

МИНИСТЕРСТВО ПУТЕЙ СООБЩЕНИЯ РФ
ИРКУТСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ПУТЕЙ СООБЩЕНИЯ

ДИФФЕРЕНЦИЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИИ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

Учебное пособие
для студентов заочного отделения
всех специальностей

Иркутск 2003

МИНИСТЕРСТВО ПУТЕЙ СООБЩЕНИЯ РФ

ИРКУТСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ПУТЕЙ СООБЩЕНИЯ

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИИ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

Учебное пособие
для студентов заочного отделения
всех специальностей

ИРКУТСК
2003

ББК 22.161
УДК 517.1
Б 23
Багдуева Х.Н., Толстых О.Д. Дифференциальное исчисление функции одной переменной. Учебное пособие. Иркутск, 2003. 73 с.

В учебном пособии изложены основные вопросы раздела "Дифференциальное исчисление функции одной переменной", соответствующие требованиям к минимуму основной обязательной программы по подготовке дипломированных специалистов. Пособие содержит подробно разобранные примеры, геометрические иллюстрации и приложения. В пособие включены вопросы для самоконтроля и десять вариантов заданий для контрольной работы по данному разделу.

Пособие предназначено для студентов всех специальностей первого курса заочной формы обучения, но может быть полезно студентам дневного отделения при изучении курса математического анализа.

Ил. 31. Табл. 3. Библиогр.: 11 назв.

Рецензенты: канд. физ.-мат. наук Л.С. Сергиенко,
доц. кафедры математики ИрГТУ,

канд.техн наук, доц. Г.И. Суханов,
зав. кафедрой УЭР ИрГУПСа

© ИРКУТСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ПУТЕЙ СООБЩЕНИЯ, 2003

КОМПЛЕКС МЕТОДИЧЕСКИХ ПОСОБИЙ ПО МАТЕМАТИКЕ ДЛЯ ЗАОЧНОГО ОБУЧЕНИЯ

Под редакцией доктора технических наук,
профессора А. П. Хоменко

- Комплексные числа. Основы линейной алгебры. Системы линейных уравнений
- Векторная алгебра и аналитическая геометрия
- Введение в анализ
- **Дифференциальное исчисление функций одной переменной**
- Дифференциальное исчисление функций нескольких переменных
- Линейное программирование. Динамическое программирование
- Интегральное исчисление функций одной переменной
- Кратные, криволинейные и поверхностные интегралы. Элементы теории поля
- Обыкновенные дифференциальные уравнения
- Ряды
- Теория функций комплексной переменной. Операционное исчисление
- Вариационное исчисление. Уравнения математической физики
- Теория вероятностей
- Математическая статистика
- Марковские случайные процессы и теория игр
- Дискретная математика

ВВЕДЕНИЕ

Понятие производной является основой дифференциального исчисления, имеющего чрезвычайно важное значение для естествознания и техники. Оно возникло постепенно из многих геометрических и физических задач, например, задачи о касательной. скорости и ускорении неравномерного движения, теплоемкости при данной температуре, силе переменного тока и т.д.

Основной предпосылкой для создания дифференциального исчисления явилось введение в математику переменных величин (Р Декарт. 31.03 1596 - 11.02.1650 - французский философ, математик, физик, физиолог). В общих чертах построения дифференциального исчисления было завершено к концу 17 века в трудах И. Ньютона (04.01.1643 - 31.03.1727. английский физик, механик. астроном. математик) и Г. Лейбница (01.07.1646 - 14.11.1716, немецкий математик, физик, философ). Однако вопросы обоснования с помощью понятия предела были разработаны О Коши (21.08.1789 - 23.05.1857, французский математик) лишь в начале 19 века.

1. Производная, смысл в разных задачах и свойства

1.1. Понятие производной

Пусть функция $y = f(x)$ определена на промежутке D. Возьмем некоторое значение $x_0 \in D$ и рассмотрим приращение Δx. $x_0 + \Delta x \in D$. Если существует предел отношения изменения (приращения) функции к соответствующему приращению аргумента, когда последнее стремится к нулю, то он называется ***производной функции*** $y = f(x)$ в точке $x = x_0$:

$$y'(x_0) = f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

Если производная существует в каждой точке $x \in D$, то она является в свою очередь функцией аргумента x и обозначается

$$y' = y'_x = f'(x) = \frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

Процесс нахождения производных называется ***дифференцированием.***

Если $f'(x)$ конечна при каждом $x \in D$, то функция $y = f(x)$ называется ***дифференцируемой*** в D. Точная формулировка дифференцируемости функции и критерий дифференцируемости функции будут даны в п. 1 5.

Пользуясь определением производной, получим некоторые правила дифференцирования и производные основных элементарных функций, которые затем сведем в таблицы.

1⁰. Производная константы есть нуль:

$$y = c = const \quad \Rightarrow \quad y' = 0.$$

Действительно. $\Delta y = c \quad c = 0$. $y' = c' = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{0}{\Delta x} = 0.$

2⁰.Производная линейной функции $y = kx + b \quad \Rightarrow \quad y' = k.$

Действительно. $\Delta y = \left[k(x + \Delta x) + b\right] - \left[kx + b\right] = k\Delta x,$

$y' = \left\{ \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} \right\} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{k\Delta x}{\Delta x} = k$. В частности, $y = x \quad \Rightarrow \quad x' = 1.$

3⁰. Для функции $y = x^2$ производная $y' = 2x$.

Для вывода этой формулы найдем приращение функции:

$$\Delta y = (x + \Delta x)^2 - x^2 = \Delta x(2x + \Delta x).$$

Тогда по определению производной и свойствам пределов

$$\left(x^2\right)' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x(2x + \Delta x)}{\Delta x} = 2x.$$

Итак, $\left(x^2\right)' = 2x.$

Используя формулу бинома Ньютона, можно показать, что для степенной функции $\left(x^n\right)' = nx^{n-1}$.

1.2. Понятие односторонней производной

В основах математического анализа для функции $y = f(x)$ были введены понятия левого и правого пределов в точке a:

$$f(a - 0) = \lim_{x \to a - 0} f(x), \quad f(a + 0) = \lim_{x \to a + 0} f(x),$$

и соответственно понятия левосторонней и правосторонней непрерывности функции в точке.

Аналогично можно ввести понятие односторонней производной.

Если существует предел отношения изменения функции Δy к вызвавшему его изменению аргумента Δx, когда Δx стремится к нулю слева $(\Delta x \to -0)$ или справа $(\Delta x \to +0)$, то он называется соответственно ***левосторонней или правосторонней производной***:

левосторонняя производная –

$$y'_- = f'(x - 0) = \lim_{\Delta x \to -0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to -0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x};$$

правосторонняя производная –

$$y'_+ = f'(x+0) = \lim_{\Delta x \to +0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to +0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

Напомним, что для существования конечного предела функции $y = f(x)$ в точке $x = a$ необходимо и достаточно, чтобы левый и правый пределы функции в этой точке были конечны и равны:

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a-0) = f(a+0).$$

Отсюда легко получается следующий факт.

Для того чтобы функция $y = f(x)$ в точке x имела конечную производную, необходимо и достаточно, чтобы левосторонняя и правосторонняя производные были конечны и равны $f'(x-0) = f'(x+0)$.

1.3.Понятие производных высших порядков

Пусть для функции $y = f(x)$, определенной на множестве D, существует производная $y' = f'(x)$ при каждом $x \in D$, т.е. производная является функцией и для нее можно ставить вопрос о существовании производной. Производная от первой производной, если она существует – ***вторая производная данной функции*** или ***производная второго порядка***

$$y'' = f''(x), \; y'' = \frac{d^2 y}{dx^2}.$$

Аналогично определяется ***производная третьего порядка***

$$y''' = \frac{d^3 y}{dx^3} \quad \text{и т.д.:}$$

производная n - го порядка

$$y^{(n)} = f^{(n)}(x) = \frac{d^n y}{dx^n}.$$

К примеру в пункте 1.1 для функции $y = kx + b$ нашли $y' = k$. Следовательно, все производные, начиная со второй, равны нулю: $y'' = 0, \; y''' = 0, \ldots y^{(n)} = 0$. Для функции $y = x^2$ производная $y' = 2x$. Тогда $y'' = 2, \; y''' = 0, \ldots, y^{(n)} = 0$.

1.4. Геометрическое и механическое истолкования производной

1.4.1. Механический смысл производной. Задача о скорости и ускорении неравномерного движения

Пусть зависимость пути, пройденного телом за время t, описывается функцией $s = s(t)$, а скорость движения и ускорение соответственно функциями $v = v(t), a = a(t)$. Если тело движется равномерно, то, как известно из физики, $s = v \cdot t$, т.е. $v = s/t$. Если тело движется равноускоренно и $v_0 = 0$, то ускорение $a = v/t$.

Если же движение не является равномерным и равноускоренным, то средняя величина скорости и ускорения за промежуток времени Δt, очевидно, равны $v_{cp} = \dfrac{s(t+\Delta t) - s(t)}{\Delta t}$, $a_{cp} = \dfrac{v(t+\Delta t) - v(t)}{\Delta t}$ соответственно.

Пусть $v(t)$ – скорость движения, $a(t)$ – ускорение в момент времени t. Тогда, $v(t) = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{s(t+\Delta t) - s(t)}{\Delta t}$, $a(t) = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{v(t+\Delta t) - v(t)}{\Delta t}$. Таким образом, $v(t) = s'(t)$, $a(t) = v'(t)$, при условии, что последние пределы существуют.

Механический смысл производной: *производная пути $s = s(t)$ по времени t есть мгновенная скорость движения материальной точки, т.е $v(t) = s'(t)$. Вторая производная пути по времени – ускорение, т.е $s''(t) = v'(t) = a(t)$.*

С введением понятия производной функции, по словам Ф. Энгельса, в математику пришло движение, так как производная означает скорость изменения любого процесса, например: процесса нагрева или охлаждения тела, скорость протекания химической или ядерной реакции и т.д

Пример 1.1. Количество электричества (в кулонах), протекающее через проводник, определяется законом $Q = 2t^2 + 3t + 4$. Найдите силу тока в конце третьей секунды.

Решение. Сила тока $I = Q' = 4t + 3$. При $t = 3$ $I = 15k/c = 15A$.

1.4.2. Задача о касательной. Геометрический смысл производной

Пусть функция $y = f(x)$ определена и непрерывна в точке $x = x_0$ и в некоторой окрестности этой точки. Выясним геометрический смысл производной функции.

Для решения данной задачи поступим следующим образом. Возьмем на графике функции (рис.1.1) точку $M(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y)$ и проведем секущую M_0M. Устремим точку M к точке M_0, т.е. $\Delta x \to 0$. Точка M_0 неподвижна, поэтому секущая в пределе займет положение касательной K.

Касательной к графику функции $y=f(x)$ в точке M_0 называется предельное положение секущей M_0M при условии, что точка M стремится к точке M_0 по кривой Γ_f - графику функции $y=f(x)$.

Тогда угловой коэффициент секущей M_0M $k_c = tg\varphi = \dfrac{MN}{M_0N}$ в пределе станет равным угловому коэффициенту касательной

$$k = tg\alpha = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0).$$

Геометрический смысл производной: *угловой коэффициент касательной к графику функции $y=f(x)$ в заданной точке $M_0(x_0, y_0)$ равен значению производной в точке x_0: $k = f'(x_0) = tg\alpha$, где α - угол между касательной и положительным направлением оси Ox* (см. рис. 1.1)

Как известно из аналитической геометрии, уравнение прямой, проходящей через точку (x_0, y_0) и имеющей угловой коэффициент k будет

$$y - y_0 = k(x - x_0).$$

Тогда, с учетом геометрического смысла производной, ***уравнение касательной*** (K) к графику функции $y=f(x)$ в точке (x_0, y_0) имеет вид

$$(K) \quad y = f(x_0) + f'(x_0)\cdot(x - x_0).$$

Уравнение нормали (N) – перпендикуляра к касательной в точке касания:

$$(N) \quad y = f(x_0) - \frac{1}{f'(x_0)}\cdot(x - x_0).$$

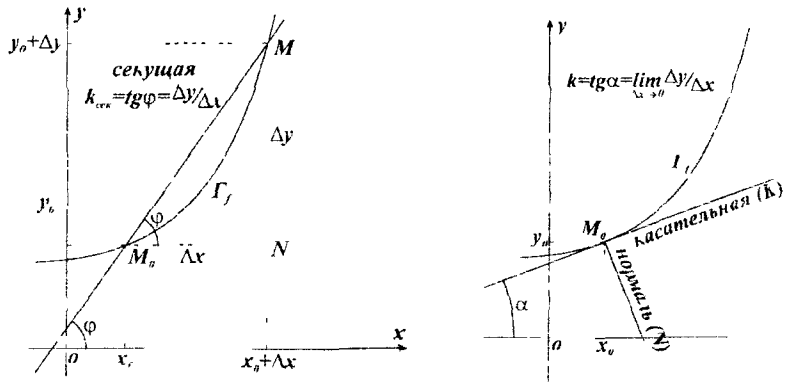


Рис. 1.1

Пример 1.2. Составьте уравнения касательной и нормали к графику функции $y = x^3 - 2x^2 + 6$ в точке с абсциссой $x_0 = 1$.

Решение В точке $x_0 = 1$ определим значения функции и ее производной:

$$f(x_0) = f(1) = 5,\ f'(x) = 3x^2 - 4x,\ f'(1) = -1.$$

Подставляя полученные значения в уравнения касательной и нормали, соответственно получим:

$$y = 5 - (x-1) \Rightarrow x + y - 6 = 0 - \textit{касательная};$$

$$y = 5 + (x-1) \Rightarrow x - y + 4 = 0 - \textit{нормаль}.$$

1.5. Дифференцируемость функции. Необходимое условие дифференцируемости функции

Заметим, что выше для функции $y = kx + b$ получено, что изменение функции $\Delta y = k\Delta x$ линейно выражается через Δx. В общем случае для произвольной функции это не так. Однако для большого класса функций можно приближенно оценить изменение функции, т.е. линеаризовать функцию в окрестности некоторой точки x.

Определение. Функция $y = f(x)$ называется ***дифференцируемой*** в точке $x \in D$, если в окрестности этой точки изменение функции равно

$$\Delta y = k\Delta x + o(\Delta x),\quad k = const,\quad \frac{o(\Delta x)}{\Delta x} \to 0,\quad \Delta x \to 0, \qquad (1.1)$$

($o(x)$ – o-малое от Δx).

Теорема Для того чтобы функция $y = f(x)$ была дифференцируемой в точке $x \in D$, необходимо и достаточно, чтобы она в этой точке имела конечную производную $y' = f'(x)$.

Доказательство *Необходимость* Пусть функция $y = f(x)$ дифференцируема в точке $x \in D$, т е выполнено соотношение (1.1). Тогда, по определению производной, с учетом (1 1)

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \left(k + \frac{o(\Delta x)}{\Delta x} \right) = k$$

Таким образом, в точке $x \in D$ существует конечная производная

Достаточность Пусть теперь в точке $x \in D$ существует конечная производная

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

Тогда на основании теоремы о связи между функцией, ее пределом и бесконечно малой величиной

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x) + \alpha(x),$$

где $\alpha(x)$ – бесконечно малая величина при $\Delta x \to 0$.

Поэтому полное приращение функции

$$\Delta y = f'(x)\Delta x + \alpha(\Delta x)\Delta x$$

может быть представлено в виде суммы двух слагаемых, первое из которых пропорционально приращению аргумента Δx с коэффициентом пропорциональности $f'(x)$, а второе является бесконечно малой более высокого порядка чем Δx т е выполнено (1.1), и, стало быть функция дифференцируема в точке $x \in D$

Заметим, что соотношение

$$\Delta y = f'(x)\Delta x + o(\Delta x), \qquad \frac{o(\Delta x)}{\Delta x} \to 0, \quad \Delta x \to 0 \qquad (1\ 2)$$

часто принимают за определение дифференцируемости функции.

Функция дифференцируема на множестве D, если дифференцируема в каждой точке $x \in D$

Из определения дифференцируемости функции легко усмотреть, что ***непрерывность – необходимое условие дифференцируемости функции***

Действительно, если функция дифференцируема в точке x, т е существует конечная производная $f'(x)$, и выполнено соотношение (1 2), то $\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0$, что означает непрерывность функции

Однако непрерывность функции не является достаточным условием дифференцируемости. К примеру, рассмотрим функцию (график см. рис 1.2)

$$y = |x| = \begin{cases} x, & x \ge 0, \\ -x, & x < 0 \end{cases}$$

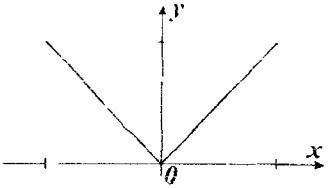


Рис 1.2

Приращение функции в точке $x = 0$:

$$\Delta y = |\Delta x| = \begin{cases} \Delta x, & \Delta x > 0, \\ -\Delta x, & \Delta x < 0 \end{cases}$$

Таким образом, $y'(0) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \begin{cases} 1, & \Delta x > 0, \\ -1, & \Delta x < 0 \end{cases}$ т.е производная при $x = 0$ не существует. так как левая и правая производные в этой точке разные $y'(-0) = -1, \quad y'(+0) = 1,$ но функция непрерывна при $x = 0$

1.6. Правила дифференцирования

1⁰. Дифференцирование алгебраической суммы функций. Алгебраическая сумма конечного числа дифференцируемых функций есть дифференцируемая функция, при этом производная алгебраической суммы функций равна алгебраической сумме производных Например: для двух функций

$$u = u(x), \quad v = v(x), \quad x \in D \quad \Rightarrow \quad (u+v)' = u' + v'$$

Доказательство Пусть функции $u = u(x)$ $v = v(x)$ дифференцируемы в произвольной точке $x \in D$. т е существует конечные производные

$$u' = u'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{u(x+\Delta x) - u(x)}{\Delta x},$$

$$v' = v'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{v(x+\Delta x) - v(x)}{\Delta x}.$$

Рассмотрим изменение функции $u \pm v$ при изменении аргумента Δx:

$$\Delta u + \Delta v = [u(x+\Delta x) - v(x+\Delta x)] - [u(x) + v(x)],$$

$$\Delta u + \Delta v = [u(x+\Delta x) - u(x)] + [v(x+\Delta x) - v(x)].$$

По определению производной

$$(u+v)' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u + \Delta v}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{\Delta u}{\Delta x} + \frac{\Delta v}{\Delta x} \right)$$

Так как предел каждого слагаемого по условию существует и конечен, то предел алгебраической суммы равен алгебраической сумме пределов, т.е. функция $(u \pm v)$ дифференцируема в произвольной точке x и $(u \pm v)' = u' \pm v'$. Утверждение доказано

2⁰.Дифференцирование произведения функций. Произведение двух дифференцируемых функций есть функция дифференцируемая, при этом производная произведения равна произведению производной первого сомножителя на второй без изменения плюс первый сомножитель, умноженный на производную второго:

$$(uv)' = u'v + uv'.$$

Приведенное правило легко может быть обобщено на произведение любого конечного числа дифференцируемых функций, например.

$$(uvw)' = u'vw + uv'w + uvw'.$$

Доказательство. По условию в произвольной точке $x \in D$

$\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta u}{\Delta x} = u'$, $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta v}{\Delta x} = v'$. При изменении Δx изменение функции

$$\Delta(uv) = u(x + \Delta x)v(x + \Delta x) - u(x)v(x)$$

представим в виде

$$\Delta(uv) = [u(x + \Delta x)v(x + \Delta x) - u(x)v(x + \Delta x)] + [u(x)v(x + \Delta x) - u(x)v(x)]$$

или $$\Delta(uv) = (u + \Delta u)(v + \Delta v) - uv = \Delta u \cdot v + u \cdot \Delta v + \Delta u \cdot \Delta v.$$

$$(uv)' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta(uv)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{\Delta u}{\Delta x} \cdot v + u \cdot \frac{\Delta v}{\Delta x} + \frac{\Delta u}{\Delta x} \cdot \Delta v \right).$$

Так как $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta u}{\Delta x} = u'$ $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta v}{\Delta x} = v'$ в силу дифференцируемости и

$\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta v = 0$ в силу непрерывности функции, то по свойствам пределов

$$(uv)' = u'v + uv'.$$

Как следствие правила дифференцирования произведения функций предлагаем читателям получить производную степенной функции $u^n, n \in N$.

$$(u^n)' = nu^{n-1}u'.$$

3⁰.Следствие из 2⁰. Постоянный множитель можно вынести за знак производной:

$$(cu)' = cu', \quad \left(\frac{u}{c}\right)' = \frac{u'}{c}.$$

4⁰. Дифференцирование дроби. Отношение $\dfrac{u}{v}$ двух дифференцируемых функций $u = u(x), v = v(x) \neq 0$ есть функция дифференцируемая. При этом производная дроби равна дроби, знаменатель которой равен квадрату

знаменателя данной дроби, а числитель равен производной числителя, умноженной на знаменатель, минус числитель, умноженный на производную знаменателя: $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$.

Доказательство. При изменении Δx рассмотрим изменения дифференцируемых функций $u = u(x), v = v(x) \neq 0$:

$$\Delta u = [u(x + \Delta x) - u(x)], \qquad \Delta v = [v(x + \Delta x) - v(x)].$$

Измененные значения функций будут $u + \Delta u, \quad v + \Delta v$,

$$\Delta\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{u + \Delta u}{v + \Delta v} - \frac{u}{v} = \frac{\Delta uv - u\Delta v}{v(v + \Delta v)}$$

По определению производной имеем

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u \cdot v(x) - u(x)\Delta v}{v(x)v(x + \Delta x)\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\frac{\Delta u}{\Delta v}v(x) - u(x)\frac{\Delta v}{\Delta x}}{v(x)v(x + \Delta x)}.$$

Функции $u = u(x), v = v(x) \neq 0$ дифференцируемы по условию, а, стало быть, и непрерывны, т.е. $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} = u', \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta x} = v' \neq 0,$ $\lim_{\Delta x \to 0} v(x + \Delta x) = v(x)$. По свойствам пределов

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2},$$

что и требовалось доказать.

5^0. ***Следствие из*** 4^0. $\left(\frac{C}{v}\right)' = -\frac{Cv'}{v^2}$, C =const.

6^0. ***Дифференцирование сложной функции.*** Пусть функция $y = f(u)$ дифференцируема по u, функция $u = u(x)$ дифференцируема по x. Тогда сложная функция $y = f(u(x))$ дифференцируема по x, и

$$y' = f'(u) \cdot u'.$$

Доказательство. В силу дифференцируемости функций $f(u), u(x)$ и свойств пределов

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(u + \Delta u) - f(u)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(u + \Delta u) - f(u)}{\Delta u} \cdot \frac{\Delta u}{\Delta x} =$$

$$= \{\Delta u \to 0, \text{ при } \Delta x \to 0\} = \lim_{\Delta u \to 0} \frac{f(u + \Delta u) - f(u)}{\Delta u} \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} = f'(u) \cdot u',$$

что и требовалось доказать.

Правило дифференцирования сложной функции может быть обобщено на суперпозицию большего числа функций. Например, пусть функции $y = f(u),\ u = u(v),\ v = v(x)$ дифференцируемы каждая в соответствующей точке, тогда

$$y' = f'(u) \cdot u'(v) \cdot v'(x).$$

7^0. ***Дифференцирование обратной функции.*** Пусть функция $y = f(x)$ дифференцируема по x и $y'_x \neq 0$. Тогда обратная функция $x = g(y)$ дифференцируема по y и $x'_y = \dfrac{1}{y'_x}$.

Доказательство Действительно, $x'_y = \lim\limits_{\Delta y \to 0} \dfrac{\Delta x}{\Delta y} = \dfrac{1}{\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x}} = \dfrac{1}{y'_x}$.

Для удобства в использовании основные правила дифференцирования представим в таблице 1

Таблица 1

Правила дифференцирования

Номер формулы	Правила
0	$c = const,\ c' = 0.$
1	$(u \pm v)' = u' \pm v',\ \ u = u(x),\ \ v = v(x).$
2	$(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'.$
3	$(c \cdot v)' = c \cdot v',\ c = const.$
4	$\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2},\ \left(\dfrac{u}{c}\right)' = \dfrac{u'}{c}.$
5	$\left(\dfrac{c}{v}\right)' = -\dfrac{cv'}{v^2},\ \ c = const.$
6	$y = f(u),\ u = u(x) \Rightarrow y' = f'(u) \cdot u'.$
7	$y = f(x),\ \ x = g(y) \Rightarrow x'_y = \dfrac{1}{y'_x}.$
8	$(u^v)' = vu^{v-1}u' + u^v \ln u \cdot v'$

1.7. Производные основных элементарных функций

Используя определение производной функции и правила дифференцирования, найдем производные основных элементарных функций, которые представлены ниже в таблице 2.

Таблица 2

Производные основных элементарных функций

Номер формулы	Простые функции	Сложные функции
1	$\left(x^{\alpha}\right)' = \alpha \cdot x^{\alpha-1}$ $\left(\sqrt{x}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ $\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$	$\left(u^{\alpha}\right)' = \alpha u^{\alpha-1}u'$ $\left(\sqrt{u}\right)' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$ $\left(\frac{1}{u}\right)' = -\frac{u'}{u^2}$
2	$(\ln x)' = \frac{1}{x}$	$(\ln u)' = \frac{u'}{u}$
3	$(\log_a x)' = \frac{1}{x}\log_a e$	$(\log_a u)' = \frac{u'}{u}\log_a e$
4	$\left(e^x\right)' = e^x$	$\left(e^u\right)' = e^u \cdot u'$
5	$\left(a^x\right)' = a^x \ln a$	$\left(a^u\right)' = a^u \ln a \cdot u'$
6	$(\sin x)' = \cos x$	$(\sin u)' = \cos u \cdot u'$
7	$(\cos x)' = -\sin x$	$(\cos u)' = -\sin u \cdot u'$
8	$(tgx)' = \frac{1}{\cos^2 x}$	$(tgu)' = \frac{u'}{\cos^2 u}$
9	$(ctgx)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$	$(ctgu)' = -\frac{u'}{\sin^2 u}$
10	$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$(\arcsin u)' = \frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$
11	$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$(\arccos u)' = -\frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$
12	$(arctgx)' = \frac{1}{1+x^2}$	$(arctgu)' = \frac{u'}{1+u^2}$
13	$(arcctgx)' = -\frac{1}{1+x^2}$	$(arcctgu)' = -\frac{u'}{1+u^2}$

При выводе производных будем указывать номер формулы в соответствии с таблицей 2.

$2^0.\ y = \ln x \quad \Rightarrow \quad y' = \frac{1}{x}.$

Действительно, $\Delta y = \ln(x + \Delta x) - \ln x = \ln\frac{x + \Delta x}{x}$,

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\Delta x} \ln\frac{x + \Delta x}{x} = \lim_{\Delta x \to 0} \ln\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)^{1/\Delta x} = \ln\left[\lim_{\Delta x \to 0}\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{x}{\Delta x}\cdot\frac{1}{x}}\right].$$

Используя второй замечательный предел, получаем $y' = \ln e^{1/x} = \frac{1}{x}$.

С учетом правила дифференцирования сложной функции $(\ln u)' = \frac{1}{u}\cdot u'$.

$4^0.\ (e^x)' = e^x$.

Применим теоремы о дифференцировании обратной и сложной функций: $y = e^x, x = \ln y,\ x'_y = \frac{1}{y} \Rightarrow$

$$y'_x = \frac{1}{x'_y} = y = e^x; \quad (e^u)' = e^u \cdot u'.$$

Выведенные формулы применим для получения производной функций $a^u,\ u^\alpha,\ \alpha \in R$.

5^0. Производная показательной функции $(a^u)' = a^u \ln a \cdot u'$

Действительно, $a^u = e^{u \ln a} \Rightarrow (a^u)' = e^{u \ln a} \cdot (u \ln a)' = a^u \ln a \cdot u'$.
Производная показательной функции может быть получена и непосредственно по определению: $y = a^x,\ \Delta y = a^{x+\Delta x} - a^x,\ \Delta y = a^x\left(a^{\Delta x} - 1\right) \Rightarrow$

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{a^x\left(a^{\Delta x} - 1\right)}{\Delta x} = a^x \lim_{\Delta x \to 0} \frac{a^{\Delta x} - 1}{\Delta x};\ (a^x)' = a^x \ln a.$$

1^0. Производная функции типа степенной

$$(u^\alpha)' = \alpha \cdot u^{\alpha-1} u', \quad \alpha \in R.$$

В самом деле, $u^\alpha = e^{\alpha \ln u}$,

$$(u^\alpha)' = e^{\alpha \ln u} \cdot (\alpha \ln u)' = u^\alpha \cdot \alpha \cdot \frac{u'}{u} \Rightarrow (u^\alpha)' = \alpha \cdot u^{\alpha-1} u'.$$

Предлагаем читателям самостоятельно получить следующие формулы часто встречающихся производных:

$$\left(\sqrt{u}\right)' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}, \qquad \left(\sqrt[n]{u}\right)' = \frac{u'}{n\cdot\sqrt[n]{u^{n-1}}},$$

$$\left(\frac{1}{u}\right)' = -\frac{u'}{u^2}, \qquad \left(\frac{1}{u^n}\right)' = -\frac{n\cdot u'}{u^{n+1}}.$$

Замечание 1. При действии со степенями необходимо помнить формулы: $x^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{x^m}$, $x^{-m} = \frac{1}{x^m}$, $x^m x^n = x^{m+n}$, $\left(x^m\right)^n = x^{mn}$.

Замечание 2. При оперировании с логарифмами полезны их свойства:

$$\log b^m = m\log b. \qquad \log(bc) = \log b + \log c.$$

$$\log\left(\frac{b}{c}\right) = \log b - \log c,\ b>0,\ c>0.$$

6^0. $y = \sin x \quad \Rightarrow \quad y' = \cos x$.

Для нахождения y' вычислим изменение функции Δy:

$$\Delta y = \sin(x+\Delta x) - \sin x = 2\sin\frac{\Delta x}{2}\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right).$$

$$y' = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{2\sin\frac{\Delta x}{2}\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{2\sin\frac{\Delta x}{2}}{\Delta x}\lim_{\Delta x\to 0}\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right).$$

Принимая во внимание первый замечательный предел $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$, получаем $(\sin x)' = \cos x$, соответственно для сложной функции $(\sin u)' = \cos u\cdot u'$.

7^0. $y = \cos x \quad \Rightarrow \quad y' = -\sin x$.

Ранее вывели, что $(\sin x)' = \cos x$. Заметим, что $\cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$. По теореме о дифференцировании сложной функции

$$(\cos x)' = \left(\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\right)' = \cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\left(\frac{\pi}{2}-x\right)' = \sin x\cdot(-1), \text{ т.е.}$$

$$(\cos x)' = -\sin x, \quad (\cos u)' = -\sin u\cdot u'.$$

$8^0.\ y = tg\,x \quad \Rightarrow \quad y' = \dfrac{1}{\cos^2 x}.$

Для доказательства применим правило дифференцирования дроби:

$$(tg\,x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{(\sin x)'\cos x - \sin x(\cos x)'}{\cos^2 x} =$$

$$= \frac{\cos x \cdot \cos x - \sin x(-\sin x)}{\cos^2 x} = \{\cos^2 x + \sin^2 x = 1\} \Rightarrow (tg\,x)' = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

Для сложной функции: $(tgu)' = \dfrac{1}{\cos^2 u}\cdot u'.$

$9^0.\ (ctg\,x)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}; \qquad (ctg\,u)' = -\dfrac{1}{\sin^2 u}\cdot u'$

Предлагаем читателям самостоятельно доказать эти формулы.

$10^0.\ (arcsin\,x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$

Используем правило дифференцирования обратной функции

$$y = arcsin\,x \Rightarrow x = \sin y,$$

$$y'_x = \left\{\frac{1}{x'_y}, x'_y = \cos y\right\} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 y}},$$

$$y'_x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \Rightarrow (arcsin\,x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Для сложной функции $(arcsin\,u)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-u^2}}\cdot u'.$

$11^0.$ Производную $arccos\,u$ предлагаем читателям получить аналогично.

$$(arccos\,x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad (arccos\,u)' = -\frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\cdot u'.$$

$12^0.\ (arctg\,x)' = \dfrac{1}{1+x^2}.$

Применим теорему о дифференцировании обратной функции

$$y = arctg\,x \Rightarrow x = tg\,y,\ x'_y = \frac{1}{\cos^2 y} = 1 + tg^2 y.$$

$$y'_x = \left\{\frac{1}{x'_y}\right\} = \frac{1}{1+tg^2 y} = \frac{1}{1+x^2}.$$

По теореме о дифференцировании сложной функции

$$(arctg\,u)' = \frac{u'}{1+u^2}.$$

13⁰. Производную $(arcctg\,x)' = -\frac{1}{1+x^2}$, $(arcctg\,u)' = -\frac{u'}{1+u^2}$.

Предлагаем читателям вывести эти производные самостоятельно.

Примеры 1.3. Отработка навыков дифференцирования элементарных функций.

Найдем производные некоторых функций, используя правила и формулы дифференцирования функций, приведенные в таблицах 1 и 2.

Начнем с производных степенных функций.

Функция.	**Производная функции.**
1. $y = x^3$.	$y' = (x^3)' = 3x^2$.
2. $y = \sqrt[8]{x^3}$.	$y' = (x^{3/8})' = \frac{3}{8}x^{-5/8} \frac{3}{8\sqrt[8]{x^5}}$.
3. $y = \frac{1}{x^4}$.	$y' = (x^{-4})' = -4(x^{-5}) = -\frac{5}{x^5}$.
4. $y = \sqrt[3]{\sqrt{x}}$.	$y' = (x^{1/6})' = \frac{1}{6\sqrt[6]{x^5}}$.
5. $y = \frac{x^2 - \sqrt{x}}{3x^3}$.	$y' = \frac{1}{3}(x^{-1} - x^{-5/2})' = = \frac{1}{3}(-x^{-2} + \frac{5}{2}x^{-7/2})$.

6. $\left(\frac{1}{1-2x}\right)' = -\frac{1}{(1-2x)^2}\cdot(1-2x)' = \frac{2}{(1-2x)^2}$.

7. $(\sqrt{(2-3x)^3})' = \frac{3}{2}(2-3x)^{1/2}(2-3x)' = -\frac{9}{2}\sqrt{2-3x}$.

8. $\left(\frac{1}{\sqrt[3]{2+7x}}\right)' = \left((2+7x)^{-1/3}\right)' = -\frac{1}{3}(2+7x)^{-4/3}(2+7x)' = -\frac{7}{3\sqrt[3]{(2+7x)^4}}$

9. $(\sqrt{3x^3+5x-2})' = \frac{(3x^3+5x-2)'}{2\sqrt{3x^3+5x-2}} = \frac{9x^2+5}{2\sqrt{3x^3+5x-2}}$.

10. $\left(\frac{1}{(5x+7)^3}\right)' = \frac{-3(5x+7)'}{(5x+7)^4} = \frac{-15}{(5x+7)^4}$.

Рассмотрим функции, содержащие тригонометрические и обратные тригонометрические функции.

11. $y = \sin 2x + \cos 3x.$ $\qquad y' = 2\cos 2x - 3\sin 3x.$

12. $\left(\sin^2 x\right)' = 2\sin x(\sin x)' = 2\sin x \cdot \cos x = \sin 2x$

13. $\left(\sin x^2\right)' = \cos x^2\left(x^2\right)' = 2x \cdot \cos x^2$

14. $\left(tg\frac{x}{7}\right)' = \frac{1}{7\cos^2\frac{x}{7}}.$

15. $\left(ctg\sqrt{x}\right)' = -\frac{1}{\sin^2\sqrt{x}}\left(\sqrt{x}\right)', \qquad \left(ctg\sqrt{x}\right)' = \frac{-1}{2\sqrt{x}\cdot\sin^2\sqrt{x}}.$

16. $y = \frac{ctgx}{x}.$

$$y' = \frac{(ctg\,x)'x - x'ctgx}{x^2} = \frac{-\frac{x}{\sin^2 x} - ctgx}{x^2} = \frac{-x - \sin^2 x\cdot\frac{\cos x}{\sin x}}{x^2\sin^2 x},$$

$$y' = -\frac{x + \sin x\cos x}{x^2\sin^2 x}.$$

17. $y = tgx \cdot arcsin\,x.$

$$y' = \left(tgx\cdot arcsin\,x\right)' = \left(tgx\right)'\cdot arcsin\,x + \left(arcsin\,x\right)'\cdot tgx,$$

$$y' = \frac{arcsin\,x}{\cos^2 x} + \frac{tgx}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Определим производные функций, содержащих показательные и логарифмические функции.

18. $y = 2^x \cdot log_3 x.$

$$y' = \left(2^x\right)'\cdot log_3 x + \left(log_3 x\right)'2^x, \qquad y' = 2^x \ln 2\cdot log_3 x + \frac{2^x}{x\ln 3}$$

19. $y = e^x \ln x.$ $\qquad y' = e^x \ln x + e^x / x$

20. $y = arctgx + 2x\ln x.$ $\qquad y' = \frac{1}{1+x^2} + 2\ln x + 2.$

21. $y = \sqrt[3]{\sin^2 x}.$

Производную легче будет искать, если функцию записать в виде

$$y' = \left(\left(\sin x\right)^{2/3}\right)' = \frac{2}{3}\sin^{2/3-1} x\left(\sin x\right)' = \frac{2\cos x}{3\cdot\sqrt[3]{\sin x}}.$$

22. $y = \sin^2\sqrt{1-x}.$

Внимание! В этом примере проявите некоторую самостоятельность:

$$y' = 2\sin\sqrt{1-x}\quad\cos\sqrt{1-x}\,(\quad)(\quad)$$

Перепишите этот пример в тетрадь. Постарайтесь заполнить пропущенные места в скобках производными по промежуточным функциям. Сравните этот ответ с Вашим результатом.

Ответ после преобразования:

$$y' = -\frac{\sin 2\sqrt{1-x}}{2\sqrt{1-x}}.$$

Очень хорошо, если ответы совпали! Если все-таки ошибки наблюдаются, посмотрите предыдущие примеры, попробуйте решить еще пример.

23. $y = \arcsin\sqrt{1-x^2}$

$$y' = \left(\arcsin\sqrt{1-x^2}\right)' = \frac{(\quad)'(\quad)}{\sqrt{1-\left(1-x^2\right)}}$$

Заполните скобки, после некоторых преобразований ответ должен быть следующим: $y' = \dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$,

так как

$$y' = \left(\arcsin\sqrt{1-x^2}\right)' = \frac{\left(\sqrt{1-x^2}\right)'}{\sqrt{1-\left(\sqrt{1-x^2}\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-\left(1-x^2\right)}}\frac{1}{2\sqrt{1-x^2}}\left(1-x^2\right)' =$$

$$= \frac{1}{x}\frac{1}{2\sqrt{1-x^2}}(-2x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

24. $y = \ln tgx.\quad y' = \dfrac{1}{tgx}\cdot(tgx)' = \dfrac{\cos x}{\sin x}\cdot\dfrac{1}{\cos^2 x} = \dfrac{1}{\sin x\cos x} = \dfrac{2}{\sin 2x}.$

25. $y = \ln\dfrac{\sqrt[4]{x^2+5}\cdot\left(3x^4+7\right)}{\left(1-x^6\right)^3}.$

Прежде всего преобразуем функцию, используя свойства логарифмов:

$$y = \frac{1}{4}\ln\left(x^2+5\right) + \ln\left(3x^4+7\right) - 3\ln\left(1-x^6\right).$$

$$(\ln u)' = \frac{1}{u}\cdot u' \Rightarrow y' = \frac{2x}{4\left(x^2+5\right)} + \frac{12x^3}{3x^4+7} - \frac{3\left(-6x^5\right)}{1-x^6}.$$

Ответ: $y' = \dfrac{x}{2\left(x^2+5\right)} + \dfrac{12x^3}{3x^4+7} - \dfrac{18x^5}{1-x^6}$

1.8. Логарифмическая производная

Пусть дана некоторая дифференцируемая функция $y = f(x)$. Прологарифмируем обе части этого выражения:

$$ln\, y = ln\, f(x).$$

Продифференцируем последнее выражение по x, не забывая, что $y = f(x)$. $\quad (ln\, y)'_x = (ln\, f(x))'_x \Rightarrow \frac{1}{y} y' = (ln\, f(x))'_x,$

откуда $\quad y' = y(ln\, f(x))'.$

Определение *Операция, состоящая в последовательном применении к равенству $y = f(x)$ сначала логарифмирования, а затем дифференцирования, называется логарифмическим дифференцированием, а производная – логарифмической производной.*

Рассмотрим показательно-степенную функцию $y = u(x)^{v(x)}$.

Прологарифмируем ее: $ln\, y = v(x) \cdot ln\, u(x)$, а затем продифференцируем: $\frac{y'}{y} = v'\, ln\, u + v\frac{u'}{u}$. Окончательно получим, что производная показательно степенной функции равна

$$(u^v)' = u^v\left(v'\, ln\, u + v\frac{u'}{u}\right) = u^v v'\, ln\, u + vu^{v-1}u'$$

(см. таблицу 1, 8^0). Из последней формулы следует, что при дифференцировании показательно-степенной функции применяют правила дифференцирования показательной функции (первое слагаемое) и степенной функции (второе слагаемое).

Пример 1.4. $\quad y = x^x. \quad ln\, y = x\, ln\, x, \quad \frac{y'}{y} = ln\, x + 1,$

$$y' = y(ln\, x + 1) = x^x(ln\, x + 1).$$

Логарифмическое дифференцирование облегчает вычисление производных дробно рациональных функций со многими сомножителями.

Пример 1.5. $\quad y = sin^3 x(5x^2 + 8)^{11}\sqrt{x^2 + 1}.$

$$ln\, y = 3\, ln\, sin\, x + 11 ln(5x^2 + 8) + \frac{1}{2} ln(x^2 + 1). \quad y' = y(ln\, y)'.$$

$$(ln\, y)' = \frac{3\, cos\, x}{sin\, x} + \frac{11 \cdot 10x}{5x^2 + 8} + \frac{1}{2} \cdot \frac{2x}{x^2 + 1},$$

$$y' = sin^3 x(5x^2 + 8)^{11}\sqrt{x^2 + 1}\left(3ctgx + \frac{110x}{5x^2 + 8} + \frac{x}{x^2 + 1}\right).$$

1.9. Дифференцирование неявно заданной функции

Если функция задана уравнением $y = f(x)$, разрешенным относительно y, то функция *задана в явном виде* (явная функция).

Под *неявным заданием* функции понимают задание функции в виде уравнения $F(x, y) = 0$, неразрешенного относительно y.

Любую явно заданную функцию $y = f(x)$ можно записать как неявно заданную уравнением $f(x) - y = 0$, но не наоборот. Не всегда просто или даже невозможно разрешить уравнение относительно y, например, $y + \cos y - 9x = 0$ или $2^y - x^3 y + tgx = 0$.

Если неявная функция задана уравнением $F(x, y) = 0$, то для нахождения производной y по x *достаточно продифференцировать это равенство по* x *как сложную функцию, рассматривая при этом* y *как функцию* x, т. е. $F(x, y(x))$ – это сложная функция.

Пример 1.6. Найти производную функции y, заданную уравнением

$$x^3 + y^3 - 3xy = 0.$$

Функция y задана неявно. Дифференцируем по x, учитывая, что $y = y(x)$.

$$3x^2 + 3y^2 y' - 3y - 3xy' = 0.$$

Из полученного соотношения следует, что $(y^2 - x)y' = y - x^2$, т.е.

$$y' = \frac{y - x^2}{y^2 - x}.$$

Пример 1.7. $e^x + \sin(x + y) = 0$.

Дифференцируем по x. $e^x + \cos(x + y) \cdot (1 + y') = 0$,

$e^x + \cos(x + y) + y' \cos(x + y) = 0$, откуда $y' = -\dfrac{e^x + \cos(x + y)}{\cos(x + y)}$.

Пример 1.8. $y^2 \cos x = a^2 \sin 3x$, где $a = const$.

Продифференцируем обе части равенства по x

$$2yy' \cos x - y^2 \sin x = 3a^2 \cos 3x, \quad y' = \frac{3a^2 \cdot \cos 3x + y^2 \cdot \sin x}{2y \cdot \cos x}$$

Пример 1.9. $x \cos y - y \ln x = 0$.

$$(x \cos y - y \ln x)' = \cos y - x y' \sin y - y' \ln x - y / x = 0,$$

$$(x \sin y + \ln x) y' = \cos y - y / x, \qquad y' = \frac{\cos y - y / x}{x \sin y + \ln x}$$

Находить производную неявной функции $F(x,y)=0$ можно другим способом, не требующим приведения подобных членов $F'_x + F'_y \cdot y'_x = 0$. При нахождении производной F'_x считаем $y = const$; при нахождении F'_y считаем $x = const$. Полагая, что $F'_y \neq 0$, находим

$$\frac{dy}{dx} = y'_x = -\frac{F'_x}{F'_y}.$$

Обоснование этого правила будет дано в разделе "Функции нескольких переменных ".

Пример 1.10. $cos(2x+3y) - xy^3 + 3x^2 - y = 0.$

$$F(x,y) = cos(2x+3y) - xy^3 + 3x^2 - y.$$

$$F'_x = \{y = const\} = -2\,sin(2x+3y) - y^3 + 6x;$$

$$F'_y = \{x = const\} = -3\,sin(2x+3y) - 3xy^2 - 1.$$

Тогда

$$y'_x = -\frac{-2\,sin(2x+3y) - y^3 + 6x}{-3\,sin(2x+3y) - 3xy^2 - 1},$$

$$y'_x = \frac{-sin(2x+3y) - y^3 + 6x}{3\,sin(2x+3y) + 3xy^2 + 1}.$$

1.10. Дифференцирование параметрически заданной функции

Функция $y = f(x)$ называется заданной параметрически, если сама функция y и ее аргумент x являются функциями параметра t:

$$\begin{cases} y = y(t), \\ x = x(t), \end{cases} \quad t \in (t_0, T).$$

Так как $x = x(t)$, то, стало быть, $t = t(x)$ и $y = y(t(x))$ есть сложная функция x. Применяя правила дифференцирования сложной и обратной функций, получаем $y'_x = y'_t \cdot t'_x = y'_t \cdot \frac{1}{x'_t}$.

Производная первого порядка параметрически заданной функции имеет вид

$$\begin{cases} y'_x = \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y'_t}{x'_t}, \\ x = x(t). \end{cases}$$

Первая производная $y'_x = y'_x(t)$ является функцией от параметра t, поэтому, применяя повторно правило дифференцирования параметрически заданной функции, получим , что вторая производная равна $y''_{xx} = \left(y'_x\right)'_t \frac{1}{x'_t}$. Вычислив производную дроби $\left(\frac{y'_t}{x'_t}\right)'_t$, получим

$$\begin{cases} \dfrac{d^2y}{dx^2} = y''_{xx} = \dfrac{\left(y'_x\right)'_t}{x'_t} = \dfrac{y''_t x'_t - x''_t y'_t}{\left(x'_t\right)^3}, \\ x = x(t) \end{cases}$$

Аналогично могут быть получены производные третьего, четвертого и n - го порядков параметрически заданной функции

$$\frac{d^n y}{dx^n} = y^{(n)}_{x^n} = \left(y^{(n-1)}_{x^{n-1}}\right)' \cdot \frac{1}{x'_t}.$$

Пример 1.11. Найти производную функции $\begin{cases} y = \cos 5t, \\ x = t^2 - 1. \end{cases}$

Решение. $\begin{cases} y'_x = \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y'_t}{x'_t} = \dfrac{\left(\cos 5t\right)'}{\left(t^2 - 1\right)'}, \\ x = t^2 - 1, \end{cases}$ $\begin{cases} y'_x = \dfrac{-5\sin 5t}{2t}, \\ x = t^2 - 1. \end{cases}$

Пример 1.12. Найти y''_{xx} для параметрически заданной функции

$$\begin{cases} x = \dfrac{1}{9}\cos^3 t, \\ y = \dfrac{1}{3}\sin^3 t. \end{cases}$$

Решение. $y'_t = \frac{1}{3} \cdot 3\sin^2 t \cdot \cos t = \sin^2 t \cdot \cos t,$

$$x'_t = \frac{1}{9} \cdot 3\cos^2 t \cdot \left(-\sin t\right) = \frac{1}{3}\cos^2 t \cdot \sin t.$$

Первая производная

$$\begin{cases} y'_x = \dfrac{3\sin^2 t \cos t}{-\cos^2 t \sin t} = -3tgt, \\ x = \dfrac{1}{9}\cos^3 t. \end{cases}$$

Вторая производная $y''_x = (-3tgt)'_t \cdot \frac{-3}{\cos^2 t \cdot \sin t} \Rightarrow$

$$\begin{cases} y''_{xx} = \dfrac{-3 \cdot \dfrac{1}{\cos^2 t} \cdot 3}{-\cos^2 t \sin t} = \dfrac{9}{\cos^4 t \sin t}, \\ x = \dfrac{1}{9}\cos^3 t \end{cases}$$

Пример 1.13. Для функции $\begin{cases} x = a\cos 3t, \\ y = a\sin 3t, \end{cases}$ найти производную третьего порядка

Решение. $x'_t = -3a\sin 3t$, $y'_t = 3a\cos 3t$.

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} \quad \Rightarrow \quad y'_x = \frac{3a\cos 3t}{-3a\sin 3t} = -ctg3t;$$

$$y''_{x^2} = (y'_x)'_t \cdot \frac{1}{x'_t} \Rightarrow y''_{x^2} = (-ctg3t)'_t \cdot \frac{1}{-3a\sin 3t} = \frac{3}{\sin^2 3t} \cdot \frac{1}{-3a\sin 3t},$$

$$y''_{x^2} = -\frac{1}{a\sin^3 3t};$$

$$y'''_{x^3} = (y''_{x^2})'_t \cdot \frac{1}{x'_t} \Rightarrow$$

$$y'''_{x^3} = \left(-\frac{1}{a\sin^3 3t}\right)'_t \frac{1}{-3a\sin 3t} = \frac{3\cdot 3\cos 3t}{a\sin^4 3t} \cdot \frac{1}{-3a\sin 3t} \Rightarrow$$

$$y'''_{x^3} = -\frac{3\cos 3t}{a^2 \sin^5 3t}$$

1.11. Свойства производных высших порядков

Правила дифференцирования позволяют получить следующие основные свойства производных n-го порядка:

1°. $(u \pm v)^{(n)} = u^{(n)} \pm v^{(n)}$;

2°. Постоянный множитель можно вынести за знак производной любого порядка: $(cu)^{(n)} = cu^{(n)}$;

3°. Формула Лейбница

$$(uv)^{(n)} = u^{(n)}v + nu^{(n-1)}v' + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}u^{(n-2)}v'' + \frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}u^{(n-3)}v''' + \ldots$$
$$+ \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}u''v^{(n-2)} + nu'v^{(n-1)} + uv^{(n)}.$$

Коэффициенты легко определяются по треугольнику Паскаля:

нулевая строка	1
строка 1	1 1
строка 2	1 2 1
строка 3	1 3 3 1
строка 4	1 4 6 4 1
строка 5	1 5 10 10 5 1
	... ...

Каждая последующая строка получается следующим образом. слева и справа добавляется по 1, остальные числа – суммы двух соседних чисел в вышерасположенном ряду. Например, коэффициенты для четвертой производной стоят в четвертой строке, для пятой – в пятой строке.

Пример 1.14. Найти сотую производную функции $y = x^2e^x$.

Решение. Заметим, что любая производная функции e^x: $\left(e^x\right)^{(n)} = e^x$; а для функции x^2: первая производная равна $2x$, вторая – равна 2, все производные, начиная с третьей, равны нулю. Таким образом, сотая производная

$$y^{(100)} = \left(x^2e^x\right)^{(100)} = e^x\cdot x^2 + 100\cdot e^x\cdot 2x + \frac{100\ \ 99}{1\cdot 2}e^x\cdot 2,$$

Ответ: $y^{(100)} = e^x\left(x^2 + 200x + 9900\right)$.

2. Дифференциал функции

2.1. Понятие дифференциала функции

Пусть функция $y = f(x)$ дифференцируема в некотором интервале $(a;b)$, т е имеет в каждой точке этого интервала производную

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

Тогда на основании теоремы о связи между функцией, ее пределом и бесконечно малой величиной имеем

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x) + \alpha(x),$$

где $\alpha(x)$ – бесконечно малая величина при $\Delta x \to 0$. Поэтому полное приращение функции

$$\Delta y = f'(x)\Delta x + \alpha(\Delta x)\Delta x$$

может быть представлено в виде суммы двух слагаемых, первое из которых пропорционально приращению аргумента Δx с коэффициентом пропорциональности, равным $f'(x)$, а второе - является бесконечно малой более высокого порядка, чем Δx.

Определение. Дифференциалом функции $y = f(x)$ в точке x называется главная часть приращения функции, линейная относительно приращения независимой переменной. Дифференциал функции $y = f(x)$ обозначается dy или $df(x)$:

$$dy = f'(x)\Delta x.$$

Заметим, что для функции $y = x$ дифференциал $dy = 1 \cdot \Delta x$, т е дифференциал независимой переменной равен изменению этой переменной $dx = \Delta x$.

Таким образом, ***дифференциал функции $y = f(x)$ в точке x равен произведению производной на дифференциал независимой переменной***

$$dy = f'(x)\,dx.$$

Последнее равенство позволяет определить производную как отношение двух дифференциалов: $f'(x) = \dfrac{dy}{dx}$.

Пример 2.1. Найти дифференциалы функций:

а) $y = x^3 \Rightarrow dy = 3x^2 dx.$

б) $y = \sqrt{\sin x}$. $dy = \left(\sqrt{\sin x}\right)' dx$, $dy = \dfrac{\cos x}{2\sqrt{\sin x}}\,dx$.

2.2. *Геометрический смысл дифференциала функции*

Пусть x – абсцисса точки M на графике функции $y = f(x)$ (см. рис. 2.1) Дадим x приращение Δx. Точке с абсциссой $x + \Delta x$ на графике функции $y = f(x)$ соответствует точка N. Проведем в точке M касательную MP Очевидно, что $\Delta x = dx = MK$, $\Delta y = NK$, $y'(x) = tg\angle PMK$. Тогда из треугольника MPK имеем $MK \cdot tg\angle PMK = y'dx = dy$.

Дифференциал функции в данной точке равен приращению ординаты касательной к графику функции, проведенной в данной точке при переходе от точки с абсциссой x к точке с абсциссой $x + \Delta x$.

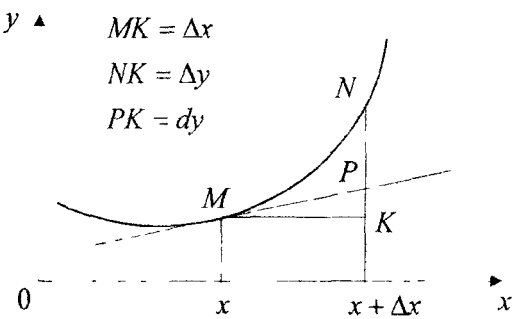


Рис. 2.1 Геометрический смысл дифференциала функции

2.3. *Инвариантность формы первого дифференциала*

Если x независимая переменная, то

$$dy = y'dx.$$

Пусть теперь имеется сложная функция $y = y(x), x = x(t)$. Ее дифференциал равен

$$dy = y'_t \cdot dt = y'_x(x'_t \cdot dt) = y'_x \cdot dx$$

Сопоставляя эти формулы, приходим к выводу, что формула для дифференциала $dy = y'dx$ сохраняет вид как в случае, когда x является независимой переменной, так и в случае, когда x зависит еще от одной переменой, например, t.

Это свойство дифференциала называется *инвариантностью* (***неизменностью***).

Пример 2.2. Найти дифференциалы следующих функций:

а) $y = \sin^2 x.$

$dy = 2\sin x d\sin x = 2\sin x \cos x dx = \sin 2x dx.$

б) $y = e^{x^3} \Rightarrow dy = e^{x^3} dx^3 = e^{x^3} \cdot 3x^2 dx.$

в) $y = \arccos\frac{1}{x}.\ dy = -\frac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}} d\frac{1}{x} = -\frac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}} \cdot \left(-\frac{1}{x^2} dx\right)$

$dy = \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}.$

г) $y = arctg\sqrt{x}.\ dy = \frac{1}{1+\left(\sqrt{x}\right)^2} d\sqrt{x},\ dy = \frac{1}{1+x} \cdot \frac{dx}{2\sqrt{x}}.$

д) $y = \ln\cos 2x.\ dy = \frac{1}{\cos 2x} \cdot d\cos 2x = \frac{-2\sin 2x dx}{\cos 2x},$

$dy = -2tg2x dx.$

2.4. *Свойства дифференциала. Таблица дифференциалов*

Свойства дифференциала вытекают из его определения и свойств производной:

1. $dc = 0$; **2.** $d(u \pm v) = du \pm dv$; **3.** $d(uv) = vdu + udv$;

4. $d(cu) = cdu$; **5.** $d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{vdu - udv}{v^2}.$

Предполагается, что u и v – дифференцируемые функции.
Докажем, например, свойство 3:

$$d(uv) = (uv)'dx = (u'v + v'u)dx = v \cdot u'dx + u \cdot v'dx \Rightarrow$$

$$d(uv) = v \cdot du + u \cdot dv$$

Таблица 3

Дифференциалы основных элементарных функций

Номер формулы	Простые функции	Номер формулы	Сложные функции
1	$du^{\alpha} = \alpha u^{\alpha-1} du$	2	$d\sqrt{u} = \frac{1}{2\sqrt{u}} du$
3	$d\left(\frac{1}{u}\right) = -\frac{1}{u^2} du$	4	$d \ln u = \frac{1}{u} du$
5	$de^u = e^u du$	6	$d a^u = a^u \ln a \cdot du$
7	$d \sin u = \cos u du$	8	$d \cos u = -\sin u du$
9	$dtgu = \frac{1}{\cos^2 u} du$	10	$d\,ctgu = -\frac{1}{\sin^2 u} du$
11	$d \arcsin u = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} du$	12	$d \arccos u = -\frac{1}{\sqrt{1-u^2}} du$
13	$darctgu = \frac{1}{1+u^2} du$	14	$d \operatorname{arcctg} u = -\frac{1}{1+u^2} du$

2.5. *Приложения дифференциала к приближенным вычислениям*

Из определения приращения функции и дифференциала функции следует, что они отличаются друг от друга на величину, являющуюся бесконечно малой более высокого порядка, чем Δx. При малых Δx имеет место приближенная формула

$$dy \approx \Delta y = f(x + \Delta x) - f(x).$$

Откуда

$$f(x + \Delta x) \approx dy + f(x) \approx f(x) + y'dx.$$

Эта формула используется для приближенного вычисления значений функции в точках, близких к тем, в которых ее значения уже известны.

Пример 2.3 *С помощью дифференциалов найти приближенные значения* следующих функций.

а) $y_1 = 1.95^3$

Решение. Рассмотрим функцию $y = x^3$. Ее дифференциал $dy = 3x^2 dx$. Пусть $x + dx = 1.95$. Возьмем $x = 2$, тогда $dx = -0.05$. Значение $y(2) = 2^3 = 8$. Дифференциал $dy = 3x^2 dx$ функции в точке $x = 2$ $dy|_{x=2} = 3 \cdot 2^2 \cdot (-0.05) = -0.6$. Тогда $y(x + dx) \approx y(x) + dy$, т.е. $1.95^3 \approx 8 - 0.6$, $1.95^3 \approx 7.4$.

Заметим, что точное значение $1.95^3 = 7.414875$, абсолютная погрешность 0.014875, относительная погрешность составляет 2%.

б) $y = \ln 1.02$

Решение. Вычислим приближенно с помощью дифференциала функции $y = \ln x$, $dy = \dfrac{dx}{x}$, $x + dx = 1.02$, $x = 1$.

$$\ln 1.02 \approx \ln 1 + \frac{dx}{x}\Big|_{x=1,\ dx=0.02} \approx 0 + 0.02 \approx 0.02, \quad \ln 1.02 \approx 0.02.$$

2.6. Дифференциалы высших порядков

Аналогично понятию производных высших порядков можно ввести понятие дифференциала второго, третьего и т.д. порядка.

Пусть функция $y = f(x)$ дважды дифференцируема в точке x, т.е. существуют производные $f'(x)$, $f''(x)$. Первый дифференциал $dy = f'(x)dx$. Тогда при том же фиксированном изменении аргумента dx дифференциал от первого дифференциала $d(dy) = (f'(x)dx)' dx$ назовем ***дифференциалом второго порядка*** или ***вторым дифференциалом:***

$$d^2 y = d(dy) = f''(x)dx^2$$

Аналогично, ***третий дифференциал – дифференциал от второго дифференциала:***

$$d^3 y = d(d^2 y) = f'''(x)dx^3,$$

дифференциал n-го порядка

$$d^n y = d\left(d^{n-1} y\right) = f^{(n)}(x)dx^n.$$

Например, для функции $y = \sin 2x$,

$$dy = 2\cos 2x dx,\ d^2 y = -4\sin 2x dx^2,$$

$$d^3 y = -8\cos 2x dx^3,\ d^4 y = 16\sin 2x dx^4 \text{ и т.д.}$$

Заметим, что дифференциалы высших порядков в общем случае свойством инвариантности не обладают. Действительно, пусть $y = f(x)$, $x = x(t)$. Тогда, например, второй дифференциал

$$d^2 y = d(f'(x)dx) = f''(x)dx^2 + f'(x)d^2 x$$

Следует отметить, что для линейной функции $x = kt + b$, $x'(t) = k$, $x''(t) = 0$, т.е. $d^2 x = x''(t)dt = 0$. Таким образом ***дифференциалы высших порядков, начиная со второго, сохраняют свою форму только если*** $x = kt + b$

2.7. Свойства дифференциалов высших порядков

Если функции $u = u(x)$, $v = v(x)$ n раз непрерывно дифференцируемы в точке $x \in D$, то учитывая свойства производных высших порядков, легко показать следующие свойства дифференциалов.

1^0. Дифференциал n-го порядка алгебраической суммы функций равен алгебраической сумме дифференциалов слагаемых.

$$d^n(u \pm v) = d^n u \pm d^n v$$

2^0. Постоянный множитель можно вынести за знак дифференциала n-го порядка.

$$d^n(cu) = cd^n u,\ c = const.$$

3.Основные теоремы дифференциального исчисления

Лемма о достаточном условии возрастания и убывания функции. Пусть функция $f(x)$ дифференцируема в точке x. Если $f'(x) > 0$, то $f(x)$ возрастает в точке x, если $f'(x) < 0$, то $f(x)$ убывает в точке x

Доказательство. По определению производной функции $f'(x)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$. Пусть $f'(x)>0$. Тогда $\dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}>0$ при достаточно малых Δx.

$$\Delta x<0 \Rightarrow f(x+\Delta x)-f(x)<0 \to f(x+\Delta x)<f(x),$$
$$\Delta x>0 \Rightarrow f(x+\Delta x)-f(x)>0 \Rightarrow f(x+\Delta x)>f(x),$$

что означает возрастание функции $f(x)$ в точке x. Предлагаем читателям аналогично рассмотреть случай $f'(x)<0$.

Теорема Ферма (17 в.) ***(необходимое условие существования экстремума).*** *Функция $f(x)$ непрерывна на $(a.b)$ принимает наименьшее или наибольшее значение при $x=c\in(a,b)$ и дифференцируема при $x=c$. Тогда $f'(c)=0$*

Геометрический смысл теоремы Ферма. касательная к графику функции $y=f(x)$ в точке с абсциссой $x=c$ горизонтальна (рис. 3 1).

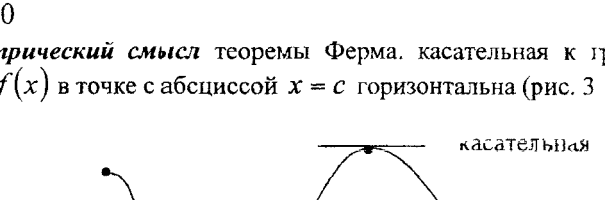


Рис. 3.1

Доказательство. Предположим противное. $f'(c)\neq 0$. Тогда, если $f'(c)>0$, то $f(x)$ возрастает в окрестности $x=c$; если $f'(c)<0$, то убывает, но это невозможно, так как при $x=c$ функция принимает наименьшее или наибольшее значение. Противоречие доказывает утверждение.

Теорема Ролля (17 в.). Пусть для функции $f(x)$ выполнены следующие условия

1^0. $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$;

2^0. $f(x)$ дифференцируема в интервале (a,b);

3^0 В концах $[a,b]$ принимает одинаковые значения, т.е $f(a)=f(b)$

Тогда существует точка $c\in(a,b)$: $f'(c)=0$.

Доказательство. Функция $f(x)$ непрерывна на $[a,b]$, т.е. по теореме Вейерштрасса ограничена на этом отрезке и достигает на нем своих наименьшего и наибольшего значений: $m \le f(x) \le M$, $m = f(x_1)$, $M = f(x_2)$, $m = M \Rightarrow f(x) = c = const \Rightarrow f'(x) \equiv 0$, $x \in (a,b)$.

$m < M$. В этом случае хотя бы одна из точек x_1, x_2 лежит внутри интервала (a,b) (так как $f(a) = f(b)$). Через c обозначим ту точку, которая лежит в интервале (a,b). По условию 2^0 в точке c функция дифференцируема и принимает в ней наименьшее или наибольшее значение По теореме Ферма $f'(c) = 0$.

Анализ условий теоремы Ролля. Все три условия теоремы Ролля важны Утверждение теоремы может не выполняться при нарушении хотя бы одного условия (см рис 3 2)

На рисунках нет точки $c \in (a,b)$: $f'(c) = 0$.

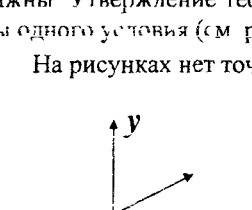


Рис 3 2 а

Нарушено условие 1^0

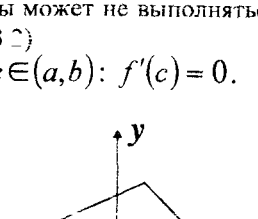


Рис 3 2 б

Нарушено условие 2^0

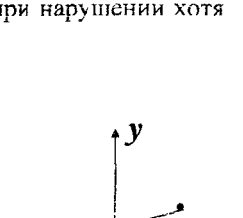


Рис 3 2 в

Нарушено условие 3^0

Теорема Лагранжа (теорема о среднем в дифференциальном исчислении). Пусть для функции $f(x)$ выполнены условия

1^0 $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$;

2^0. $f(x)$ дифференцируема в интервале (a,b).

Тогда существует $c \in (a,b)$: $f'(c) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$.

Доказательство. Рассмотрим функцию

$$F(x) = f(x) - kx, \qquad k = \frac{f(b) - f(a)}{a - b}.$$

Функция $F(x)$ непрерывна на $[a,b]$, дифференцируема в (a,b) как разность непрерывных и дифференцируемых функций. При этом $F'(x) = f'(x) - k$. Покажем, что $F(b) = F(a)$. Действительно,

$$F(b)-F(a)=[f(b)-kb]-[f(a)-ka]=f(b)-f(a)-k(b-a).$$

С учетом обозначения

$$F(b)-F(a)=f(b)-f(a)-[f(b)-f(a)]=0,\ \text{т.е}$$

$F(a)=F(b)$. Таким образом, для функции выполнены все условия теоремы Ролля и тогда $\exists\ \ c\in(a,b)$: $F'(c)=0$, т.е $f'(c)-k=0$ или

$$f'(c)=k=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

Утверждение теоремы доказано

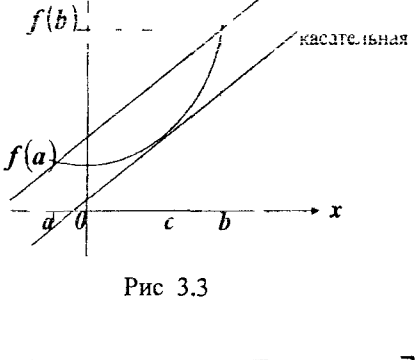


Рис 3.3

Геометрический смысл теоремы Лагранжа: $\exists c\in(a,b)$, такая, что касательная к графику функции в этой точке параллельна хорде, стягивающей точки $(a,f(a))$, $(b,f(b))$ (см рис 3.3)

Другие формы записи теоремы Лагранжа:

$$f(b)-f(a)=f'(c)(b-a),\qquad c\in(a,b),$$

$$f(a+h)-f(a)=f'(a+\theta h)h,\quad 0<\theta<1.$$

Упражнение. Как изменится график функции $y=f(x)$, если из нее вычесть kx?

Теорема Коши. Функции $f(x)$ и $g(x)$ удовлетворяют условиям

1^0 $f(x),g(x)$ непрерывны на $[a,b]$;

2^0. $f(x),g(x)$ дифференцируемы в (a,b);

3^0. $g'(x)\neq 0\quad\forall\ \ x\in(a,b)$.

Тогда $\exists\ \ c\in(a,b)\cdot\ \dfrac{f'(c)}{g'(c)}=\dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$

Для доказательства предлагаем читателям рассмотреть функцию $\Phi(x)=f(x)-kg(x)$, $k=\dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$, и проверить для нее условия теоремы Ролля

Замечания. *1.* $g(a)\neq g(b)$, так как иначе по теореме Ролля $\exists\ c\in(a,b):\ g'(c)=0$.

2. Теорема Лагранжа – частный случай теоремы Коши при $g(x)=x$

3. Нельзя доказать теорему Коши, применяя теорему Лагранжа к функциям $f(x)$ и $g(x)$.

Предлагаем читателям подумать над причиной этого

Правила Лопиталя (вычисления пределов). Пусть функции $f(x), g(x)$ удовлетворяют условиям:

1^0. $f(x), g(x)$ определены и дифференцируемы в некоторой окрестности точки $x=a$, за исключением, быть может, точки $x=a$, причем $g'(x)\neq 0$;

2^0. $f(x), g(x)$ бесконечно малые или бесконечно большие при $x\to a$;

3^0. Существует конечный $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$.

Тогда существует конечный предел $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\left[\dfrac{0}{0},\dfrac{\infty}{\infty}\right]=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$

Доказательство вытекает из теоремы Коши. Предлагаем провести его самостоятельно (см., например [1-7])

Замечания. *1.* Правила Лопиталя можно применять несколько раз если производные функций удовлетворяют требуемым свойствам

2. Правила Лопиталя верны и при $x\to\infty$

Действительно, $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\left[\dfrac{0}{0},\dfrac{\infty}{\infty}\right]=\left\{\dfrac{1}{x}=t\to 0, x\to\infty\right\}=$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{f\left(\frac{1}{t}\right)}{g\left(\frac{1}{t}\right)}=\lim_{t\to 0}\frac{f'\left(\frac{1}{t}\right)\cdot\left(-\frac{1}{t^2}\right)}{g'\left(\frac{1}{t}\right)\cdot\left(-\frac{1}{t^2}\right)}=\lim_{t\to 0}\frac{f'\left(\frac{1}{t}\right)}{g'\left(\frac{1}{t}\right)}=\lim_{x\to\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Пример 3.1. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\ln x}{x}=\left[\dfrac{\infty}{\infty}\right]=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(\ln x)'}{x'}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1/x}{1}=0.$

Пример 3.2. $L = \lim\limits_{x\to 0} x^x = \left[0^0\right] = \lim\limits_{x\to 0} e^{x\ln x} = e^{\lim\limits_{x\to\infty} x\ln x}$

$$\lim_{x\to 0} x\ln x = \left[0\cdot\infty\right] = \lim_{x\to 0}\frac{\ln x}{1/x} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{x\to 0}\frac{(\ln x)'}{\left(1/x\right)'} = \lim_{x\to 0}\frac{1/x}{-1/x^2} =$$

$$= \lim_{x\to 0}(-x) = 0.$$

Таким образом, $L = \lim\limits_{x\to 0} x^x = e^0 = 1.$

Пример 3.3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^x - 1}{x} = \left[\dfrac{0}{0}\right] = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\left(a^x\right)'}{x'} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^x \ln a}{1} = \ln a.$

Пример 3.4. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^\alpha - 1}{x} = \left[\dfrac{0}{0}\right] = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\alpha(1+x)^{\alpha-1}}{1} = \alpha.$

Пример 3.5. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x - e^{-x} - 2x}{x - \sin x} = \left[\dfrac{0}{0}\right] = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x + e^{-x} - 2}{1-\cos x} = \left[\dfrac{0}{0}\right] =$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{e^x - e^{-x}}{\sin x} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x\to 0}\frac{e^x + e^{-x}}{\cos x} = 2.$$

В этом примере пришлось правило Лопиталя применять 3 раза.

Пример 3.6

$$\lim_{x\to 1}\frac{2x^{10} - 3x^{10} + 4x - 3}{4x^3 - 5x^2 + 1} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x\to 1}\frac{22x^{10} - 30x^9 + 4}{12x^2 - 10x} = -\frac{4}{2} = -2$$

Заметим, что раскрытие неопределенности $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{P(x)}{Q(x)} = \left[\dfrac{0}{0}\right]$ по правилу Лопиталя дает более короткий путь к ответу, неопределенность $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{P(x)}{Q(x)} = \left[\dfrac{\infty}{\infty}\right]$ лучше раскрывать, как и ранее, по отношению коэффициентов при старшей степени.

4. *Формула Тейлора и ее приложения*

Одним из важных математических понятий является понятие аппроксимации. ***Аппроксимация*** – это приближенная замена какой - либо величины другой, более простой или более подходящей для данного исследования и достаточно близкой (в том или ином смысле) к исходной. Одним из наиболее простых примеров аппроксимации является приближение иррациональных чисел рациональными. Например, $\sqrt{2} \approx 1{,}414$; $\sqrt{3} \approx 1{,}732$; $\pi \approx 3{,}1415926$; $e \approx 2{,}718281$

Сейчас перед нами стоит задача приближенной замены функции $f(x)$ более простой, а, именно, многочленом.

4.1. Формула Тейлора

Пусть функция $f(x)$ дифференцируема $(n+1)$ раз в точке $x = x_0$ и некоторой окрестности этой точки. Найдем многочлен $P_n(x)$ степени не выше n, значение которого при $x = x_0$ совпадает со значением функции, а также все производные многочлена при $x = x_0$ до порядка n включительно совпадают с соответствующими значениями производных данной функции:

$$P_n(x_0) = f(x_0),\ P_n'(x_0) = f'(x_0),\ P_n''(x_0) = f''(x_0),\ \ldots,\ P_n^{(n)}(x_0) = f^{(n)}(x_0). \qquad (4.1)$$

Многочлен $P_n(x)$ будем искать в виде многочлена по степеням $x - x_0$:

$$P_n(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + a_3(x - x_0)^3 + \ldots + a_n(x - x_0)^n. \qquad (4.2)$$

Производные многочлена:

$$\begin{aligned} &P_n'(x) = a_1 + 2a_2(x - x_0) + 3a_3(x - x_0)^2 + \ldots + n \cdot a_n(x - x_0)^{n-1}, \\ &P_n''(x) = 2a_2 + 3 \cdot 2a_3(x - x_0) + \ldots + n(n-1)a_n(x - x_0)^{n-2}, \\ &\ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots, \\ &P_n^{(n)}(x) = n(n-1) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1 \cdot C_n. \end{aligned} \qquad (4.3)$$

Используя условия (4.1) и подставляя $x = x_0$ в (4 2), (4.3). получим:

$$P_n(x_0) = f(x_0) = a_0,$$

$$P_n'(x_0) = f'(x_0) = a_1,$$
$$P_n''(x_0) = f''(x_0) = 2 \cdot 1 a_2 = 2! a_2,$$
$$\dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots,$$
$$P_n^{(n)}(x_0) = f^{(n)}(x_0) = n(n-1)\cdot \dots \cdot 2 \cdot 1 \cdot a_n = n!\ a_n,$$

откуда ***тейлоровы коэффициенты*** равны:

$$a_0 = f(x_0),\ a_1 = \frac{f'(x_0)}{1!},\ a_2 = \frac{f''(x_0)}{2!},\ \dots,\ a_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}.$$

Подставляя значения a_i в (4.2), получим ***многочлен Тейлора*** функции $f(x)$ в точке $x = x_0$:

$$P_n(x, x_0) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n. \tag{4.4}$$

Разницу между функцией $f(x)$ и многочленом $P_n(x, x_0)$ назовем остаточным членом: $f(x) - P_n(x, x_0) = R_n(x, x_0)$.

Тогда $$f(x) = P_n(x, x_0) + R_n(x, x_0). \tag{4.5}$$

Если остаточный член $R_n(x, x_0)$ достаточно мал, то многочлен $P_n(x, x_0)$ достаточно близко приближает функцию $f(x)$.

Теорема (формула Тейлора). Пусть функция $f(x)$ $(n+1)$раз дифференцируема в точке $x = x_0$ и некоторой окрестности этой точки $|x - x_0| < \delta$. Тогда найдется такая точка $\xi \in (x_0, x)$, что функция $f(x)$ может быть представлена формулой Тейлора

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + R_n(x, x_0), \tag{4.5}$$

где остаточный член в форме Лагранжа имеет вид

$$R_n(x, x_0) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1} \quad \xi = x_0 + \theta(x - x_0),\ 0 < \theta < 1 \tag{4.6}$$

Доказательство этой теоремы читатель может найти практически в любом учебнике по дифференциальному исчислению.

Замечание 1. Остаточный член можно получить в форме Коши

$$R_n(x, x_0) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!}(x - x_0)(x - \xi)^n,$$

или в общей форме.

$$R_n(x,x_0)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!\,p}(x-x_0)^p(x-\xi)^{n-p+1}.$$

Замечание 2. При $n=1$ формула (4.5) с остаточным членом (4.6) переходит в формулу Лагранжа.

Если в формуле Тейлора взять $x_0=0$, то получается формула Маклорена

$$f(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!}x^{n+1} \quad (4.7)$$

4.2. Представление основных элементарных функций по формуле Маклорена

1⁰. $f(x)=e^x$.

Легко видеть, что $f^{(n)}(x)=e^x$, $f^{(n)}(0)=1$, $n=1,2,\ldots$.

Формула Маклорена (4.7)для функции e^x имеет вид

$$e^x=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}+\frac{e^{\theta x}}{(n+1)!}x^{n+1},\ 0<\theta<1,\ x\in R. \quad (4.8)$$

Можно показать, что остаточный член $|R_n(x)|=\frac{e^{\theta x}}{(n+1)!}|x|^{n+1}\le\frac{e^{|x|}|x|^{n+1}}{(n+1)!}\to 0$ при $n\to\infty$ для любого $x\in(-\infty;\infty)$ (см , например [1-7])

Таким образом, функцию $f(x)=e^x$ можно приближать многочленом $P_n(x)$ с любой степенью точности $\forall\ x\in R$.

2⁰. $f(x)=\sin x$.

Вычислим значения всех производных этой функции при $x=0$:

$f(x)=\sin x$, $f(0)=0$;

$f'(x)=\cos x=\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$, $f'(0)=1$;

$f''(x)=-\sin x=\sin\left(x+\frac{2\pi}{2}\right)$, $f''(0)=0$;

$f'''(x)=-\cos x=\sin\left(x+\frac{3\pi}{2}\right)$, $f'''(0)=-1$;

$f^{IV}(x)=\sin x$, $f^{IV}(0)=0$;

… … … … … … …;

$$f^{(n)}(x) = \sin\left(x + \frac{\pi n}{2}\right), \qquad f^{(n)}(0) = \sin\frac{\pi n}{2}.$$

Подставляя найденные значения производных в (4.7), получим формулу Маклорена для $f(x) = \sin x$. Так как $\left|\sin\left(x + \frac{\pi n}{2}\right)\right| \le 1 \quad \forall$ $x \in R$, $n \in N$, то остаточный член в формуле Маклорена будет стремиться к нулю для любого $x \in R$.

Формула Маклорена

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots + (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + R_n(x). \qquad (4.9)$$

$$|R_n(x)| = \left|\frac{\sin\left(\theta x + \frac{\pi(n+1)}{2}\right)}{(n+1)!} x^{n+1}\right| \le \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} \to 0,\ n \to \infty,\ x \in R,$$

$$n = 2k + 2.$$

3⁰. Аналогично можно получить формулу Маклорена для функции $f(x) = \cos x$:

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots + (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + R_n(x). \qquad (4.10)$$

$$|R_n(x)| = \left|\frac{\cos\left(\theta x + \frac{\pi(n+1)}{2}\right)}{(n+1)!} x^{n+1}\right| \le \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} \to 0,\ n \to \infty,\ x \in R.$$

$$n = 2k + 1.$$

Следующие формулы Маклорена запишем без всяких пояснений. Предлагаем читателю вывести их самостоятельно.

$$\mathbf{4^0}.\ \ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + \frac{(-1)^n x^{n+1}}{(n+1)(1+\theta x)^{n+1}}, \qquad (4.11)$$

$$0 < \theta < 1, \quad -1 < x \le 1.$$

5⁰. Биномиальная формула при любом $m \in R$:

$$(1+x)^m = 1 + \frac{m}{1!}x + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{n!}x^n + R_n(x), \quad (4.12)$$

$$R_n(x) = \frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)(m-n)}{(n+1)!}(1+\theta x)^{m-(n+1)}x^{n+1}, \ |x| < 1.$$

В частности, при $m = n$ получается формула бинома Ньютона

$$(1+x)^n = 1 + \frac{n}{1!}x + \frac{n(n-1)}{2!}x^2 + \ldots + x^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k x^k,$$

где C_n^k - биномиальные коэффициенты

$$C_n^k = \frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

4.3. *Применение формулы Тейлора (Маклорена) к приближенным вычислениям*

Пример 4.1. Вычислить $cos105^0$ с точностью $\varepsilon = 10^{-4}$.

Решение. Прежде всего, используя формулы приведения, сделаем угол от 0^0 до 45^0: $cos105^0 = cos(90^0 + 15^0) = -sin15^0$.

Угол 15^0 приведем в радианы. Учитывая точность $\varepsilon = 10^{-4}$ во всех промежуточных вычислениях, берем $1-2$ запасных знака ($5-6$ знаков после запятой):

$$\left.\begin{array}{l} 15^0 - x \text{ рад} \\ 180^0 - \pi \text{ рад} \end{array}\right| \rightarrow x = \frac{15\pi}{180} = \frac{\pi}{12}; \ \pi = 3{,}1415926 \Rightarrow x = 0{,}26179938,$$

т.е. $x \approx 0{,}2618$.

Используем формулу (4.2.2) для функции $\sin x$:

$$sin15^0 \approx sin0{,}2618 = 0{,}2618 - \frac{0{,}2618^3}{3!} + \frac{0{,}2618^5}{5!} - \ldots =$$

$$= 0{,}2618 - 0{,}0029906 + 0{,}0000103 - \ldots.$$

При $k = 2$, $n = 5$ остаточный член $|R_5(x)| < 0{,}0000103 < \varepsilon$, т.е

$$sin15^0 \approx 0{,}2618 - \frac{0{,}2618^3}{3!} \approx 0{,}25882.$$

Итак, $cos105^0 = -sin15^0 \approx -0{,}25882$ с точностью $\varepsilon = 10^{-4}$.

Ответ: $cos105^0 \approx -0{,}25882$

Пример 4.2. Вычислить $\sqrt{e}$ с точностью $\varepsilon = 10^{-3}$.

Решение. Для вычислений воспользуемся формулой Маклорена для функции e^x:

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \frac{e^{\theta x}}{(n+1)!}x^{n+1} \text{ при } x = \frac{1}{2} \left(\sqrt{e} = e^{1/2}\right),\ 0 < \theta < 1.$$

Остаточный член $R_n\left(\frac{1}{2}\right) < \frac{e^{1/2}}{(n+1)!}\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} < \frac{1}{(n+1)!\,2^n}$.

Предлагаем читателю убедиться, что при $n = 3$, $x = \frac{1}{2}$ $R_n(x) > 10^{-3}$,

при $n = 4$ – $R_n(x) < 10^{-3}$.

Таким образом, с точностью $\varepsilon = 10^{-3}$

$$\sqrt{e} \approx 1 + \frac{1}{1!}\cdot\frac{1}{2} + \frac{1}{2!}\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{3!}\left(\frac{1}{2}\right)^3 + \frac{1}{4!}\left(\frac{1}{2}\right)^4.$$

Ответ: $\sqrt{e} \approx 1{,}648$.

Пример 4.3. Вычислить $\sqrt{30}$ с точностью $\varepsilon = 10^{-3}$.

Решение. Для вычислений мы можем воспользоваться биномиальной формулой $(1+x)^m$ (4.12) при $m = \frac{1}{2}$.

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{2^2\cdot 2!}x^2 + \frac{1\cdot 3}{2^3\cdot 3!}x^3 - \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2^4\cdot 4!}x^4 + \ldots +$$

$$+ \frac{(-1)^{n-1}1\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(2n-3)}{2^n\cdot n!}x^n + R_n(x), \quad |x| < 1.$$

Представим $\sqrt{30}$ следующим образом.

$$\sqrt{30} = \sqrt{25+5} = \sqrt{25(1+0{,}2)} \Rightarrow \sqrt{30} = \sqrt{25(1+0{,}2)}.$$

Подставляя в формулу $x = 0{,}2$, получим

$$\sqrt{30} = 5\left(1 + \frac{0{,}2}{2} - \frac{0{,}2^2}{2^2\cdot 2!} + \frac{1\cdot 3\cdot 0{,}^3}{2^3\cdot 3!} - \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 0{,}2^4}{2^4\cdot 4!} + \ldots + R_n(x)\right).$$

Остаточный член при $x = 0{,}2 > 0$ (ср. 4.12)

$$R_n(x) = \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(2n-1)}{2^{n+1}(n+1)!}x^{n+1}.$$

$$\sqrt{30} = 5(1 + 0{,}1 - 0{,}005 + 0{,}0005 - 0{,}0000625 + \ldots + R_n(x)).$$

$$5\cdot R_3(0{,}2) = 0{,}0025 > \varepsilon = 10^{-3}, \quad 5\cdot R_4(0{,}2) = 0{,}0003125 < \varepsilon.$$

Таким образом, для достижения заданной точности при вычислениях берем сумму первых четырех слагаемых:

$$\sqrt{30} \approx 5 \cdot 1{,}0955 = 5{,}4775.$$

Ответ: $\sqrt{30} \approx 5{,}4775$.

Заметим, что с увеличением n и уменьшением x формула Маклорена дает более точное приближение значения функции.

В заключение заметим, что формула Тейлора – одна из наиболее используемых как в математическом анализе, так и в его приложениях, например, к исследованию функций; в пределах при раскрытии неопределенностей можно воспользоваться разложением функций по формуле Тейлора.

5.Применение дифференцированного исчисления к исследованию функций

5.1. Полное исследование функции и построение графиков по характерным точкам

Схема исследования функции:

1. Область определения функции.
2. Область изменения функции.
3. Четность и нечетность функции.
4. Периодичность функции.
5. Нули функции. Точки пересечения графика с осями координат. Интервалы знакопостоянства
6. Непрерывность. Разрывы.
7. Поведение функции вблизи граничных и особых точек, не входящих в область определения.
8. Асимптоты.
9. Ограниченность - неограниченность функции.
10. Монотонность функции. Локальные экстремумы. Участки возрастания - убывания.
11. Выпуклость - вогнутость. Точки перегиба.
12. Построение графика функции по характерным точкам в соответствии с исследованием

Замечание. Вывод об области изменения функции часто затруднительно сделать в начале исследования. Этот пункт можно перенести в конец исследования

Напомним основные понятия, необходимые для проведения исследования функции

5.1.1. Область определения и область изменения функции

Каким бы способом ни была задана функция $y = f(x)$, рассматривая ее, мы всегда имеем дело с двумя множествами: множеством допустимых значений x и множеством значений y. Множество всех тех действительных значений, которые принимает аргумент x функции $y = f(x)$, называется ***областью определения*** этой функции. Множество возможных значений $y = f(x)$ – область изменения функции.

Например, область определения функции $y = \sqrt{x-1}$ будет множество значений x, определяемых из неравенства $x - 1 \geq 0$, т.е. $x \geq 1$, а это есть полуинтервал $[1, \infty)$. Область значений функции: $y \geq 0$ или $y \in [0, \infty)$.

Функция $y=\sqrt{x}+\sqrt{1-x}$ определена при $x \geq 0,\ 1-x \geq 0;$ имеем $x \in (-\infty;1] \cap [0;\infty)$, т.е. функция определена на отрезке $[0;1]$.

Функция $y=\arcsin(x-5)$ определена при $|x-5| \leq 1$ или $-1 \leq x-5 \leq 1$. ОДЗ: $4 \leq x \leq 6$. Область значений $-\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2}$.

Функция $y=lg(x^2-4)$ определена при $x^2-4>0$.

ОДЗ: $x \in (-\infty;-2) \cup (2;\infty)$, иначе $x<-2,\ x>2$ или $|x|>2$.

Область значений $y \in R$.

5.1.2. *Характеристика поведения функции*

1) Четные и нечетные функции

Функция $y=f(x)$ называется четной на $(-a;a)$ (ОДЗ симметрична относительно начала координат), если для любого значения аргумента из области определения этой функции $f(-x)=f(x)$, т.е. если при изменении знака аргумента функция своего значения не меняет.

Этим свойством обладают, например, функции $y=x^2$, $y=|x|$, $y=3$, $y=cos3x$ и др.

График четной функции симметричен относительно оси Oy (рис. 5.1).

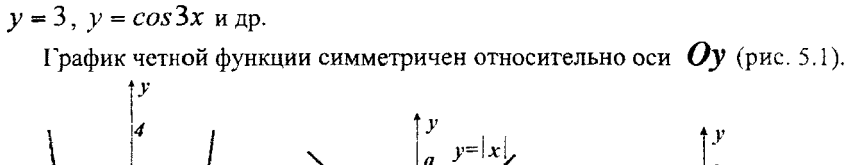


Рис. 5.1

Функция $y=f(x)$ называется ***нечетной*** на $(-a;a)$, если при изменении знака аргумента функция изменяет знак на противоположный, т.е. $f(-x)=-f(x)$.

Свойством нечетности обладают функции $y=x$, $y=x^3$, $y=\frac{x}{x^2+1}$, $y=\sin x$ и др. График нечетной функции симметричен относительно начала координат (рис. 5.2).

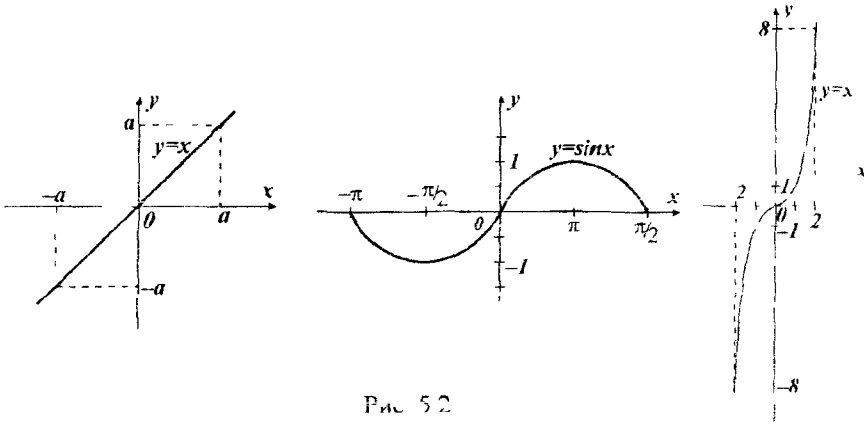


Рис. 5.2

Существуют функции, не являющиеся ни четными, ни нечетными, графики таких функций не обладают симметрией относительно оссй и начала координат. В этом случае говорят: функция общего вида.

Для того чтобы исследовать функцию на четность или нечетность, нужно в выражении функции $f(x)$ заменить x на $-x$ и проверить условия четности $f(-x)=f(x)$ и нечетности $f(-x)=-f(x)$; сделать соответствующие выводы.

Например, исследуем на нечетность функцию $y=5x^2+3x+7$:

$$f(-x)=5(-x)^2+3(-\ )+7=5x^2-3x+7,\ f(x)=5x^2+3x+7.$$

Очевидно, что $f(-x)\neq f(x), f(-x)\neq -f(x)$, т.е функция $y=5x^2+3x+7$ – функция общего вида.

2) Периодические и непериодические функции

Функция $y=f(x)$ называется ***периодической***, если существует такое число $T>0$, что при всех значениях x из области ее определения $\forall\, x\in D \Rightarrow f(x+T)=f(x)$.

Например, функция «дробная часть числа» – функция $f(x)=\{x\}=x-[x]$, где $[x]$ – целая часть числа x, есть периодическая функция с периодом $T=1$. Действительно,

$$f(x+1)=x+1-[x+1]=x+1-([x]+1)=x-[x]=f(x).$$

Периодическими функциями являются все элементарные тригонометрические функции.

График каждой периодической функции состоит из повторяющихся конгруэнтных или подобных линий, изолированных друг от друга или соединенных в одну общую линию.

Например, график функции $f(x)=x-[x]$ представлен на рис. 5.3

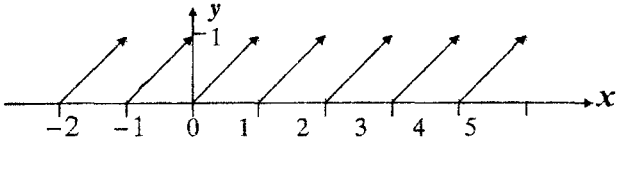


Рис 5.3

Наиболее показательны другие периодические функции – тригонометрические.

Например, функция $y = 1{,}75\sin 2x$ периодическая с периодом

$$T = \pi \quad (\sin 2(x+\pi) = \sin(2x + 2\pi) = \sin 2x).$$

Функция $y = tg\dfrac{x}{3}$ периодическая с периодом $T = 3\pi$:

$$tg\frac{x+3\pi}{3} = tg\left(\frac{x}{3} + \pi\right) = tg\frac{x}{3}.$$

3) Нули функции

Значения аргумента, при которых функция обращается в нуль, называются нулями функции.

С геометрической точки зрения нули функции – точки пересечения графика функции с осью ***Ox*** или точки, где график касается оси ***Ox***. Чтобы найти нули функции, нужно функцию положить равной нулю и решить полученное уравнение $f(x) = 0$.

Например, нулем функции $y = \dfrac{x}{x^2 + 8}$ будет $x = 0$.

4) Точки пересечения графика функции с осями координат. Участки знакопостоянства функции

Для нахождения точек пересечения с осями полагаем одну из координат равной нулю

$Oy:\ x = 0 \Rightarrow y = \ldots;$

$Ox:\ y = 0 \Rightarrow x = \ldots .$

Участки знакопостоянства функции определяем, решая неравенства $y<0$, $y>0$.

5) Ограниченные и неограниченные функции

Функция $f(x)$ называется ***ограниченной сверху*** в области своего определения D, если существует такое число M, что для всех значений $\forall\ x \in D$ выполняется неравенство $f(x) \le M$, и ***ограниченной снизу***, если существует такое число m, что для всех значений аргумента

$\forall x \in D \Rightarrow f(x) \geq m$. Функция $f(x)$, ***ограниченная*** в области своего определения ***снизу и сверху,*** называется ***ограниченной*** Условие ограниченности записывается так $m \leq f(x) \leq M$ или $|f(x)| \leq M$.

Например, функция $y = x^2$ ограничена снизу, т к в области определения $x^2 \geq 0$. Функция $y = \dfrac{1}{x^2+1}$ ограничена снизу и сверху, т к $\forall x \in R$

$$0 < \frac{1}{x^2+1} \leq 1.$$

Функция $f(x)$ называется ***неограниченной сверху (снизу)***, если для любого сколь угодно большого $M > 0$ существует значение x из области определения, что $f(x) > M$ $(f(x) < -M)$ или, иначе, $|f(x)| > M$.

б)Асимптоты

Для функции $y = f(x)$ в области D рассмотрим функцию $F(x) = x^2 + f^2(x)$. Будем говорить, что график Γ_f функции $y = f(x)$ имеет ветвь, уходящую в бесконечность, если функция $F(x)$ неограничена в области D. Это может быть за счет x или $f(x)$ (рис 5.4 - 5.6)

Асимптота – это прямая, к которой приближается ветвь графика функции, уходящая в бесконечность

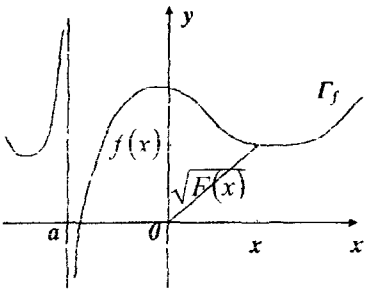
1^0. Вертикальная асимптота $x = a$: $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \infty$, в точке $x = a$ функция терпит бесконечный разрыв 2 рода

2^0. Горизонтальная асимптота $y = b$: $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = b$

3^0. Наклонная асимптота $y = kx + b$ может существовать, если $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \infty$:

$$k = \lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x}, \quad b = \lim_{x \to \infty} (f(x) - kx)$$

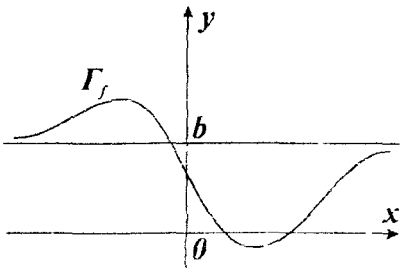
$$\left(\forall \varepsilon > 0 \; \exists M = M_\varepsilon > 0 : |x| > M \Rightarrow |f(x) - kx - b| < \varepsilon\right).$$



$\lim\limits_{x \to a} f(x) = \infty,$

$x = a$ – вертикальная асимптота

Рис. 5.4



$\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = b,$

$y = b$ – горизонтальная асимптота

Рис. 5.5

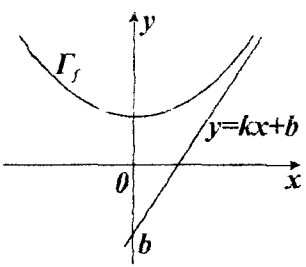


Рис 5.6

$\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \infty$

В этом случае может существовать наклонная асимптота $y = kx + b$,

$$k = \lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x},$$

$$b = \lim_{x \to \infty} [f(x) - kx].$$

7) *Непрерывность функции. Односторонняя непрерывность. Классификация разрывов*

Определение. Функция $y = f(x)$ непрерывна при $x = a$, если

1) $f(x)$ определена при $x = a$, т е существует $\exists f(a)$,

2) существует $\exists$ конечный $\lim\limits_{x \to a} f(x)$,

3) $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$

Функция $y = f(x)$ непрерывна тогда и только тогда, когда $f(a) = f(a - 0) = f(a + 0)$.

Если ***нарушено*** хотя бы одно условие определения непрерывности, то функция имеет ***разрыв*** при $x = a$

При $x = a$ функция $y = f(x)$ имеет разрыв ***устранимый***, если $\exists$ конечный $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ $[f(a - 0) = f(a + 0)]$, иначе – ***неустранимый***

При $x = a$ функция $y = f(x)$ имеет разрыв ***первого рода***, если существуют ***конечные левый и правый пределы*** $f(a-0)$, $f(a+0)$. Это разрыв в виде скачка $\delta = f(a+0) - f(a-0)$. Если хотя бы один из пределов ***не существует или бесконечный***, то при $x = a$ функция имеет ***разрыв второго рода***. Если $x = a$ - точка бесконечного разрыва, то прямая $x = a$ ***вертикальная асимптота*** графика (см. рис. 5.4).

Функция ***непрерывна на множестве***, если непрерывна в каждой точке этого множества.

Функция ***непрерывна слева***, если $f(a-0) = f(a)$, ***справа***, если $f(a+0) = f(a)$.

Элементарные функции непрерывны там, где определены.

Примеры.

1. Исследовать функцию $y = \dfrac{1}{x-2}$ на непрерывность.

ОДЗ: $x \neq 2$.

Функция непрерывна везде, кроме $x = 2$. При $x = 2$ функция неопределена, значит имеет разрыв.

$$y(2-0) = \lim_{x\to 2-0} \frac{1}{x-2} = \left[\frac{1}{-0}\right] = -\infty, \quad y(2+0) = \lim_{x\to 2+0} \frac{1}{x-2} = \left[\frac{1}{+0}\right] = +\infty.$$

Левый и правый пределы функции в точке $x = 2$ бесконечны, т.е. при $x = 2$ функция имеет разрыв второго рода, бесконечный, неустранимый, прямая $x = 2$ - вертикальная асимптота.

$\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{1}{x-2} = 0$, прямая $y = 0$ - горизонтальная асимптота. График функции изображен на рис. 5.7. Заметим, что график симметричен относительно точки $(2,0)$.

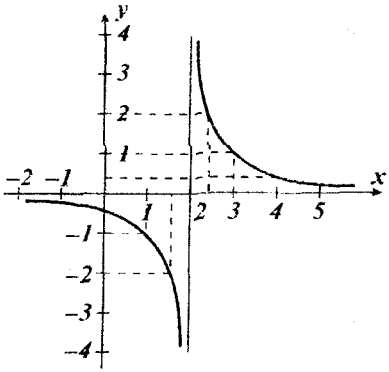


Рис. 5.7

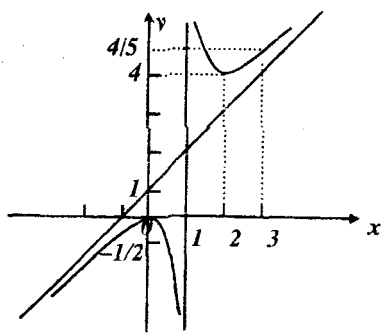


Рис. 5.8

2. $y = \dfrac{1}{x^2}$.

$x = 0$ – вертикальная асимптота, $y = 0$ – горизонтальная асимптота.

3. $y = \dfrac{x^2}{x-1} = x + 1 + \dfrac{1}{x-1}$.

$x = 1$ – вертикальная асимптота, $y = x + 1$ – наклонная асимптота.

График функции см. рис. 5.8.

Заметим, что иногда важно отмечать при нахождении асимптот $x \to +\infty$ *или* $x \to -\infty$.

Например, для $y = e^x$ $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$, $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$,

т.е. при $x \to -\infty$ график функции $y = e^x$ имеет горизонтальную асимптоту $y = 0$; при $x \to +\infty$ наклонных асимптот нет, так как

$$\lim_{x \to \infty} \frac{e^x}{x} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = +\infty.$$

5.2. Условия возрастания и убывания функции. Точки экстремума. Наименьшее и наибольшее значения функции на отрезке

5.2.1. Возрастание и убывание функции

Пусть функция $y = f(x)$ определена в интервале (a,b). Если для любой пары значений аргумента x_1 и x_2, принадлежащих интервалу (a,b), из неравенства $x_1 < x_2$ следует неравенство $f(x_1) < f(x_2)$, т.е. большему значению аргумента соответствует большее значение функции, то функция $y = f(x)$ называется ***возрастающей*** на данном интервале $\left(y = f|x| \uparrow (a,b) \Leftrightarrow \forall x_1, x_2 \in (a,b): x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)\right)$.

Если же из неравенства $x_1 < x_2$ следует неравенство $f(x_1) > f(x_2)$, т.е. большему значению аргумента соответствует меньшее значение функции. то функция называется ***убывающей*** на данном интервале

$(y = f(x) \downarrow (a,b) \Leftrightarrow \forall\, x_1, x_2 \in (a,b): x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2))$.

Возрастающие или убывающие функции называются ***монотонными***. Функция может быть монотонной на области определения (***например***, функция $y = x$ всюду возрастает), а может быть немонотонной в области определения, но монотонной в отдельных непересекающихся интервалах, т.е. кусочно-монотонной. ***Например***, функция $y = x^2$ убывает в интервале $(-\infty;0)$ и возрастает в интервале $(0;\infty)$ (рис. 5.1). Такие интервалы на-

зываются интервалами монотонности функции. На графике возрастающая функция изобразится линией, поднимающейся слева направо вверх, убывающая – слева направо вниз.

В общем случае исследование функции на возрастание и убывание связано с исследованием знака производной. В частных случаях интервалы монотонности можно указать, исходя из вида функции

Например, функция $y = 1/x^2$ определена в области $(-\infty;0)\cup(0;\infty)$. При $x \to \pm\infty \Rightarrow y \to 0$, при $x \to 0 \Rightarrow y \to +\infty$, следовательно, в интервале $(-\infty;0)$ функция возрастает от 0 до ∞, в интервале $(0;\infty)$ – убывает от ∞ до 0.

Условия монотонности функций: если на некотором интервале ***производная*** функции ***положительна***, то функция на нем ***возрастает*** $(y'>0 \Rightarrow y = f(x)\uparrow)$, если же ***отрицательна***, то ***убывает*** $(y'<0 \Rightarrow y = f(x)\downarrow)$ (см. лемму п.3, стр 32).

5.2.2. Максимум и минимум функции. Необходимые условия существования экстремума

Различают глобальные максимум и минимум и локальные максимум и минимум.

Глобальными (абсолютными) максимумом и минимумом функции на отрезке называют ее ***наибольшее и наименьшее значения*** на этом отрезке

Функция $y = f(x)$ имеет ***локальный максимум или минимум*** в точке $x = c$, если в области ее определения можно указать такой интервал, для которого c является внутренней точкой и для всех отличных от c точек x $(x \neq c)$ этого интервала $f(x) < f(c)$ или $f(x) > f(c)$ соответственно. Термины «максимум» и «минимум» объединяют в один термин ***«экстремум»***. Экстремумы функции определяются с помощью производной функции, без производных экстремумы можно легко определить только в частных случаях.

Например, функция $y = x^2 + 2x + 7$, определенная на всей оси Ox, может быть преобразована к виду $y = (x+1)^2 + 6$. При $x = -1 \Rightarrow x + 1 = 0$, $y = 6$; $6 \le y$, т.е. меньше всех соседних значений функции слева и справа от $x = -1$. Следовательно, $y = 6$ – минимальное значение функции в области ее определения.

Необходимое условие существования экстремума: производная $y' = f'(x) = 0$ или не существует. Точки, принадлежащие ОДЗ функции, в которых выполняется это условие, называются ***критическими***. В них и только в них функция может иметь экстремум.

Условие $y' = 0$ следует из теоремы Ферма (п. 3). Если же y' не существует в некоторой точке области определения функции, то в этой точке может быть экстремум. Например, в точке $x = 0$ функция $y = |x|$ имеет минимум, но $y'(0)$ не существует (см. п.1.5, рис. 5.1).

Указанные условия не являются достаточными условиями существования экстремума. Например, для функции $y = x^3$ производная $y' = 3x^2$, $y' = 0$ при $x = 0$ – критическая точка. Но в этой точке функция экстремума не имеет (рис. 5.2). В такой точке может быть перегиб (см. пункт 5.3).

5.2.3. Достаточные условия существования экстремума

1⁰. Производная $y' = f'(x)$ меняет знак при переходе через критическую точку, а именно, максимум (max), если с + на –; минимум (min), если с – на +.

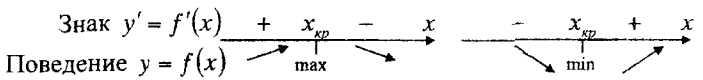


График функции в окрестности точек экстремума в зависимости от значения производной

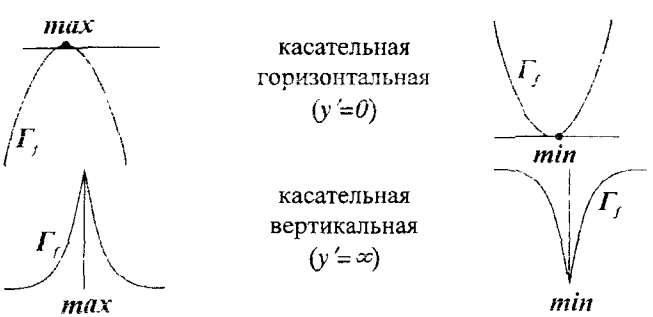


Рис. 5.9

2⁰. Если вторая производная $y'' = f''(x)$ в критической точке больше нуля: $f''(x_{кр}) > 0$, то в критической точке функция имеет минимум, если $f''(x_{кр}) < 0$, то в критической точке функция имеет максимум.

Это условие можно получить из формулы Тейлора для функции $y = f(x)$:

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \frac{f'''(\xi)}{3!}(x - x_0)^3$$

где $x_0 = x_{кр}$ – критическая точка, $f'(x_0) = 0$. Тогда

$$f(x) - f(x_0) = \frac{(x - x_0)^2}{2}\left(f''(x_0) + \frac{f'''(\xi)}{3}(x - x_0)\right),$$

т.е. в окрестности точки $x = x_0$ знак $\Delta y = f(x) - f(x_0)$ определяется знаком $f''(x_0)$:

$$f''(x_0) > 0 \Leftrightarrow \Delta y > 0,\ f(x) > f(x_0),$$
$$f''(x_0) < 0 \Leftrightarrow \Delta y < 0.\ f(x) < f(x_0).$$

что определяет в точке x_0 минимум и максимум соответственно

Обобщение правила 2^0. Пусть в точке $x_{кр}$

$$y'(x_{кр}) = y''(x_{кр}) = \ldots = y^{(n-1)}(x_{кр}) = 0,\ y^{(n)}(x_{кр}) \neq 0.$$

Тогда при нечетном n экстремума нет, а при четном $n=2k$ экстремум есть, а именно, $y^{(2k)}(x_{кр}) > 0 - min$, $y^{(2k)}(x_{кр}) < 0 - max$.

5.2.4. Наибольшее и наименьшее значения функции на отрезке $[a;b]$

Для нахождения наибольшего и наименьшего значений функции на отрезке $[a;b]$ нужно определить все критические точки в $(a;b)$, значения функции в этих точках и в концах отрезка $f(a)$, $f(b)$, и среди них выбрать наибольшее и наименьшее значения.

5.3. Выпуклость-вогнутость графика функции. Точки перегиба

График Γ_f функции $y = f(x)$ ***выпуклый вниз (вогнутый)*** в некоторой окрестности точки $M_0(x_0, y_0 = f(x_0))$, если в этой окрестности он расположен над касательной к графику функции в точке M_0; ***выпуклый вверх (выпуклый)***, если расположен под касательной. Точки графика, в которых меняется направление выпуклости-вогнутости, называются ***точками перегиба***.

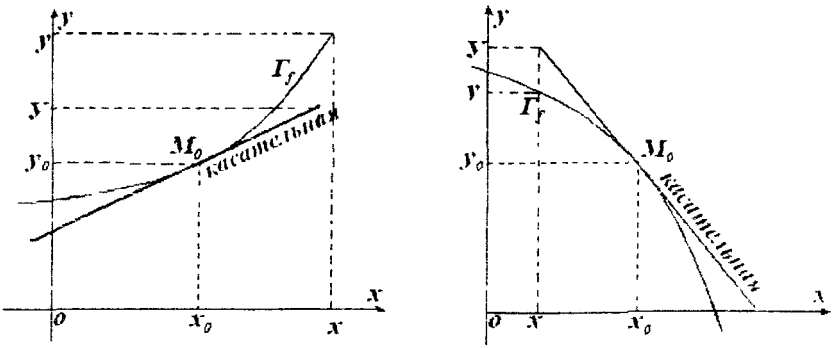


Рис. 5 10

Для определения выпуклости-вогнутости графика функции $y = f(x)$ в окрестности точки $M_0(x_0, y_0)$ запишем представление функции формулой Тейлора и уравнение касательной:

$$y = f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \frac{f'''(\xi)}{3!}(x - x_0)^3$$

$$Y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

$$y - Y = \frac{(x - x_0)^2}{2}\left(f''(x_0) + \frac{f'''(\xi)}{3}(x - x_0)\right).$$

Таким образом, в достаточно малой окрестности точки M_0 направление выпуклости-вогнутости определяется знаком второй производной $f''(x_0)$, т.к. $f'''(\xi)(x - x_0) \to 0, x \to x_0$.

Итак, график функции в окрестности точки M_0 выпуклый вниз, если $y - Y > 0$, что равносильно условию $f''(x_0) > 0$; выпуклый вверх, если $y - Y < 0$, что равносильно условию $f''(x_0) < 0$.

Необходимое условие существования точки перегиба: вторая производная $y'' = f''(x) = 0$ или не существует. Из этого условия находим ***стационарные точки***, принадлежащие ОДЗ функции, подозрительные на перегиб

Достаточное условие существования точки перегиба: вторая производная $y'' = f''(x)$ меняет знак при переходе через стационарную точку.

Знак $y'' = f''(x)$ $\quad + \; x_c \; - \qquad - \; x_c \; + \qquad - \; x_c \; - \qquad + \; x_c \; + \qquad x$

перегиб $\qquad$ перегиб $\qquad$ нет перегиба

Поведение $y = f(x)$

Пример 5.1. Функция $y = x^3 - 3x$ задана на [-3,2]. Найти участки монотонности функции, ее наименьшее и наибольшее значения.

Решение. Суть задачи изложена в п. 5.2.

$$y' = 3x^2 - 3.$$

Определим критические точки из условия

$$y' = 0 \Rightarrow 3x^2 - 3 = 0 \Rightarrow x_{кр} = \pm 1.$$

3. Составим таблицу.

x	$[-3,\ 1)$	-1	$(-1,1)$	1	$(1,2]$
знак y'	+	0	−	0	+
поведение y	↑	2	↓	−2	↑
вывод		Max		Min	

4. $y_{max}(-1) = 2,\quad y_{min}(1) = -2,\quad y(-3) = -18,\quad y(2) = 2.$

Ответ: функция монотонно возрастает на [-3,1), (1,2] и убывает на (-1,1), $y_{наим} = -18,\quad y_{наиб} = 2.$

Пример 5.2. Исследовать функцию $y = \frac{x^3}{3} - 2x^2 + 3x$ и построить ее график.

Исследование проводим согласно схеме п. 5.1.

1. Область определения $x \in (-\infty;\infty).$

2. Функция непериодическая, непрерывная.

3. $y(-x) = \frac{(-x)^3}{3} - 2(-x)^2 + 3(-x) = \frac{-x^3}{3} - 2x^2 - 3x,$

$y(-x) \neq y(x),\quad y(-x) \neq -y(x)$, т.е. функция не является ни четной ни нечетной, функция общего вида. Нет симметрии графика ни относительно оси Oy, ни относительно начала координат.

4 Точки пересечения с осями координат.

$$y = \frac{(x^2 - 6x + 9)x}{3} = \frac{(x-3)^2 x}{3}.$$

$$x = 0 \Rightarrow y = 0;\quad y = 0 \Rightarrow x = 0,\quad x = 3 \Rightarrow (0.0),(3.0).$$

$$y < 0 \text{ при } x < 0,\quad y > 0 \text{ при } x > 0$$

5. Исследование с помощью первой производной.

$$y' = x^2 - 4x + 3;\quad y' = 0 \Rightarrow x^2 - 4x + 3 = 0.$$

$x_1 + x_2 = 4,\quad x_1\ x_2 = 3 \Rightarrow x_1 = 1,\ x_2 = 3$ − критические точки, подозрительные на экстремум (при решении квадратного уравнения использована теорема Виета) $y(1) = \frac{1^3}{3} + 3\ 1 - 2\cdot 1 = \frac{4}{3},\quad y(3) = 0.$

Касательные к графику функции в точках $\left(1,\frac{4}{3}\right),(3,0)$ горизонтальны Участки монотонности и исследование критических точек на экстремум приведены в таблице.

x	$(-\infty,-1)$	1	$(1,3)$	3	$(3,\infty)$
знак y'	+	0	–	0	+
поведение y	↑	4/3	↓	0	↑
вывод		Max		Min	

6 Исследование функции по второй производной.

$$y'' = \left(x^2 - 4x + 3\right)' = 2x - 4.$$

Необходимое условие точки перегиба: $y'' = 0 \Rightarrow x = 2.$

$$y(2) = \frac{2^3}{3} - 2\cdot 2^2 + 3\cdot 2 = \frac{2}{3}.$$

Проверяем достаточное условие точки перегиба

$$y'' = 0$$

Знак y'' — | + x

Поведение y ⌒ 2 ⌒

$$y(2) = 2/3$$

Вторая производная при переходе через стационарную точку $x = 2$ меняет знак, значит при $x = 2$ график функции имеет перегиб $y_{пер}(2) = \frac{2}{3}$. Заметим, что угловой коэффициент касательной в точке перегиба $y'(2) = -1$.

7. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^3}{3} - 2x^2 + 3x\right) = \infty.$

Могут быть наклонные асимптоты

$$y = kx + b,\ k = \lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x},\quad b = \lim_{x\to\infty}\left[f(x) - kx\right].$$

$k = \lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{3}(x-3)^2\cdot\frac{x}{x} = \infty \Rightarrow$ наклонных асимптот нет

Область значений функции $y \in (-\infty,\infty).$

Для уточнения графика можно взять несколько дополнительных точек: $x=-1,\ y=-5\frac{1}{3};\ x=2,\ y=\frac{2}{3};\ x=4,\ y=\frac{4}{3}$.

8. По результатам проведенного исследования строим график (рис 5.11).

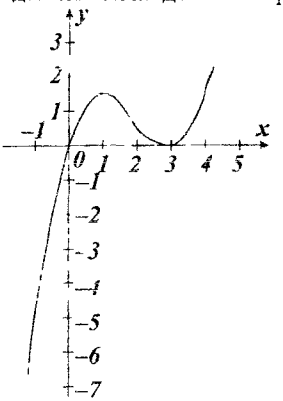


Рис. 5.11

Пример 5.3. Исследовать методами дифференциального исчисления функцию $y=\dfrac{x^3}{3(x-1)^2}$ и, используя результаты исследования, построить его график

Решение. 1) ОДЗ: $x\neq 1$

2) Функция общего вида, т.к

$$y(-x)=\frac{(-x)^3}{3(-x-1)^2}=\frac{-x^3}{3(x+1)^2}\neq\begin{cases}y(x),\\ -y(x).\end{cases}$$

3) Функция непериодическая, т.к $y(x+T)=y(x)$ только при $T=0$.

4) Определим точки пересечения функции с осями координат:

Oy: $x=0\Rightarrow y=0;$ **Ox:** $y=0\Rightarrow x=0\Rightarrow$ **O (0,0).**

5) Функция непрерывна, кроме $x=1$, где терпит разрыв

$$y(1\mp 0)=\lim_{x\to 1\mp 0}\frac{x^3}{3(x-1)^2}=\left[\frac{1}{0}\right]=\infty.$$

Следовательно, в данной точке функция терпит разрыв второго рода.

Прямая линия $x=1$ является вертикальной асимптотой графика функции.

6)Рассмотрим поведение функции на бесконечности (в граничных точках ОДЗ):

$$\lim_{x\to\infty} y(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{x^3}{3(x-1)^2} = \left[\frac{1}{0}\right] = \infty,$$

следовательно, могут быть наклонные асимптоты.

Уравнение наклонной асимптоты

$$y = kx + b.$$

Вычислим $k = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{x}$, $b = \lim\limits_{x\to\infty} [f(x) - kx]$:

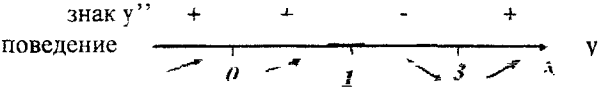
$$k = \lim_{x\to\infty} \frac{x^3}{3(x-1)^2 x} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \frac{1}{3}; \quad b = \lim_{x\to\infty}\left[\frac{x^3}{3(x-1)^2} - \frac{1}{3}x\right] = \frac{2}{3}.$$

Прямая $y = \dfrac{x+2}{3}$ является наклонной асимптотой графика исследуемой функции

7) $y \in R$, функция неограниченная.

8) Дальнейшее исследование функции проведем, используя ее первую производную.

$y' = \dfrac{x^3 - 3x^2}{3(x-1)^3} = \dfrac{x^2(x-3)}{3(x-1)^3}$, $y' = 0 \Rightarrow x = 0,\ x = 3$ - критические точки; x=1 не является критической точкой



Функция $y(x)$ возрастает в интервалах $(-\infty, 1)$, $(3, +\infty)$, $y(x)$ убывает в интервале $(1,3)$, $y_{min} = y(3) = \dfrac{9}{4}$.

В точке $x = 0$ экстремума нет.

9) Проведем исследование с использованием второй производной функции

$y'' = \dfrac{2x}{(x-1)^4}$, $y'' = 0 \Rightarrow x = 0$, $y(0) = 0$ – стационарная точка.

При $x < 0, y'' < 0$; $x > 0,\ x \neq 1$ $y'' > 0$. Поэтому точка (0,0) является точкой перегиба графика функции, причем график функции при $x < 0$ – *выпуклый вверх*, $x > 0$ – *выпуклый вниз*.

10) Осталось построить график функции по полученным данным.

Для более точного построения можно дополнительно определить ряд точек графика функции.

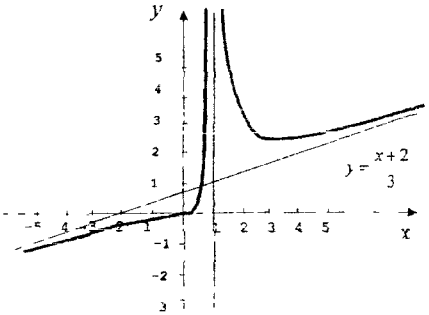


Рис. 5.12. Схематический график функции $y = \frac{x^2}{3(x-1)^2}$.

Пример 5.4. $y = e^{-x^2/2}$.

1)Исследование поведения функции без производных

ОДЗ: $x \in R$.

Функция непериодическая, непрерывная, четная $y(-x) = y(x)$ График функции симметричен относительно оси Oy

$x = 0 \Rightarrow y = 1; \quad y > 0 \ \ \forall x \in R.$

$\lim\limits_{x\to\infty} e^{-x^2/2} = 0 \quad \Rightarrow y = 0$ - горизонтальная асимптота.

2). Исследование средствами дифференциального исчисления.

$1^0.\ y' = -xe^{-x^2/2} \qquad y' = 0 \Rightarrow x = 0$ - критическая точка

Знак y' + - x

Поведение y ↗ ↘

При $x = 0$ функция имеет максимум: $y_{max} = y(0) = 1$, возрастает при

$x < 0$, убывает при $x > 0$.

$2^0.\ y'' = (x^2 - 1)e^{-x^2/2}.$

$y'' = 0 \Rightarrow x = \pm 1, \quad y(\pm 1) = e^{-1/2} \approx 0.607.$

Знак y'' + - + x

Поведение y -1 1

перегиб перегиб

$y = y(\pm 1) = e^{-1/2}$

График функции $y = e^{-x^2/2}$.

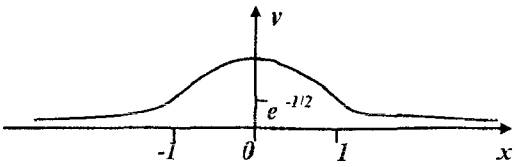


Рис. 5.13

5.4. Задачи на экстремум с геометрическим содержанием

Задача 5.5. Вдоль каменной стены надо отгородить забором прямоугольный участок наибольшей площади. Каковы должны быть размеры такого участка, если длина забора предполагается равной 200 метров?

Решение. Обозначим длину стороны забора, которая перпендикулярна стене, через x. Тогда длина стороны забора, параллельной стене, $200-2x$ (рис. 5.14).

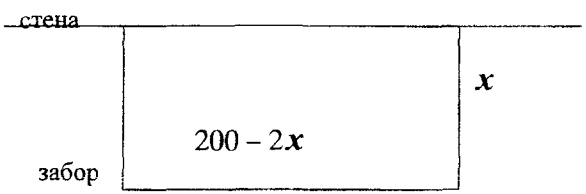
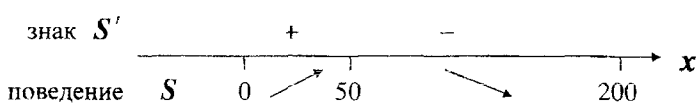


Рис. 5.14

Площадь участка $S=(200-2x)\cdot x=200x-2x^2$

Эту функцию нужно исследовать на экстремум.

$S'=200-4x$, $S'=0 \Rightarrow x=50$ – критическая точка.



$$S_{max}=(200-2\cdot 50)\cdot 50=5000\,(\text{м}^2).$$

Ответ: размеры участка 50x100 м, $S=5000$ (м^2).

Задача 5.6. Консервная банка цилиндрической формы с дном и крышкой должна вмещать V см^3. Каковы должны быть размеры банки, чтобы на ее изготовление пошло наименьшее количество материала ?

Решение. На изготовление банки пойдет наименьшее количество материала, если полная поверхность цилиндра будет наименьшей.

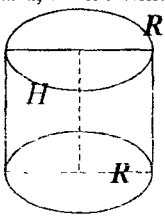


Рис. 5.15

$$S_n = 2\pi RH + 2\pi R^2 \to min\,.$$

Обозначим радиус основания цилиндра R через x.

Выразим высоту H через данный объем цилиндра V и радиус x.

$$V = \pi R^2 H, \quad V = \pi x^2 H \Rightarrow H = \frac{V}{\pi x^2}.$$

Полная поверхность цилиндра определяется функцией

$$S_n = 2\pi x \cdot \frac{V}{\pi x^2} + 2\pi x^2 \Rightarrow S = \frac{2V}{x} + 2\pi x^2.$$

Исследуем эту функцию на экстремум.

$$S' = \frac{-2V}{x^2} + 4\pi x, \quad S' = 0, \quad -\frac{2V}{x^2} + 4\pi x = 0 \Rightarrow$$

$$x_{кр} = \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}} \text{ – критическая точка.}$$

знак	S'		–		+	x
поведение	S	0	↘	$x_{кр}$ min	↗	

Радиус основания цилиндра равен $R = \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$.

Найдем высоту цилиндра:

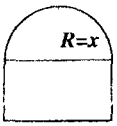
$$H = \frac{V}{\pi\left(\sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}\right)^2} \Rightarrow H = 2 \cdot \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}} = 2R.$$

$$S_{min} = 2\pi R \cdot 2R + 2\pi R^2 = 6\pi \sqrt[3]{\frac{V^2}{4\pi^2}} = 3 \cdot \sqrt[3]{2\pi V^2}.$$

Ответ: $H = 2R$, $R = \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$, $S_{min} = 3 \cdot \sqrt[3]{2\pi V^2}$ (ед.^{2}).

Задача 5.7. Окно имеет форму прямоугольника, завершенного полукругом. Периметр окна равен a. При каких размерах сторон прямоугольника окно будет пропускать наибольшее количество света ?

Решение. Окно будет пропускать наибольшее количество света, если его площадь будет наибольшей. Обозначим радиус полукруга через x.



$S = 0{,}5\pi x^2 + 2x \cdot H$, где H – высота прямоугольника

Найдем периметр окна: $a = 2x + 2H + \pi x$.

Рис. 5.16 Из этого выражения найдем H и подставим в функцию S.

$$H = \frac{a - 2x - \pi x}{2} \Rightarrow S = 0{,}5\pi x^2 + 2x \cdot \frac{a - 2x - \pi x}{2}.$$

$$S = ax - 2x^2 - 0{,}5\pi x^2.$$

Эту функцию исследуем на экстремум.

$$S' = a - 4x - \pi x, \quad S' = 0, \quad a = x(\pi + 4), \quad x = \frac{a}{\pi + 4} = R.$$

знак S' $\quad +$ $\quad -$ $\quad x$

поведение S $\quad 0$ $\quad \nearrow$ $\quad R_{max}$ $\quad \searrow$

Основание прямоугольника равно $2x = \dfrac{2a}{\pi + 4}$,

высота $H = \dfrac{a - \dfrac{2a}{\pi + 4} - \dfrac{\pi a}{\pi + 4}}{2} = \dfrac{a}{\pi + 4} = R.$

$$S_{max} = 0{,}5\pi R^2 + 2R \cdot R = \frac{1}{2}(\pi + 4)R^2.$$

Ответ: $R = \dfrac{a}{\pi + 4}$, $H = \dfrac{a}{\pi + 4}$; $S_{max} = \dfrac{a^2}{2(\pi + 4)}$.

Задача 5.8. Найти радиус основания и высоту конуса наименьшего объема, описанного около шара радиуса R.

Решение. Обозначим высоту конуса $AO_1 = H$, радиус основания $O_1C = r$.

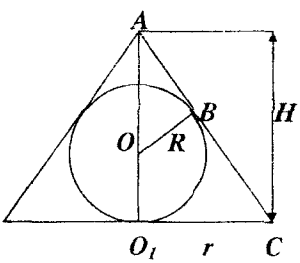


Рис. 5.17

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 H.$$

Выразим радиус основания конуса через радиус шара $R = OB$.

Из подобия прямоугольных треугольников $\Delta OAB \sim \Delta O_1AC$ имеем $\dfrac{AC}{AO} = \dfrac{O_1C}{OB}$.

Из $\Delta O_1AC \Rightarrow AC^2 = H^2 + r^2$,

$AO = H - R$, $O_1C = r$, $OB = R$.

$$\frac{\sqrt{H^2 + r^2}}{H - R} = \frac{r}{R} \Rightarrow R\sqrt{H^2 + r^2} = r(H - R).$$

Решая это уравнение получим $r^2 = \dfrac{R^2 H}{H - 2R}$.

Подставим это выражение в функцию V.

$$V = \frac{1}{3}\pi H \cdot \frac{R^2 H}{H - 2R} \Rightarrow V(H) = \frac{\pi}{3} \cdot \frac{R^2 H^2}{H - 2R}.$$

Исследуем эту функцию на экстремум.

$$V'(H) = \frac{\pi R^2}{3} \cdot \frac{2H(H - 2R) - H^2}{(H - 2R)^2} = \frac{\pi R^2}{3} \cdot \frac{H^2 - 4HR}{(H - 2R)^2}.$$

$V' = 0 \Rightarrow H^2 - 4HR = 0$, $H(H - 4R) = 0$, $H_1 = 0$,

$H_2 = 4R$ – критические точки.

Так как в данной задаче высота конуса H не может быть отрицательной и равной нулю, то исследуем только критическую точку $H = 4R$.

знак V' – +

поведение V 0 $\searrow$ $4R$ $\nearrow$ H

$4R$ – min

Отсюда следует, что оптимальная высота конуса равна $4R$.

Найдем радиус основания конуса.

$$r = \sqrt{\frac{R^2 \cdot 4R}{4R - 2R}} = \sqrt{\frac{4R^3}{2R}} = R\sqrt{2}.$$

$$V_{min} = \left\{\frac{\pi}{3} r^2 \quad H\right\} = \frac{\pi}{3} \cdot 2R^2 \quad 4R = \frac{8\pi R^3}{3}.$$

Ответ: $H = 4R$, $r = R\sqrt{2}$, $V_{min} = \dfrac{8\pi R^3}{3}$.

Вопросы для самоконтроля

1.Понятие приращения аргумента и функции.

2. Определение производной.

3 Геометрический и физический смысл производной.

4.Уравнения касательной и нормали к графику функции.

5.Дифференцируемость функции. Необходимое условие дифференцируемости.

6. Основные правила дифференцирования.

7 Производная сложной функции.

8 Вывод формул производных степенной, показательной, логарифмической, тригонометрических функций

10. Вывод производных обратных тригонометрических функций.

11. Логарифмическое дифференцирование.

12. Дифференцирование неявно заданных функций

13 Дифференцирование параметрически заданных функций

14. Дифференциал функции

15. Инвариантность формы первого дифференциала.

16. Свойства дифференциала функции.

17. Применение дифференциала к приближенным вычислениям.

18. Производные высших порядков, их свойства.

19 Дифференциалы высших порядков их свойства

20. Основные теоремы дифференциального исчисления Ферма, Ролля, Лагранжа, Коши

21. Правила Лопиталя.

22. Возрастающие и убывающие функции Условия возрастания и убывания функции.

23. Экстремум функции Необходимые и достаточные условия существования экстремума.

24 Наибольшее и наименьшее значения функции на отрезке

25. Выпуклость, вогнутость, точки перегиба графика функции.

26. Асимптоты графика функции

27 Схема полного исследования функции

28. Формулы Тейлора и Маклорена.

29 Формулы Тейлора и Маклорена основных элементарных функций.

30. Применения формул Тейлора и Маклорена.

Задания для контрольной работы № 4

Задача 1. Найти производные $\frac{dy}{dx}$ данных функций:

1.1. а) $y = 3x^2 - \frac{7}{x^4} - \frac{1}{x} + 6\sqrt{x}$;

б) $y = e^{2x} \cdot \sin 3x$;

в) $y = \frac{\sqrt{5x^2 - x + 1}}{x^3}$;

г) $xy = ctg\ y$.

1.2. а) $y = \frac{3}{x^4} + \frac{1}{x} + 10x^3 - \sqrt{x^5}$;

б) $y = e^{-3x} \cdot \cos x$;

в) $y = \frac{\sin^2 3x}{x^2 + 1}$;

г) $3x + \sin y = 5y$.

1.3. а) $y = \sqrt[4]{x^5} - \frac{4}{x} + \frac{8}{x^6} + x^{10}$;

б) $y = 2^x \cdot tg\, x^2$;

в) $y = \frac{(x-5)^2}{arcsin\, x^2}$;

г) $\frac{x^2}{5} + \frac{y^2}{7} = 1$.

1.4. а) $y = \frac{8}{x^4} + \sqrt[3]{x^4} - \frac{10}{x} - 6x^7$.

б) $y = 3^{2x} \cdot ctg\, 3x$;

в) $y = \frac{arcsin\frac{1}{x}}{(x-7)^4}$;

г) $\sin^2 3x - y = 9x$.

1.5. а) $y = \sqrt{x^5} - \frac{5}{x} + \frac{10}{x^7} - 3x^8$;

б) $y = \sin 3x \cdot ln\, 2x$;

в) $y = \frac{3^{x^2}}{ctg 8x}$,

г) $2\sqrt{x} + 4\sqrt{y} = \sqrt{17}$

1.6. а) $y = \sqrt{x^3} + \frac{4}{x} - \frac{1}{x^7} - 6x^9$;

б) $y = tg\frac{x}{2} \cdot e^{\sqrt{x}}$;

в) $y = \frac{ln\, ln\, x}{arctg\, 2x}$;

г) $y^2 = x + ln\, y$.

1.7. а) $y = 8x^8 - \frac{5}{x} + \frac{8}{x^5} + \sqrt[7]{x^3}$;

б) $y = e^{\sin x} \cdot x^2$;

в) $y = \frac{arccos^3 2x}{\sqrt{x+1}}$,

г) $y = e^y + 4x$.

1.8. а) $y = \sqrt[4]{x^3} - \frac{3}{x} + \frac{5}{x^4} + 3x^2$,

б) $y = e^{x^2} \cdot ln(x-4)$;

в) $y = \frac{3 + 2x + x^2}{e^{\sin 5x}}$;

г) $y^2 = 25 - 4x$.

1.9. а) $y = 3x^5 - \frac{2}{x} - \sqrt{x^3 + \frac{10}{x^6}}$;

б) $y = 2^{x^2} \cdot arcsin\, 25x$;

1.10. а) $y = \sqrt[3]{x^7} + \frac{8}{x} - 5x^4 + \frac{4}{x^5}$;

б) $y = e^{-6x} \cdot arctg\, 8x$;

в) $y = \dfrac{(x+2)^8}{ln^3 10x}$;

г) $ln\, y - \dfrac{y}{x} = \dfrac{1}{2}$.

в) $y = \dfrac{e^{cos 3x}}{(2x+4)^9}$;

г) $y^2 = 8x - 5$.

Задача 2. Найти производные $\dfrac{dy}{dx}$ и $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ данных функций:

2.1. $\begin{cases} x = cos 2t, \\ y = sin 2t. \end{cases}$

2.2. $\begin{cases} x = 1 + sin t + t, \\ y = 1 - cos t - t. \end{cases}$

2.3. $\begin{cases} x = cos t / 2, \\ y = sin t - t. \end{cases}$

2.4. $\begin{cases} x = cos 3t, \\ y = tg 2t \end{cases}$

2.5. $\begin{cases} x = ln 2t, \\ y = \sqrt{t^2 - 3}\, 2t. \end{cases}$

2.6. $\begin{cases} x = 3 cos t, \\ y = 4 sin^2 t. \end{cases}$

2.7. $\begin{cases} x = 2t - sin 2t, \\ y = sin^2 t. \end{cases}$

2.8. $\begin{cases} x = cos 2t \\ y = sin 2t. \end{cases}$

2.9. $\begin{cases} x = ctg\, t, \\ y = ln\, sin t. \end{cases}$

2.10. $\begin{cases} x = ln(2t + t^2), \\ y = 1/t. \end{cases}$

Задача 3. Найти дифференциал функции:

3.1. а) $y = ln\, sin x$;

б) $y = e^{ctg\, x}$;

в) $y = arcsin \sqrt{3x}$;

г) $y = cos\left(e^{x^2}\right)$.

3.2. а) $y = ln\, cos x$;

б) $y = e^{arctg \sqrt{x}}$;

в) $y = \sqrt[3]{cos 5x}$

г) $y = arcsin \sqrt{2x}$.

3.3. а) $y = ln\left(x^2 + 10\right)$;

б) $y = e^{sin^2 x}$;

в) $y = arcctg\left(x^3\right)$;

г) $y = sin\left(e^{x^2}\right)$.

3.4. а) $y = e^{cos\ x}$;

б) $y = arcctg(ln x)$;

в) $y = ln^2(3x)$;

г) $y = sin\left(e^{x^2}\right)$.

3.5. а) $y = e^{tgx^2}$;

б) $y = \sqrt{cos x - sin x}$;

в) $y = ln^2(3x)$;

г) $y = arctg\, x^2$.

3.6. а) $y = arcctg\left(x^3\right)$;

б) $y = \sqrt{sin x^3}$;

в) $y = a^{\sqrt{x}}, \quad a = const$; г) $y = e^{arcsin\sqrt{x}}$.

3.7. а) $y = ln\,ln\,x$; б) $y = arctg\sqrt{x^2+1}$;

в) $y = e^{tgx^2}$; г) $y = arccos\left(x^3\right)$.

3.8. а) $y = e^{\sin x}$; б) $y = arcsin\sqrt{5x}$;

в) $y = arctg(ln\,x)$; г) $y = ln\sqrt{x^2+1}$.

3.9. а) $y = e^{tgx^2}$; б) $y = e^{\cos^2 5x}$;

в) $y = arctg(\sin x)$; г) $y = ln\,arcsin\,x$.

3.10. а) $y = ln\left(1+\sin^2 2x\right)$; б) $y = 4^{\sqrt{x}}$;

в) $y = \sin\left(e^{x^2}\right)$; г) $y = \sqrt[3]{\cos 5x}$.

Задача 4. Смысл производной в различных задачах.

4.1. а) Составить уравнение касательной к кривой $y^2 = (4+x)^3$ в точке пересечения ее с осью Ox.

б) Тело движется по прямой Ox по закону $x = \frac{t^3}{3} - 2t^2 + 3t$. Определить скорость и ускорение движения. В какие моменты времени t тело меняет направление движения ?

4.2.а) Составить уравнение нормали к кривой $y = \frac{8}{4+x^2}$ в точке $x = 2$.

б) Вращающееся маховое колесо, задерживаемое тормозом, за t сек поворачивается на угол $\varphi = a + bt - ct^2$, где a, b, c - положительные постоянные. Определить угловую скорость и ускорение вращения. Когда колесо остановится ?

4.3. а) Составить уравнение нормали к окружности $x^2 + y^2 - 2x + 4y - 3 = 0$ в правой точке пересечения ее с осью абсцисс

б) Точка массы m колеблется по оси Ox так, что в момент времени t ее отклонение x от положения равновесия определяется уравнением $x = 2e^{-3t}\sin(3t+1)$. Найти скорость движения точки.

4.4. а) Составить уравнение нормали и касательной к кривой $y = ln\,x$ в точке пересечения ее с осью Ox.

б) Точка движется прямолинейно так, что $v^2 = 9x$, где v – скорость, x – пройденный путь. Найти ускорение движения.

4.5. а) В какой точке окружности $x^2 + y^2 = 9$ нужно провести касательную, чтобы она была параллельна прямой $y = 2x - 3$?

б) Тело массой в 3 кг движется прямолинейно по закону $s = 2 + t^2 + 4t^3$, определить кинетическую энергию тела $\frac{mv^2}{2}$ через 5 секунд после начала движения.

4.6. а) Составить уравнение касательной к циклоиде $\begin{cases} x = 2(t - \sin t), \\ y = 2(1 - \cos t). \end{cases}$ в точке $t = \frac{3\pi}{2}$.

б) Количество электричества, протекшее с $t = 0$ момента времени, $Q = 2t^2 + 3t + 1$ дается формулой (кулонов). Найти силу тока в конце 5-ой секунды.

4.7. а) В какой точке эллипса $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$ нужно провести касательную, чтобы она была перпендикулярна прямой $y = 2x - 3$?

б) Точка движется прямолинейно так, что $y^2 = 4x$, где x – пройденный путь. Найти ускорение движения.

4.8. а) В какой точке касательная к параболе $y^2 = 3x$ параллельна хорде соединяющей точки A(-1;1) и B(3;9)?

б) Тело совершает прямолинейное колебательное движение по закону $x = A\sin\omega t$. Определить скорость и ускорение движения точки при $t = \frac{2\pi}{3}$

4.9. а) Найти уравнение касательной к графику функции $y = 3x^3 - 6x^2 + 2$ в точке, где угловой коэффициент касательной равен -3.

б) Зависимость между количеством вещества x, получаемой в некоторой химической реакции выражается уравнением $x = 3(1 - e^{5t})$. Определить скорость реакции.

4.10. а) Составить уравнения касательной и нормали к кривой $y = x^2\sqrt{x}$ в точке $x = 1$.

б) Точка массы m колеблется по оси Ox так, что в момент времени t ее отклонение x от положения равновесия определяется уравнением $x = Ae^{-at}\cos(at + b)$. Найти скорость движения точки.

Задача 5. Найти пределы функций, применяя правила Лопиталя.

5.1. а) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3-4x^2+4x}{x^3-12x+16}$; б) $\lim\limits_{x\to 0} x\cdot ctg2x$.

5.2. а) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{2x^2-9x+4}{\sqrt{5-x}-\sqrt{x-3}}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\sqrt[3]{x}\cdot \ln x$.

5.3. а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{arctg2x}{5x}$; б) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{\ln x}-\dfrac{x}{x-1}\right)$.

5.4. а) $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{\sqrt{2x+1}-\sqrt{x+6}}{2x^2-7x-15}$; б) $\lim\limits_{x\to \pi/2}\cos x\cdot tg5x$.

5.5. а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{\sin 2x}$; б) $\lim\limits_{x\to \pi}(\pi-x)\cdot tg\dfrac{x}{2}$.

5.6. а) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2x^2+x-3}{x^2+x-2}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\sin x}{x^5}$.

5.7. а) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{3x^2+4x+1}{\sqrt{x+3}-\sqrt{5+3x}}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\ln x\cdot tgx$.

5.8. а) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{2x+1}-3}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x\cdot \sin x}$.

5.9. а) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{\sqrt{x+7}-\sqrt{3-x}}{x+2}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\sin 6x\cdot ctgx$.

5.10. а) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^4-16}{x^3+5x^2-6x-16}$; б) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\cos\dfrac{\pi x}{6}}{1-tg\dfrac{\pi x}{12}}$.

Задача 6. Исследовать функцию методами дифференциального исчисления и, используя результаты исследования, построить ее график.

6.1. $y=\dfrac{(x+3)^2}{x-4}$. **6.2.** $y=\dfrac{2-4x^2}{1-4x^2}$.

6.3. $y=\dfrac{(x+1)^3}{4(x-2)^2}$. **6.4.** $y=\dfrac{x^2+1}{x^2-1}$.

6.5. $y=\dfrac{2x-3}{x^3}$. **6.6.** $y=\dfrac{x^3}{(x+1)^2}$.

6.7. $y = \dfrac{2x-1}{(x-1)^2}$.

6.8. $y = \dfrac{x^2-x-6}{x-2}$.

6.9. $y = \dfrac{x^2-5}{x-3}$.

6.10. $y = \dfrac{x^2}{x^2-1}$.

Задача 7.

7.1. Определить размеры открытого бассейна вместимостью 32 м^3 с квадратным дном так, чтобы на облицовку его стен и дна пошло наименьшее количество материала.

7.2. Каковы должны быть высота и радиус основания конуса с данной образующей l, чтобы объем конуса был наибольшим ?

7.3. Найти отношение радиуса цилиндра к его высоте, при котором цилиндр имеет при данном объеме V наименьшую полную поверхность.

7.4. Объем правильной треугольной призмы равен V. Какова должна быть сторона основания, чтобы полная поверхность призмы была наименьшей ?

7.5. Требуется изготовить из жести ведро без крышки данного объема V цилиндрической формы. Каковы должны быть высота и радиус его основания, чтобы на изготовление ведра ушло наименьшее количество материала ?

7.6. Бак без крышки с квадратным основанием должен вмещать 5 литров воды. Каковы должны быть размеры бака, чтобы на его изготовление было затрачено наименьшее количество материала ?

7.7. Найти радиус основания и высоту цилиндра наибольшего объема, который можно вписать в шар радиуса R.

7.8. Найти размеры прямоугольника с наибольшей площадью, вписанного в прямоугольный треугольник, катеты которого $a = 4$ см и $b = 8$ см, а один из углов прямоугольника совпадает с прямым углом треугольника.

7.9. Найти наибольший объем V конуса с образующей l.

7.10. Площадь, занимаемая печатным текстом, составляет на странице книги 432 см^2. Ширина полей вверху и внизу страницы составляет по 2 см, а ширина боковых полей – по 1,5 см. Каковы должны быть размеры страницы, чтобы количество израсходованной бумаги было наименьшим ?

Учебное издание

Багдуева Ханда Нимаевна

Толстых Ольга Дмитриевна

Дифференциальное исчисление функции одной переменной

Учебное пособие
для студентов заочного отделения
всех специальностей

Редактор Л. И Рубанова

Компьютерная верстка Х.Н. Багдуева, Н.Ю. Наймушина

Подписано в печать 24.11.2003
Формат 60×84/16. Печать офсетная.
Усл. печ. л. – 4,6 Уч. – изд. л. – 4,8
План 2003 г.
Заказ 1254.

Глазковская типография, г. Иркутск, ул Гоголя, 53