Контрольная работа №4

«Обыкновенные дифференциальные уравнения»

Контрольная работа №4 «Обыкновенные дифференциальные уравнения»

Вариант № 1

Раздел 8 «Обыкновенные дифференциальные уравнения»

1. Решите дифференциальные уравнения первого порядка:

а) $\frac{dy}{y-y^2}+\frac{dx}{x}=0$; ***б)*** $\sqrt{y^2+1}dx=xydy$;

в) $y'-y\ \mathrm{ctg}\,x=\sin x, y(\pi/2)=0$; ***г)*** $(x^2+y^2)dx-2xydy=0$.

2. Локомотив движется по горизонтальному участку пути со скоростью 72 км/ч. В какой момент времени и на каком расстоянии он будет остановлен тормозом, если сопротивление движению после начала торможения равно 0,2 его веса.

3. Решите дифференциальное уравнение $y'''=60x^2$.

4. Решите линейные однородные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами:

а) $y''-5y'-6y=0$;

б) $y''-2y'+y=0$;

в) $y''+4y'+5y=0$.

5. Решите линейные неоднородные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами:

а) $y''+6y'+9y=10\sin x$;

б) $y''-2y'-3y=e^{3x}$;

в) $y''+9y'=15\sin 2x,\ y(0)=-7,\ y'(0)=0$.

6. Решите систему дифференциальных уравнений $\begin{cases}\dot{x}=x-3y,\\ \dot{y}=y-3x.\end{cases}$.

Контрольная работа №4 «Обыкновенные дифференциальные уравнения»

Вариант № 2

Раздел 8 «Обыкновенные дифференциальные уравнения»

1. Решите дифференциальные уравнения первого порядка:

а) $xdx = ydy$; ***б)*** $4x^3 - y' = 0$;

в) $y' - y = e^x, y(e) = e^e$; ***г)*** $(x + y)dy + ydx = 0$.

2. В дне цилиндрического сосуда с водой имеется малое отверстие. Скорость вытекания воды пропорциональна квадратному корню из высоты столба воды в сосуде. Определите, за сколько времени вытечет вода из сосуда, если 3/4 ее количества вытекает за 10 секунд.

3. Решите дифференциальное уравнение $y'' = x^2 + \frac{1}{x^2}$.

4. Решите линейные однородные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами:

а) $y'' + y' - 2y = 0$;

б) $y'' + 4y + 4 = 0$;

в) $y'' - 2y' = x^2 - x$.

5. Решите линейные неоднородные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами:

а) $y'' - 2y' = x^2 - x$;

б) $y'' + y = 4\sin x$;

в) $y'' - 2y' - 3y = e^{4x}$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$.

6. Решите систему дифференциальных уравнений $\begin{cases} \dot{x} = 2x + y, \\ \dot{y} = 3x + 4y \end{cases}$.

Контрольная работа №4 «Обыкновенные дифференциальные уравнения»

Вариант № 3

Раздел 8 «Обыкновенные дифференциальные уравнения»

1. Решите дифференциальные уравнения первого порядка:

а) $\frac{dy}{y+1}=\frac{dx}{x}$; ***б)*** $(x+1)ydx=dy$;

в) $y'+2y=4x, y(0)=3$; ***г)*** $(x-y)dy=(x+y)dx$.

2. Угловой коэффициент касательной в каждой точке кривой равен отношению удвоенного произведения координат этой точки к разности квадратов абсциссы и ординаты. Найдите кривую.

3. Решите дифференциальное уравнение $y'''=x+\cos x$.

4. Решите линейные однородные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами:

а) $y''-2y'=0$;

б) $y''-4y'+4y=0$;

в) $y''+6y'+10y=0$.

5. Решите линейные неоднородные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами:

а) $y''+y'-6y=-x^2-\frac{29}{18}$;

б) $y''-3y'+2y=\sin x$;

в) $y''+y=-\sin 2x,\ \ y(\pi)=y'(\pi)=1$.

6. Решите систему дифференциальных уравнений $\begin{cases}\dot{x}=x-y,\\ \dot{y}=y-4x\end{cases}$.

Контрольная работа №4 «Обыкновенные дифференциальные уравнения»

Вариант № 4

Раздел 8 «Обыкновенные дифференциальные уравнения»

1. Решите дифференциальные уравнения первого порядка:

а) $y^2dy=(1-2x)dx$; ***б)*** $dy=y\cos^2 xdx$;

в) $y'+\dfrac{y-1}{x}=1, y(2)=2$; ***г)*** $xydy-(x^2+y^2)dx=0$.

2. Сосуд объемом в 20 л содержит воздух (80% азота и 20% кислорода). В сосуд при непрерывном перемешивании каждую секунду втекает 0,1 л азота и вытекает такое же количество смеси. Найдите через какое время в сосуде будет 99% азота.

3. Решите дифференциальное уравнение $y'''=x+\sin x$.

4. Решите линейные однородные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами:

а) $y''-3y'+2y=0$;

б) $y''-6y'+9y=0$;

в) $y''-4y'+5y=0$.

5. Решите линейные неоднородные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами:

а) $y''+7y'+12=0$;

б) $y''+9y=6\cos 3x$;

в) $y''-2y'+2y=4e^x\cos x,\ y(\pi)=\pi e^{\pi},\ y'(\pi)=e^{\pi}$.

6. Решите систему дифференциальных уравнений $\begin{cases}\dot{x}=2x-y,\\ \dot{y}=3x-2y\end{cases}$.

Контрольная работа №4 «Обыкновенные дифференциальные уравнения»

Вариант № 5

Раздел 8 «Обыкновенные дифференциальные уравнения»

1. Решите дифференциальные уравнения первого порядка:

а) $2xdx = 3y^2dy$;

б) $(1+y^2)dx = (1+x^2)dy$;

в) $y' - y\ \mathrm{ctg}\, x = \mathrm{tg}^2 x, y(\pi/3) = 2\sqrt{3}$;

г) $xydx - (x^2+y^2)dy = 0$.

2. Найдите кривые, обладающие следующим свойством: если через любую точку кривой провести прямые, параллельные осям координат, до встречи с этими осями, то площадь полученного прямоугольника делится кривой в отношении 1:2.

3. Решите дифференциальное уравнение $y'' = \dfrac{3(1+x^2)}{x^2}$.

4. Решите линейные однородные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами:

а) $y'' + 3y' - 2y = 0$;

б) $y'' - 8y' + 16y = 0$;

в) $y'' + 6y' + 13y = 0$.

5. Решите линейные неоднородные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами:

а) $4y'' - y = x^3 - 24x$;

б) $y'' - 2y' + 5y = e^x \sin 2x$;

в) $y'' - 2y' = e^x(x^2 + x - 3),\ \ y(0) = y'(0) = 2$.

6. Решите систему дифференциальных уравнений $\begin{cases} \dot{x} = x + 4y, \\ \dot{y} = x - 2y \end{cases}$.

Вариант № 6

Раздел 8 «Обыкновенные дифференциальные уравнения»

1. Решите дифференциальные уравнения первого порядка:

а) $\frac{dy}{(y-2)^2}-\frac{dx}{(x+1)^3}=0$; ***б)*** $dy=y\sin x dx$;

в) $y'+y\cos x=\sin x\cdot\cos x, y(0)=0$; ***г)*** $(x-y)dy-ydx=0$.

2. Скорость остывания (или нагревания) тела пропорциональна разности температур тела и окружающей среды. Температура окружающего воздуха поддерживается равной 200 С. Определите, когда тело остынет до 25^0 С, если за 10 минут оно охладилось от 100^0 С до 60^0 С.

3. Решите дифференциальное уравнение $y''=\cos x$.

4. Решите линейные однородные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами:

а) $9y''-y'-2y=0$;

б) $y''+10y'+25y=0$;

в) $y''+5y=0$.

5. Решите линейные неоднородные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами:

а) $y''+6y'+5y=25x^2-2$;

б) $y''-3y'+2y=e^x$;

в) $y''-y'=2(1-x),\ y(0)=y'(0)=1$.

6. Решите систему дифференциальных уравнений $\begin{cases}\dot{x}=7x+2y,\\ \dot{y}=3x+2y\end{cases}$.

Вариант № 7

Раздел 8 «Обыкновенные дифференциальные уравнения»

1. Решите дифференциальные уравнения первого порядка:

а) $\frac{\sqrt{y}+1}{y}dy-\frac{1}{\sqrt{x}}dx=0$;

б) $3xdy=2ydx$;

в) $y'+x^2y=x^2, y(2)=1$;

г) $xdy-y\ln\frac{y}{x}dx=0$.

2. Определите, у какой кривой отрезок любой касательной, заключенный между точкой касания и осью абсцисс, делится осью ординат пополам.

3. Решите дифференциальное уравнение $y''=6x$.

4. Решите линейные однородные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами:

а) $y''+y'-2y=0$;

б) $y''-12y'+36y=0$;

в) $4y''-8y'+5y=0$.

5. Решите линейные неоднородные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами:

а) $y''-2y'+10y=37\cos 3x$;

б) $y''-2y=xe^{-x}$;

в) $2y''-y'=1,\ y(0)=0,\ y'(0)=1$.

6. Решите систему дифференциальных уравнений $\begin{cases}\dot{x}=4x+2y,\\ \dot{y}=-x+y\end{cases}$.

Вариант № 8

Раздел 8 «Обыкновенные дифференциальные уравнения»

1. Решите дифференциальные уравнения первого порядка:

а) $\operatorname{tg} x\,dx+\dfrac{dy}{y}=0$;

б) $\dfrac{5x+3}{y}dy=dx$;

в) $y'-y\operatorname{tg}x=\dfrac{1}{\cos x}, y(0)=0$;

г) $xdy-y(1+\ln\dfrac{y}{x})dx=0$.

2. Тело движется прямолинейно со скоростью υ, пропорциональной квадрату времени. Установите зависимость между пройденным путем S и временем t, если известно, что при $t=0$, $S=S_0$.

3. Решите дифференциальное уравнение $y''=\sin x+1$.

4. Решите линейные однородные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами:

а) $y''+3y'=0$;

б) $y''+14y'+49y=0$;

в) $y''+2y'+2y=0$.

5. Решите линейные неоднородные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами:

а) $y''-8y'+12y=-65\cos 4x$;

б) $y''+4y=5e^{x}$;

в) $y''-4y'+3y=e^{5x},\ y(0)=3,\ y'(0)=9$.

6. Решите систему дифференциальных уравнений $\begin{cases}\dot{x}=x-y,\\ \dot{y}=-4x+y\end{cases}$.

Контрольная работа №4 «Обыкновенные дифференциальные уравнения»

Вариант № 9

Раздел 8 «Обыкновенные дифференциальные уравнения»

1. Решите дифференциальные уравнения первого порядка:

а) $\frac{1+x}{x}dx+\frac{1-y}{y}dy=0$; ***б)*** $dy=e^{x+y}dx$;

в) $y'-y=e^x, y(0)=0$; ***г)*** $ydy+(x-2y)dx=0$.

2. В баке находится 100 л раствора, содержащего 10 кг соли. В бак непрерывно подается вода (5 л в минуту), которая перемешивается с имеющимся раствором. Смесь вытекает с той же скоростью. Определите, сколько останется соли в баке через час.

3. Решите дифференциальное уравнение $y''=e^{-x}$.

4. Решите линейные однородные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами:

а) $y''-5y'+6y=0$;

б) $y''-16y'+64y=0$;

в) $y''+9y=0$.

5. Решите линейные неоднородные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами:

а) $y''-2y'=4(x+1)$;

б) $y''+16y=-24\sin 4x$;

в) $y''-8y'+16y=e^{4x},\ y(0)=0,\ y'(0)=1$.

6. Решите систему дифференциальных уравнений $\begin{cases}\dot{x}=x+y,\\ \dot{y}=3x-y\end{cases}$.

Вариант № 10

Раздел 8 «Обыкновенные дифференциальные уравнения»

1. Решите дифференциальные уравнения первого порядка:

а) $ydy + (x-1)dx = 0$; ***б)*** $dy = (y+2)dx$;

в) $(x^2+1)y' + 4xy = 3$; ***г)*** $dy = \frac{y}{x}\ln\frac{y}{x}$.

2. Найдите: 1) семейство кривых, для которых угловой коэффициент касательной равен ординате точки касания; 2) кривую этого семейства, проходящую через точку (2;5).

3. Решите дифференциальное уравнение $y'' = \frac{1}{x^2}$.

4. Решите линейные однородные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами:

а) $2y'' + 5y' + 2y = 0$;

б) $y'' + 18y' + 81y = 0$;

в) $y'' - 6y' + 34y = 0$.

5. Решите линейные неоднородные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами:

а) $y'' + y' - 2y = 6x^2$;

б) $y'' + 4y = 3\sin 2x$;

в) $y'' + y = \cos x,\ y(\pi/2) = 4,\ y'(\pi/2) = 1$.

6. Решите систему дифференциальных уравнений $\begin{cases} \dot{x} = 8y - x, \\ \dot{y} = x + y \end{cases}$.