x}{3 + 2x}\right)^x$; *д)* $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x - \sin 3x}{x}$.

3. *а)* $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{5x^4 - 3x^2 + 7}{x^4 + 2x^3 + 1}$; *б)* $\lim\limits_{x\to 4} \dfrac{\sqrt{1 + 2x} - 3}{\sqrt{x} - 2}$;

в) $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{3x^2 + x - 2}{x + 1}$; *г)* $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{5 - x}{6 - x}\right)^{x+2}$; *д)* $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin^2 2x}{3x^2}$.

4. *а)* $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x + x^3}{x^4 - 3x^2 + 1}$; *б)* $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt{x} - 1}{x^2 - 1}$;

в) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{6x^2 - 9x + 3}{x - 1}$; *г)* $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{x - 5}{4 + x}\right)^x$; *д)* $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin^2 2x}{\sin^2 4x}$.

5. *а)* $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{8x + 1 - 5x^2}{4x^2 + 2x - 6}$; *б)* $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{x+1} - \sqrt{1-x}}{x}$;

в) $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{6x^2+20x+6}{x+3}$; *г)* $\lim\limits_{x\to 0}\sqrt[x]{1+5x}$; *д)* $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg}^2 8x}{x}$.

6. *а)* $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^5-2x}{x^3+x^21}$; *б)* $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x^4+1}-1}{\sqrt{x^2+16}-4}$;

в) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{3x^2+2x-8}{x+2}$; *г)* $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+3}{x}\right)^x$; *д)* $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2}{\sin 5x}$.

7. *а)* $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^3}{x^2-3}-x\right)$; *б)* $\lim\limits_{x\to 8}\dfrac{x^2-8x}{\sqrt{x+1}-3}$;

в) $\lim\limits_{x\to -1/3}\dfrac{9x^2+12x+3}{x+1/3}$; *г)* $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{8+x}{10+x}\right)^{2x}$; *д)* $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}$.

8. *а)* $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^3+7x^2+4}{x^4+5x-1}$; *б)* $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\sqrt{5-x}-\sqrt{5+x}}$;

в) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-x-6}{x-3}$; *г)* $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+2}{x-2}\right)^x$; *д)* $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg}x+\sin 5x}{x}$.

9. *а)* $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^3+4x^2-7x}{2x^2+7x-3}$; *б)* $\lim\limits_{x\to 9}\dfrac{3-\sqrt{x}}{4-\sqrt{2x-2}}$;

в) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{4x^2-15x+9}{x-3}$; *г)* $\lim\limits_{x\to 0}\sqrt[x]{1-2x}$; *д)* $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2}{1-\cos 5x}$.

10. *а)* $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2+2x+9}{2x^2-x+4}$; *б)* $\lim\limits_{x\to 6}\dfrac{x-6}{\sqrt{x+3}-3}$;

в) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{5x^2-3x-2}{x-1}$; *г)* $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x}{2x-3}\right)^{3x}$; *д)* $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2}{\operatorname{tg}(-x)}$.

Задача 5. ***Исследовать функцию на непрерывность и указать тип разрыва точки*** x_0.

Варианты:

1. $f(x)=\dfrac{1}{2^{x-3}-1}$, $x_0=3$; **6.** $f(x)=\dfrac{\sqrt{x+3}}{1-2^{\frac{1}{x-4}}}$, $x_0=4$;

2. $f(x)=\dfrac{1}{1+e^{1/x}}$, $x_0=0$; **7.** $f(x)=\dfrac{2^{\frac{1}{x}}-1}{2^{\frac{1}{x}}+1}$, $x_0=0$;

3. $f(x)=\dfrac{x}{\sin(x-2)}$, $x_0=2$; **8.** $f(x)=\dfrac{x}{x^2-4}$, $x_0=2$;

4. $f(x)=\dfrac{x}{|x-1|}$, $x_0=1$; **9.** $f(x)=\dfrac{1}{1+5^{\frac{1}{x}}}$, $x_0=0$;

5. $f(x)=\dfrac{1}{1+3^{-\frac{1}{1-x}}}$, $x_0=1$; **10.** $f(x)=1+2^{\frac{1}{x-2}}$, $x_0=2$.

Задача 6. ***Исследовать функцию $f(x)$ на непрерывность; найти точки разрыва функции и определить их тип. Построить схематически график функции.***

Варианты:

1. $f(x)=\begin{cases}-2, & x<0;\\ -2\cos x, & 0\le x\le \dfrac{\pi}{2};\\ \pi+x, & x>\dfrac{\pi}{2};\end{cases}$ **6.** $f(x)=\begin{cases}x+2, & x\le -2;\\ 2-x, & -2<x<0;\\ x^2+2, & x\ge 0;\end{cases}$

2. $f(x)=\begin{cases}x, & x\le -1;\\ 0.5, & -1<x\le \dfrac{\pi}{6};\\ \sin x, & x>\dfrac{\pi}{6};\end{cases}$ **7.** $f(x)=\begin{cases}x^2-4, & x<-1;\\ 3x, & -1\le x\le 3;\\ 5, & x>3;\end{cases}$

3. $f(x)=\begin{cases}2, & x<-1;\\ 2-2x, & -1\le x\le 1;\\ \ln x, & x>1;\end{cases}$ **8.** $f(x)=\begin{cases}\dfrac{4}{x}, & x<-2;\\ x, & -2\le x<0;\\ 1-x, & x\ge 0;\end{cases}$

4. $f(x)=\begin{cases}0.5\cdot\sqrt{4-x}, & x<0;\\ \cos 2x, & 0\le x\le \dfrac{\pi}{4};\\ -x, & x>\dfrac{\pi}{4};\end{cases}$ **9.** $f(x)=\begin{cases}\cos x, & x\le -\pi;\\ -1, & -\pi<x\le 0;\\ \sqrt{x+1}, & x>0;\end{cases}$

5. $f(x)=\begin{cases}x+\pi, & x<-\pi;\\ \sin x, & -\pi\le x<0;\\ 3-2x, & x\ge 0;\end{cases}$ **10.** $f(x)=\begin{cases}x^2-4, & x<-2;\\ 3x+2, & -2\le x\le 2;\\ 12-x^2, & x>2.\end{cases}$

Основные элементарные функции

1. *Степенные функции* $y = x^{\alpha}$, $\alpha \in R$

1.1. $y = x^n$, $n \in N$.

1.1.1. $n = 2k$, $k \in N$

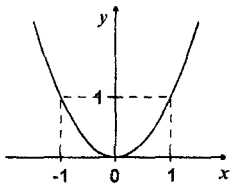
1) $D(y) = (-\infty;+\infty)$;

2) $E(y) = [0;\ +\infty)$;

3) четная: $(-x)^n = x^n$;

4) не периодическая;

5) график:



6) обратная функция:

$x = \sqrt[n]{y}$, $y \in [0;+\infty)$ (см. 1.3.1).

1.1.2. $n = 2k+1$, $k \in N$

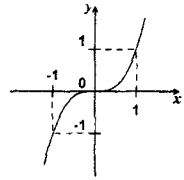
1) $D(y) = (-\infty;+\infty)$;

2) $E(y) = [0;\ +\infty)$;

3) нечетная: $(-x)^n = -x^n$;

4) не периодическая;

5) график:



6) обратная функция:

$x = \sqrt[n]{y}$, $y \in (-\infty;+\infty)$ (см. 1.3.2).

1.2. $y = x^{-n}$, $n \in N$.

1.2.1. $n = 2k$, $k \in N$

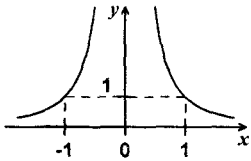
1) $D(y) = (-\infty;0) \cup (0;+\infty)$;

2) $E(y) = (0;+\infty)$;

3) четная: $(-x)^n = x^n$;

4) не периодическая;

5) график:



6) обратная функция:

$x = \dfrac{1}{\sqrt[n]{y}}$, $y \in (0;+\infty)$ (см. 1.4.2).

1.2.2. $n = 2k+1$, $k \in N$

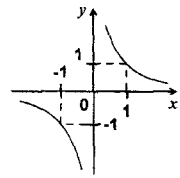
1) $D(y) = (-\infty;0) \cup (0;+\infty)$;

2) $E(y) = (-\infty;0) \cup (0;+\infty)$;

3) нечетная: $(-x)^n = -x^n$;

4) не периодическая;

5) график:



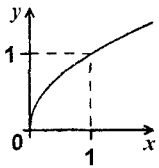
6) обратная функция:

$x = \dfrac{1}{\sqrt[n]{y}}$, $y \in (-\infty;0) \cup (0;+\infty)$.

1.3. $y = \sqrt[n]{x}$, $n \in N$.

1.3.1. $n = 2k$, $k \in N$

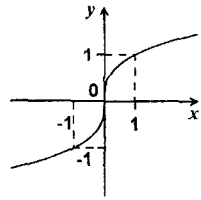
1) $D(y) = [0;+\infty)$;
2) $E(y) = [0;+\infty)$;
3) ни четная, ни нечетная;
4) не периодическая;
5) график:



6) обратная функция:
$x = y^n$, $y \in [0;+\infty)$ (см. 1.1.1).

1.3.2. $n = 2k+1$, $k \in N$

1) $D(y) = (-\infty;+\infty)$;
2) $E(y) = (-\infty;+\infty)$;
3) нечетная: $\sqrt[n]{-x} = -\sqrt[n]{x}$;
4) не периодическая;
5) график:

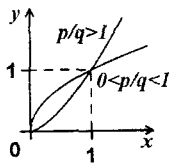


6) обратная функция:
$x = y^n$, $y \in (-\infty;+\infty)$ (см. 1.1.2).

1.4. $y = x^{p/q}$, $p,q \in Z$, $q \neq 0$.

1.4.1. $\frac{p}{q} > 0$

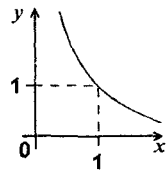
1) $D(y) = [0;+\infty)$;
2) $E(y) = [0;+\infty)$;
3) ни четная, ни нечетная;
4) не периодическая;
5) график:



6) обратная функция:
$x = y^{q/p}$, $y \in [0;+\infty)$.

1.4.2. $\frac{p}{q} < 0$

1) $D(y) = (0;+\infty)$;
2) $E(y) = (0;+\infty)$;
3) ни четная, ни нечетная;
4) не периодическая;
5) график:

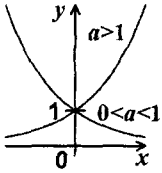


6) обратная функция:
$x = y^{q/p}$, $y \in (0;+\infty)$.

2. *Показательная функция*

$y = a^x, \quad a > 0, a \neq 1.$

1) $D(y) = (-\infty;+\infty)$;
2) $E(y) = (0;+\infty)$;
3) ни четная, ни нечетная;
4) не периодическая;
5) график:

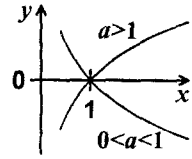


6) обратная функция: $x = \log_a y$, $y \in (0;+\infty)$, $a > 0$, $a \neq 1$ (см. 3).

3. *Логарифмическая функция*

$y = \log_a x, \quad a > 0, a \neq 1.$

1) $D(y) = (0;+\infty)$;
2) $E(y) = (-\infty;+\infty)$;
3) ни четная, ни нечетная;
4) не периодическая;
5) график:

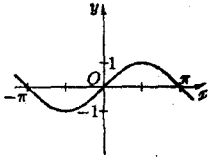


6) обратная функция: $x = a^y$, $y \in (-\infty;+\infty)$, $a > 0$, $a \neq 1$ (см. 2).

4. *Тригонометрические функции*

4.1. $y = \sin(x)$

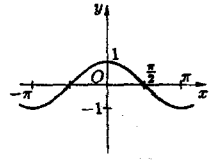
1) $D(y) = (-\infty;+\infty)$;
2) $E(y) = [-1;1]$;
3) нечетная: $\sin(-x) = -\sin(x)$;
4) периодическая: $T = 2\pi$, $\sin(x + 2\pi k) = \sin(x)$, $k \in Z$;
5) график:



6) обратная функция: $x = \arcsin(y)$, $y \in [-1;1]$ (см. 5.1).

4.2. $y = \cos(x)$

1) $D(y) = (-\infty;+\infty)$;
2) $E(y) = [-1;1]$;
3) четная: $\cos(-x) = \cos(x)$;
4) периодическая: $T = 2\pi$, $\cos(x + 2\pi k) = \cos(x)$, $k \in Z$;
5) график:



6) обратная функция: $x = \arccos(y)$, $y \in [-1;1]$ (см. 5.2).

4.3. $y = \operatorname{tg}(x)$

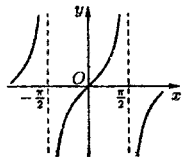
1) $D(y) = \left\{R: x \neq \dfrac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in Z\right\}$;

2) $E(y) = (-\infty; +\infty)$;

3) нечетная: $\operatorname{tg}(-x) = -\operatorname{tg}(x)$;

4) периодическая: $T = \pi$,
$\operatorname{tg}(x + \pi k) = \operatorname{tg}(x), k \in Z$;

5) график:



6) обратная функция:
$x = \operatorname{arctg}(y), y \in (-\infty; +\infty)$
(см. 5.3).

4.4. $y = \operatorname{ctg}(x)$

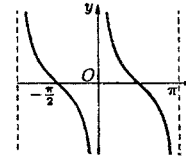
1) $D(y) = \{R: x \neq \pi k, k \in Z\}$;

2) $E(y) = (-\infty; +\infty)$;

3) нечетная:
$\operatorname{ctg}(-x) = -\operatorname{ctg}(x)$;

4) периодическая: $T = \pi$,
$\operatorname{ctg}(x + \pi k) = \operatorname{ctg}(x), k \in Z$;

5) график:



6) обратная функция:
$x = \operatorname{arcctg}(y), y \in (-\infty; +\infty)$
(см. 5.4).

5. *Обратные тригонометрические функции*

5.1. $y = \arcsin(x)$

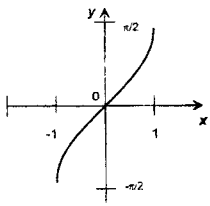
1) $D(y) = [-1; 1]$;

2) $E(y) = \left[-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right]$;

3) нечетная:
$\arcsin(-x) = -\arcsin(x)$;

4) не периодическая;

5) график:



6) обратная функция:
$x = \sin(y), y \in \left[-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right]$ (см. 4.1).

5.2. $y = \arccos(x)$

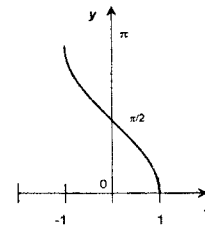
1) $D(y) = [-1; 1]$;

2) $E(y) = [0; \pi]$;

3) ни четная, ни нечетная,
$\arccos(-x) = \pi - \arccos(x)$;

4) не периодическая;

5) график:



6) обратная функция:
$x = \cos y, \ y \in [0; \pi]$ (см. 4.2).

6. *Полиномы 1-ой и 2-ой степени*

6.1. $y = kx + b,\ k \neq 0$

(***линейная функция***)

1) $D(y) = (-\infty; +\infty)$;

2) $E(y) = (-\infty; +\infty)$;

3) ни четная, ни нечетная при $b \neq 0$, нечетная при $b = 0$;

4) не периодическая;

6.2. $y = ax^2 + bx + c,\ a \neq 0$

(***квадратическая функция***)

1) $D(y) = (-\infty; +\infty)$;

2) $E(y) = \left[-(4ac - b^2)/4a; \infty\right)$, $a > 0$;

$E(y) = \left(-\infty; (4ac - b^2)/4a\right]$, $a < 0$;

3) ни четная, ни нечетная, $b \neq 0$, четная при $b = 0$;

4) не периодическая;

5.3. $y = \operatorname{arctg}(x)$

1) $D(y) = (-\infty; +\infty)$;

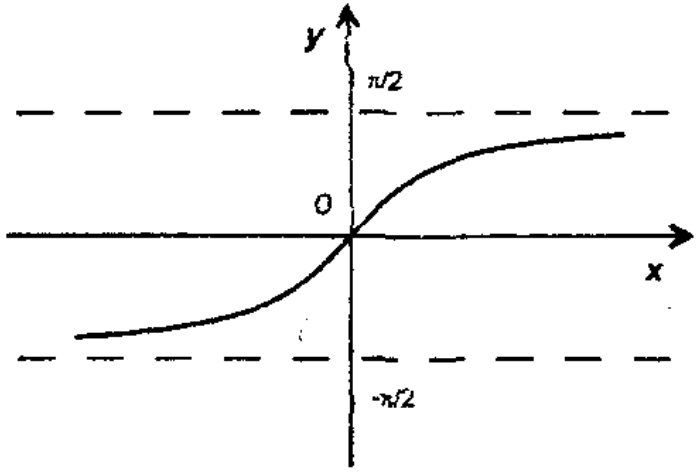
2) $E(y) = \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$;

3) нечетная:

$\operatorname{arctg}(-x) = -\operatorname{arctg}(x)$;

4) не периодическая;

5) график:



6) обратная функция:

$x = \operatorname{tg}(y)$, $y \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ (см. 4.3).

5.4. $y = \operatorname{arcctg}(x)$

1) $D(y) = (-\infty; +\infty)$;

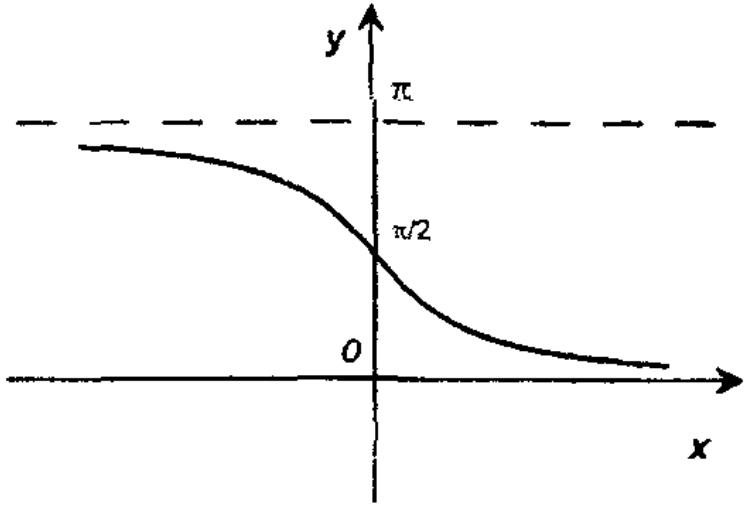
2) $E(y) = (0; \pi)$;

3) ни четная, ни нечетная,

$\operatorname{arcctg}(-x) = \pi - \operatorname{arcctg}(x)$;

4) не периодическая;

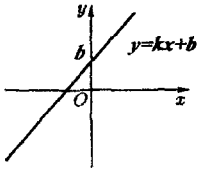
5) график:



6) обратная функция:

$x = \operatorname{ctg} y$, $y \in (0; \pi)$ (см. 4.4).

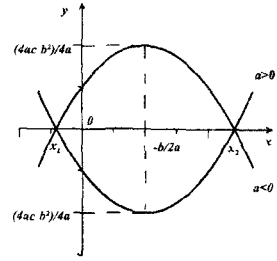
5) график:



6) обратная функция:

$$x = \frac{y-b}{k},\ y \in (-\infty;+\infty).$$

5) график:

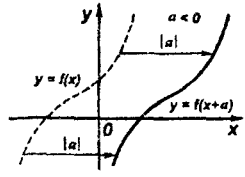
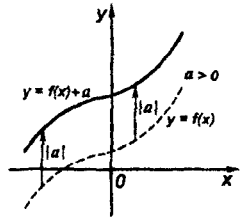


$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

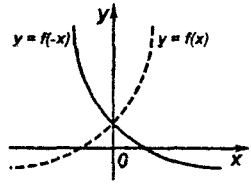
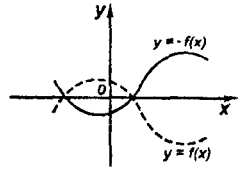
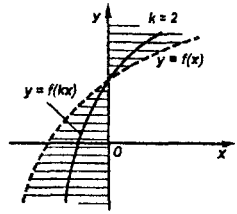
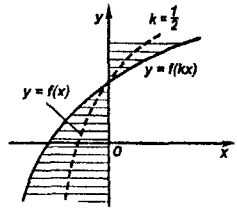
6) однозначно выраженной обратной функции нет.

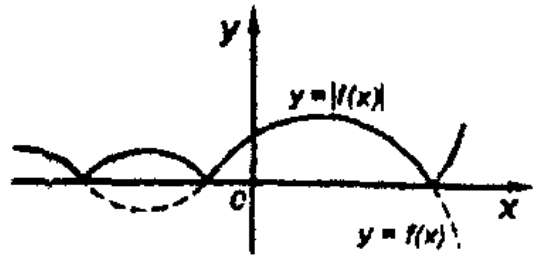
Приложение 2
Таблица 1

Построение графических образов

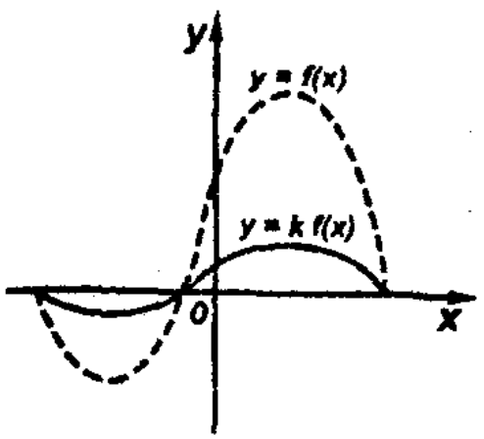
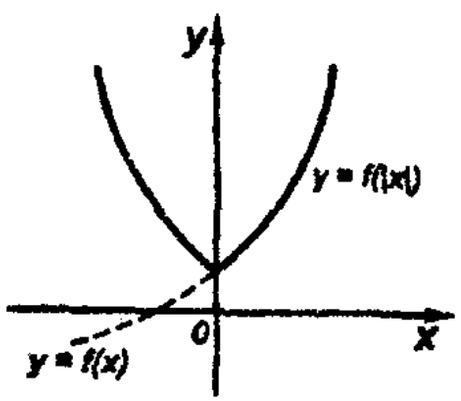
Функция	Правило преобразования графика $y = f(x)$	Графическая иллюстрация правила
$y = f(x+a)$	Параллельный перенос вдоль оси абсцисс на $\|a\|$ единиц: в положительном направлении, если $a < 0$; в отрицательном направлении, если $a > 0$	
$y = f(x) + a$	Параллельный перенос вдоль оси ординат на $\|a\|$ единиц: в положительном направлении, если $a > 0$; в отрицательном направлении, если $a < 0$	

Построение графических образов

$y = f(-x)$	Симметричное отражение относительно оси ординат	
$y = -f(x)$	Симметричное отражение относительно оси абсцисс	
$y = f(kx)$, $k > 1$	Сжатие к оси ординат в k раз (расстояние от каждой точки графика $y = f(x)$ до оси ординат уменьшается в k раз)	
$y = f(kx)$, $0 < k < 1$	Растяжение от оси ординат в $\frac{1}{k}$ раз (расстояние от каждой точки графика $y = f(x)$ до оси ординат увеличивается в $\frac{1}{k}$ раз)	

$y = \lvert f(x) \rvert$	Часть графика, лежащую над осью абсцисс, оставляем без изменений. Ту часть, которая лежит под осью абсцисс, симметрично отражаем относительно оси абсцисс	

Построение графических образов

$y = kf(x)$, $0 < k < 1$	Сжатие к оси абсцисс в $\frac{1}{k}$ раз (расстояние от каждой точки графика $y = f(x)$ до оси абсцисс уменьшается в $\frac{1}{k}$ раз)	
$y = f(\lvert x \rvert)$	Часть графика, лежащую в полуплоскости $x \geq 0$, оставляем без изменений, затем ее же симметрично отражаем относительно оси ординат. График функции представляет собой объединение двух кривых: $y = f(x)$, $x \geq 0$ и $y = f(-x)$, $x \leq 0$	

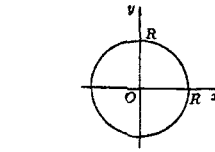
Некоторые кривые

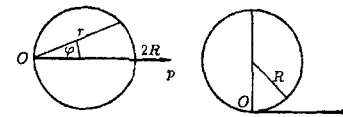
1. Окружность радиуса R

$$x^2 + y^2 = R^2;$$

$$\begin{cases} x = R\cos t \\ y = R\sin t \end{cases};$$

$$r = 2R\cos\varphi,\ r = 2R\sin\varphi$$



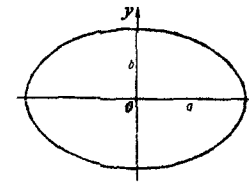


2. Эллипс

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1;\ \begin{cases} x = a\cos t \\ y = b\sin t \end{cases};$$

$$r = \frac{b^2}{a\cdot(1-\varepsilon\cos\varphi)},$$

$$\varepsilon = \frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a},\ \varepsilon < 1$$



3. Гипербола

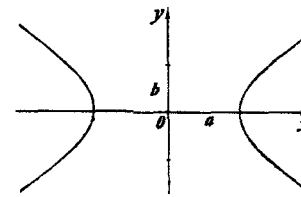
$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1;$$

(для правой ветви)

$$\begin{cases} x = a\dfrac{e^t + e^{-t}}{2} \\ y = b\dfrac{e^t - e^{-t}}{2} \end{cases};$$

$$r = \frac{b^2}{a\cdot(1-\varepsilon\cos\varphi)},$$

$$\varepsilon = \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{a},\ \varepsilon > 1$$

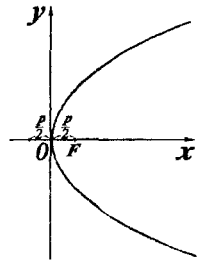


Некоторые кривые

4. Парабола

$$y^2 = 2px;$$

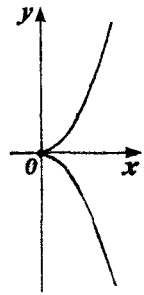
$$r = \frac{p}{1 - \cos\varphi}$$



5. Полукубическая парабола

$$y^2 = x^3;$$

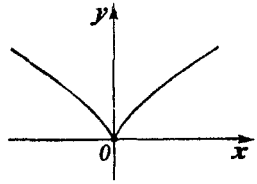
$$\begin{cases} x = t^2 \\ y = t^3 \end{cases}$$



6. Парабола Нейля

$$y = x^{\frac{2}{3}};$$

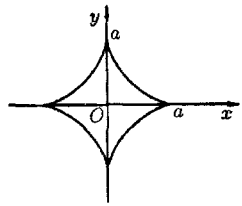
$$\begin{cases} x = t^3 \\ y = t^2 \end{cases}$$



7. Астроида

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}};$$

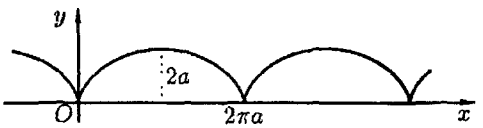
$$\begin{cases} x = a\cos^3 t \\ y = a\sin^3 t \end{cases}$$



Некоторые кривые

8. Циклоида

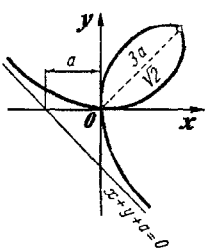
$$\begin{cases} x = a \cdot (t - \sin t) \\ y = a \cdot (1 - \cos t) \end{cases}$$



9. Декартов лист

$$x^3 + y^3 - 3axy = 0;$$

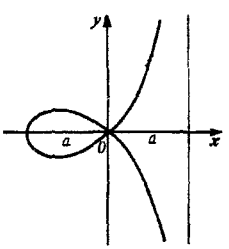
$$\begin{cases} x = \dfrac{3at}{1+t^3}, \\ y = \dfrac{3at^2}{1+t^3} \end{cases}$$



10. Строфоида

$$y^2 = x^2 \cdot \frac{a+x}{a-x};$$

$$r = \frac{a(1-\sin\varphi)}{\cos\varphi}$$

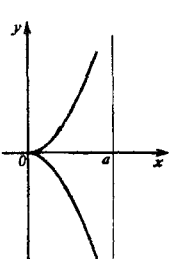


11. Циссоида Диоклеса

$$y^2 = \frac{x^3}{a-x};$$

$$\begin{cases} x = \dfrac{at^2}{1+t^3}; \\ y = \dfrac{at^3}{1+t^3} \end{cases}$$

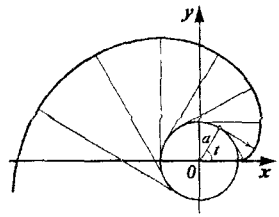
$$r = a\,\mathrm{tg}\,\varphi \cdot \sin\varphi$$



Некоторые кривые

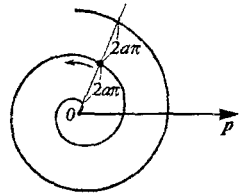
12. Эвольвента (развертка) окружности

$$\begin{cases} x = a(\cos t + t\sin t), \\ y = a(\sin t - t\cos t) \end{cases}$$



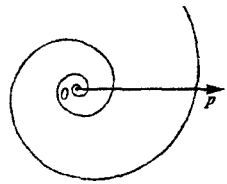
13. Спираль Архимеда

$$r = a\varphi$$



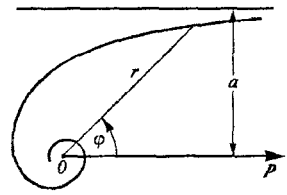
14. Логарифмическая спираль

$$r = a^{\varphi}$$



15. Гиперболическая спираль

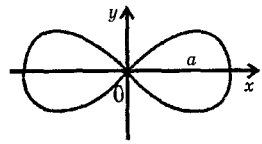
$$r = \frac{a}{\varphi}$$



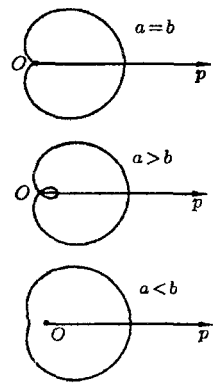
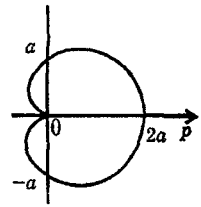
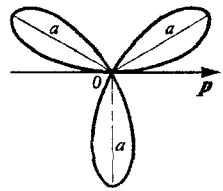
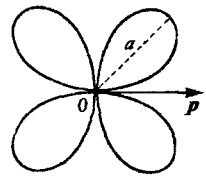
16. Лемниската Бернулли

$$\left(x^2 + y^2\right)^2 = a^2\left(x^2 - y^2\right);$$

$$r^2 = a^2\cos 2\varphi$$



Некоторые кривые

17. Улитка Паскаля $\left(x^2+y^2-ax\right)^2=b^2\left(x^2+y^2\right),$ $r=a\cos\varphi+b$	
18. Кардиоида $\left(x^2+y^2-ax\right)^2=a^2\left(x^2+y^2\right);$ $r=a(1+\cos\varphi)$	
19. Трехлепестковая роза $r=a\sin 3\varphi$	
20. Четырехлепестковая роза $\left(x^2+y^2\right)^3=4a^2x^2y^2;$ $r=a\lvert\sin 2\varphi\rvert$	

Библиографический список

1. **Бермант А.Ф., Араманович И.Г.** Краткий курс математического анализа для втузов. – М.: Наука, 1973. - 720 с.
2. **Гусак А.А.** Справочное пособие к решению задач: Математический анализ и дифференциальные уравнения. – Минск: ТетраСистемс, 1998. – 414 с.
3. **Данко П.Е., Попов А.Г., Кожевникова Т.Я.** Высшая математика в упражнениях и задачах. – М.: Высш. шк., 1999. – **Ч.1.** - 304 с.
4. **Краснов М.Л., Киселев А.И., Макаренко Г.И. и др.** Вся высшая математика.– М.: Эдиториал УРСС, 2000. – **Т.1.**- 328 с.
5. **Морозова В.Д.** Введение в анализ. – М.: Изд-во МГТУ им. М.Э. Баумана, 1998. – 408 с.
6. **Натансон И.П.** Теория функций вещественной переменной. – СПб.. Лань, 1999. – 560 с.
7. **Пискунов Н.С.** Дифференциальное и интегральное исчисления. -М.: Наука, 1981.- **Т.1.**– 456 с.
8. **Фихтенгольц Г.М.** Курс дифференциального и интегрального исчисления.– М.: Наука, 1966. - **Т.1.** – 608 с.
9. **Шипачев В.С.** Математический анализ. – М.: Высш. шк., 1999. – 176 с.
10. **Шнейдер В.Е., Слуцкий А.И., Шумов А.С.** Краткий курс высшей математики. – М.: Высш. шк., 1972. – 640 с.
11. **Сборник задач по математике для втузов/** Под общей редакцией А.В. Ефимова, Б.П. Демидовича. Линейная алгебра и основы анализа. – М : Наука, 1993. - **Ч.1.** - 479 с.

Оглавление

Введение ... 3

1. Функция и ее основные характеристики ... 4

1.1. Множества. Операции над множествами ... 4

1.2. Числовые множества ... 6

1.3. Постоянные и переменные величины ... 8

1.4. Функция. Основные понятия ... 8

1.5. Обратная функция ... 12

1.6. Основные элементарные функции, их классификация ... 13

1.7. Основные характеристики функции ... 14

1.8. Построение графиков функций ... 17

1.8.1. График функции в декартовой системе координат ... 17

1.8.2. График функции в полярной системе координат ... 20

2. Числовые последовательности и их свойства ... 21

2.1. Числовая последовательность и ее основные характеристики ... 21

2.2. Бесконечно малые и бесконечно большие последовательности ... 25

2.3. Свойства сходящихся последовательностей ... 27

3. Предел функции ... 29

3.1. Определение предела функции ... 29

3.2. Свойства функций, имеющих предел ... 32

3.3. Бесконечно малые и бесконечно большие функции ... 35

3.4. Математические неопределенности ... 38

3.5. Замечательные пределы ... 43

3.6. Сравнение бесконечно малых функций ... 47

3.7. Эквивалентные бесконечно малые функции ... 48

4. Непрерывность функции ... 52

4.1. Односторонние пределы ... 52

4.2. Непрерывность функции в точке ... 54

4.3. Свойства функций, непрерывных в точке ... 56

4.4. Точки разрыва функции, их классификация ... 57

4.5. Свойства функций, непрерывных на отрезке ... 61

Вопросы для самоконтроля ... 63

Задания для контрольной работы ... 64

Приложение 1. Основные элементарные функции ... 68

Приложение 2. Таблица 1. Построение графических образов ... 73

Приложение 3. Таблица 2. Некоторые кривые ... 76

Библиографический список ... 81

Учебное издание

Банина Нина Валерьевна, **Синеговская** Татьяна Сергеевна

ВВЕДЕНИЕ В АНАЛИЗ

Учебное пособие
для студентов заочного отделения
всех специальностей

Редактор Л. И. Рубанова

Компьютерная верстка:Т.С. Синеговская

Лицензия №021231 от 23.07.97 г.
Подписано в печать 11 09 03
Формат 60×84/16. Печать офсетная.
Усл. печ. л. – 5,1. Уч. – изд. л. – 5,3
План 2003 г.
Заказ

Глазковская типография, г. Иркутск, ул. Гоголя, 53