

Министерство транспорта Российской Федерации
Федеральное агентство железнодорожного транспорта
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Дальневосточный государственный университет путей сообщения»

Кафедра «Физика и теоретическая механика»

ЭЛЕКТРОСТАТИКА. ПОСТОЯННЫЙ ТОК

Сборник задач
по курсу физики

Под редакцией М.Н. Литвиновой

Рекомендовано
Дальневосточным региональным
учебно-методическим центром (ДВ РУМЦ)
в качестве учебного пособия для студентов направления подготовки
бакалавров 13.03.02 «Электроэнергетика и электротехника»
и специальности 23.05.05 «Системы обеспечения движения поездов»
вузов региона

Хабаровск
Издательство ДВГУПС
2015

УДК 537.2 (075.8)
ББК В331я73
Э 455

Рецензенты:

Кафедра физики ДВГГУ
(заведующий кафедрой доктор физико-математических наук,
профессор *В.И. Крылов*)

Кандидат физико-математических наук, доцент кафедры физики АмГУ
А.Ю. Сетейкин

Э 455 Электростатика. Постоянный ток : сб. задач по курсу физики / под ред.
М.Н. Литвиновой. – Хабаровск : Изд-во ДВГУПС, 2015. – 131 с. : ил.

Сборник задач соответствует ФГОС ВО по направлению подготовки бакалавров 13.03.02 «Электроэнергетика и электротехника» и специальности 23.05.05 «Системы обеспечения движения поездов».

В сборник включены краткие теоретические сведения по разделам «Электростатика», «Постоянный ток в различных средах» и «Электрооптические и квантовооптические явления» курса физики, приведены примеры решения задач и задания для выполнения типовых расчетов.

Предназначен для студентов 1-го и 2-го курсов очной формы обучения, изучающих дисциплину «Физика» и выполняющих типовые расчеты, а также может быть полезен магистрантам и аспирантам.

Сборник задач подготовил коллектив кафедры «Физика и теоретическая механика»: Е.О. Киле (гл. 1); канд. физ.-мат. наук М.Н. Литвинова (гл. 2); канд. физ.-мат. наук О.В. Кравченко, Н.Н. Рекунова (гл. 3); канд. физ.-мат. наук Д.С. Фалеев (гл. 4); Г.В. Куликова (гл. 5); д-р физ.-мат. наук Ю.М. Карпец (гл. 6); В.А. Литвинова (гл. 7); Н.А. Сюй (гл. 8); канд. физ.-мат. наук Н.А. Дейнекина (гл. 9); канд. физ.-мат. наук И.В. Повх, д-р физ.-мат. наук В.И. Строганов (гл. 10); д-р физ.-мат. наук В.И. Иванов (гл. 11); канд. физ.-мат. наук Л.В. Алексеева (гл. 12); д-р физ.-мат. наук В.В. Криштоп, канд. физ.-мат. наук И.А. Коростелева (гл. 13); канд. физ.-мат. наук И.С. Зиссер (гл. 14).

УДК 537.2 (075.8)
ББК В331я73

© ДВГУПС, 2015

ВВЕДЕНИЕ

В связи с переходом на двухуровневую систему высшего профессионального образования потребовалась разработка учебной литературы, соответствующей Федеральному государственному образовательному стандарту (ФГОС). Это повлекло значительное сокращение аудиторных часов преподаваемых дисциплин при сохранении прежнего объема учебного материала.

Учебное пособие переработано с учетом необходимости внедрения новых подходов при проведении аудиторных занятий и организации самостоятельной работы студентов. Самостоятельное решение задач способствует более глубокому пониманию физических явлений и законов. Качество усвоения программного материала зависит от типов задач, которые студент может самостоятельно выполнить в отведенное по учебному плану время.

В сборник включены задачи по всем разделам электростатики, постоянного тока в различных средах, а также задачи по электрооптическим и квантовооптическим эффектам, возникающим при воздействии электрических полей на вещество.

Решение задач должно сопровождаться работой с учебниками по физике [5–9] и конспектами лекций. Для повышения эффективности самостоятельной работы студентов в начале каждой темы приведены краткие теоретические сведения и методические рекомендации по решению конкретных примеров задач. Формулы в тексте приведены в системе СИ. Исходные данные и числовые ответы даны с учетом точности соответствующих физических величин и правил действия над приближенными числами.

В прил. 1–7 приведены некоторые справочные данные, необходимые для решения задач.

При составлении сборника задач были использованы источники [1–4].

В результате изучения дисциплины «Физика» студент должен:

1) *знать*:

– основы естественно-научного мировоззрения, историю развития физики и основных её открытий;

– основные понятия, законы и модели механики, электричества и магнетизма, колебаний и волн, квантовой физики, статистической физики и термодинамики;

– границы применимости законов и моделей в важнейших практических приложениях;

– причинно-следственные связи между физическими явлениями;

- теоретические и экспериментальные методы исследований в физике;
- методы анализа, расчета и численной оценки точности результатов измерений физических величин;

- правила безопасной работы в учебно-научных лабораториях.

2) *уметь*:

- пользоваться современной научной аппаратурой для проведения инженерных измерений и научных исследований;

- ориентироваться в справочной физико-математической литературе;

- использовать основные приемы обработки экспериментальных данных;

- уметь в устной и письменной форме логически верно и аргументировано защищать результаты своих исследований;

- решать типовые задачи по основным разделам физики, используя методы математического анализа;

- использовать физические законы при анализе и решении проблем;

3) *владеть*:

- методами построения и решения простейших физико-математических моделей типовых профессиональных задач;

- методами экспериментального исследования в физике (планирование, постановка и компьютерная, аналитическая и графическая обработка результатов эксперимента);

- навыками проведения физического эксперимента;

- навыками и способами содержательной интерпретации полученных результатов исследований;

- навыками самостоятельной и исследовательской работы.

Сборник задач подготовлен к 75-летию кафедры «Физика и теоретическая механика».

ОБЩИЕ МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ

1. Приступая к решению задачи, внимательно прочитайте условие задачи, попытайтесь сначала представить физический процесс (явление) о котором идет речь и понять постановку вопроса. Установите, какие физические величины известны. Недостающие данные, необходимые для решения задачи, можно найти в справочных таблицах в прил. 1–7.

2. Обязательно сделайте схематический рисунок, поясняющий сущность физического процесса (явления), это во многих случаях значительно облегчит как поиск решения, так и само решение.

3. Старайтесь решить задачу в общем виде (т. е. в буквенных обозначениях), чтобы искомая величина была выражена через заданные величины. Решение в общем виде позволяет установить определенную закономерность, показывающую, как зависит искомая величина от заданных величин.

4. Получив решение в общем виде, проверьте его размерность. Неверная размерность указывает на ошибочность решения. Если возможно, исследуйте поведение решения в предельных частных случаях.

5. При расчетах руководствуйтесь правилами действий с приближенными числами. В частности, в полученном значении вычисленной величины нужно сохранить последним тот знак, единица которого еще превышает погрешность этой величины. Все следующие цифры надо отбросить.

6. Получив числовой результат, оцените его правдоподобность. Такая оценка может в ряде случаев обнаружить ошибочность полученного результата.

ТРЕБОВАНИЯ К ОФОРМЛЕНИЮ ТИПОВОГО РАСЧЕТА

При оформлении типового расчета (домашнего задания) необходимо соблюдать следующие требования:

- номер задачи типового расчета назначается преподавателем;
- типовой расчет выполняется в отдельной тетради;
- титульный лист типового расчета оформляется по образцу титульного листа к лабораторной работе;
- условие задачи в типовом расчете переписывается полностью;
- решение задач начинается с краткой записи условия, где все физические величины записываются в системе СИ;
- решение задачи должно сопровождаться схематическим рисунком с указанными векторными величинами и краткими, но исчерпывающими пояснениями.

Глава 1. ЭЛЕКТРИЧЕСКОЕ ПОЛЕ. ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ЗАРЯДОВ. ЗАКОН КУЛОНА. ТЕОРЕМА ОСТРОГРАДСКОГО–ГАУССА

1.1. Основные формулы

Закон Кулона. Сила взаимодействия двух точечных зарядов в вакууме направлена вдоль прямой, соединяющей эти заряды, пропорциональна их величинам и обратно пропорциональна квадрату расстояния между ними

$$\vec{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{\epsilon r^2} \frac{\vec{r}}{r} = k \frac{q_1 q_2}{\epsilon r^2} \frac{\vec{r}}{r},$$

где $k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} = 9 \cdot 10^9 \text{ м/Ф}$ – коэффициент; q_1, q_2 – электрические заряды, $\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12} \text{ Ф/м}$ – электрическая постоянная; ϵ – диэлектрическая проницаемость среды; \vec{r} – радиус-вектор, соединяющий заряды q_1 и q_2 , $r = |\vec{r}|$.

Закон сохранения электрического заряда. Алгебраическая сумма зарядов изолированной системы сохраняется:

$$\sum_{i=1}^n q_i = \text{const},$$

где n – число зарядов.

Напряженность электрического поля. Напряженностью электрического поля в данной точке называется векторная физическая величина, численно равная силе, действующей на единичный положительный заряд, помещенный в эту точку поля:

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q},$$

где \vec{F} – сила, действующая на точечный положительный заряд q .

Напряженность электрического поля, создаваемого точечным зарядом q на расстоянии r от заряда, имеет вид:

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{\epsilon r^2} \frac{\vec{r}}{r},$$

где ϵ – диэлектрическая проницаемость среды; \vec{r} – радиус-вектор, направленный от заряда во внешнее пространство.

Принцип суперпозиции электрических полей. Напряженность результирующего поля, созданного N точечными зарядами, равна векторной (геометрической) сумме напряженностей складываемых полей:

$$\vec{E} = \sum_{i=1}^N \vec{E}_i.$$

Поток вектора напряженности \vec{E} электрического поля:

а) через произвольную поверхность S , помещенную в неоднородное поле:

$$\Phi_E = \int_S E \cos \alpha dS, \text{ или } \Phi_E = \int_S E_n dS,$$

где α – угол между вектором напряженности \vec{E} и нормалью \vec{n} к элементу поверхности; dS – площадь элемента поверхности; E_n – проекция вектора напряженности на нормаль;

б) через плоскую поверхность, помещенную в однородное поле:

$$\Phi_E = ES \cos \alpha.$$

Поток вектора напряженности E через замкнутую поверхность

$$\Phi_E = \oint E_n dS,$$

где интегрирование ведется по всей поверхности.

Теорема Остроградского–Гаусса. Поток вектора напряженности \vec{E} через любую замкнутую поверхность, пропорционален алгебраической сумме зарядов, заключенных внутри замкнутой поверхности:

$$\Phi_E = \frac{1}{\epsilon_0 \epsilon} \sum_{i=1}^n q_i,$$

где n – число зарядов.

Напряженность поля, создаваемого бесконечно длинной равномерно заряженной нитью (или цилиндром) на расстоянии r от ее оси:

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2\tau \vec{r}}{\epsilon r^2},$$

где τ – линейная плотность заряда; \vec{r} – радиус-вектор, направленный от заряженной нити во внешнее пространство перпендикулярно этой нити. Линейная плотность заряда характеризует распределение заряда по длине нити l :

$$\tau = \frac{dq}{dl}.$$

Напряженность поля, создаваемого бесконечной равномерно заряженной плоскостью:

$$\vec{E} = \frac{1}{2\epsilon\epsilon_0} \frac{\sigma \vec{r}}{r^2},$$

где σ – поверхностная плотность заряда; \vec{r} – радиус-вектор, направленный от заряженной плоскости во внешнее пространство перпендикулярно этой плоскости. Поверхностная плотность заряда характеризует распределение заряда по поверхности S :

$$\sigma = \frac{dq}{dS}.$$

1.2. Примеры решения задач

Пример 1.1. Три одинаковых положительных заряда $q_1 = q_2 = q_3 = 1$ нКл расположены в вершинах равностороннего треугольника (рис. 1.1). Какой отрицательный заряд q_4 нужно поместить в центре треугольника, чтобы сила притяжения с его стороны уравновесила силы взаимного отталкивания зарядов, находящихся в вершинах?

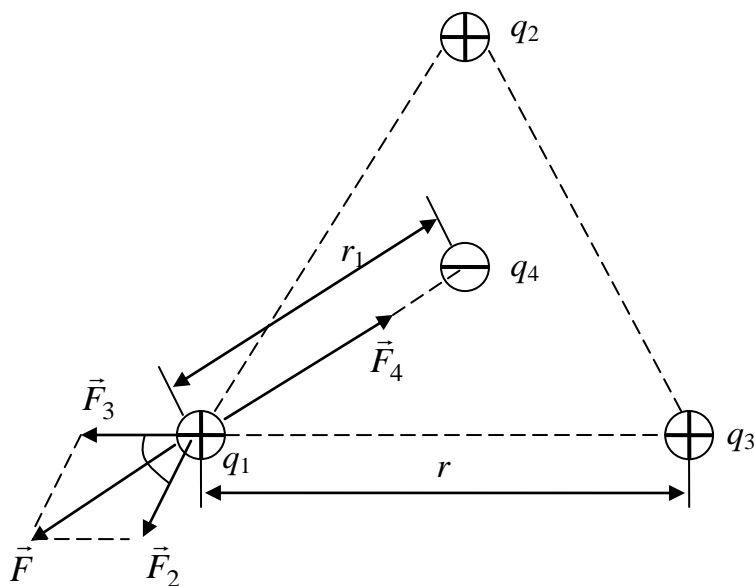


Рис. 1.1

Решение. Все три заряда, расположенных в вершинах треугольника, находятся в одинаковых условиях. Поэтому для решения задачи достаточно выяснить, какой заряд следует поместить в центре треугольника, чтобы один из трех зарядов, например q_1 , находился в равновесии. В соответствии с принципом суперпозиции на заряд действует каждый заряд независимо от остальных. Поэтому заряд q_1 будет находиться в равновесии, если векторная сумма действующих на него сил равна нулю:

$$\vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \vec{F}_4 = \vec{F} + \vec{F}_4 = 0, \quad (1.1)$$

где $\vec{F}_2, \vec{F}_3, \vec{F}_4$ – силы, с которыми соответственно действуют на заряд q_1 заряды q_2, q_3 и q_4 ; \vec{F} – равнодействующая сил \vec{F}_2 и \vec{F}_3 .

Так как силы \vec{F} и \vec{F}_4 направлены по одной прямой, то векторное равенство (1.1) можно заменить скалярной суммой:

$$F - F_4 = 0.$$

Выразив F через F_2 и F_3 , учитывая, что $F_2 = F_3$, получим

$$F_4 = F_2 \sqrt{2(1 + \cos \alpha)}.$$

Применяя закон Кулона и имея в виду, что $q_1 = q_2 = q_3$, найдем

$$k \frac{q_1 q_4}{\varepsilon r_1^2} = k \frac{q_1^2}{\varepsilon r^2} \sqrt{2(1 + \cos \alpha)},$$

откуда

$$q_4 = \frac{q_1 r_1^2}{r^2} \sqrt{2(1 + \cos \alpha)}. \quad (1.2)$$

Из геометрических построений в равностороннем треугольнике следует, что

$$r_1 = \frac{r/2}{\cos 30^\circ} = \frac{r}{\sqrt{3}}, \quad \cos \alpha = \cos 60^\circ = \frac{1}{2}.$$

С учетом этого формула (1.2) примет вид:

$$q_4 = \frac{q_1}{\sqrt{3}}.$$

Подставив сюда значение q_1 , получим $q_4 = 0,58$ нКл.

Отметим, что равновесие системы зарядов будет неустойчивым.

Пример 1.2. На пластинах плоского воздушного конденсатора находится заряд $q = 10$ нКл. Площадь S каждой пластины конденсатора равна 100 см^2 . Определить силу F , с которой притягиваются пластины. Поле между пластинами считать однородным.

Решение. Заряд q одной пластины находится в поле, созданном зарядом другой пластины конденсатора. Следовательно, на первый заряд действует сила (рис. 1.2)

$$\vec{F} = \vec{E}_1 q, \quad (1.3)$$

где \vec{E}_1 – напряженность поля, создаваемого зарядом одной пластины.

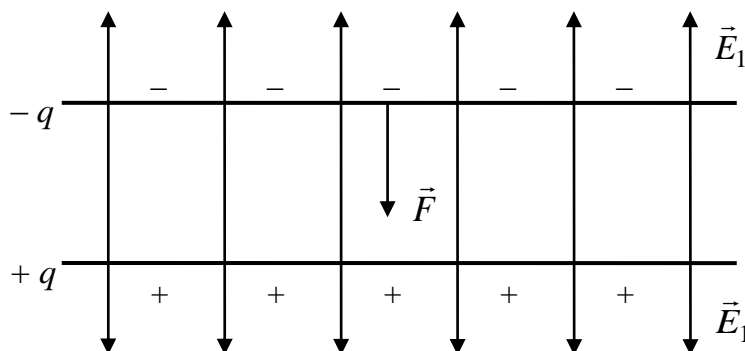


Рис. 1.2

Но $E_1 = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} = \frac{q}{2\varepsilon_0 S}$, где σ – поверхностная плотность заряда пластины.

Формула (1.3) с учетом выражения для E_1 примет вид:

$$F = \frac{q^2}{2\varepsilon_0 S}.$$

Подставив значения величин q , ε_0 , S в эту формулу, получим $F = 565$ мкН.

Пример 1.3. Тонкий стержень длиной $l = 30$ см (рис. 1.3) несет равномерно распределенный по длине заряд с линейной плотностью $\tau = 1$ мкКл/м. На расстоянии $r_0 = 20$ см от стержня находится заряд $q_1 = 10$ нКл, равноудаленный от концов стержня. Определить силу F взаимодействия точечного заряда с заряженным стержнем.

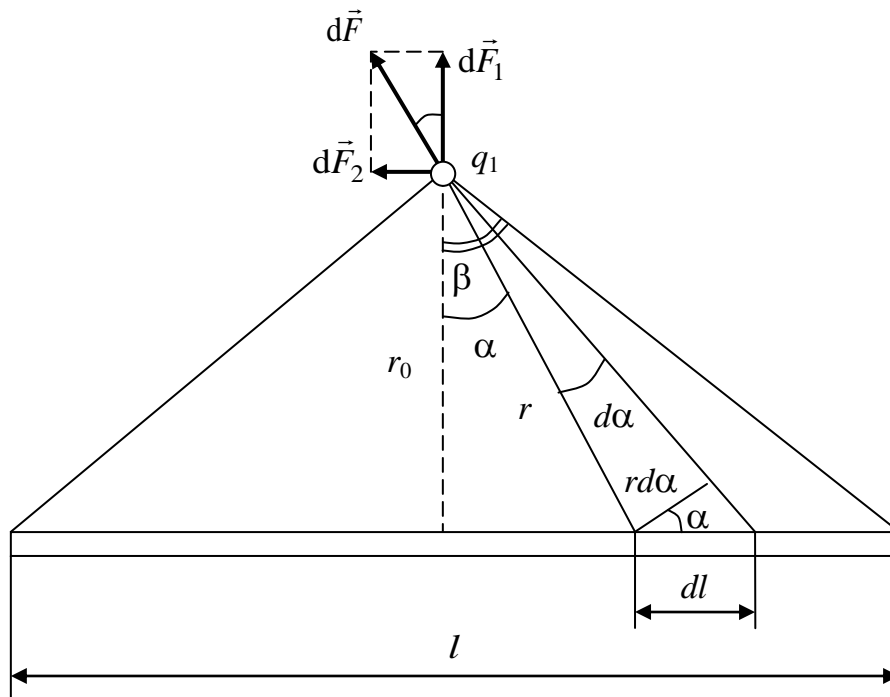


Рис. 1.3

Решение. Закон Кулона позволяет вычислить силу взаимодействия точечных зарядов. По условию задачи, один из зарядов не является точечным, а равномерно распределен по длине стержня. Однако если выделить на стержне малый участок длиной dl , то находящийся на нем заряд

$dq = \tau dl$ можно рассмотреть как точечный, и по закону Кулона сила взаимодействия между зарядами q_1 и dq

$$dF = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 \tau dl}{r^2}, \quad (1.4)$$

где r – расстояние от выделенного элемента до заряда q_1 .

Из рис. 1.3 следует, что $r = \frac{r_0}{\cos\alpha}$ и $dl = \frac{r d\alpha}{\cos\alpha}$. Подставив выражения r и dl в формулу (1.4), получим

$$dF = \frac{q_1 \tau}{4\pi\epsilon_0 r_0} d\alpha. \quad (1.5)$$

Разложим вектор $d\vec{F}$ на две составляющие: $d\vec{F}_1$, перпендикулярную стержню, и $d\vec{F}_2$, параллельную ему.

Из рис. 1.3 видно, что $dF_1 = dF \cos\alpha$, $dF_2 = dF \sin\alpha$. Подставляя значение dF из выражения (1.5) в эти формулы, найдем

$$dF_1 = \frac{q_1 \tau \cos\alpha}{4\pi\epsilon_0 r_0} d\alpha; \quad dF_2 = \frac{q_1 \tau \sin\alpha}{4\pi\epsilon_0 r_0} d\alpha.$$

Интегрируя эти выражения в пределах от $-\beta$ до $+\beta$, получим

$$F_1 = \int_{-\beta}^{+\beta} \frac{q_1 \tau \cos\alpha}{4\pi\epsilon_0 r_0} d\alpha = \frac{q_1 \tau}{4\pi\epsilon_0 r_0} \int_{-\beta}^{+\beta} \cos\alpha d\alpha = \frac{q_1 \tau}{4\pi\epsilon_0 r_0} \sin\alpha \Big|_{-\beta}^{+\beta} = \frac{q_1 \tau}{4\pi\epsilon_0 r_0} 2 \sin\beta;$$

$$F_1 = \frac{q_1 \tau}{2\pi\epsilon_0 r_0} \sin\beta.$$

В силу симметрии расположения заряда q_1 относительно стержня интегрирование второго выражения дает нуль:

$$F_2 = \int_{-\beta}^{+\beta} \frac{q_1 \tau}{4\pi\epsilon_0 r_0} \sin\alpha d\alpha = -\frac{q_1 \tau}{4\pi\epsilon_0 r_0} \cos\alpha \Big|_{-\beta}^{+\beta} = 0.$$

Таким образом, сила, действующая на заряд q_1 ,

$$F = F_1 = \frac{q_1 \tau}{2\pi\epsilon_0 r_0} \sin\beta. \quad (1.6)$$

Из рис. 1.3 следует, что $\sin \beta = \frac{l/2}{\sqrt{r_0^2 + l^2/4}} = \frac{l}{\sqrt{4r_0^2 + l^2}}$. Подставив это выражение в формулу (1.6), получим

$$F = \frac{q_1 \tau}{2\pi \epsilon_0 r_0} \frac{l}{\sqrt{4r_0^2 + l^2}}.$$

Подставив значения переменных, получим $F = 0,54$ мН.

Пример 1.4. Две concentric проводящие сферы радиусами $R_1 = 6$ см и $R_2 = 10$ см несут соответственно заряды $q_1 = 1$ нКл и $q_2 = -0,5$ нКл. Найти напряженность E поля в точках, отстоящих от центра сфер на расстояниях $r_1 = 5$ см, $r_2 = 9$ см и $r_3 = 15$ см. Построить график $E(r)$.

Решение. Заметим, что точки, в которых требуется найти напряженности электрического поля, лежат в трех областях (рис. 1.4): область I ($r_1 < R_1$), область II ($R_1 < r_2 < R_2$), область III ($r_3 > R_2$).

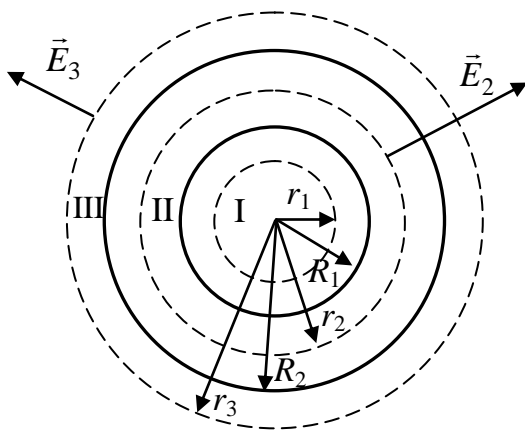


Рис. 1.4

1. Для определения напряженности E_1 в области I проведем сферическую поверхность S_1 радиусом r_1 и воспользуемся теоремой Остроградского–Гаусса.

Так как внутри области I зарядов нет, то согласно указанной теореме получим равенство

$$\oint_{S_1} E_n dS = 0, \quad (1.7)$$

где E_n – нормальная составляющая напряженности электрического поля.

Из соображения симметрии нормальная составляющая E_n должна быть равна самой напряженности и постоянна для всех точек сферы, т. е. $E_n = E_1 = \text{const}$. Поэтому ее можно вынести за знак интеграла.

Равенство (1.7) примет вид:

$$E_1 \oint_{S_1} dS = 0.$$

Так как площадь сферы S не равна нулю, то $E_1 = 0$, т. е. напряженность поля во всех точках, удовлетворяющих условию $r_1 < R_1$, будет равна нулю.

2. В области II проведем сферическую поверхность радиусом r_2 . Так как внутри этой поверхности находится заряд q_1 , то для нее согласно теореме Остроградского–Гаусса можно записать равенство

$$\oint_{S_2} E_n dS = \frac{q_1}{\epsilon_0}.$$

Так как $E_n = E_2 = \text{const}$, то из условий симметрии следует:

$$E \oint_{S_2} dS = ES_2 = \frac{q_1}{\epsilon_0},$$

откуда

$$E_2 = \frac{q_1}{\epsilon_0 S_2}.$$

Подставив сюда выражение площади сферы, получим

$$E_2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_1}{r_2^2}. \quad (1.8)$$

3. В области III сферическую поверхность проведем радиусом r_3 . Эта поверхность охватывает суммарный заряд $(q_1 + q_2)$. Следовательно, для нее уравнение, записанное на основе теоремы Остроградского–Гаусса, будет иметь вид:

$$\oint_{S_3} E_n dS = \frac{q_1 + q_2}{\epsilon_0}.$$

Отсюда, аналогично первым двум случаям, найдем

$$E_3 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 + q_2}{r_3^2}. \quad (1.9)$$

Убедимся в том, что правые части равенств (1.8) и (1.9) дают единицу напряженности электрического поля:

$$\frac{[q]}{[\epsilon_0][r]^2} = \frac{1\text{Кл}}{1\text{Ф/м} \cdot 1\text{м}^2} = \frac{1\text{Кл}}{1\text{Ф} \cdot \text{м}} = 1\text{В/м}.$$

Выразим все величины в единицах СИ: $q_1 = 10^{-9}$ Кл, $q_2 = 0,5 \cdot 10^{-9}$ Кл, $r_2 = 0,09$ м, $r_3 = 0,15$ м, $1/(4\pi\epsilon_0) = 9 \cdot 10^9$ м/Ф и произведем вычисления:

$$E_2 = 9 \cdot 10^9 \frac{10^{-9}}{(0,09)^2} \text{В/м} = 1,11 \cdot 10^3 \text{В/м} = 1,11 \text{кВ/м};$$

$$E_3 = 9 \cdot 10^9 \frac{(1 - 0,5) \cdot 10^{-9}}{(0,15)^2} \text{В/м} = 200 \text{В/м}.$$

4. Построим график $E(r)$. В области I ($r_1 < R_1$) напряженность $E=0$. В области II ($R_1 \leq r_2 \leq R_2$) напряженность $E_2(r)$ изменяется по закону $1/r^2$. В точке $r = R_1$ напряженность $E_2(R_1) = q_1 / (4\pi\epsilon_0 R_1^2) = 2500 \text{ В/м}$.

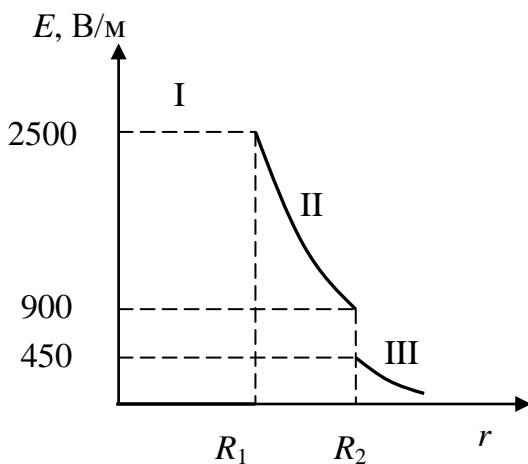


Рис. 1.5

В точке $r = R_2$ (r стремится к R_2 слева) $E_2(R_2) = q_1 / (4\pi\epsilon_0 R_2^2) = 900 \text{ В/м}$. В области III ($r > R_2$) $E_3(r)$ изменяется по закону $1/r^2$, причем в точке $r = R_2$ (r стремится к R_2 справа) $E_3(R_2) = (q_1 - |q_2|) / (4\pi\epsilon_0 R_2^2) = 450 \text{ В/м}$.

Таким образом, функция $E(r)$ в точках $r = R_1$ и $r = R_2$ терпит разрыв. График зависимости $E(r)$ представлен на рис. 1.5.

1.3. Задачи для самостоятельного решения

1.1. Два шарика массой $m = 0,1 \text{ г}$ каждый подвешены в одной точке на нитях длиной $l = 20 \text{ см}$ каждая. Получив одинаковый заряд, шарики разошлись так, что нити образовали между собой угол $\alpha = 60^\circ$. Найти заряд каждого шарика. (Ответ: $q = 50,1 \text{ нКл}$).

1.2. Два одинаковых заряженных шарика подвешены в одной точке на нитях одинаковой длины. При этом нити разошлись на угол α . Шарики погружаются в масло плотностью $\rho_0 = 8 \cdot 10^2 \text{ кг/м}^3$. Определить диэлектрическую проницаемость ϵ масла, если угол расхождения нитей при погружении шариков в масло остается неизменным. Плотность материала шариков $\rho = 1,6 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3$. (Ответ: $\epsilon = 2$).

1.3. Даны два шарика массой $m = 1 \text{ г}$ каждый. Какой заряд q нужно сообщить каждому шарика, чтобы сила взаимного отталкивания зарядов уравновесила силу взаимного притяжения шариков по закону тяготения Ньютона? Рассматривать шарики как материальные точки. (Ответ: $q = 86,7 \cdot 10^{-15} \text{ Кл}$).

1.4. В элементарной теории атома водорода принимают, что электрон обращается вокруг ядра по круговой орбите. Определить скорость v электрона, если радиус орбиты $r = 53 \text{ пм}$, а также частоту n вращения электрона. (Ответ: $v = 2,19 \cdot 10^6 \text{ м/с}$).

1.5. Расстояние между двумя точечными зарядами $q_1 = 1 \text{ мкКл}$ и $q_2 = -q_1$ равно 10 см . Определить силу F , действующую на точечный заряд

$q = 0,1$ мкКл, удаленный на $r_1 = 6$ см от первого и на $r_2 = 8$ см от второго зарядов. (Ответ: $F = 287$ мН).

1.6. В вершинах правильного шестиугольника со стороной $a = 10$ см расположены точечные заряды $q, 2q, 3q, 4q, 5q, 6q$ ($q = 0,1$ мкКл). Найти силу F , действующую на точечный заряд q , лежащий в плоскости шестиугольника и равноудаленный от его вершин. (Ответ: $F = 54$ мН).

1.7. Два одинаковых проводящих заряженных шара находятся на расстоянии $r = 60$ см. Сила отталкивания F_1 шаров равна $70 \cdot 10^{-6}$ Н. После того как шары привели в соприкосновение и удалили друг от друга на прежнее расстояние, сила отталкивания возросла и стала равной $F_2 = 1,6 \cdot 10^{-4}$ Н. Вычислить заряды q_1 и q_2 , которые были на шарах до их соприкосновения. Диаметр шаров считать много меньшим расстояния между ними. (Ответ: $q_1 = 0, q_2 = 14$ мкКл).

1.8. Два одинаковых проводящих заряженных шара находятся на расстоянии $r = 30$ см. Сила притяжения F_1 шаров равна 90 мкН. После того как шары были приведены в соприкосновение и удалены друг от друга на прежнее расстояние, они стали отталкиваться с силой $F_2 = 160$ мкН. Определить заряды q_1 и q_2 , которые были на шарах до их соприкосновения. Диаметр шаров считать много меньшим расстояния между ними. (Ответ: $q_1 = 0,09$ мкКл; $q_2 = -0,01$ мкКл).

1.9. Два положительных точечных заряда q и $4q$ закреплены на расстоянии $l = 60$ см друг от друга. Определить, в какой точке на прямой, проходящей через заряды, следует поместить третий заряд q_1 так, чтобы он находился в равновесии. Указать, какой знак должен иметь этот заряд для того, чтобы равновесие было устойчивым, если перемещения заряда возможны только вдоль прямой, проходящей через закрепленные заряды. (Ответ: между зарядами на расстоянии 40 см от $4q$, положительный).

1.10. Расстояние l между свободными зарядами $q_1 = 180$ нКл и $q_2 = 720$ нКл равно 60 см. Определить точку на прямой, проходящей через заряды, в которой нужно поместить третий заряд q_3 так, чтобы система зарядов находилась в равновесии. Определить величину и знак заряда. Устойчивое или неустойчивое будет равновесие? (Ответ: точка находится на расстоянии 20 см от заряда $q_1, -8 \cdot 10^{-8}$ Кл, неустойчивое).

1.11. Четыре одинаковых заряда q расположены по вершинам квадрата, а отрицательный заряд $q_1 = -0,57$ нКл находится в центре квадрата. Определить величину каждого заряда q , если система зарядов находится в равновесии. Будет ли равновесие устойчивым? (Ответ: $q = 0,5$ нКл).

1.12. Тонкий стержень длиной $l = 10$ см равномерно заряжен. Линейная плотность τ заряда равна 1 мкКл/м. На продолжении оси стержня на рас-

стоянии $a = 20$ см от ближайшего его конца находится точечный заряд $q = 100$ нКл. Определить силу F взаимодействия заряженного стержня и точечного заряда. (Ответ: $F = 1,5$ мН).

1.13. Тонкий длинный стержень равномерно заряжен с линейной плотностью τ заряда. На продолжении оси стержня на расстоянии $a = 20$ см от его конца находится точечный заряд $q = 10$ нКл. Определить линейную плотность τ заряда, если сила взаимодействия заряженного стержня и точечного заряда равна $F = 4,5$ мН. (Ответ: $\tau = 10^4$ нКл/м).

1.14. Тонкий очень длинный стержень равномерно заряжен с линейной плотностью τ заряда, равной 10^4 нКл/м. На перпендикуляре к оси стержня, восстановленном из его конца, находится точечный заряд $q = 10$ нКл. Расстояние a заряда от конца стержня равно 20 см. Найти силу F взаимодействия заряженного стержня и точечного заряда. (Ответ: $F = 6,37$ мН).

1.15. Тонкая нить длиной $l = 20$ см равномерно заряжена с линейной плотностью $\tau = 10$ нКл/м. На расстоянии $a = 10$ см от нити, против ее середины, находится точечный заряд $q = 1$ нКл. Вычислить силу F , действующую на этот заряд со стороны заряженной нити. (Ответ: $F = 1,27$ мкН).

1.16. Тонкий длинный стержень равномерно заряжен с линейной плотностью $\tau = 10^4$ нКл/м. На серединном перпендикуляре к оси стержня находится точечный заряд $q = 10$ нКл. Найти расстояние a от точечного заряда до заряженного стержня, если сила их взаимодействия равна $F = 9$ мН. (Ответ: $a = 0,2$ м).

1.17. Тонкая бесконечная нить согнута под углом 90° . Нить несет заряд, равномерно распределенный с линейной плотностью $\tau = 1$ мкКл/м. Определить силу F , действующую на точечный заряд $q = 0,1$ мкКл, расположенный на продолжении одной из сторон и удаленный от вершины угла на $a = 50$ см. (Ответ: $F = 4,03$ мН).

1.18. Тонкое кольцо радиусом $R = 10$ см равномерно заряжено с линейной плотностью $\tau = 10^3$ нКл/м. На перпендикуляре к плоскости кольца, восстановленном из его середины, находится точечный заряд $q = 10$ нКл. Определить силу F , действующую на точечный заряд q со стороны заряженного кольца, если он удален от центра кольца на: 1) $l_1 = 20$ см; 2) $l_2 = 2$ м. (Ответ: $F_1 = 1$ мН; $F_2 = 15,3$ мкН).

1.19. Тонкое полукольцо радиусом $R = 10$ см несет равномерно распределенный заряд с линейной плотностью $\tau = 10^3$ нКл/м. В центре кривизны полукольца находится заряд $q = 20$ нКл. Определить силу F взаимодействия точечного заряда и заряженного полукольца. (Ответ: $F = 3,6$ мН).

1.20. По тонкому кольцу радиусом $R = 10$ см равномерно распределен заряд с линейной плотностью $\tau = 1$ нКл/м. В центре кольца находится за-

ряд $q = 400$ нКл. Определить растягивающую продольную силу F , действующую в кольце. Взаимодействием зарядов кольца пренебречь. (Ответ: $F = 36$ мкН).

1.21. Определить напряженность E электрического поля, создаваемого точечным зарядом $q = 10$ нКл на расстоянии $r = 10$ см от него. Диэлектрик – масло. (Ответ: $E = 4,09$ кВ/м).

1.22. Расстояние d между двумя точечными зарядами $q_1 = +8$ нКл и $q_2 = -5,3$ нКл равно 40 см. Вычислить напряженность E поля в точке, лежащей посередине между зарядами. Чему будет равна напряженность, если второй заряд будет положительным? (Ответ: $E = 2,99$ кВ/м).

1.23. Электрическое поле создано двумя точечными зарядами $q_1 = 10$ нКл и $q_2 = -20$ нКл, находящимися на расстоянии $d = 20$ см друг от друга. Определить напряженность E поля в точке, удаленной от первого заряда на $r_1 = 30$ см и от второго – на $r_2 = 50$ см. (Ответ: $E = 280$ В/м).

1.24. Расстояние d между двумя точечными положительными зарядами $q_1 = 9q$ и $q_2 = q$ равно 8 см. На каком расстоянии r от первого заряда находится точка, в которой напряженность E поля зарядов равна нулю? Где находилась бы эта точка, если бы второй заряд был отрицательным? (Ответ: $r = 6$ см, $r = 12$ см).

1.25. Два точечных заряда $q_1 = 2q$ и $q_2 = -q$ находятся на расстоянии d друг от друга. Найти положение точки на прямой, проходящей через эти заряды, напряженность E поля в которой равна нулю. (Ответ: за отрицательным зарядом на расстоянии $d_1 = d(\sqrt{2} + 1)$).

1.26. Электрическое поле создано двумя точечными зарядами $q_1 = 40$ нКл и $q_2 = -10$ нКл, находящимися на расстоянии $d = 10$ см друг от друга. Определить напряженность E поля в точке, удаленной от первого заряда на $r_1 = 12$ см и от второго на $r_2 = 6$ см. (Ответ: $E = 34$ кВ/м).

1.27. Тонкое кольцо радиусом $R = 8$ см несет заряд, равномерно распределенный с линейной плотностью $\tau = 10$ нКл/м. Какова напряженность E электрического поля в точке, равноудаленной от всех точек кольца на расстоянии $r = 10$ см? (Ответ: $E = 2,71$ кВ/м).

1.28. На металлической сфере радиусом $R = 10$ см находится заряд $q = 1$ нКл. Определить напряженность E электрического поля в следующих точках: 1) на расстоянии $r_1 = 8$ см от центра сферы; 2) на ее поверхности; 3) на расстоянии $r_2 = 15$ см от центра сферы. Построить график зависимости E от r . (Ответ: $E_1 = 0$, $E_R = 900$ В/м; $E_2 = 400$ В/м).

1.29. Очень длинная тонкая прямая проволока несет заряд, равномерно распределенный по всей ее длине. Вычислить линейную плотность τ заря-

да, если напряженность E поля на расстоянии $a = 0,5$ м от проволоки против ее середины равна 200 В/м. (Ответ: $\tau = 5,55$ нКл/м).

1.30. Расстояние d между двумя длинными тонкими проволоками, расположенными параллельно друг другу, равно 16 см. Проволоки равномерно заряжены разноименными зарядами с линейной плотностью $|\tau| = 150$ мкКл/м. Какова напряженность E поля в точке, удаленной на $r = 10$ см как от первой, так и от второй проволоки? (Ответ: $E = 43,2$ МВ/м).

1.31. Прямой металлический стержень диаметром $d = 5$ см и длиной $l = 4$ м несет равномерно распределенный по его поверхности заряд $q = 500$ нКл. Определить напряженность E поля в точке, находящейся против середины стержня на расстоянии $a = 1$ см от его поверхности. (Ответ: $E = 64,3$ кВ/м).

1.32. На отрезке тонкого прямого проводника длиной $l = 10$ см равномерно распределен заряд с линейной плотностью $\tau = 3$ мкКл/м. Вычислить напряженность E , создаваемую этим зарядом в точке, расположенной на оси проводника и удаленной от ближайшего конца отрезка на расстояние, равное длине этого отрезка. (Ответ: $E = 135$ кВ/м).

1.33. Тонкий стержень длиной $l = 12$ см заряжен с линейной плотностью $\tau = 200$ нКл/м. Найти напряженность E электрического поля в точке, находящейся на расстоянии $r = 5$ см от стержня против его середины. (Ответ: $E = 55,7$ кВ).

1.34. Две концентрические металлические заряженные сферы радиусами 6 см и 10 см несут соответственно заряды 1 нКл и $-0,5$ нКл. Найти напряженности E поля в точках, отстоящих от центра сфер на расстояниях 5 см, 9 см, 15 см. (Ответ: $E_1 = 0$; $E_2 = 1,11$ кВ/м; $E_3 = 200$ В/м).

1.35. Две концентрические металлические заряженные сферы радиусами 6 см и 10 см несут соответственно заряды 1 нКл и $0,5$ нКл. Найти напряженности E поля в точках, отстоящих от центра сфер на расстояниях 5 см, 9 см, 15 см. (Ответ: $E_1 = 0$; $E_2 = 1,11$ кВ/м; $E_3 = 600$ В/м).

Глава 2. ПОТЕНЦИАЛЬНАЯ ЭНЕРГИЯ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЗАРЯДОВ. РАЗНОСТЬ ПОТЕНЦИАЛОВ

2.1. Основные формулы

Потенциальная энергия взаимодействия двух точечных зарядов, находящихся на расстоянии r , при условии, что $W_\infty = 0$:

$$W = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r}.$$

Потенциал электрического поля:

$$\varphi = W/q,$$

где W – потенциальная энергия пробного заряда q , помещенного в данную точку поля.

Работа, совершенная силами поля по перемещению заряда q из точки 1 в точку 2, определяется по формуле

$$A = -\Delta W = q(\varphi_1 - \varphi_2). \quad (2.1)$$

Работу сил электростатического поля также можно выразить

$$A = \int_1^2 F_l dl = q \int_1^2 E_l dl, \quad (2.2)$$

где E_l – проекция вектора напряженности \vec{E} на направление dl . При этом интегрирование производится вдоль любой линии, соединяющей точки 1 и 2.

Из формул (2.1) и (2.2) получим соотношение, связывающее *разность потенциалов* и напряженность электрического поля:

$$\begin{aligned} \varphi_1 - \varphi_2 &= \int_1^2 E_l dl, \\ E_l &= -d\varphi/dl, \end{aligned}$$

где производная $d\varphi/dl$ берется в направлении быстрейшего изменения потенциала, т. е. вдоль силовой линии.

Для однородного поля ($\vec{E} = \text{const}$)

$$E = (\varphi_1 - \varphi_2)/l,$$

где l – расстояние между точками 1 и 2, измеренное вдоль силовой линии.

Потенциал поля точечного заряда q на расстоянии r от него определяется из выражения

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r}.$$

Потенциал поля сферической поверхности радиуса R , по которой равномерно распределен заряд q , для точек, лежащих вне сферы на расстоянии r от ее центра

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r},$$

а для точек, лежащих на поверхности сферы или внутри сферы

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{R}.$$

Принцип суперпозиции электрических полей. Потенциал электрического поля, созданного n точечными зарядами, в данной точке равен алгебраической сумме потенциалов $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$, создаваемых отдельными точечными зарядами q_1, q_2, \dots, q_n ,

$$\varphi = \sum_{i=1}^n \varphi_i .$$

В общем случае, когда система содержит n точечных зарядов q_1, q_2, \dots, q_n , энергия взаимодействия этих зарядов определяется работой, которую эта система зарядов может совершить при удалении их относительно друг друга в бесконечность, и выражается формулой

$$W = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n q_i \varphi_i ,$$

где φ_i – потенциал, создаваемый в месте нахождения i -го заряда системой, за исключением i -го заряда.

Потенциал φ связан с напряженностью электрического поля \vec{E} :

$$\vec{E} = -\text{grad } \varphi = -\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \vec{k} \right).$$

Напряженность \vec{E} направлена в сторону убывания потенциала.

В случае электрического поля, обладающего сферической симметрией, эта связь выражается формулой

$$\vec{E} = -\frac{d\varphi}{dr} \frac{\vec{r}}{r} .$$

Электрический диполь есть система, состоящая из двух равных по модулю и противоположных по знаку зарядов. Вектор \vec{l} , проведенный от отрицательного к положительному заряду, называется *плечом диполя*.

Диполь характеризуется *электрическим дипольным моментом* \vec{p} :

$$\vec{p} = |q| \vec{l} ,$$

где $|q|$ – заряд диполя. Дипольный момент \vec{p} направлен вдоль оси диполя от отрицательного заряда к положительному.

Электрический дипольный момент молекулы принято выражать в единицах атомного масштаба – *дебай* (D) = $3,33 \cdot 10^{-30}$ Кл·м.

Диполь называется *точечным*, если расстояние r от центра диполя до точки, в которой рассматривается действие диполя, много больше плеча диполя l .

Напряженность поля диполя имеет вид:

$$\vec{E}_d = \frac{1}{4\pi\epsilon_0\epsilon} \left(\frac{3(\vec{p}\vec{r})}{r^4} \frac{\vec{r}}{r} - \frac{\vec{p}}{r^3} \right), \text{ или } E_d = \frac{1}{4\pi\epsilon_0\epsilon} \frac{p}{r^3} \sqrt{1+3\cos^2\alpha}, \quad (2.3)$$

где α – угол между радиусом-вектором \vec{r} и электрическим дипольным моментом \vec{p} .

Потенциал поля диполя выражается формулой

$$\varphi_d = \frac{P}{4\pi\epsilon_0 r^2} \cos\alpha. \quad (2.4)$$

Потенциальная энергия диполя в электростатическом поле \vec{E}

$$W = -\vec{p}\vec{E} = -pE \cos\theta,$$

где θ – угол между векторами \vec{p} и \vec{E} .

Механический момент, действующий на диполь с электрическим дипольным моментом \vec{p} , помещенный в однородное электрическое поле \vec{E} ,

$$\vec{M} = [\vec{p}\vec{E}] \text{ или } M = pE \sin\theta.$$

2.2. Примеры решения задач

Пример 2.1. Найти разность потенциалов поля, созданного зарядами, равномерно распределенными вдоль бесконечной прямой нити с линейной плотностью τ .

Решение. Распределение потенциала во всех плоскостях, перпендикулярных к заряженной нити, одинаково. Эквипотенциальные поверхности представляют собой коаксиальные цилиндры, ось которых совпадает с заряженной нитью.

Напряженность поля бесконечно длинной равномерно заряженной нити в точке, расположенной на расстоянии r от нее

$$E = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_0 r} \frac{\vec{r}}{r},$$

где \vec{r} – радиус-вектор, направленный от заряженной нити во внешнее пространство, перпендикулярно этой нити.

Разность потенциалов связана с напряженностью электрического поля соотношением:

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \int_{r_1}^{r_2} E dr = \int_{r_1}^{r_2} \frac{\tau}{2\pi\epsilon_0} \frac{dr}{r} = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{r_2}{r_1}, \quad (r_2 > r_1).$$

Пользуясь представлением о бесконечных проводниках, можно рассчитывать поле только вблизи конечного проводника на расстояниях, малых по сравнению с длиной проводника. Всякий заряженный проводник на достаточно большом расстоянии от него можно рассматривать как точку.

Пример 2.2. Электрическое поле создано диполем, т. е. двумя одинаковыми по величине разноименными зарядами $+q$ и $-q$, находящимися на расстоянии l друг от друга. Найти потенциал этого поля на расстоянии r , большем по сравнению с размером диполя.

Решение. Рассматривая электрическое поле диполя как суперпозицию полей точечных зарядов $+q$ и $-q$, выражение для потенциала φ в точке A , отстоящей от зарядов на расстояниях r_1 и r_2 , можно записать в виде:

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} q \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q(r_1 - r_2)}{r_1 \cdot r_2}.$$

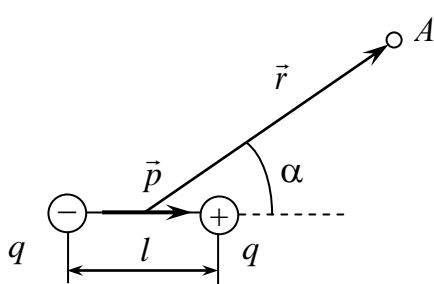


Рис. 2.1

Из рис. 2.1 следует, что при $l/r \ll 1$ разность $(r_1 - r_2) \approx l \cos \alpha$ (α — угол между радиусом-вектором \vec{r} и электрическим дипольным моментом \vec{p}), а произведение $r_1 \cdot r_2 = r^2$.

Тогда потенциал поля диполя:

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{ql \cos \alpha}{r^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{p}{r^2} \cos \alpha. \quad (2.5)$$

Из выражения (2.5) следует, что потенциал поля диполя в отличие от потенциала точечного заряда, убывающего как $1/r$, убывает с расстоянием как $1/r^2$, а также зависит от направления на точку наблюдения, характеризуемого углом α .

Пример 2.3. Три точечных заряда q_1, q_2, q_3 образуют электрически нейтральную систему, причем $q_1 = q_2 = 10$ нКл. Заряды расположены в вершинах равностороннего треугольника. Определить максимальные значения напряженности E_{\max} и потенциала φ_{\max} поля, создаваемого этой системой зарядов, на расстоянии $r = 1$ м от центра треугольника, длина стороны которого $a = 10$ см.

Решение. Нейтральную систему, состоящую из трех точечных зарядов, можно представить в виде диполя. Действительно, «центр тяжести» зарядов q_1 и q_2 лежит на середине отрезка прямой, соединяющей эти заряды (рис. 2.2). В этой точке можно считать сосредоточенным заряд $q = q_1 + q_2 = 2q_1$. Так как система зарядов нейтральная, то

$$q_3 = -(q_1 + q_2) = -q.$$

Так как расстояние между зарядами q_3 и q много меньше расстояния r (рис. 2.3), то систему этих двух зарядов можно считать диполем с электрическим моментом $\vec{p} = |q|\vec{l}$, где $l = |\vec{l}| = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ – плечо диполя.

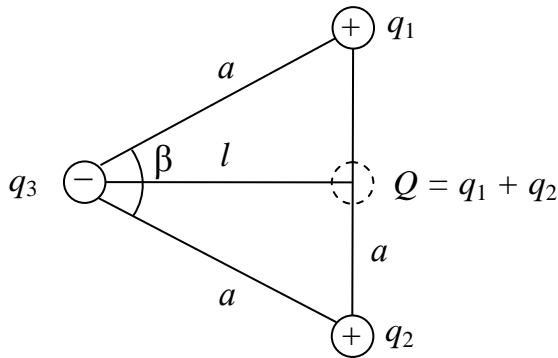


Рис. 2.2

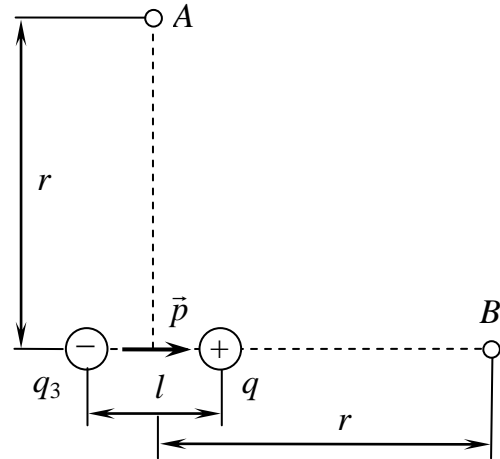


Рис. 2.3

Электрический момент диполя будет равен

$$p = qa\sqrt{3}.$$

Тот же результат можно получить другим способом. Систему из трех зарядов представим как два диполя с электрическими моментами (рис. 2.4), равными по модулю: $p_1 = |\vec{p}_1| = q_1a$; $p_2 = |\vec{p}_2| = q_2a$. Электрический момент \vec{p} системы зарядов найдем как векторную сумму $\vec{p} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2$ (рис. 2.4), а его модуль $p = 2p_1 \cos(\beta/2)$. Так как $p_1 = q_1a$ и $\beta = \pi/3$,

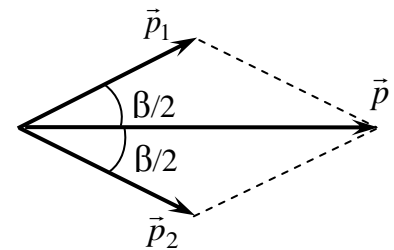


Рис. 2.4

то $p = 2q_1a \frac{\sqrt{3}}{2} = q_1a\sqrt{3}$, что совпадает с найденным ранее значением.

Согласно выражениям (2.3) и (2.4), напряженность и потенциал поля диполя имеют максимальные значения при $\alpha = 0$:

$$E_{\max} = \frac{2p}{4\pi\epsilon_0 r^3}; \quad \Phi_{\max} = \frac{p}{4\pi\epsilon_0 r^2}.$$

Так как $p = q_1a\sqrt{3}$, то

$$E_{\max} = \frac{2q_1a}{4\pi\epsilon_0 r^3} \sqrt{3}; \quad \Phi_{\max} = \frac{q_1a}{4\pi\epsilon_0 r^2} \sqrt{3}.$$

Вычисления дают следующие значения:

$$E_{\max} = 3,12 \text{ В/м}; \varphi_{\max} = 1,56 \text{ В}.$$

Пример 2.4. Определить потенциал в центре кольца с внешним диаметром $D=0,8$ м и внутренним диаметром $d=0,4$ м, если по нему равномерно распределен заряд $q=6 \cdot 10^{-7}$ Кл.

Решение. Разобьем кольцо на концентрические бесконечно тонкие кольца, площадь которых $dS = 2\pi r \cdot dr$, где r – радиус кольца. Потенциал, который создает в центре бесконечно тонкое кольцо радиусом r , определяется как

$$d\varphi = \frac{dS \cdot \sigma}{4\pi\epsilon_0\epsilon r}.$$

Потенциал в центре кольца определяется формулой

$$\varphi = \int_{R_1}^{R_2} \frac{2\pi r \cdot dr \cdot \sigma}{4\pi\epsilon_0 r} = \int_{R_1}^{R_2} \frac{dr \cdot \sigma}{2\epsilon_0} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} (R_2 - R_1). \quad (2.6)$$

Умножим и разделим выражение (2.6) на $\pi(R_2 + R_1)$, получим:

$$\varphi = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} (R_2 - R_1) \cdot \frac{\pi(R_2 + R_1)}{\pi(R_2 + R_1)} = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \frac{q}{(R_2 + R_1)} = 1,8 \cdot 10^4 \text{ В}.$$

2.3. Задачи для самостоятельного решения

2.1. Положительный заряд в 1 мкКл равномерно распределен по поверхности шара радиусом 0,1 м. Найти потенциал этой поверхности и работу, которую необходимо совершить, чтобы переместить положительный пробный заряд в 10^{-8} Кл на поверхность шара из точки, удаленной на 0,3 м от его центра. (Ответ: $\varphi = 3 \cdot 10^4$ В; $A = 6 \cdot 10^{-4}$ Дж).

2.2. Две металлические концентрические сферы с радиусами 15 и 30 см расположены в воздухе. На внутренней сфере распределен заряд $2 \cdot 10^{-8}$ Кл, а потенциал внешней сферы равен 450 В. Вычислить напряженность и потенциал в точках, удаленных от центра сфер на 10, 20 и 36 см. (Ответ: $E_1 = 0$; $E_2 = 4500$ В/м; $E_3 = 2500$ В/м; $\varphi_1 = 750$ В; $\varphi_2 = 450$ В; $\varphi_3 = 125$ В).

2.3. При прикосновении к наэлектризованным телам между ними и рукой проскакивают сантиметровые искры, т. е. разность потенциалов составляет от 10^4 до $2 \cdot 10^4$ В. Сколько энергии вы запасаете, получив заряд в 0,1 мкКл при потенциале в 10 000 В? Чему равен ток электростатического разряда, представляет ли он опасность для человека?

2.4. Два параллельных тонких кольца, радиусы которых одинаковы и равны r , имеют в вакууме общую ось. Расстояние между их центрами d . На первом кольце равномерно распределен положительный заряд q_1 , на втором – отрицательный заряд $-q_2$. Определить разность потенциалов между центрами колец. (Ответ: $\varphi_1 - \varphi_2 = \frac{|q_1| + |q_2|}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{\sqrt{r^2 + d^2}} \right)$).

2.5. Сто маленьких одинаковых капель, каждая с потенциалом 3 В, при слиянии образовали одну каплю. Каков ее потенциал? (Ответ: $\varphi_1 = 65$ В).

2.6. Электрическое поле образовано точечным зарядом $1,5 \cdot 10^{-9}$ Кл. На каком расстоянии друг от друга расположены в вакууме две эквипотенциальные поверхности с потенциалами 45 и 30 В. (Ответ: $d = 0,15$ м).

2.7. Какую требуется совершить работу, чтобы два заряда по $3 \cdot 10^{-6}$ Кл, находящиеся в воздухе на расстоянии 0,6 м, сблизить до 0,2 м? (Ответ: $A = 0,27$ Дж).

2.8. Пылинка массой 10^{-11} г имеет заряд, равный 20 элементарным зарядам, и находится в равновесии между двумя горизонтальными параллельными пластинами с разностью потенциалов 153 В. Каково расстояние между пластинами? В каком направлении и с каким ускорением будет двигаться пылинка, если разность потенциалов на пластинах увеличить на 2 В? (Ответ: $d = 0,005$ м; вверх; $a = 0,12$ м/с²).

2.9. Определить потенциал поля точечного диполя, электрический момент которого $p = 2 \cdot 10^{-14}$ Кл·м, в точке, лежащей на оси диполя на расстоянии $r = 0,1$ м от его центра со стороны положительного заряда. (Ответ: $\varphi = 18$ мВ).

2.10. Тонкий диск радиусом r равномерно заряжен с поверхностной плотностью σ . Найти потенциал и напряженность электрического поля в точке А, лежащей на оси диска на расстоянии a от него. (Ответ: $\varphi = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} (\sqrt{a^2 + r^2} - a)$; $E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left(1 - \frac{a}{\sqrt{a^2 + r^2}} \right)$).

2.11. Равномерно заряженный шар радиусом 2 см в вакууме имеет поверхностную плотность заряда $5 \cdot 10^{-7}$ Кл. Определить потенциал поля в точке, отстоящей на 0,5 м от центра шара, а также потенциал и напряженность поля внутри шара. (Ответ: $\varphi_1 = 50$ В; $\varphi_2 = 10^3$ В; $E = 0$).

2.12. Тысяча одинаковых наэлектризованных дождевых капель сливаются в одну. Как изменится общая электрическая энергия капель, если их общий заряд сохраняется? Считать, что капли сферические и что малень-

кие капли находятся на большом расстоянии друг от друга. (Ответ: энергия увеличилась в 100 раз).

2.13. В точке 1, находящейся на расстоянии $l_1 = 1,4$ м от поверхности шара радиусом $r = 20$ см, имеющего поверхностную плотность заряда $\sigma = 30$ мкКл/м², находится точечный заряд $q = 2$ мкКл. Найти работу, совершаемую при перенесении этого заряда в точку 2, находящуюся на расстоянии $l_2 = 40$ см от центра шара. (Ответ: $A = 0,51$ Дж).

2.14. Известно, что градиент потенциала электрического поля Земли у ее поверхности направлен вертикально вниз и равен (в среднем) 130 В/м. Найти среднюю поверхностную плотность заряда Земли. (Ответ: $\sigma = -1,15 \cdot 10^{-9}$ Кл/м²).

2.15. Расстояние между пластинами плоского конденсатора $d = 5$ мм, разность потенциалов 150 В. На нижней пластине лежит плитка парафина ($\epsilon = 2$) толщиной $d_1 = 4$ мм. Определить поверхностную плотность связанных зарядов этой пластинки. (Ответ: $\sigma = 2,21 \cdot 10^{-7}$ Кл/м²).

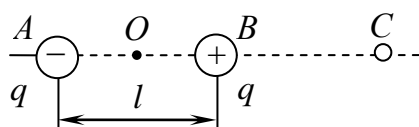


Рис. 2.5

2.16. Заряды диполя $+q$ и $-q$ помещены соответственно в точки A и B (рис. 2.5). На каком расстоянии OC от центра диполя O потенциал поля диполя будет такой же, как потенциал поля, создаваемого зарядом $+q$, помещенным в

точке O ? Докажите, что потенциал поля диполя убывает быстрее, чем поля точечного заряда, в правую сторону от точки C). (Ответ: $r = 1,207l$).

2.17. В одном из двух одинаковых по своим размерам плоских конденсаторов использована для прокладки между пластинами парафинированная бумага ($\epsilon = 2$). Второй конденсатор с неизвестным диэлектриком имеет в 3,5 раза большую емкость, чем первый конденсатор ($C_2 = 3,5C_1$). Каково отношение плотностей связанных зарядов при подключении их к одному и тому же источнику напряжения? (Ответ: $\frac{\sigma_2}{\sigma_1} = 6$).

2.18. Потенциал проводящего шарика радиусом 0,04 м, погруженного в керосин, равен 180 В. Определить сообщенный шарика заряд. Вычислить работу, совершаемую полем при перемещении заряда $0,5 \cdot 10^{-10}$ Кл на расстояние 0,08 м от поверхности шарика, считая по силовой линии. (Ответ: $q = 1,6 \cdot 10^{-9}$ Кл; $A = 6 \cdot 10^{-9}$ Дж).

2.19. Какую работу необходимо совершить, чтобы перенести находящийся в воздухе точечный заряд $2 \cdot 10^{-8}$ Кл из бесконечности в точку, рас-

положенную на расстоянии 0,28 м от поверхности проводящего шара радиусом 0,02 м, если потенциал шара равен 300 В? (Ответ: $A = 4 \cdot 10^{-7}$ Дж).

2.20. Работа электрического поля при перемещении отрицательно заряженной частицы по направлению к закрепленной частице, заряженной положительно, равна 9 Дж. При этом частица перемещается на половину начального расстояния до закрепленной частицы. Какая работа совершена электрическим полем на первой половине пути? (Ответ: $A = 3$ Дж).

2.21. Найти потенциал φ точки поля, находящейся на расстоянии $r = 0,1$ м от центра заряженного шара радиусом $R = 0,01$ м. Задачу решить, если: а) задана поверхностная плотность заряда на шаре $\sigma = 0,1 \cdot 10^{-6}$ Кл/м²; б) задан потенциал шара $\varphi_0 = 300$ В. (Ответ: а) $\varphi = 11,3$ В; б) $\varphi = 30$ В).

2.22. Шарик, имеющий массу $m = 0,001$ кг и заряд $q = 10$ нКл, перемещается из точки 1 с потенциалом $\varphi_1 = 600$ В, в точку 2 с потенциалом $\varphi_2 = 0$. Найти его скорость в точке 1, если в точке 2 она равна $v_2 = 0,2$ м/с. (Ответ: $v_1 = 0,167$ м/с).

2.23. При радиоактивном распаде из ядра атома полония вылетает α -частица со скоростью $v = 1,6 \cdot 10^7$ м/с. Найти кинетическую энергию W_k α -частицы и разность потенциалов U поля, в котором можно разогнать покоящуюся α -частицу до такой же скорости. (Ответ: $W_k = 8,5 \cdot 10^{-13}$ Дж; $U = 2,56$ мВ).

2.24. Электрон, пройдя в плоском конденсаторе путь от одной пластины до другой, приобретает скорость $v = 10^6$ м/с. Расстояние между пластинами $d = 5,3 \cdot 10^{-3}$ м. Найти разность потенциалов U между пластинами, напряженность E электрического поля внутри конденсатора и поверхностную плотность заряда σ на пластинах. (Ответ: $U = 2,8$ В; $E = 530$ В/м; $\sigma = 4,7$ нКл/м²).

2.25. Пучок электронов, ускоренных разностью потенциалов $U_0 = 300$ В, проходит параллельно горизонтальным пластинам незаряженного плоского конденсатора и дает светящееся пятно на флюоресцирующем экране, расположенном на расстоянии $x = 0,12$ м от конденсатора. При зарядке конденсатора пятно на экране смещается на расстояние $y = 0,03$ м. Расстояние между пластинами $d = 0,014$ м; длина конденсатора $l = 0,06$ м. Найти разность потенциалов U , приложенную к пластинам конденсатора. (Ответ:

$$U = \frac{2U_0 y d}{l(x + l/2)} = 28 \text{ В}).$$

2.26. Электрон влетает в плоский горизонтально расположенный конденсатор параллельно пластинам со скоростью $v_0 = 9 \cdot 10^4$ м/с. Разность потенциалов между пластинами $U = 100$ В; расстояние между пластинами $d = 0,01$ м. Найти нормальное a_n , тангенциальное a_τ и полное a ускорения электрона через время $t = 10$ нс после начала его движения в конденсаторе. (Ответ: $a_\tau = 15,7 \cdot 10^{14}$ м/с²; $a_n = 8 \cdot 10^{14}$ м/с²; $a = 17,6 \cdot 10^{14}$ м/с²).

2.27. В трех вершинах квадрата со стороной 0,4 м расположены два положительных и один отрицательный заряды, равные по модулю 5 нКл каждый. Найти напряженность E_1 и потенциал ϕ_1 электрического поля в четвертой вершине, если в противоположной по диагонали вершине находится отрицательный заряд. (Ответ: $E_1 = 300$ В/м, \vec{E}_1 направлен по продолжению диагонали; $\phi_1 \approx 145$ В).

2.28. Восемь капель ртути радиусом $r = 10^{-3}$ м, на которые помещены одинаковые заряды по 0,066 нКл, сливаются в одну каплю. Найти потенциал этой капли. (Ответ: $\phi = 2,4$ В).

2.29. На расстоянии 0,9 м от поверхности шара радиусом 0,1 м, заряженного положительно с поверхностной плотностью $\sigma = 30 \cdot 10^{-6}$ Кл/м², находится точечный положительный заряд 7 мкКл. Какую работу необходимо произвести, чтобы перенести заряд в точку, расположенную на расстоянии 0,5 м от центра шара? Окружающая среда – керосин. (Ответ: $A = 0,24$ Дж).

2.30. Четыре одинаковых заряда по 10 мкКл каждый помещены в вершины квадрата со стороной 5 см. Определить потенциальную энергию этой системы. (Ответ: $W = 0,244$ Дж).

2.31. Расстояние l между зарядами $q = \pm 3,2$ нКл диполя равно 12 см. Найти напряженность E и потенциал ϕ поля, созданного диполем в точке A , удаленной на $r = 8$ см от первого и от второго заряда. (Ответ: $E = 6,75$ кВ/м; $\phi = 0$ В).

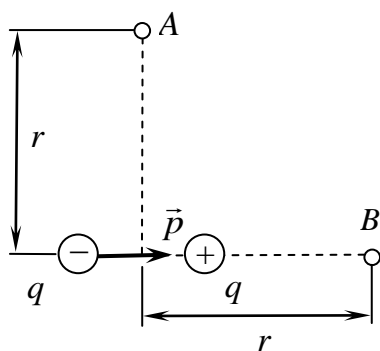


Рис. 2.6

2.32. Диполь с электрическим моментом $p = 0,12$ нКл·м образован двумя точечными зарядами по $q = \pm 1$ нКл. Найти напряженность E и потенциал ϕ электрического поля в точках A и B (рис. 2.6), находящихся на расстоянии $r = 8$ см от центра диполя. (Ответ: $E_A = 1,08$ кВ/м; $\phi_A = 0$; $E_B = 22$ кВ/м; $\phi_B = 386$ В).

2.33. Определить напряженность E и потенциал φ поля, создаваемого диполем с электрическим моментом $p = 10^{-12}$ Кл·м на расстоянии $r = 10$ см от центра диполя, в направлении, составляющем угол $\alpha = 30^\circ$ с вектором электрического момента. (Ответ: $E = 19,6$ В/м; $\varphi = 0,8$ В).

2.34. Диполь с электрическим моментом $p = 10^{-12}$ Кл·м равномерно вращается с частотой $n = 10^3$ с⁻¹ относительно оси, проходящей через центр диполя и перпендикулярной его плечу. Вывести закон изменения потенциала от времени в точке C , находящейся в плоскости вращения диполя на расстоянии $r = 1$ см от центра диполя. В начальный момент времени потенциал в точке C равен $\varphi_0 = 0$. Построить график зависимости $\varphi(t)$. (Ответ: $\varphi(t) = A \sin \omega t$; $A = 90$ В; $\omega = 6,28 \cdot 10^3$ с⁻¹).

2.35. Диполь с электрическим моментом $p = 10^{-12}$ Кл·м равномерно вращается с угловой скоростью $\omega = 10^4$ с⁻¹ относительно оси, проходящей через центр диполя и перпендикулярной его плечу. Определить среднюю потенциальную энергию $\langle \Pi \rangle$ заряда $q = 1$ нКл, находящегося на расстоянии $r = 2$ см и лежащего в плоскости вращения, за время, равное полупериоду (от $t_1 = 0$ до $t_2 = T/2$). В начальный момент времени считать $\Pi = 0$.

(Ответ: $\langle \Pi \rangle = \frac{qp}{4\pi\epsilon_0 r^2} \langle \sin \omega t \rangle = \frac{qp}{4\pi\epsilon_0 r^2} \frac{2}{T} \int_0^{T/2} \sin \frac{2\pi}{T} t dt = 14,3$ нДж).

Глава 3. РАБОТА СИЛ ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКОГО ПОЛЯ. ДВИЖЕНИЕ ЗАРЯДОВ В ЭЛЕКТРИЧЕСКОМ ПОЛЕ

3.1. Основные формулы

Связь между напряженностью и потенциалом:

$$\vec{E} = -\text{grad}\varphi \quad \text{или} \quad \vec{E} = -\left(\vec{i} \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right)$$

В случае электрического поля, обладающего сферической симметрией, эта связь определяется соотношением

$$\vec{E} = -\frac{d\varphi}{dr} \cdot \frac{\vec{r}}{r},$$

тогда потенциал можно определить из выражения:

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \int_1^2 E dr.$$

Работа, совершаемая электрическим полем при перемещении точечного заряда q из одной точки поля, имеющей потенциал φ_1 , в другую, имеющую потенциал φ_2 ,

$$A = q(\varphi_1 - \varphi_2) \text{ или } A = q \int_L E_l dl, \quad (3.1)$$

где E_l – проекция вектора напряженности \vec{E} на направление перемещения; dl – перемещение.

В случае однородного поля, напряженность которого в каждой точке одинакова по модулю и направлению, формула (3.1) приобретает вид:

$$A = q \cdot E \cdot l \cos \alpha,$$

где l – перемещение; α – угол между векторами \vec{E} и перемещения \vec{l} .

3.2. Примеры решения задач

Пример 3.1. Вблизи бесконечной заряженной плоскости находится точечный заряд q . Под действием поля заряд перемещается вдоль силовой линии на расстояние r от плоскости. Электрическое поле совершает работу A . Определить поверхностную плотность заряда σ этой плоскости.

Решение. Бесконечно заряженная плоскость создает однородное электрическое поле. Работа определяется как

$$A = F \cdot r \cdot \cos \alpha,$$

где $F = Eq$ – сила электрического поля, напряженность которого \vec{E} , действующая на заряд q ; r – расстояние, на которое перемещается заряд; α – угол между направлением силы и вектором перемещения. Так как заряд перемещается вдоль силовой линии, то угол $\alpha = 0$. Тогда работа

$$A = E \cdot q \cdot r. \quad (3.2)$$

Напряженность поля бесконечной равномерно заряженной плоскости определяется выражением

$$E = \frac{\sigma}{2\varepsilon\varepsilon_0}, \quad (3.3)$$

где σ – поверхностная плотность заряда; ε_0 – электрическая постоянная; ε – диэлектрическая проницаемость среды.

Подставив выражение (3.3) в (3.2), получим

$$A = \frac{q \cdot \sigma \cdot r}{2\varepsilon\varepsilon_0},$$

отсюда можно получить выражения для определения поверхностной плотности заряда бесконечно заряженной плоскости

$$\sigma = \frac{2A\epsilon\epsilon_0}{q \cdot r}.$$

$$\text{Проверка размерности } [\sigma] = \left[\frac{\text{Дж} \cdot \text{Ф/м}}{\text{Кл} \cdot \text{м}} \right] = \left[\frac{\text{В} \cdot \text{Кл} \cdot \text{Кл}}{\text{Кл} \cdot \text{м}^2 \cdot \text{В}} \right] = \left[\frac{\text{Кл}}{\text{м}^2} \right].$$

Пример 3.2. Электрическое поле создано двумя точечными зарядами $q_1 = 2$ мКл и $q_2 = -3$ мКл, находящимися на расстоянии $a = 0,2$ м друг от друга. Определить работу, которую совершают силы поля по перемещению заряда $q = 5$ мКл из точки 1, находящейся посередине между зарядами, в точку 2, лежащую на расстоянии $a = 0,2$ м на перпендикуляре, восстановленном к точке 1 (рис. 3.1).

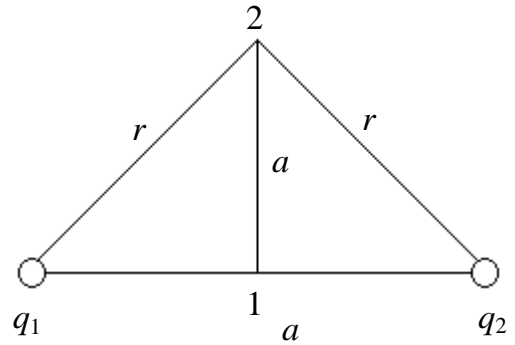


Рис. 3.1

Решение. Работа сил электростатического поля определяется соотношением

$$A = q(\varphi_1 - \varphi_2), \quad (3.4)$$

где φ_1 – потенциал электрического поля в точке 1; φ_2 – потенциал в точке 2. Согласно принципу суперпозиций в этих точках накладываются поля от точечных зарядов q_1 и q_2 , тогда

$$\varphi_1 = \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0 a/2} + \frac{q_2}{4\pi\epsilon_0 a/2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 a/2} (q_1 + q_2); \quad (3.5)$$

$$\varphi_2 = \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0 r} + \frac{q_2}{4\pi\epsilon_0 r} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r} (q_1 + q_2), \quad (3.6)$$

где $r = \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + a^2} = a\sqrt{\frac{5}{4}} = \frac{a}{2}\sqrt{5}$ – расстояние от зарядов q_1 и q_2 до точки 2.

Подставив выражения (3.5) и (3.6) в (3.4), окончательно получим

$$A = q(\varphi_1 - \varphi_2) = q \left(\frac{q_1 + q_2}{4\pi\epsilon_0 a/2} - \frac{q_1 + q_2}{4\pi\epsilon_0 a\sqrt{5}/2} \right) = \frac{q(q_1 + q_2)}{2\pi\epsilon_0 a} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{5}} \right).$$

Проверка размерности $[A] = \left[\frac{\text{Кл} \cdot \text{Кл}}{\text{Ф/м} \cdot \text{м}} \right] = \left[\frac{\text{Кл}^2}{\text{Кл/В}} \right] = [\text{Кл} \cdot \text{В}] = [\text{Дж}]$.

Подставив числовые значения в полученную формулу, определяем

$$A = \frac{5 \cdot 10^{-6} (2 \cdot 10^{-3} - 3 \cdot 10^{-3})}{2 \cdot 3,14 \cdot 8,85 \cdot 10^{-12} \cdot 0,2} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{5}} \right) = 247,4 \text{ Дж.}$$

Пример 3.3. Альфа-частица ($m = 6,7 \cdot 10^{-27}$ кг, $q = 3,2 \cdot 10^{-19}$ Кл) вылетает из ядра радия со скоростью $v_0 = 20$ Мм/с и попадает в однородное электрическое поле, и разгоняется до скорости $v = 40$ Мм/с. Вектор скорости частицы сонаправлен с вектором напряженности электрического поля. Какую разность потенциалов проходит альфа-частица? Какой должна быть напряженность поля, если альфа-частица при этом проходит расстояние $d = 2$ м?

Решение. Электрическое поле, разгоняя альфа-частицу, совершает работу A . Согласно закону сохранения энергии можно записать:

$$W_2 - W_1 = A,$$

где $W_1 = \frac{mv_0^2}{2}$ и $W_2 = \frac{mv^2}{2}$ – кинетические энергии альфа-частицы.

Работа электрического поля

$$A = q(\varphi_1 - \varphi_2),$$

где $(\varphi_1 - \varphi_2)$ – разность потенциалов, которую проходит альфа-частица.

Приравнивая эти выражения, получим

$$(\varphi_1 - \varphi_2) = \frac{m}{2q} (v^2 - v_0^2) = \frac{6,7 \cdot 10^{-27}}{2 \cdot 3,2 \cdot 10^{-19}} \left((40 \cdot 10^6)^2 - (20 \cdot 10^6)^2 \right) = 12,6 \cdot 10^6 \text{ В.}$$

Напряженность E электрического поля

$$E = \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{d} = \frac{12,6 \cdot 10^6}{2} = 6,3 \cdot 10^6 \frac{\text{В}}{\text{м}}.$$

Пример 3.4. Протон, имеющий скорость $v_0 = 9,5 \cdot 10^4$ м/с, влетает в плоский конденсатор на равном расстоянии от пластин конденсатора. Скорость протона направлена параллельно пластинам. При напряжении на пластинах конденсатора $U = 14$ В протон смещается от первоначального направления и попадает в точку C на экране. Определить смещение протона OC (рис. 3.2), если расстояние между пластинами конденсатора

$d = 2,4$ см, длина пластин $b = 6,2$ см, расстояние от конденсатора до экрана $l = 45$ см. Действием силы тяжести пренебруем. Заряд протона $1,6 \cdot 10^{-19}$ Кл, масса протона $1,6 \cdot 10^{-27}$ кг.

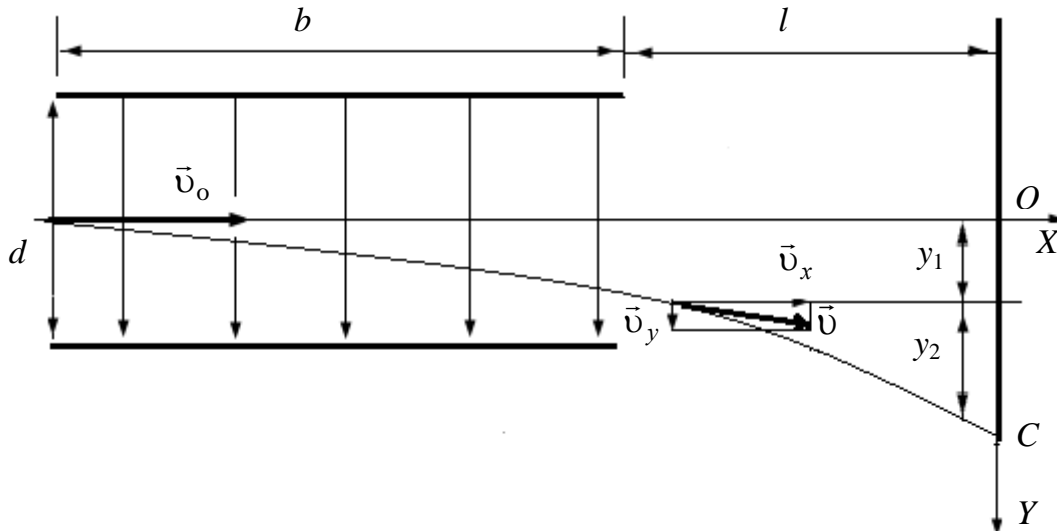


Рис. 3.2

Решение. При движении протона в конденсаторе на частицу действует сила $\vec{F} = q\vec{E}$ электрического поля, направленная вдоль оси OY .

Движение протона в поле конденсатора может быть представлено: равномерным – вдоль оси OX и равноускоренным – вдоль оси OY .

Совместим ось OY с плоскостью экрана (рис. 3.2). Протон, попав в электрическое поле конденсатора, будет двигаться по параболе и отклонится от первоначального направления на расстояние y_1 . Вылетев из конденсатора, частица будет двигаться по инерции и сместится на расстояние y_2 . Таким образом, протон сместится от первоначального направления на расстояние $y = OC$ (рис. 3.2)

$$y = y_1 + y_2.$$

Ускорение протона можно определить из второго закона Ньютона

$$a = \frac{F}{m} = \frac{qE}{m} = \frac{q \cdot U}{m \cdot d}. \quad (3.7)$$

Смещение y_1 происходит за время t_1 , т. е.

$$y_1 = \frac{at_1^2}{2} = \frac{q \cdot U \cdot t_1^2}{2m \cdot d}.$$

Так как движение вдоль оси OX – равномерное, то время движения t_1 можно найти по формуле

$$t_1 = \frac{b}{v_0}. \quad (3.8)$$

Окончательно выражение для смещения y_1 будет иметь вид

$$y_1 = \frac{q \cdot U}{2m \cdot d} \cdot \left(\frac{b}{v_0} \right)^2.$$

Из рис. 3.2 видно, что $\operatorname{tg} \alpha = \frac{y_2}{l}$ и $\operatorname{tg} \alpha = \frac{v_y}{v_0}$, тогда

$$y_2 = \frac{v_y \cdot l}{v_0}, \quad (3.9)$$

где $v_y = at_1$ – проекция скорости.

Подставив в выражение (3.9) формулы (3.7) и (3.8), получим

$$y_2 = \frac{qU}{md} \cdot \frac{b}{v_0} \cdot \frac{l}{v_0} = \frac{qUbl}{mdv_0^2}.$$

Окончательно искомое расстояние y можно определить из соотношения

$$y = y_1 + y_2 = \frac{qUb^2}{2mdv_0^2} + \frac{qUbl}{mdv_0^2} = \frac{qUb}{mdv_0^2} \left(\frac{b}{2} + l \right).$$

Проверка размерности

$$[y] = \left[\frac{\text{Кл} \cdot \text{В} \cdot \text{м}^2}{\text{кг} \cdot \text{м} \cdot (\text{м}/\text{с})^2} \right] = \left[\frac{\text{Дж} \cdot \text{с}^2}{\text{кг} \cdot \text{м}} \right] = \left[\frac{\text{Н} \cdot \text{м}}{\text{Н}} \right] = [\text{м}].$$

Подставив числовые значения в последнюю формулу, получим ответ

$$y = \frac{1,6 \cdot 10^{-19} \cdot 14 \cdot 6,2 \cdot 10^{-2}}{1,6 \cdot 10^{-27} \cdot 2,4 \cdot 10^{-2} (9,5 \cdot 10^4)^2} \left(\frac{6,2 \cdot 10^{-2}}{2} + 0,45 \right) = 0,184 \text{ м.}$$

3.3. Задачи для самостоятельного решения

3.1. Точечный заряд 30 нКл, находящийся на расстоянии 20 см от поверхности сферы радиусом 10 см, с поверхностной плотностью заряда 1 мКл/м² перемещается в бесконечность. Какая при этом совершается работа? (Ответ: $A = 113$ мкДж).

3.2. На расстоянии 6 см от бесконечно длинной заряженной нити находится точечный заряд 0,7 нКл. Под действием поля заряд приближается

к нити до расстояния 2 см, при этом совершается работа 5 мкДж. Найти линейную плотность заряда. (Ответ: $\tau = 0,3$ мкКл/м).

3.3. Напряженность электрического поля электрического поля изменяется в некотором направлении по закону $E = Ar$, где $A = 4$ В/м². Протон начинает двигаться из состояния покоя, из положения $r = 0$. Какую скорость он приобретет, пройдя путь 1 м вдоль этого направления? Масса протона $1,6 \cdot 10^{-27}$ кг, заряд протона $1,6 \cdot 10^{-19}$ Кл. (Ответ: $v = 20$ км/с).

3.4. На отрезке прямого провода равномерно распределен заряд с линейной плотностью 1 мкКл/м. Определить работу сил поля по перемещению заряда 1 нКл из точки A в точку B (рис. 3.3). (Ответ: $A = 3,6$ мДж).

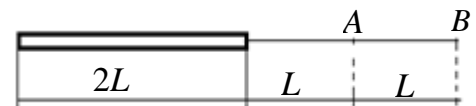


Рис. 3.3

3.5. Электрическое поле создано двумя точечными разноименными зарядами $-q$ и $3q$. Найти работу сил поля по перемещению заряда $q_0 = 0,5$ нКл из точки A в точку B , если модуль заряда $q = 1$ мкКл, расстояние $a = 1$ см (рис. 3.4). (Ответ: $A = -1,15$ мДж).

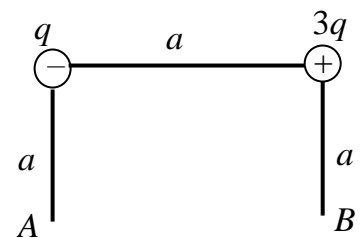


Рис. 3.4

3.6. Заряд 1 нКл перемещается в поле бесконечно заряженной длинной нити с расстояния 12 см до 6 см в направлении, перпендикулярном нити. Линейная плотность бесконечно длинной заряженной нити равна 8 мкКл/м. Определить работу сил поля по перемещению этого заряда. (Ответ: $A = 0,1$ мДж).

3.7. Электростатическое поле создается сферой радиусом $R = 4$ см, равномерно заряженной с поверхностной плотностью $\sigma = 1$ мкКл/м². Определить работу сил поля по перемещению заряда $q = 1$ мкКл между точками поля, лежащими на расстояниях $r_1 = 6$ см и $r_2 = 10$ см от центра сферы. (Ответ: $A = 12$ мкДж).

3.8. Тонкий стержень согнут в кольцо радиусом $R = 10$ см. Он заряжен с линейной плотностью $\tau = 300$ нКл/м. Какую работу надо совершить, чтобы перенести заряд $q = 5$ нКл из центра кольца в точку, расположенную на оси кольца на расстоянии $L = 20$ см от его центра? (Ответ: $A = 46,6$ мкДж).

3.9. Точечные заряды $q_1 = 1$ мкКл и $q_2 = 0,1$ мкКл находятся на расстоянии $r_1 = 10$ см друг от друга. Какую работу совершат силы поля, если второй заряд, отталкиваясь от первого, удаляется от него на расстояние: 1) $r_2 = 10$ м; 2) $r_3 = \infty$. (Ответ: $A_1 = 8,91$ мДж; $A_2 = 9$ мДж).

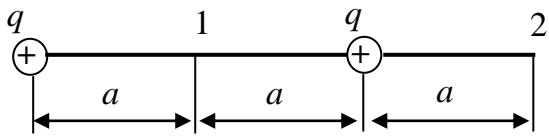


Рис. 3.5

3.10. Электрическое поле создано двумя одинаковыми положительными точечными зарядами q . Найти работу сил поля по перемещению заряда $q_0 = 10$ нКл из точки 1 с потенциалом $\phi = 300$ В в точку 2 (рис. 3.5). (Ответ: $A = 1$ мкДж).

3.11. Определить работу сил поля по перемещению заряда $q_0 = 1$ мкКл в поле, созданном заряженным шаром радиуса R , из точки 1, удаленной от поверхности шара на расстояние R , до точки 2, расположенной на расстоянии $2R$ от поверхности. Потенциал шара равен $\phi = 1000$ В. (Ответ: $A = 0,17$ мДж).

3.12. Тонкий стержень согнут в полукольцо. Стержень заряжен с линейной плотностью $\tau = 100$ нКл/м. Какую работу надо совершить, чтобы перенести заряд $q_0 = 5$ нКл из центра полукольца в бесконечность? (Вектор перемещения лежит в плоскости кольца). (Ответ: $A = 14,13$ мДж).

3.13. Электрическое поле создано четырьмя одинаковыми точечными зарядами $q_0 = 10$ мкКл, расположенными в вершинах квадрата со стороной $a = 5$ см. Найти работу сил поля по перемещению заряда $q_0 = 50$ нКл из центра квадрата в точку, расположенную на перпендикуляре, восстановленном в центре квадрата, на расстоянии $r_1 = 5$ см от центра фигуры. (Ответ: $A = 216$ Дж).

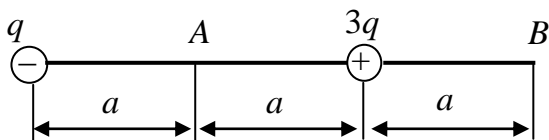


Рис. 3.6

3.14. Электрическое поле создано двумя точечными разноименными зарядами $-q$ и $3q$. Найти работу сил поля по перемещению заряда $q_0 = 5$ нКл из точки A в точку B с потенциалом $\phi = 300$ В (рис. 3.6). (Ответ: $A = 3$ мкДж).

3.15. Электрон и протон находятся на расстоянии $r_1 = 10$ мм. Какая работа будет совершена при сближении зарядов на расстояние $r_2 = 6$ мм. (Ответ: $A = 1,5 \cdot 10^{-26}$ Дж).

3.16. Две бесконечные равномерно заряженные плоскости с поверхностной плотностью зарядов $\sigma_1 = 10$ нКл/м² и $\sigma_2 = -10$ нКл/м² расположены на расстоянии $d = 20$ см. Какую работу совершит поле при перемещении электрона от одной плоскости к другой? (Ответ: $A = 0,36 \cdot 10^{-16}$ Дж).

3.17. Заряд равномерно распределен по бесконечной плоскости. Электрон перемещается из одной точки поля в другую расстояние между ними равно $d = 10$ см. Электрическое поле при этом совершает работу

15 нДж. Определить поверхностную плотность заряда плоскости. (Ответ: $\sigma = 8,3 \text{ Кл/м}^2$).

3.18. Две бесконечные равномерно заряженные плоскости с поверхностной плотностью зарядов $\sigma_1 = 10 \text{ нКл/м}^2$ и $\sigma_2 = 3 \text{ нКл/м}^2$ расположены на расстоянии $d = 10 \text{ см}$. Какую работу совершит поле при перемещении заряда $q_0 = 5 \text{ нКл}$ от одной плоскости к другой? (Ответ: $A = 56,5 \text{ Дж}$).

3.19. Электрическое поле образовано положительно заряженной бесконечно длинной нитью. Двигаясь под действием этого поля от точки, находящейся на расстоянии 1 см от нити, до точки 4 см, альфа-частица изменила свою скорость от $2 \cdot 10^5 \text{ м/с}$ до $3 \cdot 10^5 \text{ м/с}$. Найти линейную плотность заряда нити. (Ответ: $\tau = 3,7 \text{ мкКл/м}$).

3.20. В пространство, где одновременно действуют горизонтальное и вертикальное однородные электрические поля напряженностью 400 В/м и 300 В/м соответственно, вдоль направления силовой линии результирующего поля влетает электрон, скорость которого на пути $2,7 \text{ м}$ изменяется в 2 раза. Определить скорость электрона в конце пути. (Ответ: $v = 0,39 \text{ Мм/с}$).

3.21. Летящий с некоторой скоростью электрон попадает в электрическое поле и, двигаясь вдоль линии напряженности этого поля, полностью теряет свою скорость между точками с разностью потенциалов 400 В . Определить начальную скорость электрона. (Ответ: $v = 1,1 \cdot 10^7 \text{ м/с}$).

3.22. Электрическое поле образовано в вакууме двумя точечными зарядами $q_1 = 40 \text{ нКл}$ и $q_2 = -5 \text{ нКл}$. Расстояние между зарядами 30 см . Какую работу совершит поле, перемещая заряд $q_3 = 5 \text{ нКл}$ из точки A в точку B по дуге окружности радиусом $0,4 \text{ м}$ (рис. 3.7). (Ответ: $A = 1,8 \cdot 10^{-6} \text{ Дж}$).

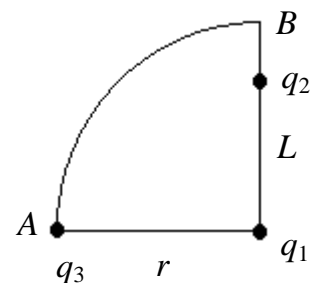


Рис. 3.7

3.23. В плоский воздушный конденсатор параллельно его пластинам влетает электрон со скоростью 30 Мм/с . При вылете из конденсатора он смещается по направлению к одной из пластин на $1,76 \text{ мм}$. Определить отношение заряда электрона к его массе. Длина пластин конденсатора 3 см , расстояние между пластинами $0,2 \text{ мм}$ и разность потенциалов между пластинами 400 В . (Ответ: $q/m = 1,76 \cdot 10^{11} \text{ Кл/кг}$).

3.24. Электрон начинает двигаться в однородном электрическом поле из точки с потенциалом $8,6 \text{ В}$ и за время $0,1 \text{ мкс}$ пролетает расстояние 10 см . Определить напряженность электрического поля, действующего на электрон, и потенциал в конечной точке этого пути. (Ответ: $E = 114 \text{ В/м}$, $\varphi = 20 \text{ В}$).

3.25. В плоский конденсатор на равном расстоянии от пластин влетает электрон параллельно этим пластинам. Скорость электрона 10 Мм/с. Длина пластин 10 см, расстояние между ними 2 см. Определить наименьшее значение разности потенциалов между пластинами, при котором электрон не вылетит из конденсатора. (Ответ: $\Delta\varphi = 22,75$ В).

3.26. Определить величину отклонения луча на экране электронного осциллографа, если ускоряющее (анодное) напряжение 10^3 В, напряжение на отклоняющих пластинах 150 В, длина отклоняющих пластин 1 см, а расстояние от отклоняющих пластин до экрана 15 см. (Ответ: $y = 5,1$ см).

3.27. Электрон влетает в плоский конденсатор длиной 10 см под углом 45° к плоскости пластин, а вылетает под углом 30° . Определить первоначальную кинетическую энергию электрона, если напряжение на пластинах конденсатора 158 В, а расстояние между ними 1 см. (Ответ: $W = 937,5$ эВ).

3.28. Бесконечная плоскость заряжена отрицательно с поверхностной плотностью $35,4$ нКл/м². По направлению силовой линии поля, созданного плоскостью, летит электрон. Определите минимальное расстояние, на которое может приблизиться к плоскости электрон, если на расстоянии 5 см он имел кинетическую энергию 80 эВ. (Ответ: $r_2 = 4$ см).

3.29. Электрон, имея начальную скорость v_0 , проходит в однородном электрическом поле конденсатора по направлению вектора напряженности путь l . При этом скорость электрона уменьшается до v . Определите емкость конденсатора, если его заряд q , а расстояние между пластинами d .

(Ответ: $C = \frac{2l \cdot e \cdot q}{m(v^2 - v_0^2)d}$).

3.30. Протон и α -частица, ускоренные одной и той же разностью потенциалов, влетают в плоский конденсатор параллельно пластинам. Во сколько раз отклонение протона полем конденсатора будет больше отклонения α -частицы? (Ответ: 1).

Глава 4. ЭЛЕКТРИЧЕСКАЯ ЕМКОСТЬ. КОНДЕНСАТОРЫ

4.1. Основные формулы

Электрическая емкость уединенного проводника:

$$C = \frac{\Delta q}{\Delta \varphi},$$

где Δq – заряд, сообщенный проводнику; $\Delta \varphi$ – изменение потенциала, вызванное этим зарядом.

Электрическая емкость уединенной проводящей сферы радиусом R , находящейся в бесконечной среде с диэлектрической проницаемостью ε ,

$$C = 4\pi\varepsilon_0\varepsilon R.$$

Если сфера полая и заполнена диэлектриком, то емкость ее от этого не изменяется.

Электрическая емкость плоского конденсатора

$$C = \frac{\varepsilon_0\varepsilon S}{d}, \quad (4.1)$$

где S – площадь пластин (каждой пластины); d – расстояние между ними; ε – диэлектрическая проницаемость диэлектрика, заполняющего пространство между пластинами.

Электрическая емкость плоского конденсатора, заполненного n слоями диэлектрика толщиной d_i каждый с диэлектрическими проницаемостями ε_i (слоистый конденсатор),

$$C = \frac{\varepsilon_0 S}{\frac{d_1}{\varepsilon_1} + \frac{d_2}{\varepsilon_2} + \dots + \frac{d_n}{\varepsilon_n}}.$$

Электрическая емкость сферического конденсатора (две концентрические сферы радиусами R_1 и R_2 , пространство между которыми заполнено диэлектриком с диэлектрической проницаемостью ε)

$$C = \frac{4\pi\varepsilon_0\varepsilon R_1 R_2}{R_2 - R_1}.$$

Электрическая емкость цилиндрического конденсатора (два коаксиальных цилиндра длиной l и радиусами R_1 и R_2 , пространство между которыми заполнено диэлектриком с диэлектрической проницаемостью ε)

$$C = \frac{2\pi\varepsilon_0\varepsilon l}{\ln(R_2/R_1)}.$$

Электрическая емкость C последовательно соединенных конденсаторов

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \dots + \frac{1}{C_n},$$

где n – число конденсаторов.

Электрическая емкость параллельно соединенных конденсаторов

$$C = C_1 + C_2 + \dots + C_n.$$

Энергия электрического поля конденсатора

$$W = \frac{qU}{2} = \frac{CU^2}{2} = \frac{q^2}{2C}. \quad (4.2)$$

где C – электрическая емкость конденсатора; U – разность потенциалов между обкладками конденсатора.

Подставим в (4.2) формулу (4.1) для плоского конденсатора, получим

$$W = \frac{1}{2} \varepsilon_0 \varepsilon E^2 \cdot V,$$

где E – напряженность электрического поля в среде с диэлектрической проницаемостью ε .

Плотность энергии поля с напряженностью E , созданного в среде с диэлектрической проницаемостью ε

$$\omega = \frac{W}{V} = \frac{\varepsilon \varepsilon_0 E^2}{2}.$$

Сила, с которой пластины плоского конденсатора притягиваются друг к другу,

$$F = -\frac{q^2}{2\varepsilon \varepsilon_0 S},$$

где S – площадь пластин; ε – диэлектрическая проницаемость среды, минус указывает, что сила F является силой притяжения.

Полная энергия системы двух заряженных тел определяется выражением

$$W = W_1 + W_2 + W_{12},$$

где W_1, W_2 – энергии заряженных тел; W_{12} – энергия взаимодействия тел.

4.2. Примеры решения задач

Пример 4.1. Определить электрическую емкость плоского конденсатора с двумя слоями диэлектриков: фарфора толщиной $d_1 = 2$ мм и эбонита толщиной $d_2 = 5$ мм, если площадь пластин равна $S = 100$ см².

Решение. Емкость конденсатора по определению равна $C = \frac{q}{U}$, где q – заряд на пластинах конденсатора; U – разность потенциалов пластин. Заменив в этом равенстве общую разность потенциалов U суммой напряжений на слоях диэлектриков $U_1 + U_2$, получим

$$C = \frac{q}{U_1 + U_2}. \quad (4.3)$$

Приняв во внимание, что $q = \sigma S$, $U_1 = E_1 d_1 = \frac{D}{\varepsilon_0 \varepsilon_1} d_1$ и $U_2 = E_2 d_2 = \frac{D}{\varepsilon_0 \varepsilon_2}$, равенство (4.3) можно переписать в виде:

$$C = \frac{\sigma S}{\frac{D}{\varepsilon_0 \varepsilon_1} d_1 + \frac{D}{\varepsilon_0 \varepsilon_2} d_2}, \quad (4.4)$$

где σ – поверхностная плотность заряда на пластинах; E_1 и E_2 напряженности поля в первом и втором слоях диэлектрика соответственно; D – электрическое смещение поля в диэлектриках. Умножив числитель и знаменатель равенства (4.4) на ε_0 и учтя, что $D = \sigma$, окончательно получим

$$C = \frac{\varepsilon_0 S}{\frac{d_1}{\varepsilon_1} + \frac{d_2}{\varepsilon_2}}. \quad (4.5)$$

Сделав вычисления по формуле (4.5), найдем:

$$C = 98,3 \text{ пФ}.$$

Пример 4.2. Два одинаковых плоских конденсатора соединены параллельно и заряжены до напряжения $U_0 = 480 \text{ В}$. После отключения от источника тока расстояние между пластинами одного из конденсаторов уменьшили в два раза. Каким станет напряжение U на конденсаторах.

Решение. При параллельном соединении конденсаторов их общая емкость

$$C_{\text{бат}} = C_1 + C_2 = 2C.$$

Заряд батареи $q_1 = C_{\text{бат}} U_0 = 2CU_0$.

При уменьшении в два раза расстояния между пластинами конденсатора его емкость увеличится в два раза (согласно формуле $C = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon S}{d}$) и станет $C' = 2C$, тогда их общая емкость будет равна

$$C'_{\text{бат}} = 2C + C = 3C.$$

Заряд станет равным $q_2 = C'_{\text{бат}} U = 3CU$.

По закону сохранения электрического заряда $q_1 = q_2$, так как батарея конденсаторов отключена от источника. Следовательно, $2CU_0 = 3CU$, откуда $U = \frac{2U_0}{3}$;

$$U = \frac{2}{3} \cdot 480 = 320 \text{ В}.$$

Пример 4.3. Конденсатор электроемкостью $C_1 = 3 \text{ мкФ}$ был заряжен до разности потенциалов $U_1 = 40 \text{ В}$. После отключения от источника тока конденсатор был соединен параллельно с другим незаряженным конденсатором электроемкостью $C_2 = 5 \text{ мкФ}$. Определить энергию, израсходованную на образование искры в момент присоединения второго конденсатора.

Решение. Энергия, израсходованная на образование искры, имеет вид:

$$\Delta W = W_1 - W_2, \quad (4.6)$$

где W_1 – энергия, которой обладал первый конденсатор до присоединения к нему второго конденсатора; W_2 – энергия, которую имеет батарея, составленная из первого и второго конденсаторов. Подставив в равенство (4.6) формулу энергии заряженного конденсатора $W = \frac{CU^2}{2}$ и приняв во внимание, что общая электроемкость параллельно соединенных конденсаторов равна сумме электроемкостей отдельных конденсаторов, получим

$$\Delta W = \frac{C_1 U_1^2}{2} - \frac{(C_1 + C_2) U_2^2}{2}, \quad (4.7)$$

где C_1 и C_2 – электроемкости первого и второго конденсаторов; U_1 – разность потенциалов, до которой был заряжен первый конденсатор; U_2 – разность потенциалов на зажимах батареи конденсаторов.

Учитывая, что заряд после присоединения второго конденсатора остался прежним, выразим разность потенциалов U_2 следующим образом:

$$U_2 = \frac{q}{C_1 + C_2} = \frac{C_1 U_1}{C_1 + C_2}. \quad (4.8)$$

Подставив выражение (4.8) в (4.7), получим

$$\Delta W = \frac{C_1 U_1^2}{2} - \frac{(C_1 + C_2) C_1^2 U_1^2}{2(C_1 + C_2)^2}.$$

После преобразований найдем:

$$\Delta W = \frac{1}{2} \frac{C_1 C_2}{(C_1 + C_2)} U_1^2.$$

Пример 4.4. Плоский конденсатор заряжен до разности потенциалов $U = 1 \text{ кВ}$. Расстояние между пластинами конденсатора $d = 1 \text{ см}$. Диэлектрик – стекло. Определить объемную плотность энергии поля конденсатора.

Решение. Объемная плотность энергии конденсатора

$$\omega = \frac{W}{V}, \quad (4.9)$$

где W – энергия поля конденсатора; $V = Sd$ – объем пространства, заключенного между пластинами конденсатора.

Энергия поля конденсатора определяется по формуле

$$W = \frac{CU^2}{2}, \quad (4.10)$$

где U – разность потенциалов, до которой заряжены пластины конденсатора; $C = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 S}{d}$ – его емкость. Подставив выражение для определения емкости C в формулу (4.10) и затем выражения W и V в формулу (4.9), получим:

$$\omega = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 U^2}{2d^2}; \quad \omega = 0,309 \frac{\text{Дж}}{\text{м}^3}.$$

4.3. Задачи для самостоятельного решения

4.1. Найдите емкость C уединенного металлического шара радиусом $R = 1$ см. (Ответ: $C = 1,11$ пФ).

4.2. Определите заряды на каждом из конденсаторов в цепи, изображенной на рис. 4.1, если $C_1 = 2$ мкФ, $C_2 = 4$ мкФ, $C_3 = 6$ мкФ, $\xi = 18$ В. (Ответ: $q_1 = 30$ мкКл; $q_2 = 12$ мкКл; $q_3 = 18$ мкКл).

4.3. Определите емкость C Земли, принимая ее за шар радиусом $R = 6400$ км. (Ответ: $C = 180$ пФ).

4.4. Шар радиусом $R_1 = 6$ см заряжен до потенциала $\varphi_1 = 300$ В, а шар радиусом $R_2 = 4$ см – до потенциала $\varphi_2 = 500$ В. Определить потенциал φ шаров после того, как их соединили металлическим проводником. Емкостью соединительного проводника пренебречь. (Ответ:

$$\varphi = \frac{R_1\varphi_1 + R_2\varphi_2}{R_1 + R_2} = 380 \text{ В}).$$

4.5. Определите емкость C плоского слюдяного конденсатора, площадь S пластин которого равна 100 см^2 , а расстояние между ними равно $0,1$ мм (диэлектрическая проницаемость слюды $\varepsilon = 7$). (Ответ: $C = 6,2$ нФ).

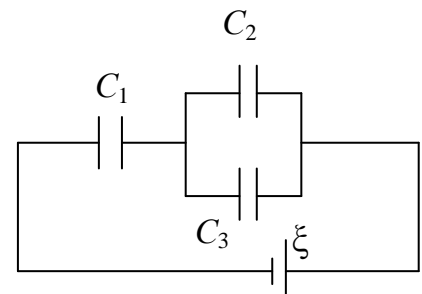


Рис. 4.1

4.6. Пять конденсаторов одинаковой емкости соединены последовательно в батарею. Параллельно одному из конденсаторов подключен статический вольтметр, емкость которого в два раза меньше емкости каждого конденсатора. Вольтметр показывает $U_V = 500$ В. Какова разность потенциалов на всей батарее? (Ответ: $U = 3500$ В).

4.7. Расстояние между пластинами плоского конденсатора равно $d = 1,33$ мм, площадь S пластин равна 20 см². В пространстве между пластинами конденсатора находятся два слоя диэлектриков: слюды толщиной $d_1 = 0,7$ мм и эбонита толщиной $d_2 = 0,3$ мм. Определите емкость конденсатора (диэлектрическая проницаемость слюды $\varepsilon = 7$, эбонита $\varepsilon = 3$). (Ответ: $C = \frac{\varepsilon_0 S}{\frac{d_1}{\varepsilon_1} + \frac{d_2}{\varepsilon_2} + \frac{d - (d_1 + d_2)}{\varepsilon_3}} = 35,4$ пФ).

4.8. Две концентрические металлические сферы радиусами $R_1 = 2$ см и $R_2 = 2,1$ см образуют сферический конденсатор. Определите его емкость C , если пространство между сферами заполнено парафином (диэлектрическая проницаемость парафина $\varepsilon = 2$). (Ответ: $C = \frac{4\pi\varepsilon_0\varepsilon R_1 R_2}{R_2 - R_1} = 93,3$ пФ).

4.9. В плоский конденсатор вдвинули плитку парафина толщиной $d = 1$ см, которая плотно прилегает к его пластинам. На сколько нужно увеличить расстояние между пластинами, чтобы получить прежнюю емкость? (Диэлектрическая проницаемость парафина $\varepsilon = 2$). (Ответ: $\Delta d = 0,5$ см).

4.10. Конденсатор состоит из двух концентрических сфер. Радиус R_1 внутренней сферы равен 10 см, внешней $R_2 = 10,2$ см. Промежуток между сферами заполнен парафином. Внутренней сфере сообщен заряд $q = 5$ мкКл. Определите разность потенциалов U между сферами. (Диэлектрическая проницаемость парафина $\varepsilon = 2$). (Ответ: $U = 4,41$ кВ).

4.11. К воздушному конденсатору, заряженному до разности потенциалов $U = 600$ В и отключенному от источника напряжения, присоединили параллельно второй незаряженный конденсатор таких же размеров и формы, но с диэлектриком (фарфор). Определите диэлектрическую проницаемость ε фарфора, если после присоединения второго конденсатора разность потенциалов уменьшилась до $U_1 = 100$ В. (Ответ: $\varepsilon = 5$).

4.12. Два конденсатора емкостями $C_1 = 3$ мкФ и $C_2 = 6$ мкФ соединены между собой и присоединены к батарее с эдс, равной 120 В. Определить заряды q_1 и q_2 конденсаторов и разности потенциалов U_1 и U_2

между их обкладками, если конденсаторы соединены параллельно. (Ответ: $q_1 = 360$ мкКл; $q_2 = 720$ мкКл; $U = 120$ В).

4.13. Конденсатор емкостью $C_1 = 0,2$ мкФ был заряжен до разности потенциалов $U_1 = 320$ В. После того как его соединили параллельно со вторым конденсатором, заряженным до разности потенциалов $U_2 = 450$ В, напряжение на первом конденсаторе изменилось до $U = 400$ В. Вычислить емкость C_2 второго конденсатора. (Ответ: $C_2 = \frac{U - U_1}{U_2 - U_1} C_1 = 0,32$ мкФ).

4.14. Конденсатор емкостью $C_1 = 0,6$ мкФ был заряжен до разности потенциалов $U_1 = 300$ В и соединен со вторым конденсатором емкостью $C_2 = 0,4$ мкФ, заряженным до разности потенциалов $U_2 = 150$ В. Найти заряд Δq , перетекший с пластин первого конденсатора на второй. (Ответ: $\Delta q = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2} (U_1 - U_2) = 36$ мкКл).

4.15. Три одинаковых плоских конденсатора соединены последовательно. Емкость C такой батареи конденсаторов равна 80 пФ. Площадь S каждой пластины конденсатора равна 100 см². Диэлектрик – стекло ($\epsilon = 7$). Какова толщина d стекла? (Ответ: $d = 2,32$ мм).

4.16. Конденсаторы соединены так, как это показано на рис. 4.2. Емкости конденсаторов: $C_1 = 0,2$ мкФ, $C_2 = 0,1$ мкФ, $C_3 = 0,3$ мкФ, $C_4 = 0,4$ мкФ. Определите емкость C батареи конденсаторов. (Ответ: $C = 0,21$ мкФ).

4.17. Конденсаторы с емкостями $C_1 = 10$ нФ, $C_2 = 40$ нФ, $C_3 = 2$ нФ, $C_4 = 30$ нФ соединены так, как это показано на рис. 4.3. Определите емкость C батареи конденсаторов. (Ответ: $C = 20$ пФ).

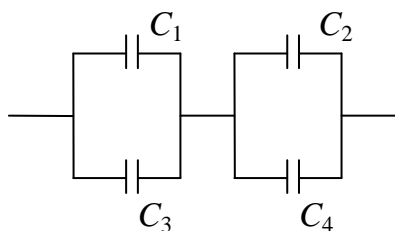


Рис. 4.2

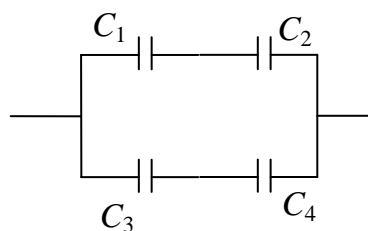


Рис. 4.3

4.18. Конденсаторы соединены так, как это показано на рис. 4.4. Емкости конденсаторов: $C_1 = 2$ мкФ, $C_2 = 2$ мкФ, $C_3 = 3$ мкФ, $C_4 = 1$ мкФ. Разность потенциалов на обкладках четвертого конденсатора $U_4 = 100$ В. Найти заряды и разности потенциалов на обкладках каждого конденсатора, а также общий заряд и разность потенциалов батареи конденсаторов.

(Ответ: $q_1 = 200$ мкКл; $q_2 = 120$ мкКл; $q_3 = 120$ мкКл; $q_4 = 100$ мкКл; $U_1 = 110$ В; $U_2 = 60$ В; $U_3 = 40$ В; $q = 220$ мкКл; $U = 210$ В).

4.19. Конденсаторы емкостями $C_1 = 1$ пФ, $C_2 = 2$ пФ, $C_3 = 2$ пФ, $C_4 = 4$ пФ, $C_5 = 3$ пФ соединены так, как это показано на рис. 4.5. Определите емкость C батареи конденсаторов. (Ответ: $C = 2$ пФ. Указание. Доказать, что если $C_1/C_2 = C_3/C_4$, то $\varphi_A = \varphi_B$, и, следовательно, емкость C_5 при определении общей емкости схемы значения не имеет).

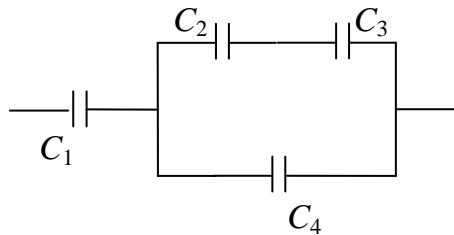


Рис. 4.4

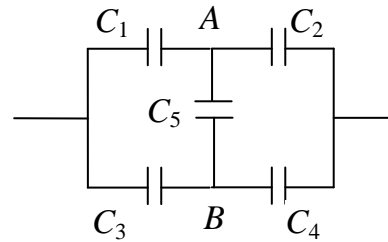


Рис. 4.5

4.20. Плоский конденсатор, между обкладками которого находится пластинка из диэлектрика с проницаемостью ϵ , присоединен к аккумулятору. Заряд конденсатора равен q_0 . Какой заряд Δq пройдет через аккумулятор при удалении пластинки? (Ответ: $\Delta q = \frac{\epsilon - 1}{\epsilon} q_0$).

4.21. Плоский воздушный конденсатор заряжен до разности потенциалов $U = 1000$ В. С какой силой F притягиваются одна к другой его пластины? Площадь пластин $S = 100$ см², расстояние между ними $d = 1$ мм. (Ответ: $F = \frac{\epsilon_0 S U^2}{2d^2} = 4,4 \cdot 10^{-2}$ Н).

4.22. На пластинах плоского конденсатора равномерно распределен заряд с поверхностной плотностью $\sigma = 0,2$ мкКл / м². Расстояние d между пластинами равно 1 мм. Насколько изменится разность потенциалов на его обкладках при увеличении расстояния d между пластинами до 3 мм? (Ответ: $\Delta U = 22,6$ В).

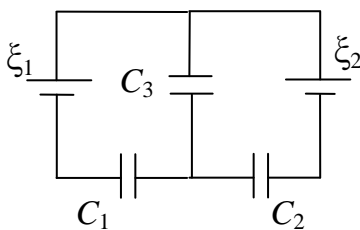


Рис. 4.6

4.23. Расстояние d между пластинами плоского конденсатора равно 2 см, разность потенциалов $U = 6$ кВ. Заряд q каждой пластины равен 10 нКл. Вычислите энергию W поля конденсатора и силу F взаимного притяжения пластин. (Ответ: $W = 30$ мкДж, $F = 30$ мкН).

4.24. Определите заряды конденсаторов q_1 , q_2 , q_3 в цепи, параметры которой указаны на рис. 4.6.

(Ответ: $q_1 = \frac{C_1(C_2\xi_1 + C_3\xi_1 - C_2\xi_2)}{C_1 + C_2 + C_3}$; $q_2 = \frac{C_2(C_1\xi_2 + C_3\xi_2 - C_1\xi_1)}{C_1 + C_2 + C_3}$;
 $q_3 = \frac{C_3(C_1\xi_1 + C_2\xi_2)}{C_1 + C_2 + C_3}$).

4.25. Какое количество теплоты Q выделится при разряде плоского конденсатора, если разность потенциалов U между пластинами равна 15 кВ, расстояние $d = 1$ мм, диэлектрик – слюда и площадь каждой пластины равна $S = 300$ см². (Ответ: $Q = 0,209$ Дж).

4.26. Сила F притяжения между пластинами плоского воздушного конденсатора равна 50 мН. Площадь S каждой пластины равна 200 см². Найдите плотность энергии ω поля конденсатора. (Ответ: $\omega = 2,5$ Дж/м³).

4.27. Плоский воздушный конденсатор состоит из двух круглых пластин радиусом $r = 10$ см каждая. Расстояние d_1 между пластинами равно 1 см. Конденсатор зарядили до разности потенциалов $U = 1,2$ кВ и отключили от источника тока. Какую работу A нужно совершить, чтобы, удаляя пластины друг от друга, увеличить расстояние между ними до $d_2 = 3,5$ см. (Ответ: $A = 50$ мкДж).

4.28. Конденсаторы емкостями $C_1 = 1$ мкФ, $C_2 = 2$ мкФ, $C_3 = 3$ мкФ включены в цепь с напряжением $U = 1,1$ кВ. Определите энергию каждого конденсатора в случаях: 1) последовательного их включения; 2) параллельного включения. (Ответ: 1) $W_1 = 1,605$ Дж; $W_2 = 3,21$ Дж; $W_3 = 4,815$ Дж; 2) $W_1 = 0,18$ Дж; $W_2 = 0,9$ Дж; $W_3 = 0,6$ Дж).

4.29. Емкость C плоского конденсатора равна 111 пФ. Диэлектрик – фарфор. Конденсатор зарядили до разности потенциалов $U = 600$ В и отключили от источника напряжения. Какую работу A нужно совершить, чтобы вынуть диэлектрик из конденсатора? Трение пренебрежимо мало. (Ответ: $A = 0,18$ Дж).

4.30. Расстояние между пластинами плоского конденсатора с диэлектриком из парафиновой бумаги ($\epsilon = 2$) равно 2 мм, а напряжение между пластинами равно 200 В. Найти плотность энергии поля. (Ответ: $\omega = 88$ мДж/м³).

4.31. Плотность энергии заряженного воздушного конденсатора 300 Дж/м³, площадь пластин $S = 10^{-2}$ м². С какой силой взаимодействуют обкладки конденсатора? (Ответ: $F = 3$ Н).

4.32. Определить энергию, перешедшую в тепло при соединении воздушных конденсаторов одноименно заряженными обкладками. Емкость первого конденсатора $C_1 = 2$ мкФ, второго – $C_2 = 0,5$ мкФ. Напряжение на первом конденсаторе до соединения $U_1 = 100$ В, а на втором – $U_2 = 50$ В. (Ответ: $W = 0,5$ мДж).

4.33. Емкость одного шара 8 мкФ, а потенциал $\varphi_1 = 1000$ В. Емкость второго шара 2 мкФ, потенциал $\varphi_2 = 1000$ В. Сколько энергии выделится в проводнике, которым соединяют шары? (Ответ: $W = 3,2$ Дж).

4.34. Какое количество теплоты выделится при заземлении заряженного до потенциала $\varphi = 3000$ В шара радиуса $R = 5$ см. (Ответ: $W = 25$ мкДж).

4.35. Плоский воздушный конденсатор зарядили и отключили от источника, а затем погрузили в керосин, диэлектрическая проницаемость которого равна 2. Определить отношение энергии, первоначально запасённой в конденсаторе, к конечной энергии. (Ответ: $W_0/W = 0,5$).

Глава 5. ЗАКОНЫ ПОСТОЯННОГО ТОКА

5.1. Основные формулы

Упорядоченное движение заряженных частиц или тел, представляющее собой перенос заряда, называется *электрическим током*. Электрический ток характеризуется величиной, называемой силой тока.

Сила тока I – скалярная физическая величина, численно равная отношению заряда, переносимого через поперечное сечение проводника, к соответствующему промежутку времени:

$$I = \frac{dq}{dt},$$

где dq – электрический заряд, проходящий за время dt через поперечное сечение проводника.

Если сила тока и его направление не изменяются с течением времени, то ток называется *постоянным*:

$$I = \frac{q}{t}.$$

В системе СИ единицей силы тока служит *ампер* (А):

$$1 \text{ ампер} = \frac{1 \text{ кулон}}{1 \text{ секунда}}.$$

За направление тока принимают направление движения положительных зарядов, противоположное тому, в котором реально движутся свободные электроны в металле.

Физическая величина, определяемая силой тока, проходящего через единицу площади поперечного сечения проводника, перпендикулярного направлению тока, называется *плотностью тока*:

$$j = \frac{dI}{dS}.$$

Единица измерения плотности тока $[j] = 1 \text{ А/м}^2$.

Для поддержания постоянного тока в проводнике необходимо поддерживать постоянную разность потенциалов на его концах, т. е. нужно создавать внутри проводника электрическое поле. Сила тока зависит от величины разности потенциалов (от напряжения).

Напряжением U на участке называется физическая величина, определяемая работой, совершаемой электрическим полем при перемещении единичного положительного заряда на данном участке цепи.

Закон Ома для участка цепи: сила тока I , текущего по металлическому проводнику, прямо пропорциональна напряжению и обратно пропорциональна сопротивлению проводника:

$$I = \frac{U}{R}.$$

Закон Ома позволяет установить единицу сопротивления: 1 Ом – сопротивление такого проводника, в котором при напряжении 1 В течет ток 1 А. Электрическое сопротивление R зависит от размеров, формы и материала, из которого проводник изготовлен. Для однородного линейного проводника сопротивление R прямо пропорционально его длине l и обратно пропорционально площади его поперечного сечения:

$$R = \rho \frac{l}{S},$$

где ρ – удельное электрическое сопротивление. Единица измерения удельного электрического сопротивления $[\rho] = 1 \text{ Ом} \cdot \text{м}$.

Величина, обратная сопротивлению проводника, называется его проводимостью:

$$G = \frac{1}{R}.$$

Единица измерения проводимости $[G] = \text{См}$ (сименс).

Удельное сопротивление и сопротивление линейно зависят от температуры:

$$\begin{cases} \rho = \rho_0(1 + \alpha t) \\ R = R_0(1 + \alpha t) \end{cases},$$

где ρ и ρ_0 , R и R_0 – соответственно удельные сопротивления и сопротивления проводника при $t = 0 \text{ }^\circ\text{С}$; α – температурный коэффициент сопротивления.

При *последовательном* соединении проводников сила тока остается постоянной $I = \text{const}$ (рис. 5.1).

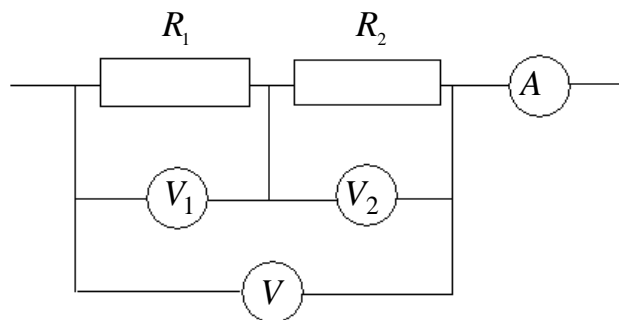


Рис. 5.1

Общее напряжение проводников, соединенных последовательно, равно сумме напряжения в отдельных проводниках $U = U_1 + U_2$.

Аналогично общее сопротивление отдельных проводников при их последовательном соединении равно сумме сопротивлений отдельных проводников:

$$R = \sum_{i=1}^n R_i \text{ или } R = R_1 + R_2.$$

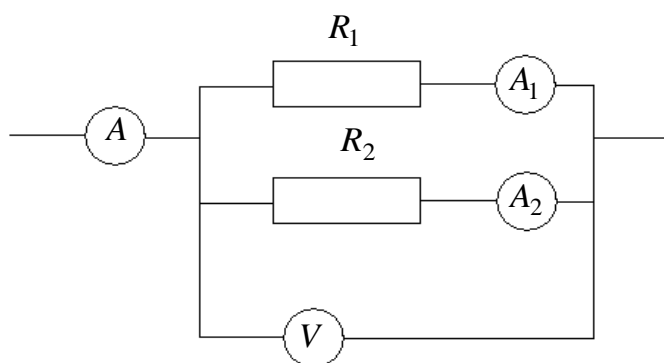


Рис. 5.2

При *параллельном* соединении проводников напряжение на каждом из них одинаково $U = \text{const}$, $I = I_1 + I_2$ (рис. 5.2)

Общее сопротивление проводников, соединенных параллельно, может быть найдено по формуле

$$\frac{1}{R} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{R_i}. \quad (5.1)$$

Формула (5.1) показывает, что общая проводимость ряда параллельно включенных проводников равна сумме их отдельных проводимостей.

При решении задач на определение силы тока, напряжения или сопротивления на каком-либо участке электрической цепи необходимо:

- 1) начертить схему, указав на ней все элементы цепи;
- 2) установить способ соединения элементов цепи;
- 3) указать направление токов на участках цепи;
- 4) используя формулы последовательного и параллельного соединения проводников, определить полное сопротивление цепи;
- 5) используя закон Ома, рассчитать электрическую цепь: определить силу тока и напряжение на соответствующих участках цепи.

5.2. Примеры решения задач

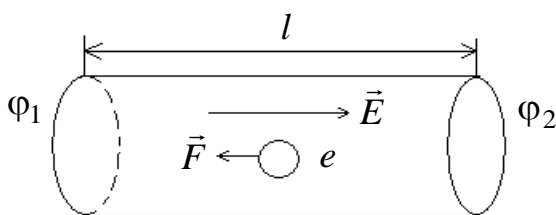


Рис. 5.3

Пример 5.1. По медному проводу сечением $0,3 \text{ мм}^2$ (рис. 5.3) течет ток $0,3 \text{ А}$. Определить силу тока, действующую на отдельные свободные электроны со стороны электрического поля. Удельное сопротивление меди $17 \text{ нОм} \cdot \text{м}$.

Решение. Сила, действующая на электрон со стороны электрического поля, $F = eE$, где E – напряженность электрического поля. Напряженность электрического поля связана с напряжением $U = \varphi_1 - \varphi_2$ соотношением $E = \frac{U}{l}$.

Из закона Ома находим напряжение $U = IR$, где R – сопротивление проводника. Определяем $R = \rho \frac{l}{S}$, где ρ – удельное сопротивление проводника; l – его длина; S – площадь поперечного сечения. Подставим значения напряжения и сопротивления, определим напряженность:

$$E = \frac{U}{l} = \frac{IR}{l} = \frac{I\rho}{S} = \frac{I\rho}{S}.$$

Найдем значение силы, действующей на электрон, $F = e \frac{I\rho}{S}$.

Проверим размерность:

$$F = \left[\text{Кл} \cdot \frac{\text{А} \cdot \text{Ом} \cdot \text{м}}{\text{м}^2} \right] = \left[\text{Кл} \cdot \frac{\text{А} \cdot \text{В}}{\text{м} \cdot \text{А}} \right] = \left[\frac{\text{Дж}}{\text{м}} \right] = \text{Н}.$$

Произведем вычисление:

$$F = 1,6 \cdot 10^{-19} \cdot 0,3 \cdot \frac{17 \cdot 10^{-9}}{0,3 \cdot 10^{-6}} = 2,72 \cdot 10^{-21} \text{ (Н)}.$$

Пример 5.2. Определить, во сколько раз изменяется сила тока, проходящего через платиновую печь, если при постоянном напряжении на зажимах ее температура повышается от 20 до 1200 °С.

Решение. При прохождении тока по проводникам они нагреваются, и сопротивление увеличивается. Зависимость сопротивления от температуры выражается уравнением $R = R_0(1 + \alpha t)$, где R_0 – сопротивление при $t = 0$ °С, R – при температуре t . Сопротивление при температуре t_1 равно $R_1 = R_0(1 + \alpha t_1)$, а при температуре t_2 – $R_2 = R_0(1 + \alpha t_2)$.

Если напряжение на зажимах не изменяется, тогда $I_1 R_1 = I_2 R_2$.

Определим изменения тока:

$$\frac{I_1}{I_2} = \frac{R_2}{R_1} = \frac{R_0(1 + \alpha t_1)}{R_0(1 + \alpha t_2)} = \frac{1 + \alpha t_1}{1 + \alpha t_2}.$$

Произведем расчет:

$$\frac{I_1}{I_2} = \frac{1 + 3,65 \cdot 10^{-3} \cdot 1200}{1 + 3,65 \cdot 10^{-3} \cdot 20} = 5.$$

Пример 5.3. Определить общее сопротивление цепи, изображенной на рис. 5.4. Сделать численный расчет при значениях сопротивлений $R_1 = \frac{1}{2}$ Ом; $R_2 = \frac{3}{2}$ Ом; $R_3 = R_4 = R_6 = 1$ Ом; $R_5 = \frac{2}{3}$ Ом.

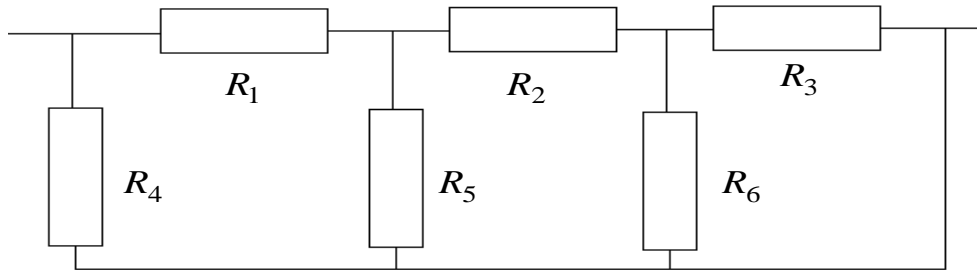


Рис. 5.4

Решение. Начертим схему, эквивалентную представленной на рис. 5.4 (рис. 5.5).

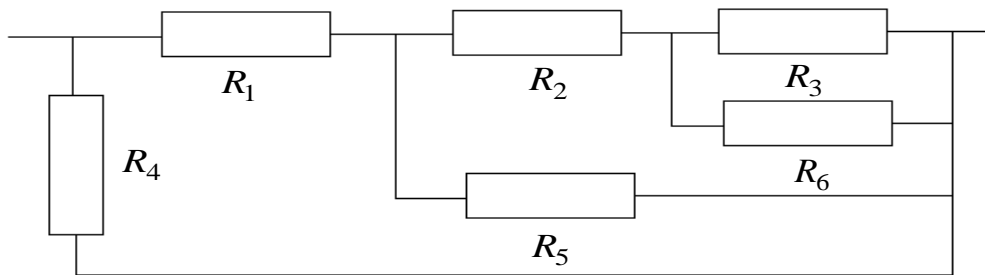


Рис. 5.5

Из эквивалентной схемы становится очевидно, что сопротивления R_3 и R_6 соединены параллельно:

$$R_{3,6} = \frac{R_3 \cdot R_6}{R_3 + R_6} = \frac{1}{2} \text{ Ом.}$$

К ним последовательно присоединено сопротивление R_2 :

$$R_{3,6,2} = R_2 + R_{3,6} = \frac{3}{2} + \frac{1}{2} = 2 \text{ Ом.}$$

Параллельно к этим трем сопротивлениям присоединено сопротивление R_5 :

$$R_{3,6,2,5} = \frac{R_{3,6,2} \cdot R_5}{R_{3,6,2} + R_5} = \frac{1}{2} \text{ Ом.}$$

Сопротивление R_1 присоединено вновь последовательно:

$$R_{3,6,2,5,1} = R_1 + R_{3,6,2,5} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1 \text{ Ом}.$$

Параллельно всей цепочке подключено сопротивление R_4 :

$$R_{3,6,2,5,1,4} = \frac{R_{3,6,2,5,1} \cdot R_4}{R_{3,6,2,5,1} + R_4} = \frac{1 \cdot 1}{1+1} = \frac{1}{2} \text{ Ом}.$$

Общее сопротивление цепи $R_{\text{общ}} = \frac{1}{2} \text{ Ом}.$

5.3. Задачи для самостоятельного решения

5.1. На концах медного провода длиной 5 м поддерживается напряжение 1 В. Определить плотность тока в проводнике. (Ответ: $j = 1,18 \cdot 10^7 \text{ А/м}^2$).

5.2. По медному проводнику сечением 1 мм^2 течет ток 1 А. Определить среднюю скорость упорядоченного движения электронов вдоль проводника, предполагая, что на каждый атом меди приходится один свободный электрон. (Ответ: $v = 74 \text{ мкм/с}$).

5.3. Определить электрический заряд, прошедший через поперечное сечение провода сопротивлением $R = 3 \text{ Ом}$, при равномерном нарастании напряжения на концах провода от 2 до 4 В в течение 20 с. (Ответ: $Q = 20 \text{ Кл}$).

5.4. Плотность тока в железном проводнике длиной 10 м равна $6,1 \text{ мА/м}^2$. Определить напряжение на нем. (Ответ: $U = 6 \text{ В}$).

5.5. Сила тока в проводнике равномерно нарастает от 0 до 3 А в течение 10 с. Определить заряд, прошедший через проводник. (Ответ: $Q = 15 \text{ Кл}$).

5.6. Напряжение на шинах электростанции 6,6 кВ. Потребитель находится на расстоянии 10 км. Сечение медного провода двухпроводной линии передач $3,42 \cdot 10^{-5} \text{ м}^2$. Потери напряжения в проводах не должны превышать 9 %. Определить силу тока. (Ответ: $I = 20 \text{ А}$).

5.7. Вольтметр включен параллельно сопротивлению $R_1 = 4 \text{ Ом}$ и показывает 34,8 В (рис. 5.6). Напряжение на клеммах источника поддерживается постоянным и равным 100 В. Найти отношение тока, идущего через вольтметр, к току, идущему через сопротивление $R_2 = 6 \text{ Ом}$.

(Ответ: $\frac{I_V}{I_2} \approx 0,2$).

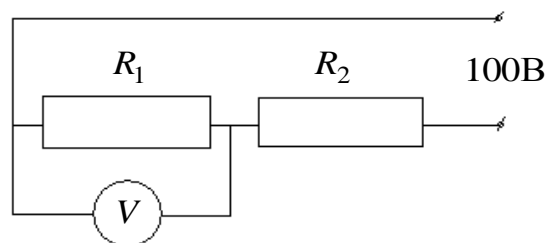


Рис. 5.6

5.8. Какое напряжение можно приложить к катушке, имеющей 1000 витков медного провода (диаметр витков 6 см), если допустимая плотность тока 2 А/м^2 ? (Ответ: $U = 6,4 \text{ В}$).

5.9. Электрическая лампочка с вольфрамовой нитью включена в цепь низкого напряжения при температуре $25 \text{ }^\circ\text{С}$. При этом вольтметр показал 10 мВ , амперметр 4 мА . В рабочем состоянии напряжение на зажимах лампочки 120 В , сила тока 4 А . Определить температуру вольфрамовой нити в рабочем состоянии. Температурный коэффициент сопротивления вольфрама $\alpha = 4,2 \cdot 10^{-3} \text{ К}^{-1}$. (Ответ: $t = 2650 \text{ }^\circ\text{С}$).

5.10. Угольный стержень соединен последовательно с железным стержнем такой же толщины. При каком соотношении их длин сопротивление данной комбинации не зависит от температуры? Температурный коэффициент сопротивления угля $\alpha_1 = 0,8 \cdot 10^{-3} \text{ К}^{-1}$, железа – $\alpha_2 = 6 \cdot 10^{-3} \text{ К}^{-1}$. Удельное сопротивление угля $\rho_1 = 4 \cdot 10^{-5} \text{ Ом} \cdot \text{м}$, железа – $\rho_2 = 1,2 \cdot 10^{-7} \text{ Ом} \cdot \text{м}$. (Ответ: $\frac{I_1}{I_2} = \frac{1}{44}$).

5.11. Определить сопротивление R , если амперметр показывает ток 5 А , вольтметр, подключенный к концам сопротивления, – напряжение 100 В , а внутреннее сопротивление вольтметра 2500 Ом . Какова ошибка в определении сопротивления, если пренебречь внутренним сопротивлением вольтметра? (Ответ: $R = 20 \text{ Ом}$; $\frac{\Delta R}{R} = 0,008$).

5.12. При включении шунта сопротивлением 100 Ом параллельно измерительному прибору стрелка отклоняется на всю шкалу при токе во внешней цепи 3 А . При включении добавочного сопротивления 300 Ом к не зашунтированному гальванометру шкала прибора становится в четыре раза грубее, чем без добавочного сопротивления и шунта. Какой шунт надо взять, чтобы стрелка отклонялась на всю шкалу при токе во внешней цепи $7,5 \text{ А}$? (Ответ: $R_{\text{ш}} = 25 \text{ Ом}$).

5.13. Имеется прибор с ценой деления 10 мкА . Шкала прибора имеет 100 делений, внутреннее сопротивление прибора 50 Ом . Как из этого прибора сделать вольтметр для измерения напряжения до 200 В или миллиамперметр для измерения токов до 800 мА ? (Ответ: $R_{\text{д}} = 200 \text{ кОм}$; $R_{\text{ш}} = 0,0625 \text{ Ом}$).

5.14. К сети напряжением 120 В присоединены два сопротивления. При их последовательном соединении ток равен 3 А , а при параллельном – суммарный ток равен 16 А . Чему равны сопротивления? (Ответ: $R_1 = 100 \text{ Ом}$; $R_2 = 30 \text{ Ом}$).

5.15. Если на вход электрической цепи подано напряжение 100 В, то на выходе напряжение будет 40 В. При этом через сопротивление R_2 идет ток 1 А. Если на выход цепи подать напряжение 60 В, то напряжение на входе окажется 15 В. Определить величины сопротивлений R_1 , R_2 и R_3 (рис. 5.7). (Ответ: $R_1 = 20$ Ом; $R_2 = 60$ Ом; $R_3 = 40$ Ом).

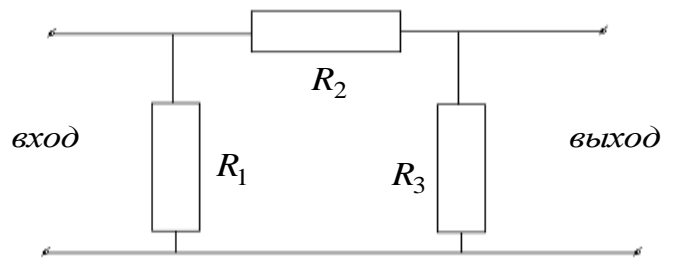


Рис. 5.7

5.16. При включении в двухпроводную сеть показания вольтметра стало 125 В. Когда последовательно с вольтметром включили неизвестное сопротивление, вольтметр показал 120 В. Определить величину неизвестного сопротивления, если сопротивление вольтметра 1,5 кОм. (Ответ: $R_x = 62,5$ Ом).

5.17. Линия связи длиной 80 км работает под напряжением 30 В. Когда на линии произошло замыкание, показание вольтметра стало 24 В. На каком расстоянии произошло замыкание? (Ответ: $L_x = 64$ км).

5.18. Каким должно быть сопротивление R_3 , чтобы входное сопротивление между клеммами тоже было R_3 ? (рис. 5.8). (Ответ: $R_3 = 1,7R$).

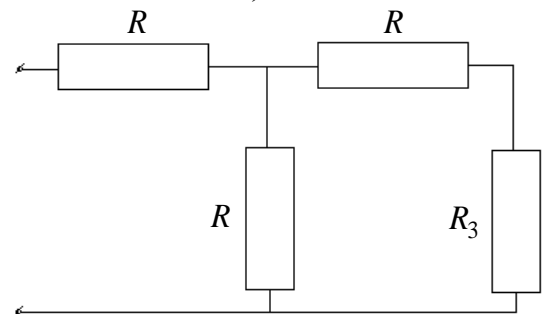


Рис. 5.8

5.19. Дуговой фонарь, требующий для своего питания напряжение 40 В и силу тока 10 А, включен в сеть с напряжением 120 В через реостат, изготовленный из константановой проволоки сечением 2 мм^2 . Определить сопротивление реостата и длину проволоки, необходимой для его изготовления. (Ответ: $l = 80$ м; $R = 150$ Ом).

5.20. Электрическая плитка подключена к сети с напряжением 220 В с помощью проводов, имеющих сопротивление 5 Ом, при этом напряжение на плитке равно 210 В. Чему будет равно напряжение на плитке, если к ней подключить параллельно такую же плитку? (Ответ: $U = 200$ В).

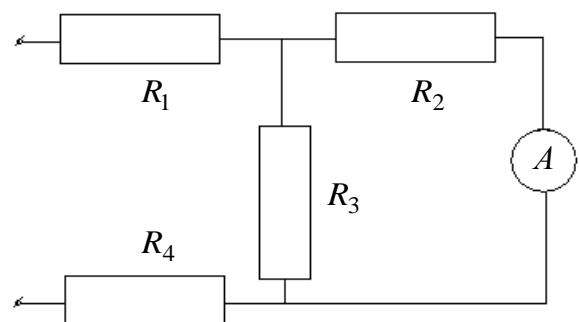


Рис. 5.9

5.21. Определить, какой силы ток идет через амперметр, если $U = 15$ В, $R_1 = 5$ Ом, $R_2 = 10$ Ом, $R_3 = 10$ Ом, $R_4 = 5$ Ом (рис. 5.9). (Ответ: $I = 0,5$ А).

5.22. Параллельно амперметру, имеющему сопротивление $0,02 \text{ Ом}$, включен медный проводник длиной 20 см и сечением $3,4 \text{ мм}^2$. Определить силу тока в цепи, если амперметр показывает $0,3 \text{ А}$. (Ответ: $I = 6,3 \text{ А}$).

5.23. Сопротивление железного стержня $0,0018 \text{ Ом}$, масса 1 кг . Определить диаметр этого стержня. (Ответ: $d = 1 \text{ см}$).

5.24. Нихромовая спираль нагревательного прибора должна иметь сопротивление $R = 30 \text{ Ом}$ при температуре накала $900 \text{ }^\circ\text{C}$. Сколько метров проволоки надо взять для изготовления спирали, если площадь поперечного сечения проволоки $0,3 \text{ мм}^2$? (Ответ: $l = 6 \text{ м}$).

5.25. До какой температуры нагревается нихромовая электрогрелка, если известно, что ток, проходящий через обмотку в момент ее включения ($t_1 = 20 \text{ }^\circ\text{C}$), в $0,09$ раза превышает рабочий ток? (Ответ: $t = 247 \text{ }^\circ\text{C}$).

5.26. Дуговой фонарь, требующий для своего питания напряжение 40 В и силу тока 10 А , включен в сеть с напряжением 120 В через реостат, изготовленный из константановой проволоки сечением 2 мм^2 . Определить сопротивление реостата и длину проволоки, необходимой для его изготовления? (Ответ: $R = 8 \text{ Ом}$; $l = 32 \text{ м}$).

5.27. В сеть с напряжением 24 В подключены два последовательно соединенных резистора. При этом сила тока стала равной $0,6 \text{ А}$. Когда резисторы подключили параллельно, суммарная сила тока стала равной $3,2 \text{ А}$. Определить сопротивление резисторов. (Ответ: $R_1 = 80 \text{ Ом}$; $R_2 = 10 \text{ Ом}$).

5.28. При последовательном подключении к сети двух проводников сила тока в $6,25$ раза меньше, чем при параллельном подключении этих проводников. Во сколько раз отличаются сопротивления проводников? (Ответ: в 4 раза).

5.29. Электрическая цепь составлена из трех проводников одинаковой длины и сделанных из одного материала. Проводник сечением $S_1 = 3 \text{ мм}^2$ соединен последовательно с параллельно соединенными проводниками сечениями 2 мм^2 и 4 мм^2 . Разность потенциалов на концах цепи 12 В . Сила тока, текущего через проводник сечением S_1 , равна 1 А . Определить сопротивление каждого проводника, силу тока, текущего через каждый проводник и падение напряжения на каждом проводнике. (Ответ: $R_1 = 8 \text{ Ом}$; $I_1 = 1 \text{ А}$; $U_1 = 8 \text{ В}$; $R_2 = 12 \text{ Ом}$; $I_2 = 1/3 \text{ А}$; $U_{2,3} = 4 \text{ В}$; $R_3 = 6 \text{ Ом}$; $I_3 = 2/3 \text{ А}$).

5.30. Амперметр сопротивлением 10 Ом рассчитан на силу тока 30 мА . Какие добавочные сопротивления надо взять, чтобы можно было измерять напряжения в четырех пределах: 3 , 15 , 75 и 150 В ? (Ответ: $R_1 = 90 \text{ Ом}$; $R_2 = 0,49 \text{ кОм}$; $R_3 = 2,5 \text{ кОм}$; $R_4 = 5 \text{ кОм}$).

Глава 6. ЗАВИСИМОСТЬ СОПРОТИВЛЕНИЯ ОТ ТЕМПЕРАТУРЫ

6.1. Основные формулы

Зависимость сопротивления от температуры выражается формулой

$$R_t = R_0(1 + \alpha t),$$

где R_t – сопротивление проводника при температуре t ; R_0 – сопротивление проводника при температуре $0\text{ }^\circ\text{C}$; $\alpha = \frac{R_t - R_0}{R_0 t}$ – термический коэффициент

сопротивления, зависящий от рода материала проводника.

Аналогично можно записать зависимость удельного сопротивления ρ от температуры:

$$\rho_t = \rho_0(1 + \alpha t),$$

где ρ_0 – удельное сопротивление проводника при $t = 0\text{ }^\circ\text{C}$.

6.2. Пример решения задачи

Пример 6.1. В созданных А.Н. Лодыгиным первых электрических лампах накаливания (1872 г.) накаливался угольный стерженек. Подсчитать мощность шестивольтовой лампочки Лодыгина, если угольный стерженек имеет длину 6 см и диаметр 2 мм. Удельное сопротивление угля при температуре $0\text{ }^\circ\text{C}$ $\rho_0 = 7 \cdot 10^{-5}$ Ом·м и температура накала стерженька $1660\text{ }^\circ\text{C}$, а температурный коэффициент сопротивления $\alpha = -2 \cdot 10^{-4}$ град $^{-1}$.

Решение. Из основных законов постоянного тока следует

$$P = IU = \frac{U}{R}U = \frac{U^2}{R},$$

где U – напряжение; R – сопротивление, $R = R_0(1 + \alpha t)$, $R_0 = \rho_0 \frac{l}{S}$.

Тогда

$$P = \frac{U^2}{\rho_0 \frac{l}{S}(1 + \alpha t)} = \frac{U^2 S}{\rho_0 l(1 + \alpha t)} = \frac{U^2 \pi d^2}{4\rho_0 l(1 + \alpha t)}.$$
$$P = \frac{36 \cdot 3,14 \cdot 4 \cdot 10^{-6}}{4 \cdot 7 \cdot 10^{-5} \cdot 6 \cdot 10^{-2} (1 - 2 \cdot 10^{-4} \cdot 0,16 \cdot 10^4)} = 39,6 \text{ (Вт)}.$$

6.3. Задачи для самостоятельного решения

6.1–6.30. Сопротивление электролампочки напряжением U и мощностью P в накаливаемом состоянии больше, чем в холодном в n раз. Найти ее сопротивление в холодном состоянии и температурный коэффициент сопротивления, если температура накала нити t , °С. (Варианты условий задачи см. в табл. 6.1).

Таблица 6.1

Варианты условий задачи

№ варианта	U, В	P, Вт	n, раз	t, °С	№ варианта	U, В	P, Вт	n, раз	t, °С
6.1	120	100	10	2000	6.16	205	100	13	2450
6.2	127	150	8	1600	6.17	210	150	11	2350
6.3	220	40	12	1700	6.18	215	75	10	2200
6.4	150	15	15	1500	6.19	225	60	9	2100
6.5	300	60	11	2500	6.20	230	40	12	2000
6.6	125	75	9	2300	6.21	240	15	20	1950
6.7	210	200	5	2250	6.22	235	25	10	1900
6.8	200	250	13	2100	6.23	380	200	8	1700
6.9	240	90	15	1900	6.24	127	40	11	1600
6.10	230	100	7	1850	6.25	120	15	15	1650
6.11	235	60	15	1750	6.26	165	75	10	1750
6.12	215	75	10	1650	6.27	150	60	14	1850
6.13	180	40	20	2050	6.28	220	75	9	2000
6.14	190	15	18	2150	6.29	210	150	10	2050
6.15	195	25	15	2300	6.30	200	60	8	2100

Глава 7. ЗАКОН ОМА ДЛЯ НЕОДНОРОДНОЙ ЦЕПИ

7.1. Основные формулы

Неоднородной называют электрическую цепь, с включенной в нее одной или несколькими ЭДС.

В этом случае закон Ома записывается в виде:

$$I = \frac{\sum \varphi \pm \sum \xi}{R},$$

где $\sum \varphi$ – сумма разностей потенциалов в цепи или падений напряжения; $\sum \xi$ – сумма ЭДС, включенных в цепь.

Знаки $\Delta \varphi$ и $\Delta \xi$ выбираются по направлению обхода.

7.2. Пример решения задачи

Пример 7.1. Потенциометр с сопротивлением $R = 100$ Ом подключен к источнику тока, эдс которого $\xi = 150$ В и внутреннее сопротивление $r = 50$ Ом (рис. 7.1). Определить показание вольтметра сопротивлением $R_V = 500$ Ом, соединенного проводником с одной из клемм потенциометра и подвижным контактом с серединой обмотки потенциометра. Какова разность потенциалов между теми же точками потенциометра A и B при отключении вольтметра?

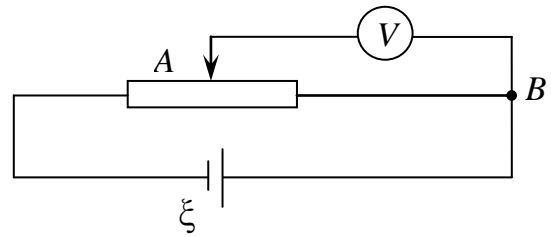


Рис. 7.1

Решение. Запишем закон Ома для неоднородной цепи $I = \frac{U \pm \xi}{R_1}$, откуда:

$$U = IR_1 - \xi,$$

где $R_1 = r + R/2$.

В то же время $I = \xi / R_0$, где $R_0 = r + \frac{R}{2} + \frac{R/2 \cdot R_V}{R/2 + R_V}$ – сопротивление всей

цепи, тогда

$$R_1 = 50 + 50 = 100 \text{ Ом}; R_0 = 50 + 50 + 45,5 = 145,5 \text{ Ом};$$

$$U = \frac{150}{145,5} \cdot 100 - 150 = -46,9 \text{ В}.$$

Аналогично при отключении вольтметра:

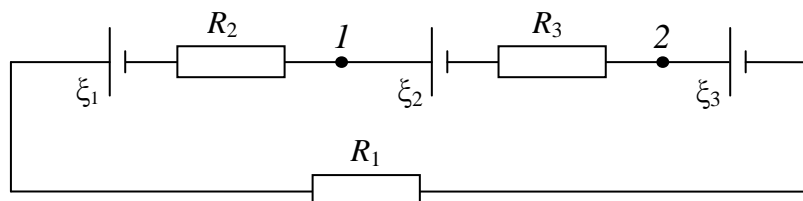
$$R_1 = r + R/2; R_0 = r + R; R_1 = 50 + 50 = 100 \text{ Ом}; R_0 = 50 + 100 = 150 \text{ Ом};$$

$$U = \frac{150}{150} \cdot 100 - 150 = -50 \text{ (В)}.$$

Знак «минус» показывает, что $\varphi_A < \varphi_B$.

7.3. Задачи для самостоятельного решения

7.1–7.15. На рис. 7.2 изображена цепь постоянного тока, состоящая из трех сопротивлений, включенных последовательно. Определить разность потенциалов $\varphi_1 < \varphi_2$ между точками 1 и 2. Сопротивлением источников тока и соединительных проводов пренебречь. Варианты условий задачи см. в табл. 7.1.



Варианты условий задач 7.1–7.15

№ варианта	$R_1, \text{ Ом}$	$R_2, \text{ Ом}$	$R_3, \text{ Ом}$	$\xi_1, \text{ В}$	$\xi_2, \text{ В}$	$\xi_3, \text{ В}$
7.1	3	1	2	2	5	2
7.2	4	4	4	3	2	4
7.3	4	3	1	2	4	6
7.4	5	2	2	6	1	5
7.5	3	2	1	5	2	2
7.6	2	1	4	3	5	2
7.7	6	3	1	4	5	2
7.8	1	2	2	2	4	1
7.9	5	5	5	2	2	2
7.10	5	2	4	3	5	3
7.11	3	3	3	2	1	1
7.12	2	2	2	3	3	3
7.13	5	1	3	2	5	2
7.14	6	3	3	4	6	3
7.15	3	4	4	2	4	6

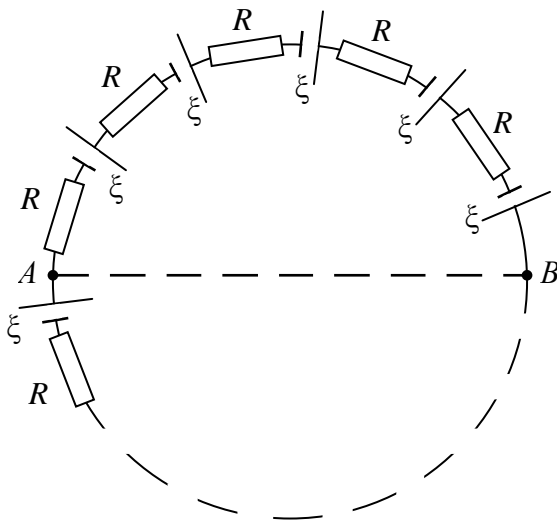


Рис. 7.3

7.16–7.30. N одинаковых источников тока с эдс и внутренним сопротивлением R_0 и такое же количество одинаковых сопротивлений R образуют замкнутую цепь из N звеньев (рис. 7.3). Найти разность потенциалов между точками A и B , делящими цепь на n и $(N - n)$ звеньев. Сопротивлением соединительных проводов пренебречь.

Варианты условий задачи см. в табл. 7.2.

Таблица 7.2

Варианты условий задачи

№ варианта	N	n	$R_0, \text{ Ом}$	$R, \text{ Ом}$	$\xi, \text{ В}$
7.16	30	10	5	10	15
7.17	25	15	1	5	8
7.18	20	15	1	4	6
7.19	10	5	4	8	6

7.20	15	7	2	3	10
------	----	---	---	---	----

Окончание табл. 7.2

№ варианта	N	n	$R_0, \text{ Ом}$	$R, \text{ Ом}$	$\xi, \text{ В}$
7.21	9	3	1	6	6
7.22	24	6	1	5	8
7.23	20	10	3	4	5
7.24	21	7	0,5	10	10
7.25	18	6	0,5	15	15
7.26	15	4	1	7	9
7.27	12	6	2	6	6
7.28	10	4	2	5	6
7.29	8	4	2	8	8
7.30	28	7	1	10	10

Глава 8. РАЗВЕТВЛЕНИЕ ЦЕПИ. ПРАВИЛА КИРХГОФА

8.1. Основные формулы

Разветвленная цепь – электрическая цепь, содержащая хотя бы один узел.

Узел – это точка в электрической цепи, в которой сходятся не менее трех проводников.

Первое правило Кирхгофа. Алгебраическая сумма сил токов, сходящихся в узле, равна нулю:

$$\sum_{i=0}^N I_i = 0. \quad (8.1)$$

Правило знаков: токи, идущие к узлу, считаются положительными, а исходящие из узла – отрицательными.

Второе правило Кирхгофа. Алгебраическая сумма падений напряжений (то есть произведений IR) для любого замкнутого контура электрической цепи равна алгебраической сумме эдс, имеющих в этом контуре:

$$\sum_{i=0}^N I_i R_i = \sum_{j=1}^k \xi_j. \quad (8.2)$$

Правило знаков: если токи в замкнутом контуре совпадают с выбранным направлением обхода данного контура, то произведение $I_i R_i$ считается положительным, в противном случае – отрицательным. Если эдс повышает потенциал в направлении обхода контура, т. е. если при обходе приходится идти от минуса к плюсу источника тока, то оно считается положительным, в противном случае – отрицательным.

Указания по расчету параметров разветвленной цепи при помощи правил Кирхгофа.

1. Обозначить стрелками предположительные направления токов, не задумываясь над тем, куда эти стрелки направить. Если в результате вычислений окажется, что ток положителен, то его направление выбрано правильно; в противном случае – ток течет в противоположном направлении.

2. Если в разветвленной цепи имеется N токов, то независимые уравнения типа (8.1) можно составить лишь для $(N-1)$ узлов; уравнение для последнего узла будет следствием предыдущих.

3. Направление обхода для любого замкнутого контура выбирается произвольно (например, по часовой стрелке), все его участки следует обходить только в выбранном направлении. Если при решении уравнений получены отрицательные значения силы тока или сопротивления, то это означает, что ток через данные сопротивления в действительности течет в направлении, противоположном произвольно выбранному.

4. Число независимых уравнений, которые могут быть составлены по второму закону Кирхгофа (8.2), должно быть меньше числа замкнутых контуров в разветвленной цепи. Для составления уравнений первый контур выбирается произвольно. Все последующие контуры следует выбирать таким образом, чтобы в каждый новый контур входила хотя бы одна ветвь цепи, не участвовавшая ни в одном из ранее использованных контуров. Число независимых уравнений типа (8.2) оказывается равным наименьшему числу разрывов, которые следует сделать в цепи, чтобы нарушить все контуры.

8.2. Примеры решения задач

Пример 8.1. Электрическая цепь состоит из двух гальванических элементов, трех сопротивлений и гальванометра (рис. 8.1). В этой цепи $R_1 = 100 \text{ Ом}$, $R_2 = 50 \text{ Ом}$, $R_3 = 20 \text{ Ом}$, $\xi_1 = 2 \text{ В}$. Гальванометр регистрирует

силу тока $I = 50$ мА, идущего в направлении, указанном стрелкой. Определить ξ_2 , I_1 и I_2 . Сопротивлением гальванометра и внутренними сопротивлениями элементов пренебречь.

Решение. Выберем направление токов в цепи, как показано на рис. 8.2, и условимся обходить замкнутые контуры по часовой стрелке.

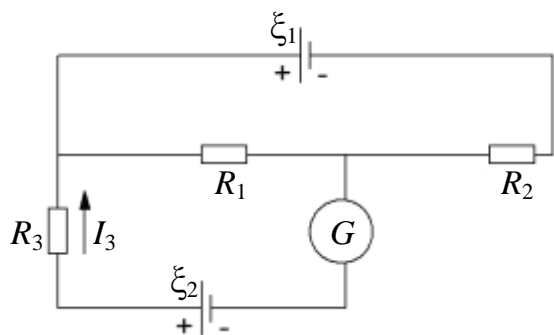


Рис. 8.1

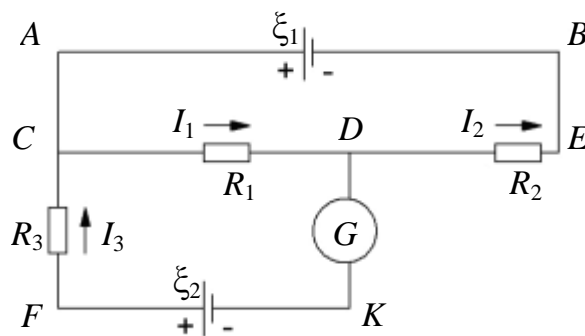


Рис. 8.2

В цепи имеется два узла – C и D . По первому правилу Кирхгофа необходимо составить только одно независимое уравнение. Выберем узел D :

$$I_1 - I_2 - I_3 = 0.$$

В разветвленной цепи имеется три замкнутых контура: $ABEDCA$, $CDKFC$, $ABEDKFCA$, но наименьшее число разрывов, которые нужно сделать для нарушения всех контуров, равно двум. Следовательно, по второму правилу Кирхгофа нужно составить два независимых уравнения:

– для контура $ABEDCA$:

$$-I_2 R_2 - I_1 R_1 = -\xi_1$$

или

$$I_2 R_2 + I_1 R_1 = \xi_1;$$

– для контура $CDKFC$:

$$I_1 R_1 + I_3 R_3 = \xi_2.$$

Получим систему, состоящую из трех уравнений с тремя неизвестными I_1 , I_2 и ξ_2 :

$$\begin{cases} I_1 - I_2 = 5 \cdot 10^{-2}, \\ 100I_1 + 50I_2 = 2, \\ 100I_1 - \xi_2 = -5 \cdot 10^{-2} \cdot 20, \end{cases} \quad \begin{cases} I_1 - I_2 = 5 \cdot 10^{-2}, \\ 50I_1 + 25I_2 = 1, \\ 100I_1 - \xi_2 = -1. \end{cases}$$

Для решения системы применим метод определителей:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 50 & 25 & 0 \\ 100 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 50 & 25 \end{vmatrix} = -(25 + 50) = -75;$$

$$\Delta_{I_1} = \begin{vmatrix} 5 \cdot 10^{-2} & -1 & 0 \\ 1 & 25 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -1 \cdot \begin{vmatrix} 5 \cdot 10^{-2} & -1 \\ 1 & 25 \end{vmatrix} = -(1.25 + 1) = -2.25;$$

$$\Delta_{I_2} = \begin{vmatrix} 1 & 0.05 & 0 \\ 50 & 1 & 0 \\ 100 & -1 & -1 \end{vmatrix} = -1 \cdot \begin{vmatrix} 10 & 0.05 \\ 50 & 1 \end{vmatrix} = -(1 - 2.5) = 1.5;$$

$$\begin{aligned} \Delta_{\xi_2} &= \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0.05 \\ 50 & 25 & 1 \\ 100 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 100 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 0.05 \\ 25 & 1 \end{vmatrix} - 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 50 & 25 \end{vmatrix} = \\ &= 100(-1 - 1.25) - (25 + 50) = -225 - 75 = -300. \end{aligned}$$

Определяем неизвестные величины:

$$I_1 = \frac{\Delta_{I_1}}{\Delta} = \frac{-2.25}{-75} = 0.03 \text{ (A)}; \quad I_2 = \frac{\Delta_{I_2}}{\Delta} = \frac{1.5}{-75} = 0.02 \text{ (A)};$$

$$\xi_2 = \frac{\Delta_{\xi_2}}{\Delta} = \frac{-300}{-75} = 4 \text{ (В)}.$$

Знак «минус» для численного значения силы тока I_2 означает, что на рисунке выбрано направление тока I_2 , противоположное действительному.

Пример 8.2. На рис. 8.3 представлена разветвленная цепь с электродвижущими силами $\xi_1 = 10 \text{ В}$ и $\xi_2 = 4 \text{ В}$, внутренние сопротивления источников тока равны нулю. Определить силы токов, текущих в сопротивлениях R_2 и R_3 , если $R_1 = R_4 = 2 \text{ Ом}$, $R_2 = R_3 = 4 \text{ Ом}$.

Решение. Выберем направление токов, как показано на рис. 8.4; замкнутые контуры будем обходить по часовой стрелке.

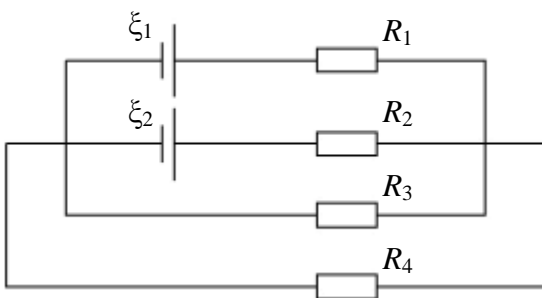


Рис. 8.3

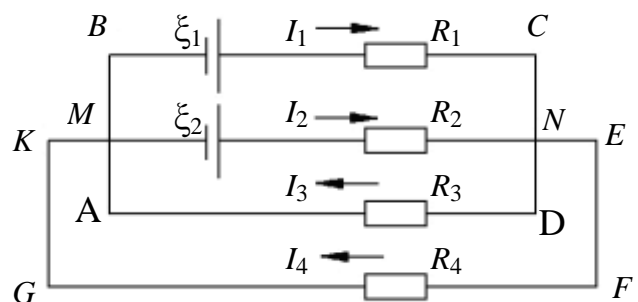


Рис. 8.4

В цепи имеется два узла: M и N . По первому правилу Кирхгофа надо составить, следовательно, одно уравнение. Выберем узел N :

$$I_1 + I_2 - I_3 - I_4 = 0.$$

Наименьшее число разрывов, которые нужно сделать для нарушения всех контуров, равно 3. Следовательно, по второму правилу Кирхгофа нужно составить три независимых уравнения:

– для контура *MBCNM*: $I_1 R_1 - I_2 R_2 = \xi_1 - \xi_2$;

– для контура *AMNDA*: $I_2 R_2 + I_3 R_3 = \xi_2$;

– для контура *GKMNEFG*: $I_2 R_2 + I_4 R_4 = \xi_2$.

Получили систему из четырех уравнений с четырьмя неизвестными I_1, I_2, I_3, I_4 :

$$\begin{cases} I_1 + I_2 - I_3 - I_4 = 0, \\ I_1 R_1 - I_2 R_2 = \xi_1 - \xi_2, \\ I_2 R_2 + I_3 R_3 = \xi_2, \\ I_2 R_2 + I_4 R_4 = \xi_2. \end{cases}$$

Подставляем в уравнения известные значения параметров цепи и решаем систему, используя метод определителей. Так как необходимо по условию задачи определить всего два значения силы токов I_2 и I_3 , то достаточно вычислить три определителя: Δ, Δ_{I_2} и Δ_{I_3} . После подстановки известных величин в систему (8.10) получаем:

$$\begin{cases} I_1 + I_2 - I_3 - I_4 = 0, \\ 2I_1 - 4I_2 + 0 + 0 = 6, \\ 0 + 4I_2 + 4I_3 = 4, \\ 0 + 4I_2 + 0 + 2I_4 = 4, \end{cases} \quad \begin{cases} I_1 + I_2 - I_3 - I_4 = 0, \\ I_1 - 2I_2 + 0 + 0 = 3, \\ 0 + I_2 + I_3 + 0 = 1, \\ 0 + 2I_2 + 0 + I_4 = 2. \end{cases}$$

Находим необходимые определители системы.

$$\begin{aligned} \Delta &= \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = +2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \\ &= +2 \cdot (-1) \cdot \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} + 1 \cdot (-1) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = \\ &= -2 \cdot 1 - 1 \cdot 1 + 1 \cdot (-2 - 1) = -2 - 1 - 3 = -6; \end{aligned}$$

$$\Delta_{I_2} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 \\ 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = +1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= +1 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} - 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = +1 \cdot (-2) + 3 - 1 = -2 + 2 = 0;$$

$$\Delta_{I_3} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = -2 - 3 - 1 + (2 - 2) = -6.$$

Определяем значения сил токов I_2 и I_3 :

$$I_2 = \frac{\Delta_{I_2}}{\Delta} = \frac{0}{-6} = 0(\text{А}) \text{ и } I_3 = \frac{\Delta_{I_3}}{\Delta} = \frac{-6}{-6} = 1(\text{А}).$$

8.3. Задачи для самостоятельного решения

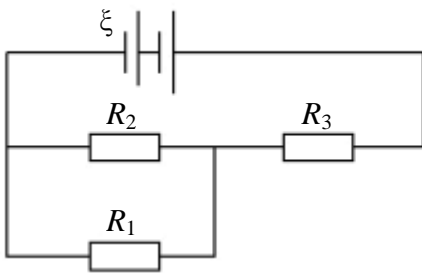


Рис. 8.5

8.1. В электрическую цепь (рис. 8.5) включены три резистора: $R_1 = R_2 = R_3 = 25$ Ом. ЭДС батареи $\xi = 120$ В. Найти мощность, выделяющуюся на сопротивлении R_1 . (Ответ: $P = 16$ Вт).

8.2. ЭДС батареи $\xi = 100$ В, ее внутреннее сопротивление $r = 20$ Ом, сопротивление $R_1 = 250$ Ом и $R_2 = 780$ Ом (рис. 8.6). На сопротивление R_1 выделяется мощность 16 Вт. Какой ток показывает амперметр? (Ответ: $I = 1$ А).

8.3. Найти ток в отдельных ветвях мостика Уитстона (рис. 8.7) при условии, что через гальванометр идет ток, равный нулю. ЭДС элемента $\xi = 2$ В, сопротивление $R_1 = 30$ Ом, $R_2 = 45$ Ом и $R_3 = 200$ Ом. (Ответ: $I_1 = I_2 = 26,7$ мА; $I_3 = I_4 = 4$ мА).

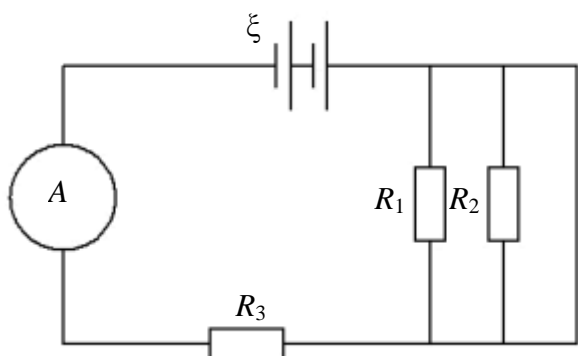


Рис. 8.6

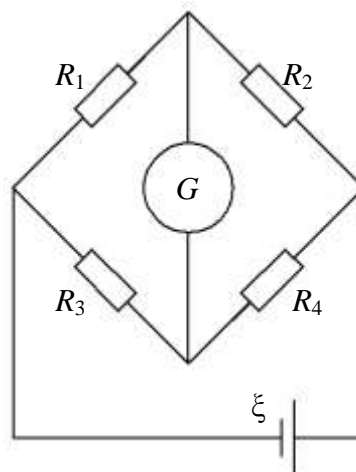


Рис. 8.7

8.4. ЭДС элементов $\xi_1 = 2,1$ В и $\xi_2 = 1,9$ В, сопротивления $R_1 = 45$ Ом, $R_2 = R_3 = 10$ Ом (рис. 8.8). Найти токи во всех участках цепи. (Ответ: $I_1 = 40$ мА, $I_2 = 10$ мА, $I_3 = 30$ мА).

8.5. Электрическая цепь, представленная на рис. 8.9, имеет следующие параметры: $\xi_1 = \xi_2 = 4$ В, $r_1 = r_2 = 0,5$ Ом, $I_1 = 2$ А. Определить сопротивление R ; ток I_2 , текущий через элемент с ЭДС ξ_2 ; силу тока I , текущего через сопротивление R . (Ответ: $R = 0,75$ Ом, $I_2 = 2$ А, $I = 4$ А).

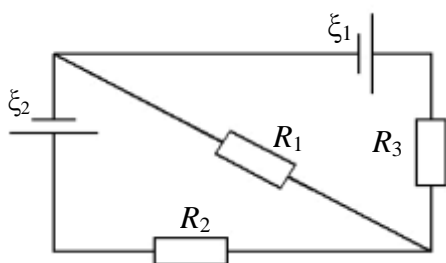


Рис. 8.8

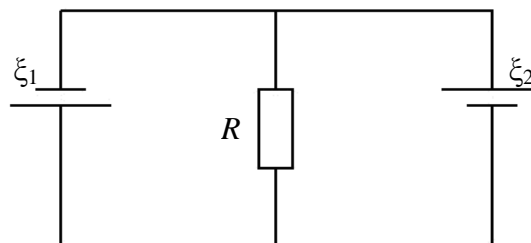


Рис. 8.9

8.6. Два элемента с одинаковыми ЭДС $\xi_1 = \xi_2 = 2$ В и внутренними сопротивлениями $r_1 = 1$ Ом и $r_2 = 2$ Ом замкнуты на внешнее сопротивление R . Через элемент с ЭДС ξ_1 течет ток $I_1 = 1$ А. Найти сопротивление R и ток I_1 , текущий через элемент с ЭДС ξ_2 . Какой ток I течет через сопротивление R ? (Ответ: $R = 0,66$ Ом; $I_1 = 0,5$ А; $I = 1,5$ А).

8.7. Батареи в электрической цепи (рис. 8.10) имеют ЭДС $\xi_1 = 110$ В и $\xi_2 = 220$ В. Сопротивление $R_1 = R_2 = 100$ Ом, $R_3 = 500$ Ом. Найти показание амперметра. (Ответ: $I = 0,4$ А).

8.8. Батареи в электрической цепи (рис. 8.10) имеют эдс $\xi_1 = 2$ В и $\xi_2 = 4$ В, сопротивление $R_1 = 0,5$ Ом. Падение напряжения на сопротивлении R_2 равно $U_2 = 1$ В (ток через R_2 направлен справа налево). Найти показания амперметра. (Ответ: $I = 2$ А).

8.9. Батареи имеют эдс $\xi_1 = 30$ В и $\xi_2 = 5$ В, сопротивления $R_2 = 10$ Ом, $R_3 = 20$ Ом (рис. 8.10). Через амперметр течет ток $I = 1$ А, направленный от R_3 к R_1 . Найти сопротивление R_1 . (Ответ: $R_1 = 20$ Ом).

8.10. Батареи электрической цепи (рис. 8.11) имеют эдс $\xi_1 = 2$ В и $\xi_2 = 1$ В, сопротивления $R_1 = 1$ кОм, $R_2 = 0,5$ кОм, $R_3 = 0,2$ кОм, сопротивление амперметра $R_A = 0,2$ кОм. Найти показания амперметра. (Ответ: $I = 0,45$ мА).

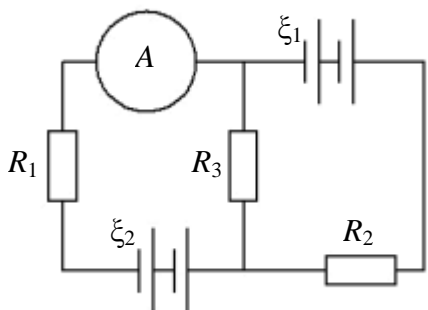


Рис. 8.10

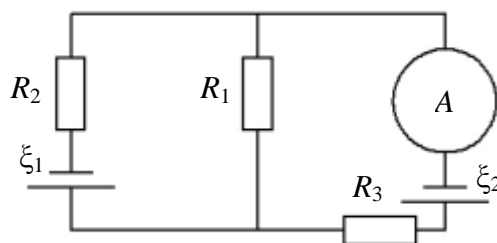


Рис. 8.11

8.11. Батареи имеют эдс $\xi_1 = 2$ В и $\xi_2 = 3$ В, сопротивление $R_3 = 1,5$ кОм, сопротивление амперметра $R_A = 0,5$ кОм (рис. 8.11). Падение напряжения на сопротивлении R_2 равно $U_2 = 1$ В (ток через R_2 направлен сверху вниз). Найти показание амперметра. (Ответ: $I = 308$ мА).

8.12. Батареи имеют эдс $\xi_1 = 2$ В, $\xi_2 = 4$ В и $\xi_3 = 4$ В, сопротивления $R_1 = 4$ Ом, $R_2 = 6$ Ом и $R_3 = 8$ Ом (рис. 8.12). Найти токи во всех участках цепи. (Ответ: $I_1 = 385$ мА; $I_2 = 77$ мА; $I_3 = 308$ мА).

8.13. Батареи имеют эдс $\xi_1 = \xi_2 = \xi_3 = 6$ В, сопротивления $R_1 = 20$ Ом, $R_2 = 12$ Ом (рис. 8.12). При коротком замыкании верхнего узла схемы с отрицательным зажимом батарей через замыкающий провод течет ток $I = 1,6$ А. Найти токи во всех участках цепи и сопротивление R_3 . (Ответ: $I_1 = 0,3$ А; $I_2 = 0,5$ А; $I_3 = 0,8$ А; $R_3 = 7,5$ Ом).

8.14. Две батареи аккумуляторов ($\xi_1 = 10$ В, $r_1 = 1$ Ом, $\xi_2 = 8$ В, $r_2 = 2$ Ом) и реостат ($R = 6$ Ом) соединены, как показано на рис. 8.13. Найти силу тока в батареях и реостате. (Ответ: $I_1 = 1,6$ А, $I_2 = 0,2$ А, $I_R = 1,4$ А).

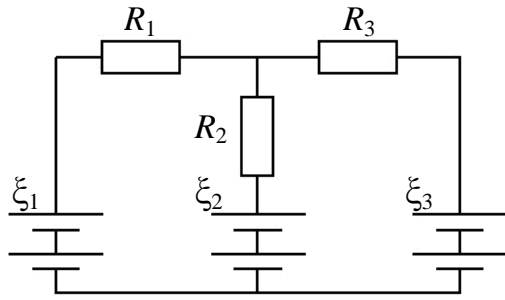


Рис. 8.12

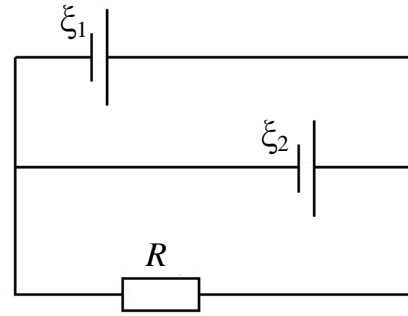


Рис. 8.13

8.15. Три батареи ($\xi_1 = 12$ В, $\xi_2 = 5$ В и $\xi_3 = 10$ В) с одинаковыми внутренними сопротивлениями $r_1 = r_2 = r_3 = 1$ Ом соединены между собой одноименными полюсами. Сопротивление соединительных проводов ничтожно мало. Определить силы токов, текущих через каждую батарею. (Ответ: $I_1 = 3$ А; $I_2 = 4$ А; $I_3 = 1$ мА).

8.16. Батареи имеют эдс $\xi_1 = \xi_2 = 100$ В, сопротивления $R_1 = 20$ Ом, $R_2 = 10$ Ом, $R_3 = 40$ Ом и $R_4 = 40$ Ом (рис. 8.14). Найти показание амперметра. (Ответ: $I = 0,45$ мА).

8.17. Батареи имеют эдс $\xi_1 = 2\xi_2$, сопротивления $R_1 = R_3 = 20$ Ом, $R_2 = 15$ Ом и $R_4 = 40$ Ом (рис. 8.14). Через амперметр течет ток $I = 1,5$ А, направленный снизу вверх. Найти эдс ξ_1 и ξ_2 , а также токи I_2 и I_3 , текущие через сопротивления R_2 и R_3 . (Ответ: $\xi_1 = 24$ В; $\xi_2 = 12$ В; $I_2 = 1,2$ А; $I_3 = 0,3$ А).

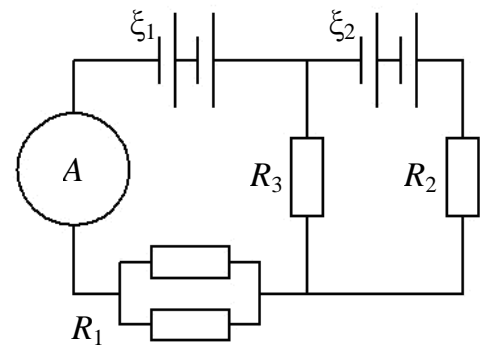


Рис. 8.14

8.18. Два одинаковых элемента имеют эдс $\xi_1 = \xi_2 = 2$ В и внутренние сопротивления $r_1 = r_2 = 0,5$ Ом (рис. 8.15). Найти токи I_1 и I_2 , текущие через сопротивления $R_1 = 0,5$ Ом и $R_2 = 1,5$ Ом, а также ток I через элемент с эдс ξ_1 . (Ответ: $I_1 = 2,28$ А; $I_2 = 0,56$ А; $I = 1,72$ А).

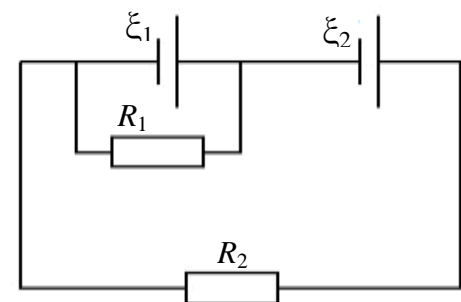


Рис. 8.15

8.19. Батареи имеют эдс $\xi_1 = \xi_2$, сопротивления $R_2 = 2R_1$ (рис. 8.16). Во сколько раз ток, текущий через вольтметр, больше тока, текущего через сопротивление R_2 ? (Ответ: в 3 раза).

8.20. Батареи имеют эдс $\xi_1 = \xi_2 = 110$ В, сопротивления $R_1 = R_2 = 0,2$ кОм, сопротивле-

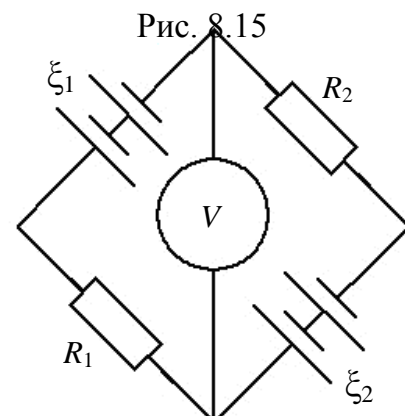


Рис. 8.16

ние вольтметра $R_V = 1 \text{ кОм}$ (рис. 8.16). Найти показание вольтметра. (Ответ: $U = 100 \text{ В}$).

8.21. Батареи имеют эдс $\xi_1 = \xi_2$, сопротивления $R_1 = R_2 = 100 \text{ Ом}$, сопротивление вольтметра $R_V = 150 \text{ Ом}$ (рис. 8.16). Показание вольтметра $U = 150 \text{ В}$. Найти эдс ξ_1 и ξ_2 батарей. (Ответ: $\xi_1 = \xi_2 = 200 \text{ В}$).

8.22. Элементы имеют эдс $\xi_1 = \xi_2 = 1,5 \text{ В}$ и внутренние сопротивления $r_1 = r_2 = 0,5 \text{ Ом}$. Сопротивления $R_1 = R_2 = 2 \text{ Ом}$ и $R_3 = 1 \text{ Ом}$, сопротивление амперметра $R_A = 3 \text{ Ом}$ (рис. 8.17). Найти показание амперметра. (Ответ: $I = 75 \text{ мА}$).

8.23. Элемент эдс $\xi = 200 \text{ В}$, сопротивления $R_1 = 2 \text{ кОм}$ и $R_2 = 3 \text{ кОм}$, сопротивления вольтметра $R_{V1} = 3 \text{ кОм}$ и $R_{V2} = 2 \text{ кОм}$ (рис. 8.18). Найти показания вольтметров U_1 и U_2 , если ключ K : а) разомкнутый; б) замкнутый. (Ответ: а) $U_1 = 120 \text{ В}$; $U_2 = 80 \text{ В}$; б) $U_1 = U_2 = 100 \text{ В}$).

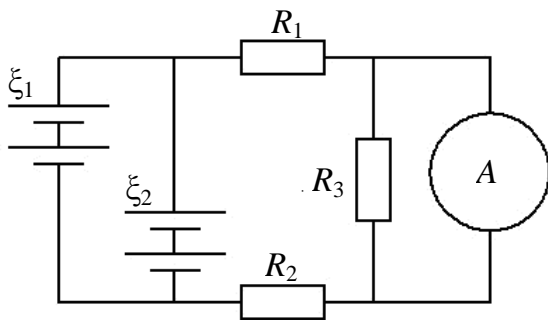


Рис. 8.17

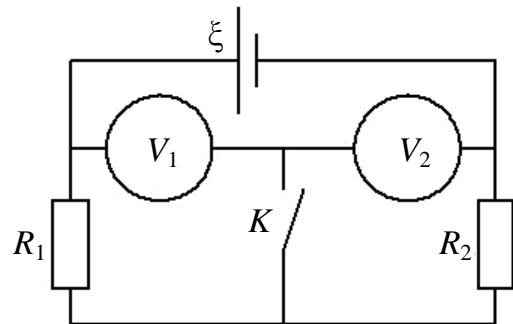


Рис. 8.18

8.24. Определить силу тока I_3 в резисторе сопротивлением R_3 (рис. 8.19) и напряжение U_3 на концах резистора, если $\xi_1 = 4 \text{ В}$, $\xi_2 = 3 \text{ В}$, $R_1 = 2 \text{ Ом}$, $R_2 = 6 \text{ Ом}$, $R_3 = 1 \text{ Ом}$. Внутренними сопротивлениями источников тока пренебречь. (Ответ: $I_3 = 0$; $U_3 = 0$).

8.25. Три источника тока с эдс $\xi_1 = 11 \text{ В}$, $\xi_2 = 4 \text{ В}$ и $\xi_3 = 6 \text{ В}$ и три реостата с сопротивлениями $R_1 = 5 \text{ Ом}$, $R_2 = 10 \text{ Ом}$, $R_3 = 2 \text{ Ом}$ соединены, как показано на рис. 8.20. Определить силы токов в реостатах. Внутреннее сопротивление источников тока пренебрежимо мало. (Ответ: $I_1 = 0,8 \text{ А}$; $I_2 = 0,3 \text{ А}$; $I_3 = 0,5 \text{ А}$).

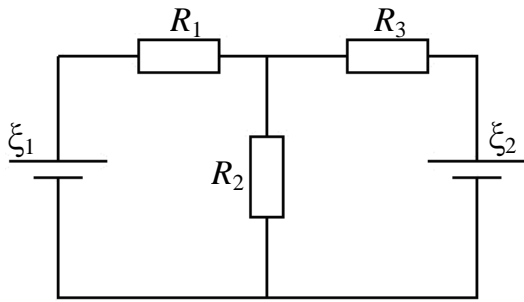


Рис. 8.19

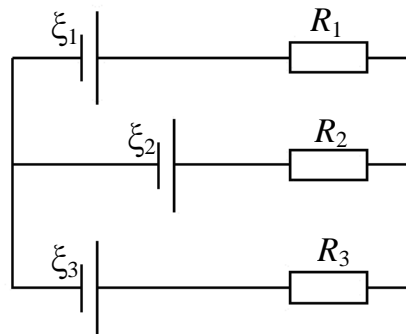


Рис. 8.20

8.26. Три сопротивления $R_1 = 5 \text{ Ом}$, $R_2 = 1 \text{ Ом}$, $R_3 = 3 \text{ Ом}$, а также источник тока с эдс $\xi_1 = 1,4 \text{ В}$ соединены, как показано на рис. 8.21. Определить эдс ξ источника тока, который надо подключить в цепь между точками A и B , чтобы в сопротивлении R_3 шел ток силой $I = 1 \text{ А}$ в направлении, указанном стрелкой. Сопротивлениями источника тока пренебречь. (Ответ: $\xi = 3,6 \text{ В}$).

8.27. На рис. 8.22 изображена разветвленная цепь с эдс $\xi_1 = 1 \text{ В}$, $\xi_2 = 2 \text{ В}$, $\xi_3 = 3 \text{ В}$, $\xi_4 = 4 \text{ В}$, $R_1 = 1 \text{ Ом}$, $R_2 = 2 \text{ Ом}$, $R_3 = 3 \text{ Ом}$ и $R_4 = 4 \text{ Ом}$. Определить токи, текущие через сопротивления. Сопротивлениями источников тока пренебречь. Как изменятся токи, если разрезать провода в точках A и B . (Ответ: $I_1 = I_3 = 1 \text{ А}$; $I_2 = I_4 = -1 \text{ А}$; не изменится).

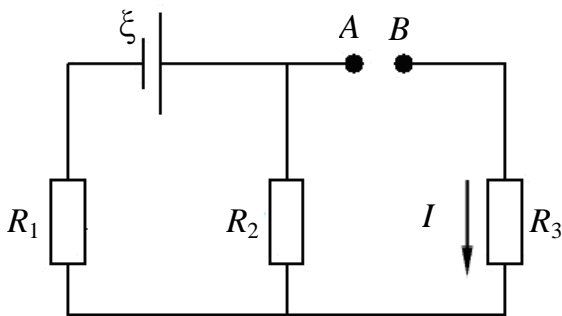


Рис. 8.21

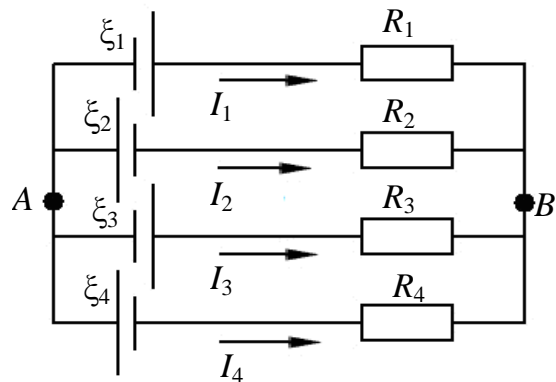


Рис. 8.22

8.28. На рис. 8.23 изображена разветвленная цепь с эдс $\xi_1 = 1 \text{ В}$, $\xi_2 = 2 \text{ В}$, $\xi_3 = 3 \text{ В}$, $\xi_4 = 4 \text{ В}$, $R_1 = 1 \text{ Ом}$, $R_2 = 2 \text{ Ом}$, $R_3 = 3 \text{ Ом}$ и $R_4 = 4 \text{ Ом}$. Определить токи, текущие через сопротивления. Внутренними сопротивлениями источников тока пренебречь. (Ответ: $I_1 = -0,92 \text{ А}$; $I_2 = 0,04 \text{ А}$; $I_3 = 0,36 \text{ А}$; $I_4 = 0,52 \text{ А}$).

8.29. Элементы схемы (рис. 8.24) имеют следующие значения: $\xi_1 = 1$ В, $\xi_2 = 2$ В, $\xi_3 = 3$ В, $R_1 = 100$ Ом, $R_2 = 200$ Ом, $R_3 = 300$ Ом и $R_4 = 400$ Ом. Определить токи, текущие через сопротивления. Сопротивлениями источников тока и соединительных проводов пренебречь. (Ответ: $I_1 = 6,3$ мА; $I_2 = 1,8$ мА; $I_3 = 4,5$ мА; $I_4 = 0$ мА).

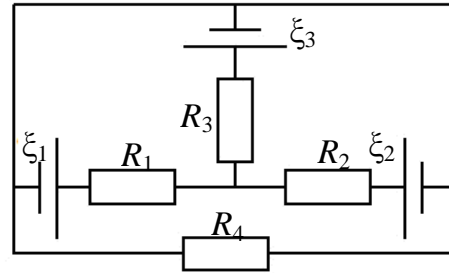
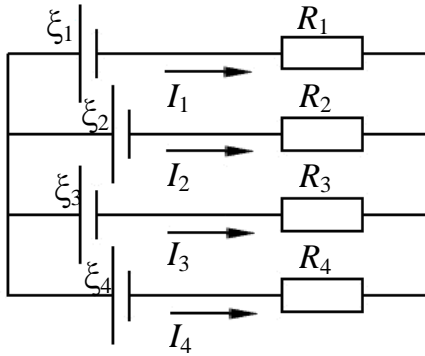


Рис. 8.23

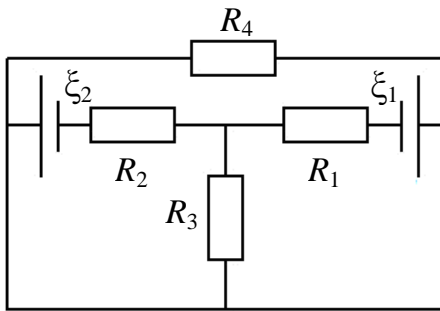


Рис. 8.25

Рис. 8.24

8.30. На схеме (рис. 8.25) сопротивления $R_1 = R_2 = R_3 = R_4 = 1$ кОм, $\xi_1 = 1,5$ В, $\xi_2 = 1,8$ В. Определить токи, текущие через сопротивления. (Ответ: $I_1 = 0,4$ мА; $I_2 = 0,7$ мА; $I_3 = 1,1$ мА; $I_4 = 0$ мА).

Глава 9. ЗАКОН ДЖОУЛЯ–ЛЕНЦА

9.1. Основные формулы

Работа, совершаемая электростатическим полем и сторонними силами по перемещению заряда $dq = Idt$ на участке цепи 1–2

$$dA_{12} = dq \int_1^2 \vec{E} d\vec{l} + dq \int_1^2 \vec{E}_{\text{ст}} d\vec{l} = Udq,$$

где U – напряжение на участке цепи 1–2.

Работа тока на участке цепи сопротивлением R за время dt

$$dA = I \cdot U \cdot dt = I^2 R dt.$$

Мощность тока определяется по формуле

$$P = \frac{dA}{dt} = I \cdot U.$$

Закон Джоуля–Ленца для неподвижного участка цепи, в котором не совершается химических превращений:

$$dQ = I^2 \cdot R \cdot dt, \quad (9.1)$$

где dQ – количество теплоты, выделяющееся в участке цепи сопротивлением R за время dt .

9.2. Примеры решения задач

Пример 9.1. Сила тока в проводнике сопротивлением 20 Ом равномерно нарастает от $I_0 = 0$ А до $I_{\max} = 6$ А в течение времени 2 с. Определить количество теплоты, выделившиеся в проводнике за первую секунду.

Решение. Сила тока в проводнике изменяется. Согласно (9.1) закон Джоуля–Ленца для бесконечно малого промежутка времени:

$$dQ = I^2 \cdot R \cdot dt,$$

где сила тока I является некоторой функцией времени. Так как в данной задаче сила тока нарастает по линейному закону, то

$$I = kt, \quad (9.2)$$

где k – коэффициент пропорциональности,

$$k = \frac{\Delta I}{\Delta t} = \frac{(I_{\max} - I_0)}{t}.$$

С учетом равенства (9.2) формула (9.1) примет вид:

$$dQ = k^2 \cdot R \cdot t^2 \cdot dt. \quad (9.3)$$

Для нахождения количества теплоты проинтегрируем выражение (9.3) в пределах от $t_1 = 0$ до $t_2 = 1$ с:

$$Q = k^2 \cdot R \int_{t_1}^{t_2} t^2 dt = \frac{1}{3} k^2 R (t_2^3 - t_1^3) = 60 \text{ Дж.}$$

Пример 9.2. Дан источник тока с внутренним сопротивлением 0,4 Ом, замкнутый на некоторое сопротивление 3 Ом. Чему равен КПД источника тока?

Решение. КПД источника тока есть отношение полезной мощности (т. е. мощности, выделяемой на внешнем сопротивлении) ко всей мощности (т. е. мощности, выделяемой на внешнем и внутреннем сопротивлении):

$$\eta = \frac{P_{\text{п}}}{P}, \text{ где } P_{\text{п}} = I^2 R \text{ и } P = I^2(R + r).$$

Кпд источника

$$\eta = \frac{I^2 R}{I^2(R + r)} = \frac{R}{R + r}.$$

Пример 9.3. К однородному медному цилиндрическому проводнику длиной 40 м приложили разность потенциалов 10 В. Каким будет изменение температуры проводника через 15 с? Изменением сопротивления проводника и рассеянием тепла при его нагревании пренебечь.

Решение. Количество теплоты, выделяемое в проводнике, определим по формуле

$$Q = \frac{U^2}{R} t, \quad (9.4)$$

где R – сопротивление проводника, зависящее от длины проводника l , площади поперечного сечения S и удельного сопротивления ρ :

$$R = \rho \frac{l}{S}. \quad (9.5)$$

Подставим выражение (9.5) в выражение (9.4):

$$Q = \frac{U^2 S}{\rho l} t. \quad (9.6)$$

Количество теплоты

$$Q = c m \Delta T,$$

где c – удельная теплоемкость меди; m – масса медного проводника

$$m = \rho_{\text{пл}} V = \rho_{\text{пл}} S l,$$

где $V = lS$ – объем проводника; $\rho_{\text{пл}}$ – плотность меди,

тогда
$$Q = c \rho_{\text{пл}} S l \Delta T. \quad (9.7)$$

Приравняем правые части выражений (9.6) и (9.7) и выразим изменение температуры проводника

$$\frac{U^2 S}{\rho l} t = c \rho_{\text{пл}} l S \Delta T;$$

$$\Delta T = \frac{U^2}{\rho l^2 \rho_{\text{пл}} c} t.$$

9.3. Задачи для самостоятельного решения

9.1. ЭДС батареи равна 20 В. Сопротивление R внешней цепи равно 2 Ом, сила тока $I = 4$ А. Найти КПД батареи. При каком значении внешнего сопротивления R КПД батареи будет равен 99%? (Ответ: $\eta = 99\%$; $R = 297$ Ом).

9.2. К зажимам батареи аккумуляторов присоединен нагреватель. ЭДС батареи равна 24 В, внутреннее сопротивление 1 Ом. Нагреватель, включенный в цепь, потребляет мощность 80 Вт. Вычислить силу тока в цепи и КПД нагревателя. (Ответ: $\eta = 17\%$, $I = 20$ А).

9.3. Сила тока в проводнике сопротивлением 100 Ом равномерно нарастает от $I_0 = 0$ А до $I_{\max} = 10$ А в течение 30 с. Определить количество теплоты, выделившееся за это время в проводнике. (Ответ: $Q = 100$ кДж).

9.4. Сила тока в проводнике сопротивлением 12 Ом равномерно убывает от $I_0 = 5$ А до $I = 0$ А в течение 30 с. Определить количество теплоты, выделившееся за это время в проводнике. (Ответ: $Q = 3$ кДж).

9.5. По проводнику сопротивлением 3 Ом течет ток, сила которого возрастает. Количество теплоты, выделившееся в проводнике за время 8 с, равно 200 Дж. Определить количество электричества, протекшее за это время по проводнику. В момент времени, принятый за начальный, сила тока в проводнике равна нулю. (Ответ: $q = 20$ Кл).

9.6. Сила тока в проводнике сопротивлением 15 Ом равномерно возрастает от $I_0 = 0$ А до некоторого максимального значения в течение 5 с. За это время в проводнике выделилось количество теплоты 10 кДж. Найти среднюю силу тока в проводнике за этот промежуток времени. (Ответ: $I = 10$ А).

9.7. Сила тока в проводнике равномерно возрастает от $I_0 = 0$ А до некоторого максимального значения в течение 10 с. За это время в проводнике выделилось количество теплоты 1 кДж. Определить скорость нарастания тока в проводнике, если сопротивление его равно 3 Ом. (Ответ: $\frac{\Delta I}{\Delta t} = 1$ А/с).

9.8. Найти количество теплоты, выделившееся в единицу времени в единице объема медного провода при плотности тока 300 кА/м². (Ответ: $Q = 1530$ Дж).

9.9. Электрический чайник, содержащий объем 600 см³ воды при температуре 9 °С нагревают. Через какое время после включения вода в чай-

нике выкипит полностью? Сопротивление нагревателя чайника равно 16 Ом, напряжение в сети 120 В. Кпд нагревателя 60%. (Ответ: $t = 49$ мин).

9.10. К концам свинцовой проволоки длиной 1 м приложена разность потенциалов 10 В. Какое пройдет время от начала пропускания тока до момента, когда свинец начнет плавиться? Начальная температура свинца 20 °С. (Ответ: $t = 1$ с).

9.11. Электродвигатель подъемного крана работает под напряжением 380 В и потребляет силу тока 20 А. Каков КПД установки, если груз массой 1 т кран поднимает на высоту 19 м за 50 с? (Ответ: $\eta = 50\%$).

9.12. Троллейбус массой 11 т движется равномерно со скоростью 36 км/ч. Найти силу тока в обмотке двигателя, если напряжение равно 550 В и КПД равен 80%. Коэффициент сопротивления движению равен 0,02. (Ответ: $I = 50$ А).

9.13. В электрокипятильнике емкостью 5 л с КПД 70% вода нагревается от 10 до 100 °С за 20 мин. Какой силы ток проходит по обмотке нагревателя, если напряжение в сети 220 В? (Ответ: $I = 46$ мА).

9.14. Определите, на какое напряжение рассчитан электрокипятильник, который за 5 мин нагревает 0,2 кг воды от 14 °С до кипения, при условии, что по его обмотке протекает ток 2 А. Потерями энергии пренебречь. (Ответ: $U = 120$ В).

9.15. Электрокипятильник со спиралью сопротивлением 160 Ом поместили в сосуд, содержащий 0,5 кг воды при 20 °С, и включили его в сеть с напряжением 220 В. Через сколько времени вода закипит? КПД кипятильника принять равным 80%. (Ответ: $t = 12$ мин).

9.16. Кипятильник с КПД 80% изготовлен из нихромовой проволоки сечением 0,84 мм² и включен в сеть с напряжением 220 В. За 20 мин с его помощью было нагрето 4 л воды от 10 до 90 °С. Какова длина проволоки, из которой изготовлен кипятильник? (Ответ: $l = 33$ м).

9.17. За время 40 с в цепи, состоящей из трех одинаковых проводников, соединенных параллельно и включенных в сеть, выделилось некоторое количество теплоты. За какое время выделится такое же количество теплоты, если проводники соединить последовательно? (Ответ: $t = 6$ мин).

9.18. Две электрические лампочки с сопротивлением $R_1 = 350$ Ом и $R_2 = 240$ Ом включены в сеть параллельно. Какая из лампочек потребляет большую мощность? Во сколько раз? (Ответ: большую мощность потребляет лампочка с меньшим сопротивлением; в 1,5 раза)

9.19. Три одинаковых батареи присоединяют к сопротивлению $R_1 = 10$ Ом первый раз параллельно, а второй раз последовательно. При этом мощность, выделяемая на сопротивлении, во втором случае в

4 раза превышает мощность, выделяемую в первом случае. Определить внутреннее сопротивление одной батареи (Ответ: $r = 2 \text{ Ом}$).

9.20. Источник тока с эдс 5 В один раз замыкается на сопротивление $R_1 = 4 \text{ Ом}$, другой раз $R_2 = 9 \text{ Ом}$. В обоих случаях на внешнем сопротивлении выделяется одинаковая мощность. Найти эту мощность P и внутреннее сопротивление источника тока r . (Ответ: $P = 1 \text{ Вт}$; $r = 6 \text{ Ом}$).

9.21. Какой длины и поперечного сечения необходимо взять нихромовую проволоку для изготовления электрического кипятильника на напряжение 120 В , мощность 480 Вт ? Допустимая плотность тока 10 А/мм^2 . (Ответ: $S = 0,4 \text{ мм}^2$; $l = 11 \text{ м}$).

9.22. Необходимо нагреть 2 л воды от $20 \text{ }^\circ\text{C}$ до кипения. Имеются два нагревателя одинаковой мощности $P = 250 \text{ Вт}$. Найти время нагревания, если два нагревателя соединены параллельно. Кпд нагревателя 60% . (Ответ: $t = 22,4 \text{ мин}$).

9.23. К однородному медному цилиндрическому проводнику длиной 40 м приложили разность потенциалов 10 В . Каким будет изменение температуры проводника за 15 с ? Изменением сопротивления проводника и рассеянием тепла при его нагревании пренебречь. (Ответ: $t = 16 \text{ }^\circ\text{C}$).

9.24. Через однородный медный цилиндрический проводник длиной 40 м пропускают постоянный электрический ток. Определите разность потенциалов, если за 15 с проводник нагрелся на 16 К . Изменением сопротивления проводника и рассеянием тепла при его нагревании пренебречь. (Ответ: $U = 10 \text{ В}$).

9.25. Определите силу тока, протекающего через однородный цилиндрический алюминиевый проводник сечением $2 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2$, если за 15 с его температура повысилась на 10 К . Изменением сопротивления проводника и рассеянием тепла при его нагревании пренебречь. (Ответ: $I = 16 \text{ А}$).

9.26. Протекающий через резистор с сопротивлением 100 Ом ток изменяется во времени по закону $I = \sqrt{t}$. Какое количество теплоты выделяется на резисторе за 6 с ? (Ответ: $Q = 1800 \text{ Дж}$).

9.27. Эдс источника постоянного тока 2 В , а его внутреннее сопротивление 1 Ом . Мощность тока на резисторе, подключенном к источнику, $0,75 \text{ Вт}$. Чему равна сила тока в цепи? (Ответ: $I = 0,5 \text{ А}$ или $I = 1,5 \text{ А}$).

9.28. Электрическая цепь состоит из источника тока и реостата. Эдс источника 6 В . Максимальная мощность тока, выделяемая на реостате, достигается при промежуточном значении его сопротивления и равна $4,5 \text{ Вт}$. Чему равно внутреннее сопротивление источника тока?

9.29. Если источник тока с эдс 20 В замкнуть на лампу сопротивлением 10 Ом, то КПД источника будет 80 %. Найти полезную мощность, выделяемую на лампе, сопротивление которой равно внутреннему сопротивлению источника тока.

9.30. Лампы, сопротивления которых 3 и 12 Ом, поочередно подключены к некоторому источнику тока, потребляют одинаковую мощность. Найдите внутреннее сопротивление источника тока. (Ответ: $r = 6 \text{ Ом}$).

Глава 10. ТЕРМОЭЛЕКТРОННАЯ И АВТОЭЛЕКТРОННАЯ ЭМИССИИ

10.1. Основные формулы

Термоэлектронная эмиссия – испускание электронов нагретыми телами (эмиттерами) в вакуум или другую среду.

Работа выхода – энергия, которую необходимо затратить для удаления электрона из твердого или жидкого вещества.

Выйти из тела могут только те электроны, энергия которых больше работы выхода. Число таких электронов ничтожно мало при температурах $T \approx 300 \text{ К}$ и экспоненциально возрастает при увеличении температуры.

При отсутствии «отсасывающего» электрического поля (или при малой его величине) вылетевшие электроны образуют вблизи поверхности эмиттера отрицательный пространственный заряд (электронное облако).

Если в вакууме имеются две металлические пластины, между которыми приложена разность потенциалов, то между ними возникает термоэлектронный ток. Сила тока растет с увеличением разности потенциалов. Существует максимальная сила тока, когда все электроны, попадающие через поверхность эмиттера (катода) в электронное облако, увлекаются внешним полем к аноду. Эта максимальная сила тока называется *током насыщения*.

Ток насыщения I_n определяется по формуле

$$I_n = B S T^2 e^{-\frac{A}{kT}}, \quad (10.1)$$

где $B = 1,2 \cdot 10^6 \text{ А/м}^2 \cdot \text{К}^2$; S – площадь поверхности катода; T – абсолютная температура; A – работа выхода; k – постоянная Больцмана.

Автоэлектронная эмиссия (туннельная эмиссия, полевая эмиссия) – испускание электронов проводящими твердыми и жидкими телами под действием внешнего электрического поля высокой напряженности $E = 10^7 \text{ В/см}$. Механизм автоэлектронной эмиссии – туннельное прохож-

дение электронов сквозь потенциальный барьер на границе «проводник – непроводящая среда».

Плотность тока автоэлектронной эмиссии в вакуум определяется из формулы Фаулера–Нордгейма:

$$j = 1,55 \cdot 10^{-6} \cdot \frac{E^2}{t^2(y) \cdot A^2} \cdot \exp\left[-6,85 \cdot 10^7 \cdot \frac{A^{3/2}}{E} \cdot Q(y)\right], \quad (10.2)$$

где A – работа выхода из металла, эВ; j – плотность тока, А/см²; E – напряженность электрического поля, В/см; $t(y)$ и $Q(y)$ – функции величины $y = 3,62 \cdot 10^{-4} \cdot E^{1/2} \cdot A^{-1}$.

Для практических расчетов можно принять: $t(y) \approx 1$; $Q(y) = 0,95 - 1,03y^2$.

При плотностях тока $10^8 - 10^{10}$ А/см² автоэлектронная эмиссия приходит в новый режим – взрывную электронную эмиссию.

Взрывной электронной эмиссией называют испускание электронного тока из поверхности проводника, являющегося катодом, вследствие взрыва микроскопического объема на его поверхности. Взрыв обычно происходит из-за быстрого нагрева микроучастков катода электрическим током большой плотности. Примером такого тока является ток автоэлектронной эмиссии с катодных микровыступов, плотность которого при высоких электрических полях достигает 10^9 А/см² и более.

Во время взрыва температура микровыступа резко увеличивается, что приводит к возникновению кратковременных лавин или пакетов электронов. Такие лавины заряженных частиц (электронов) называют *эктонами*.

Взрывная эмиссия электронов и эктоны играют фундаментальную роль в вакуумных искрах и дугах, в разрядах низкого давления, в сжатых и высокопрочных газах, в микропромежутках и так далее, т. е. там, где имеет место высокое электрическое поле на поверхности катода.

Открытие и обстоятельное исследование взрывной электронной эмиссии, а также успехи в разработке техники мощных наносекундных импульсов позволили создать импульсные ускорители электронов мощностью до 10^{13} Вт и более при длительности импульсов $10^{-10} - 10^{-6}$ с, токе электронов $1 - 10^6$ А и энергии электронов $10^4 - 10^7$ эВ.

10.2. Примеры решения задач

Пример 10.1. Найти плотность тока насыщения при комнатной температуре 300 К, если работа выхода электрона из металла равна 3 эВ.

Решение. Плотность тока насыщения

$$j_{\text{н}} = \frac{I_{\text{н}}}{S} = B \cdot T^2 \cdot \exp\left(-\frac{A}{kT}\right);$$

$$j_{\text{н}} = 1,2 \cdot 10^6 \cdot 300^2 \exp\left(-3 \cdot 1,6 \cdot 10^{-19} / 1,38 \cdot 10^{-23} \cdot 300\right) = 4 \cdot 10^{-40} \text{ (А/м)}.$$

Пример 10.2. Во сколько раз возрастает плотность тока насыщения $j_{\text{н1}}$ при увеличении температуры катода на 5 К по сравнению с $j_{\text{н2}}$ при $T_1 = 300\text{К}$ ($A = 3 \text{ эВ}$).

Решение:

$$\begin{aligned} \frac{j_{\text{н2}}}{j_{\text{н1}}} &= \frac{(T_1 + \Delta T)^2 \cdot \exp(-A/k(T_1 + \Delta T))}{T_1^2 \cdot \exp(-A/kT_1)} = \left[1 + \frac{\Delta T}{T_1}\right]^2 \cdot \left[\frac{A}{kT_1} \cdot \frac{\Delta T}{T_1 + \Delta T}\right] = \\ &= \left[1 + \frac{5}{300}\right]^2 \cdot \exp\left[\frac{3 \cdot 1,6 \cdot 10^{-19}}{1,38 \cdot 10^{-23} \cdot 300} \cdot \frac{5}{300 + 5}\right] = 6,9. \end{aligned}$$

Плотность тока насыщения возрастает в 6,9 раз.

10.3. Задачи для самостоятельного решения

10.1. Какой наименьшей скоростью v должны обладать свободные электроны в цезии и платине, для того чтобы они могли покинуть металл? (Ответ: $v_1 = 8,3 \cdot 10^5 \text{ м/с}$; $v_2 = 1,4 \cdot 10^5 \text{ м/с}$).

10.2. Во сколько раз изменится удельная термоэлектронная эмиссия вольфрама, находящегося при температуре $T_1 = 2400 \text{ К}$, если повысить температуру вольфрама на $\Delta T = 100 \text{ К}$? (Ответ: $j_2/j_1 = 2,6$).

10.3. Во сколько раз катод из тарированного вольфрама при температуре $T = 1800 \text{ К}$ дает большую удельную эмиссию, чем катод из чистого вольфрама при той же температуре? Эмиссионная постоянная для чистого вольфрама $B_1 = 0,6 \cdot 10^6 \text{ А/м}^2 \cdot \text{К}^2$, для тарированного вольфрама $B_2 = 0,3 \cdot 10^7 \text{ А/м}^2 \cdot \text{К}^2$. (Ответ: $j_2/j_1 = 1,1 \cdot 10^4$).

10.4. При какой температуре T_2 тарированный вольфрам будет давать такую же удельную эмиссию, какую дает чистый вольфрам при $T_1 = 2500 \text{ К}$? Необходимые данные взять из задачи 10.3. (Ответ: $T_2 \approx 1760 \text{ К}$).

10.5. Определить работу выхода электронов из металла, если плотность тока насыщения двухэлектродной лампы при T_1 равна j_1 , а при температуре T_2 равна j_2 . (Ответ: $A = \frac{kT_1 \cdot T_2}{(T_1 - T_2)} \cdot \ln\left(\frac{j_1}{j_2} \cdot \frac{T_2^2}{T_1^2}\right)$).

10.6. Вывести формулу для изменения плотности термоэлектронного тока насыщения с изменением температуры.

10.7. Катод электронной лампы представляет собой цилиндр радиусом r_0 и длиной l , а анод – коаксиальный с ним цилиндр радиусом R , причем $l \gg R > r_0$. Найти зависимость плотности тока j от расстояния до оси катода, ток I в анодной цепи лампы известен. (Ответ: $j = I/(2\pi r)$, $r_0 < r < R$).

10.8. Скорость электронов на выходе из электронного ускорителя v , концентрация электронов спадает по мере удаления от оси электронного пучка по закону $n(r) = n_0 \cdot \exp(-r^2/r_0^2)$, где n_0 – концентрация электронов на оси пучка; r – расстояние от оси пучка; r_0 – эффективный радиус пучка. Написать выражение для плотности тока пучка j и найти силу тока.

(Ответ: $j = evn_0 \cdot \exp(-r^2/r_0^2)$; $I = \int_0^{r_0} j(r) \cdot 2\pi r dr = e v n_0 \pi r_0^2$).

10.9. В условиях задачи 10.8 рассчитать концентрацию электронов на оси пучка, если $I = 100$ мА; $v = 0,95 c$ (c – скорость света); $r_0 = 0,5$ см? (Ответ: $n_0 \cong 2,8 \cdot 10^{13} \text{ м}^{-3}$).

10.10. Рассчитать плотность тока насыщения в зависимости от температуры и построить график зависимости. Температура меняется в пределах 300...2500 К.

10.11. Рассчитать ток насыщения для катода W + Cs в зависимости от температуры и построить график. Площадь поверхности катода $0,5 \text{ см}^2$. Изменение температуры в пределах 300...2000 К.

10.12. Рассчитать плотность тока насыщения в зависимости от работы выхода A (A изменяется от 0,1 до 5 эВ) при двух температурах $T_1 = 500 \text{ К}$, $T_2 = 1100 \text{ К}$. (Ответ: $j_1 = 10^2 \text{ А/м}^2$, $j_2 = 10^3 \text{ А/м}^2$).

10.13. Оценить влияние на изменение тока насыщения [формула (10.1)] члена T^2 и $\exp(-A/kT)$ в зависимости от T . Построить графики.

10.14. Рассчитать плотность тока автоэлектронной эмиссии для вольфрама в зависимости от напряженности электрического поля E (E изменяется от 10 до 10^6 В/см). Построить график.

10.15. Рассчитать плотность тока насыщения термоэлектронной эмиссии в зависимости от температуры для молибдена. Построить график.

10.16. Рассчитать плотность тока насыщения термоэлектронной эмиссии в зависимости от температуры для меди. Построить график.

10.17. Рассчитать плотность тока насыщения термоэлектронной эмиссии в зависимости от температуры для алюминия. Построить график.

10.18. Рассчитать плотность тока насыщения термоэлектронной эмиссии в зависимости от температуры для железа. Построить график.

10.19. Рассчитать плотность тока насыщения термоэлектронной эмиссии в зависимости от температуры для никеля. Построить график.

10.20. Рассчитать плотность тока взрывной электронной эмиссии для вольфрама в зависимости от напряженности электрического поля E . Построить график.

10.21. Рассчитать плотность тока взрывной электронной эмиссии для молибдена в зависимости от напряженности электрического поля E . Построить график.

10.22. Рассчитать плотность тока взрывной электронной эмиссии для алюминия в зависимости от напряженности электрического поля E . Построить график.

10.23. Рассчитать плотность тока взрывной электронной эмиссии для железа в зависимости от напряженности электрического поля E . Построить график.

10.24. Рассчитать плотность тока взрывной электронной эмиссии для никеля в зависимости от напряженности электрического поля E . Построить график.

10.25. Рассчитать плотность тока взрывной электронной эмиссии для платины в зависимости от напряженности электрического поля E . Построить график.

10.26. Рассчитать плотность тока взрывной электронной эмиссии для разных металлов в зависимости от работы выхода A при напряженности электрического поля $E = 10^6 \text{ В/см}^2$. Построить график.

10.27. Во сколько раз средняя квадратичная скорость теплового движения электронов в платине больше, чем в цезии, если отношение работ

выхода $\frac{A_{\text{Pt}}}{A_{\text{Cs}}} = 2,7$? (Ответ: $\frac{v_{\text{Pt}}}{v_{\text{Cs}}} = \sqrt{\frac{A_{\text{Pt}}}{A_{\text{Cs}}}} = 1,65$).

10.28. Плотность тока насыщения двухэлектродной лампы при температуре T_1 равна $j_{\text{н1}}$. А при температуре T_2 — $j_{\text{н2}}$. Как определить материал, из которого сделан катод лампы? (Ответ: $A = \frac{kT_1 \cdot T_2}{(T_1 - T_2)} \cdot \ln\left(\frac{j_{\text{н1}} \cdot T_2^2}{j_{\text{н2}} \cdot T_1^2}\right)$).

10.29. Катод и анод электронной лампы выполнены в виде плоского конденсатора. Между ними приложена разность потенциалов U . Определить мощность, потребляемую лампой в области выполнения закона Богу-

славского-Ленгмюра, если площадь анода S , расстояние между анодом и катодом d . *Указание.* Воспользоваться формулой Богуславского–Ленгмюра: плотность тока $j = BU^{3/2}$; $B = \frac{\sqrt{2}}{9\pi} \cdot \sqrt{\frac{1}{m}} \cdot \frac{1}{d^2}$ для плоских электродов.

(Ответ: $P = IU = \frac{\sqrt{2}}{9\pi} \cdot \sqrt{\frac{1}{m}} \cdot \frac{S}{d^2} \cdot U^{5/2}$).

10.30. Пользуясь формулой Ричардсона–Дэшмена, вывести соотношение для скорости изменения плотности тока насыщения с изменением температуры. (Ответ: $\frac{\partial j_{\text{н}}}{\partial T} = C \left(2T + \frac{A}{r} \right) \cdot e^{-\frac{A}{kT}}$).

Для расчета использовать прил. 1.

Глава 11. ЗАКОНЫ ЭЛЕКТРОЛИЗА. ЗАКОНЫ ФАРАДЕЯ

11.1. Основные формулы

Первый закон Фарадея:

$$m = Kq,$$

где m – масса вещества, выделившегося на электроде при прохождении через электролит электрического заряда q ; K – электрохимический эквивалент вещества.

Второй закон Фарадея:

$$K = M / (Fz),$$

где M – молярная масса данного вещества; F – постоянная Фарадея ($F = 96,5$ кКл/моль); z – валентность ионов.

Объединенный закон Фарадея:

$$m = \frac{M}{Fz} q = \frac{M}{Fz} It.$$

Подвижность ионов

$$b = \bar{v} / E,$$

где \bar{v} – средняя скорость упорядоченного движения ионов; E – напряженность электрического поля.

Закон Ома в дифференциальной форме:

$$\vec{j} = qn(b_+ + b_-)\vec{E},$$

где q – заряд иона; n – концентрация ионов; $(b_+ + b_-)$ – подвижность соответственно положительно и отрицательно заряженных ионов.

Уравнение баланса для концентрации n ионов в жидком изоляторе:

$$\frac{dn}{dt} = g - r - \frac{1}{q} \operatorname{div} \vec{j},$$

где g и r – скорости генерации и рекомбинации носителей; q – заряд иона; j – плотность тока.

11.2. Примеры решения задач

Пример 11.1. Определить скорость u , мкм/ч, с которой растет слой никеля на плоской поверхности металла при электролизе, если плотность тока j , протекающего через электролит, равна 30 А/м^2 . Никель считать двухвалентным.

Решение. Воспользуемся объединенным законом Фарадея

$$m = \frac{M}{Fz} It. \quad (11.1)$$

Считая, что электрическое осаждение идет равномерно по всей поверхности металла, выражаем массу m выделившегося за время t никеля через плотность ρ , площадь поверхности S металла и толщину h слоя никеля:

$$m = \rho Sh. \quad (11.2)$$

Подставляем выражение (11.2) в формулу (11.1), учитывая, что $I = jS$:

$$\rho h = \frac{M}{Fz} jt. \quad (11.3)$$

При неизменной плотности тока нарастание слоя никеля будет происходить с постоянной скоростью $u = h/t$. Тогда из выражения (11.3) следует:

$$u = \frac{Mj}{Fz\rho}. \quad (11.4)$$

Подставляя в формулу (11.4) значения $F = 9,65 \cdot 10^4 \text{ Кл/моль}$, $M = 58,7 \cdot 10^{-3} \text{ кг/моль}$, $z = 2$, $j = 30 \text{ А/м}^2$, $\rho = 8,8 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3$, получаем $u = 1,04 \cdot 10^{-9} \text{ м/с} = 3,74 \text{ мкм/ч}$.

Пример 11.2. Градиент концентрации ионов в электролите приводит к возникновению диффузионного потока ионов. Из-за различной подвижности ионов нарушается нейтральность электролита и возникает электрическое поле, выравнивающее скорости дрейфа v_+ и v_- ионов разного знака. Считая, что в равновесии эти скорости одинаковы $v_+ = v_- = v_0$, выразить v_0 через коэффициенты диффузии D_+ и D_- и подвижности b_+ и b_- ионов.

Решение. Скорость дрейфа ионов определяется диффузией и величиной электрического поля E

$$v_+ = \frac{D_+}{n} \text{grad}(n) + b_+ E; \quad v_- = \frac{D_-}{n} \text{grad}(n) + b_- E.$$

Считая, что $v_+ = v_- = v_0$, исключаем поле E

$$v_0 = \frac{D_+ b_- + D_- b_+}{(b_+ + b_-) n} \text{grad}(n).$$

11.3. Задачи для самостоятельного решения

11.1. При силе тока $I = 5$ А за время $t = 10$ мин в электролитической ванне выделилось $m = 1,02$ г двухвалентного металла. Определить его относительную атомную массу A . (Ответ: $A = 65,4$ а.е.м.).

11.2. Две электролитические ванны соединены последовательно. В первой ванне выделилось $m_1 = 3,9$ г цинка, во второй за то же время $m_2 = 2,24$ г железа. Цинк двухвалентен. Определить валентность z железа. (Ответ: $z = 3$).

11.3. Электролитическая ванна с раствором медного купороса присоединена к батарее аккумуляторов с эдс $\xi = 4$ В и внутренним сопротивлением $r = 0,1$ Ом. Определить массу m меди, выделившейся при электролизе за время $t = 1$ мин, если эдс поляризации $\xi_n = 1,5$ В и сопротивление раствора равно $R = 0,5$ Ом. Медь двухвалентна. (Ответ: $m = 0,83$ г).

11.4. Определить толщину h слоя меди, выделившейся за время $t = 5$ мин при электролизе медного купороса, если плотность тока $j = 80$ А/м². (Ответ: $h = 54$ мкм).

11.5. Сила тока, проходящего через электролитическую ванну с раствором медного купороса, равномерно возрастает в течение времени $\Delta t = 20$ с от $I_0 = 0$ до $I = 2$ А. Найти массу меди, выделившейся за это время на катоде ванны. (Ответ: $m = 6,6$ мг).

11.6. В электролитической ванне через раствор прошел заряд $q = 193$ Кл. При этом на катоде выделился металл в количестве 1 моль. Определить валентность z металла. (Ответ: $z = 2$).

11.7. Определить количество вещества ν и число атомов N двухвалентного металла, отложившегося на катоде электролитической ванны, если через раствор в течение времени $t = 5$ мин шел ток силой $I = 2$ А. (Ответ: $\nu = 3,12 \cdot 10^{-3}$ моль; $N = 1,87 \cdot 10^{21}$).

11.8. Сколько атомов двухвалентного металла выделится на 1 см^2 поверхности электрода за время $t = 5$ мин при плотности тока $j = 10 \text{ А/м}^2$? (Ответ: $N = 9,3 \cdot 10^{17}$).

11.9. При электролитическом никелировании обычно используют ток плотностью 40 А/м^2 . Считая, что никель двухвалентен, и, учитывая его относительную атомную массу $A = 58,7$ определить количество времени, требуемого для получения слоя никеля толщиной $0,02$ мм. Плотность никеля равна $8,8 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3$. (Ответ: $t = 4$ ч).

11.10. Сколько цинка растворится под действием тока в элементе Даниэля (медно-цинковый элемент), если он вырабатывает ток силы $0,5$ А в течение 5 мин? Электрохимический эквивалент цинка равен $0,3388 \cdot 10^{-6} \text{ кг/Кл}$. (Ответ: $m = 0,051$ г).

11.11. В гальваническом элементе Даниэля (электроды из меди и цинка) происходящее самопроизвольно растворение цинка сопровождается выделением энергии $4,4 \cdot 10^5 \text{ Дж/моль}$. Считая валентность ионов $z = 2$, найти эдс элемента Даниэля ξ . (Ответ: $\xi = 1,07 \text{ В}$).

11.12. Зная, что электрохимический эквивалент водорода равен $1,045 \cdot 10^{-8} \text{ кг/Кл}$, вычислить электрохимический эквивалент хлора. Валентность хлора равна единице, относительные атомные массы хлора и водорода равны $35,45$ и $1,008$. (Ответ: $K = 0,368 \cdot 10^{-6} \text{ кг/Кл}$).

11.13. Найти электрохимические эквиваленты свинца. Сколько этого вещества может быть выделено током 5 А в течение 10 ч? (Ответ: $K = 1,074 \cdot 10^{-6} \text{ кг/Кл}$; $m = 0,1933 \text{ кг}$).

11.14. Электролитическое получение алюминия производится при напряжении 5 В и плотности тока 40 А/м^2 . Какова мощность тока P , при помощи которого можно получить 150 кг алюминия в сутки, если потери составляют 5% всей затраченной энергии? Какова необходимая площадь поверхности электродов S ? (Ответ: $P = 3 \text{ кВт}$; $S = 15 \text{ м}^2$).

11.15. Какую электрическую энергию W надо затратить, чтобы при электролизе раствора AgNO_3 выделилась масса $m = 500$ мг серебра? Разность потенциалов на электродах $U = 4 \text{ В}$. (Ответ: $W = 1,8 \text{ кДж}$).

11.16. Найти эквивалентную проводимость Λ_0 для очень слабого раствора азотной кислоты. (Ответ: $\Lambda_0 = 37,6 \cdot 10^{-3} \text{ м}^2 / \text{Ом} \cdot \text{моль}$).

11.17. Найти сопротивление R раствора AgNO_3 , заполняющего трубку длиной $l = 84 \text{ см}$ и площадью поперечного сечения $S = 5 \text{ мм}^2$. Эквивалентная концентрация раствора $\eta = 0,1 \text{ моль/л}$, степень диссоциации $\alpha = 81 \%$. (Ответ: $R = 180 \text{ кОм}$).

11.18. В водородно-кислородном топливном элементе используется энергия, освобождающаяся при сгорании водорода в кислороде, которая равна $2,4 \cdot 10^8 \text{ Дж/кмоль}$. Считая, что каждые два иона водорода отнимают у металлического электрода один атом кислорода и два электрона, найти эдс этого элемента. (Ответ: $\xi = 1,23 \text{ В}$).

11.19. В чистой воде имеется диссоциация на ионы H^+ и $(\text{OH})^-$. Вследствие этого проводимость воды отлична от нуля и равна $4 \cdot 10^{-6} \text{ Ом}^{-1} \cdot \text{м}^{-1}$. Концентрация H^+ -ионов при этом равна $10^{-7} \text{ кмоль/м}^3$. Считая, что подвижность H^+ -ионов $b_+ = 3,3 \cdot 10^{-7} \text{ м}^2 / \text{В} \cdot \text{с}$, найти подвижность $(\text{OH})^-$ -ионов. (Ответ: $b_- = 0,7 \cdot 10^{-7} \text{ м}^2 / \text{В} \cdot \text{с}$).

11.20. В электролите ионы образуют вокруг себя оболочку из нейтральных молекул растворителя (сольватация). Считая, что сопротивление трения иона определяется законом Стокса, выразить радиус оболочки R через вязкость растворителя η и подвижность иона b . (Ответ: $R = qb / 6\pi\eta$).

11.21. Считая, что пространственное распределение концентрации ионов в электролите в зависимости от электрического потенциала имеет такой же вид, как распределение давления в атмосфере (формула Больцмана) вследствие стационарного равновесия между дрейфом заряженных частиц в поле и диффузионным дрейфом ионов, получить связь коэффициента диффузии D и проводимости ионов b . (Ответ: $D = KTb/q$).

11.22. Удельная проводимость децинормального раствора соляной кислоты $\sigma = 3,5 \text{ См/м}$. Найти степень диссоциации α . (Ответ: $\alpha = 92 \%$).

11.23. Найти разность потенциалов между двумя точками в электролите, в которых концентрация ионов равна n_1 и n_2 . Коэффициенты диффузии и подвижности положительных и отрицательных ионов равны соответственно D_+, b_+ и D_-, b_- . (Ответ: $U = \left(\frac{D_+ - D_-}{b_+ + b_-} \right) \ln \frac{n_2}{n_1}$).

11.24. В неоднородном по плотности ионов электролите ток проводимости складывается из тока диффузии и тока, создаваемого электрическим полем. (Считая заданными коэффициенты диффузии D_+ и D_- и подвижно-

сти b_+ и b_- ионов разного знака, получить выражение для плотности полного тока j . (Ответ: $j = \sigma \left(E + \frac{D_- + D_+}{b_+ + b_-} \text{grad}(\ln n) \right)$).

11.25. Проводимость очень чистой воды при температуре 25 °С равна $4 \cdot 10^{-6} \text{ Ом}^{-1} \cdot \text{м}^{-1}$. При растворении в воде хлористого калия KCl в количестве $10^{-2} \text{ кмоль/м}^3$ проводимость ее увеличивается до $0,14 \text{ Ом}^{-1} \cdot \text{м}^{-1}$, т. е. в 30000 раз. Пренебрегая проводимостью за счет ионов H^+ и $(\text{OH})^-$, найти суммарную подвижность ионов K^+ и Cl^- . (Ответ: $b_+ + b_- = 1,4 \cdot 10^{-5} \text{ м}^2/\text{В} \cdot \text{с}$).

11.26. Найти сопротивление R раствора AgNO_3 , заполняющего трубку длиной $l = 84 \text{ см}$ и площадью поперечного сечения $S = 5 \text{ мм}^2$. Эквивалентная концентрация раствора $\eta = 0,1 \text{ моль/л}$, степень диссоциации $\alpha = 81 \%$. (Ответ: $R = 180 \text{ кОм}$).

11.27. Эквивалентная проводимость раствора KCl при некоторой концентрации равна $\Lambda = 12,2 \cdot 10^{-3} \text{ м}^2/\text{Ом} \cdot \text{моль}$, удельная проводимость при той же концентрации $\sigma = 0,122 \text{ Ом}^{-1} \cdot \text{м}^{-1}$, эквивалентная проводимость при бесконечном разведении $\Lambda_\infty = 13 \cdot 10^{-3} \text{ м}^2/\text{Ом} \cdot \text{моль}$. Найти степень диссоциации α раствора KCl при данной концентрации. (Ответ: $\alpha = 94 \%$).

11.28. Найти зависимость стационарной плотности тока в жидком изоляторе от скорости генерации g и рекомбинации r , считая их постоянными вдоль ячейки с размером d между электродами. (Ответ: $j = q(g - r)d$).

11.29. При высоких напряженностях электрического поля в жидком диэлектрике рекомбинацией носителей можно полностью пренебречь. Найти зависимость плотности стационарного тока от скорости генерации носителей g и расстояния d между электродами. (Ответ: $j = qgd$).

11.30. В очень слабых полях в жидком изоляторе рекомбинация настолько сильна, что определяет концентрацию ионов, т. е. можно пренебречь потерями носителей вследствие дрейфа в поле. Считая, что скорость рекомбинации $r = \rho n^2$, где ρ – коэффициент рекомбинации; n – концентрация носителей, найти зависимость плотности тока j , от подвижности ионов и скорости генерации носителей g . (Ответ: $j = q\sqrt{g/\rho}(b_+ + b_-)E$).

Глава 12. ЭЛЕКТРИЧЕСКИЙ ТОК В ГАЗАХ

12.1. Основные формулы

Подвижность ионов определяется формулой

$$b = \bar{v} / E,$$

где \bar{v} – средняя скорость упорядоченного движения ионов; E – напряженность электрического поля.

При небольших плотностях тока, текущего в газе, справедлив закон Ома:

$$\vec{j} = qn(b_+ + b_-)\vec{E} = \delta\vec{E},$$

где $\delta = qn(b_+ + b_-)$ – удельная проводимость газа; q – заряд иона; n – число ионов каждого знака (число пар ионов), находящихся в единице объема газа (м^{-3}); b_+ и b_- – подвижности ионов; \vec{E} – напряженность электрического поля.

При этом $n = \sqrt{N/\gamma}$, где N – число пар ионов, создаваемых ионизирующим агентом в единице объема за единицу времени, $\text{м}^{-3} \cdot \text{с}^{-1}$; γ – коэффициент рекомбинации, $\text{м}^3/\text{с}$.

Плотность тока насыщения в газе определяется формулой

$$j_n = N q d,$$

где d – расстояние между электродами.

Для пробоя на оптических частотах требуются колоссальные поля в световой волне ($10^6 \dots 10^7$) В/см, что соответствует интенсивности света порядка 10^5 МВт/см².

Среднеквадратичное поле в световой волне определяется по формуле

$$E = (4 \pi S / c)^{1/2},$$

где S – плотность потока энергии в фокусе; c – скорость света.

Диаметр кружка фокусировки d_1 определяется углом расходимости исходного светового луча θ и фокусным расстоянием линзы f :

$$d = f \cdot \theta.$$

12.2. Примеры решения задач

Пример 12.1. Между пластинами конденсатора площадью $S = 250 \text{ см}^2$ каждая находится водород объемом $V = 375 \text{ см}^3$. Концентрация ионов в газе равна $n = 5,3 \cdot 10^7 \text{ см}^{-3}$. Какое напряжение U нужно приложить к пластинам, чтобы получить ток силой $I = 2 \text{ мкА}$? Подвижность ионов: положительных $b_+ = 5,4 \text{ см}^2/(\text{В} \cdot \text{с})$, отрицательных $b_- = 7,4 \text{ см}^2/(\text{В} \cdot \text{с})$.

Решение. Напряжение на пластинах конденсатора связано с напряженностью E электрического поля и расстоянием d между пластинами соотношением:

$$U = Ed.$$

Напряженность поля может быть найдена из выражения для плотности тока:

$$j = qn(b_+ + b_-)E.$$

Отсюда

$$E = \frac{j}{qn(b_+ + b_-)} = \frac{I}{qn(b_+ + b_-)S}.$$

Так как объем пространства, заключенного между пластинами, равен Sd , то $d = V/S$. Подставив выражения E и d в формулу (12.5), получим

$$U = \frac{IV}{qn(b_+ + b_-)S^2}.$$

Произведя вычисления, найдем $U = 110$ В.

Пример 12.2. Воздух в пространстве между пластинами плоского конденсатора с размерами $10 \times 10 \times 2,5$ см³ ионизируется рентгеновскими лучами так, что в 1 см³ за 1 с образуется 10^9 ионов и столько же свободных электронов. Пластины конденсатора соединены с источником напряжения $U = 1300$ В через резистор с сопротивлением $R_1 = 10^{10}$ Ом.

Резистор с таким же сопротивлением $R_2 = 10^{10}$ Ом включен параллельно конденсатору (рис. 12.1). Какой ток протекает через резистор R_1 ? Считать, что ионы и электроны достигают пластин конденсатора, не успев рекомбинировать, и что заряд каждого иона равен по модулю заряду одного электрона.

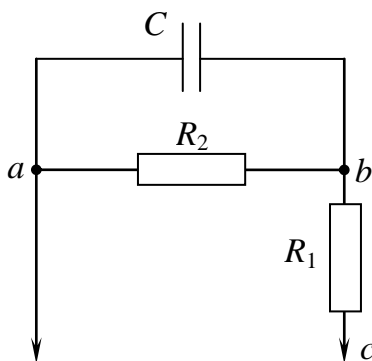


Рис. 12.1

Решение. Ионы, возникающие под действием рентгеновских лучей внутри конденсатора, начинают двигаться к пластинам конденсатора под действием приложенного к нему напряжения.

Ток через конденсатор $I_C = n e V$, где n – число ионов (или электронов), образующихся в единицу времени в единице объема конденсатора; e – заряд иона; V – объем конденсатора. Имеем

$$U = U_{ab} + U_{bc} = I_{R2}R_2 + I_{R1}R_1.$$

Кроме того, $I_{R1} = I_C + I_{R2}$.

Из этих уравнений следует, что

$$I_{R1} = \frac{U + I_C R_2}{R_1 + R_2} = \frac{(U + neVR)}{2R} = 8,5 \cdot 10^{-8} \text{ А}.$$

12.3. Задачи для самостоятельного решения

12.1. Энергия ионизации атома водорода $E_i = 2,18 \cdot 10^{-18}$ Дж. Определить потенциал ионизации U_i водорода. (Ответ: $U_i = 13,6$ В).

12.2. Какой наименьшей скоростью v_{\min} должен обладать электрон, чтобы ионизировать атом азота, если потенциал ионизации U_i азота равен 14,5 В? (Ответ: $v_{\min} = 2,3 \cdot 10^6$ м/с).

12.3. Потенциал ионизации атома ртути $U_i = 10,4$ В. Какой наименьшей скоростью v_{\min} должен обладать электрон, чтобы ионизировать атом ртути при ударе? (Ответ: $v_{\min} = 1,92 \cdot 10^6$ м/с).

12.4. Какой наименьшей скоростью v_{\min} должен обладать электрон, чтобы ионизировать атом гелия? Энергия ионизации атома гелия $E_i = 24,5$ эВ. (Ответ: $v_{\min} = 2,94 \cdot 10^6$ м/с).

12.5. Какой наименьшей скоростью v_{\min} должен обладать электрон, чтобы ионизировать атом водорода? Потенциал ионизации атома водорода $U = 13,6$ В. (Ответ: $v_{\min} = 2,2 \cdot 10^6$ м/с).

12.6. Какова должна быть температура T атомарного водорода, чтобы средняя кинетическая энергия поступательного движения атомов была достаточна для ионизации путем соударений? Потенциал ионизации U_i атомарного водорода равен 13,6 В. (Ответ: $T = 210$ К).

12.7. При какой температуре T атомы ртути имеют кинетическую энергию поступательного движения, достаточную для ионизации? Потенциал ионизации атома ртути $U_i = 10,4$ В. (Ответ: $T = 8 \cdot 10^4$ К).

12.8. Посередине между электродами ионизационной камеры пролетела α -частица, двигаясь параллельно электродам, и образовала на своем пути цепочку ионов. Спустя какое время после пролета α -частицы ионы дойдут до электродов, если расстояние d между электродами равно 4 см, разность потенциалов $U = 5$ кВ и подвижность ионов обоих знаков в среднем $b_+ = b_- = 2$ см²/(В·с)? (Ответ: $t = 0,8$ мс).

12.9. Азот ионизируется рентгеновскими лучами. Определить проводимость G азота, если в каждом кубическом сантиметре газа находится в условиях равновесия $n = 10^7$ пар ионов. Подвижность положительных ионов $b_+ = 1,27$ см²/(В·с) и отрицательных $b_- = 1,81$ см²/(В·с)? (Ответ: $G = 0,5$ нСм).

12.10. Воздух между плоскими электродами ионизационной камеры ионизируется рентгеновскими лучами. Сила тока I , текущего через камеру, равна 1,2 мкА. Площадь S каждого электрода равна 300 см^2 , расстояние между ними $d = 2 \text{ см}$, разность потенциалов $U = 100 \text{ В}$. Найти концентрацию n пар ионов между пластинами, если ток далек от насыщения. Подвижность положительных ионов $b_+ = 1,4 \text{ см}^2/(\text{В} \cdot \text{с})$ и отрицательных $b_- = 1,9 \text{ см}^2/(\text{В} \cdot \text{с})$. Заряд каждого иона равен элементарному заряду. (Ответ: $n = 1,52 \cdot 10^{14} \text{ м}^{-3}$).

12.11. При каком напряжении зажигается неоновая лампочка, если расстояние между электродами, имеющими вид тонких пластин, равно d ; энергия ионизации неона E_i ; длина свободного пробега электронов между двумя последовательными столкновениями с атомами неона l ? Заряд электрона равен e . (Ответ: $U = \frac{E_i d}{el}$).

12.12. Электрическая дуга низкого напряжения осуществляется между угольным электродом и большой металлической массой и питается от источника переменного тока (трансформатора). Показать, что по цепи с дугой идет частично выпрямленный ток. В каком направлении идет выпрямленный ток в цепи?

12.13. Electroды в форме диска и острия расположены на некотором расстоянии друг от друга. К каким полюсам нужно присоединить эти электроды к источнику тока для того, чтобы пробой воздушного промежутка произошел при меньшей разности потенциалов между электродами?

12.14. Электрический пробой воздуха наступает при напряженности поля $E = 3,0 \text{ МВ/м}$. Определить потенциал ионизации воздуха и скорость электронов перед ударом о молекулы, если длина свободного пробега электронов $l = 5,0 \text{ мкм}$. (Ответ: $U_i = 15 \text{ В}$; $v = 2,3 \cdot 10^6 \text{ м/с}$).

12.15. До какого потенциала можно зарядить уединенный металлический шарик радиусом $r = 5,0 \text{ мм}$? Какой заряд он при этом будет нести? Напряженность поля, при котором наступает пробой воздуха, $E = 3,0 \text{ МВ/м}$. (Ответ: $\varphi = 30 \text{ кВ}$; $q = 1,7 \text{ нКл}$).

12.16. При освещении сосуда с газом рентгеновскими лучами в единице объема в единицу времени ионизируется число молекул $N = 10^6 \text{ м}^{-3} \text{ с}^{-1}$. В результате рекомбинации в сосуде установилось равновесие, причем в единице объема газа находится число ионов каждого знака $n = 10^{14} \text{ м}^{-3}$. Найти коэффициент рекомбинации γ . (Ответ: $\gamma = 10^{-12} \text{ м}^3/\text{с}$).

12.17. К электродам разрядной трубы приложена разность потенциалов $U = 5 \text{ В}$, расстояние между ними $d = 10 \text{ см}$. Газ, находящийся в трубке,

однократно ионизирован. Число ионов каждого знака в единице объема $n = 10^8 \text{ м}^{-3}$; подвижность ионов $b_+ = 3 \cdot 10^{-2} \text{ см}^2/(\text{В} \cdot \text{с})$ и $b_- = 3 \cdot 10^2 \text{ см}^2/(\text{В} \cdot \text{с})$. Найти плотность тока j в трубке. Какая часть полного тока переносится положительными ионами? (Ответ: $j = 0,24 \text{ мкА}/\text{м}^2$; 0,01 %).

12.18. Объем газа, заключенного между электродами ионизационной камеры, $V = 0,5 \text{ л}$. Газ ионизируется рентгеновским излучением. Сила тока насыщения $I_{\text{н}} = 4 \text{ нА}$. Сколько пар ионов образуется в 1 с в 1 см^3 газа? Заряд каждого иона равен элементарному заряду. (Ответ: $n = 5 \cdot 10^7 \text{ см}^{-3} \cdot \text{с}^{-1}$).

12.19. Найти силу тока насыщения между пластинами конденсатора, если под действием ионизатора в каждом кубическом сантиметре пространства между пластинами каждую секунду образуется $n = 10^8$ пар ионов, каждый из которых несет один элементарный заряд. Расстояние между пластинами конденсатора $d = 1 \text{ см}$, площадь пластины $S = 100 \text{ см}^2$. (Ответ: $I_{\text{нас}} = 1,6 \cdot 10^{-9} \text{ А}$).

12.20. В ионизационной камере, расстояние между плоскими электродами которой $d = 5 \text{ см}$, проходит ток насыщения плотностью $j = 16 \text{ мкА}/\text{м}^2$. Определить число пар ионов n , образующихся в каждом кубическом сантиметре пространства камеры в 1 с. (Ответ: $n_0 = 2 \cdot 10^9 \text{ см}^{-3} \cdot \text{с}^{-1}$).

12.21. Пары ртути в ртутной лампе ионизируются рентгеновскими лучами. При увеличении напряжения между электродами лампы достигается ток насыщения $I_{\text{нас}} = 0,8 \text{ нА}$. Какое количество пар ионов создают рентгеновские лучи за время $t = 1 \text{ с}$? (Ответ: $n = 2,5 \cdot 10^9$).

12.22. Площадь каждого электрода ионизационной камеры $S = 0,01 \text{ м}^2$, расстояние между ними $d = 6,2 \text{ см}$. Найти ток насыщения $I_{\text{н}}$ в такой камере, если в единице объема в единицу времени образуется число однозарядных ионов каждого знака $n_0 = 10^{15} \text{ см}^{-3} \cdot \text{с}^{-1}$. (Ответ: $I_{\text{н}} = 0,1 \text{ мкА}$).

12.23. Найти наибольшее возможное число ионов n каждого знака, находящихся в единице объема камеры (см. задачу 12.22), если коэффициент рекомбинации $\gamma = 10^{-12} \text{ м}^3/\text{с}$. (Ответ: $n = 3,3 \cdot 10^{13} \text{ м}^{-3}$).

12.24. Найти сопротивление R трубки длиной $l = 84 \text{ см}$ и площадью поперечного сечения $S = 5 \text{ мм}^2$, если она заполнена воздухом, ионизированным так, что в единице объема при равновесии находится $n = 10^{13} \text{ см}^{-3}$ однозарядных ионов каждого знака. Подвижности ионов $b_+ = 1,3 \cdot 10^{-4} \text{ см}^2/(\text{В} \cdot \text{с})$ и $b_- = 1,8 \cdot 10^{-4} \text{ см}^2/(\text{В} \cdot \text{с})$. (Ответ: $R = 3,4 \cdot 10^{14} \text{ Ом}$).

12.25. Какой ток I пойдет между электродами ионизационной камеры (см. задачу 12.22), если к электродам приложена разность потенциалов $U = 20$ В? Подвижность ионов $b_- = b_+ = 10^{-4}$ см²/(В·с). Коэффициент рекомбинации $\gamma = 10^{-12}$ м³/с. Какую долю тока насыщения составляет найденный ток? (Ответ: $I = 3,3$ нА; 3,3%).

12.26. Почему искровой разряд возникает при высоких напряжениях, а дуговой разряд идет при достаточно малых напряжениях?

12.27. Луч лазера, работающего в импульсном режиме, пропустили через фокусирующую линзу. Определить произойдет ли пробой в области фокуса, если известно, что пиковая мощность лазера $P = 30$ МВт, угол расходимости светового луча $\theta \approx 5 \cdot 10^{-3}$ рад, фокусное расстояние линзы $f = 10$ см. (Ответ: $S = 0,15 \cdot 10^9$ Вт/м², пробой произойдет).

12.28. Когда луч рубинового лазера, работающего в импульсном режиме, пропустили через фокусирующую линзу, в воздухе в области фокуса вспыхнула искра. Определить фокусное расстояние линзы, если пиковая мощность лазера $P = 35,6$ МВт, плотность потока энергии в фокусе составляла $0,5 \cdot 10^{15}$ Вт/см². Угол расходимости лазерного луча $\theta = 10^{-2}$ рад. (Ответ: $f = 3$ см).

12.29. Луч лазера, работающего в импульсном режиме, пропустили через фокусирующую линзу с фокусным расстоянием f . В области фокуса вспыхнула искра. Определить среднеквадратичное поле в световой волне в области фокуса, если угол расхождения луча θ и пиковая мощность P .

(Ответ: $E = \frac{4}{f \cdot \theta \sqrt{P/c}}$).

12.30. Определить произойдет ли оптический пробой, если использовать аргоновый лазер, работающий в непрерывном режиме. Причем мощность излучения $P = 1,5$ Вт, а угол расходимости светового луча $\theta = 10^{-3}$ рад. Для фокусировки луча используют линзу с фокусным расстоянием $f = 7$ см. (Ответ: $S = 4 \cdot 10^8$ Вт/м², пробой не произойдет).

Глава 13. ЭФФЕКТЫ ПОККЕЛЬСА, КЕРРА, ШТАРКА И ПЬЕЗОЭЛЕКТРИЧЕСКИЙ

13.1. Основные формулы

Эффект Поккельса (линейный электрооптический эффект) заключается в изменении преломляющих свойств кристаллов под действием внешнего электрического поля.

Уравнение оптической индикатрисы любого кристалла в системе ее главных осей x_1, x_2, x_3 :

$$\frac{x_1^2}{n_1^2} + \frac{x_2^2}{n_2^2} + \frac{x_3^2}{n_3^2} = 1$$

или

$$a_1^0 x_1^2 + a_2^0 x_2^2 + a_3^0 x_3^2 = 1,$$

где n_1, n_2, n_3 – главные коэффициенты преломления (коэффициенты преломления в направлении координатных осей); a_1^0, a_2^0, a_3^0 – главные диэлектрические непроницаемости кристалла при отсутствии поля.

Уравнение измененной оптической индикатрисы при наложении электрического поля

$$a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2 + 2a_{23}x_2x_3 + 2a_{13}x_1x_3 + 2a_{12}x_2x_1 = 1,$$

где a_{ij} – новые поляризационные константы. Тензор $[a_{ij}]$ является обратным по отношению к тензору диэлектрических проницаемостей $[\epsilon_{ij}]$.

Связь между изменениями поляризационных констант и электрическим полем

$$\Delta a_{ij} = r_{ijk} E_k + R_{ijk} E_k E_l. \quad (13.1)$$

Линейный электрооптический эффект описывает уравнение

$$\Delta a_{ij} = r_{ijk} E_k, \quad (i, j, k = 1, 2, 3),$$

где r_{ijk} – коэффициенты, образующие тензор линейного электрооптического эффекта; E_k – напряженность электрического поля.

В матричных обозначениях уравнение (13.5) из-за симметричности тензора поляризационных констант записывается как

$$\Delta a_i = r_{ij} E_k, \quad (i = 1, 2, \dots, 6; j = 1, 2, 3).$$

Для решения задач уравнение (13.6) удобно записать в виде табл. 13.1.

Таблица 13.1

Δa	E_1	E_2	E_3
Δa_1	r_{11}	r_{12}	r_{13}
Δa_2	r_{21}	r_{22}	r_{23}

Δa_3	r_{31}	r_{32}	r_{33}
Δa_4	r_{41}	r_{42}	r_{43}
Δa_5	r_{51}	r_{52}	r_{53}
Δa_6	r_{61}	r_{62}	r_{63}

Приложение электрического поля E может вызвать в кристаллах и квадратичные (пропорциональные E^2) эффекты. Вторая группа слагаемых в уравнении (13.1) определяет *эффект Керра*:

$$\Delta a_{ij} = R_{ijkl}, \quad (i, j, k, l = 1, 2, 3), \quad (13.2)$$

где R_{ijkl} – коэффициенты квадратичного электрооптического эффекта.

Они образуют симметричный тензор четвертого ранга. Уравнение (13.2) в матричной форме:

Δa	E_1^2	E_2^2	E_3^2	E_4^2	E_5^2	E_6^2
Δa_1	R_{11}	R_{12}	R_{13}	R_{14}	R_{15}	R_{16}
Δa_2	R_{21}	R_{22}	R_{23}	R_{24}	R_{25}	R_{26}
Δa_3	R_{31}	R_{32}	R_{33}	R_{34}	R_{35}	R_{36}
Δa_4	R_{41}	R_{42}	R_{43}	R_{44}	R_{45}	R_{46}
Δa_5	R_{51}	R_{52}	R_{53}	R_{54}	R_{55}	R_{56}
Δa_6	R_{61}	R_{62}	R_{63}	R_{64}	R_{65}	R_{66}

или в краткой записи:

$$\Delta a_i = R_{ij} E_j, \quad (i, j = 1, 2, \dots, 6).$$

Прямой пьезоэлектрический эффект включает в себя группу явлений, в которых механические напряжения или деформация вызывают в кристаллах прямо пропорциональную указанным величинам электрическую поляризацию (электрическое поле).

Прямой пьезоэлектрический эффект описывают уравнения четырех типов:

$$P_i = d_{ijk} t_{jk};$$

$$P_i = e_{ijk} r_{jk};$$

$$E_i = -g_{ijk} t_{jk};$$

$$E_i = -h_{ijk} r_{jk}, \quad (i, j, k = 1, 2, 3),$$

где P_i и E_i – соответственно компоненты вектора электрической поляризации и вектора напряженности электрического поля; t_{jk} и r_{jk} – соответственно компоненты тензора механических напряжений и тензора деформаций; d_{ijk} , e_{ijk} , g_{ijk} , h_{ijk} – пьезоэлектрические коэффициенты, образующие тензор третьего ранга.

При переходе из координатной системы x_1, x_2, x_3 в систему x'_1, x'_2, x'_3 пьезоэлектрические коэффициенты, например коэффициенты d_{ijk} , преобразуются по закону

$$d_{qlm} = C_{qi}C_{lj}C_{mk}d_{ijk}.$$

Коэффициенты d_{ijk} – пьезоэлектрические модули.

Уравнения прямого пьезоэлектрического эффекта в матричной записи:

$$P_i = d_{il}t_l;$$

$$P_i = e_{il}r_l;$$

$$E_i = -g_{il}t_l;$$

$$E_i = -h_{il}r_l, (i = 1, 2, 3; l = 1, 2, \dots, 6),$$

где коэффициенты d_{il} , e_{il} , g_{il} , h_{il} образуют матрицы, состоящие из трех строк и шести столбцов.

Обратный пьезоэлектрический эффект – термодинамическое следствие прямого пьезоэффекта.

Обратный пьезоэффект описывается уравнениями:

$$r_j = d_{ij}E_i;$$

$$r_j = g_{ij}P_i;$$

$$t_j = -e_{ij}E_i;$$

$$t_j = -h_{ij}P_i,$$

где d , g , h , e с индексами – уже введенные ранее пьезоэлектрические коэффициенты.

Эффектом Штарка называется расщепление спектральных линий под действием на излучающее вещество внешнего электрического поля.

В водороде и водородоподобных системах наблюдается линейный эффект Штарка, частично снимающий вырождение между уровнями единственного атомного электрона.

Расщепление (в гауссовой системе) описывается уравнением:

$$\Delta v_1 = \frac{3}{8\pi^2} \cdot \frac{h}{m_e e z} \cdot (n_1 - n_2) n E,$$

где E – напряженность однородного электрического поля; n_1 и n_2 – так называемые параболические квантовые числа, $n_1 + n_2 < n$, где n – главное квантовое число; h – постоянная Планка; m_e – масса электрона; e – заряд электрона; z – порядковый номер элемента.

Наличие линейного эффекта Штарка означает, что система обладает средним дипольным моментом, вызванным поляризацией ее в электрическом поле:

$$P_e = \frac{3}{8\pi^2} \cdot \frac{h^2}{m_e e^2 z} \cdot (n_1 - n_2)n.$$

После частичного снятия вырождения в линейном эффекте Штарка остается вырождение состояний, отличающихся значениями магнитного квантового числа m . Дальнейшее снятие вырождения происходит в эффекте второго приближения – квадратичном эффекте Штарка. В достаточно сильных электрических полях с напряженностью E , превосходящей 10^5 В/см, наблюдается расщепление (в гауссовой системе):

$$\Delta v_2 = B_0 \left(\frac{n}{z} \right)^4 [17n^2 - 3(n_1 - n_2)^2 - 9m^2 + 19] E^2,$$

где

$$B_0 = -h^5 / 1024\pi^6 m_e^3 e^6,$$

зависящее также от магнитного квантового числа m . Квадратичный эффект Штарка всегда отрицателен и смещает энергетические уровни в сторону меньших энергий.

13.2. Примеры решения задач

Пример 13.1. Известно, что высокочастотная модуляция света может быть осуществлена при использовании квадратичного электрооптического эффекта на кристаллах титаната бария в их кубической модификации, т. е. при температуре выше верхней точки Кюри ($T_K = 120^\circ\text{C}$). Рассчитать величину управляющего напряжения $U_{\lambda/2}$ пластинки X-среза титаната бария толщиной 0,3 см для света с длиной волны 5460 \AA . В режиме продольного или поперечного эффекта должна работать такая пластинка?
Примечание: $U_{\lambda/2}$ – напряжение, при котором пластинка дает разность хода $\lambda/2$.

Решение. Кристаллы титаната бария при указанной температуре относятся к классу $m3m$. Для них уравнение оптической индикатрисы при отсутствии

поля $a^0(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) = 1$. При наложении внешнего поля по [100] ($E_1 = E$, $E_2 = E_3 = 0$) изменения поляризационных констант кристаллов титаната бария согласно $\Delta a_i = R_{ij}E_j$ ($i, j = 1, 2, \dots, 6$) $\Delta a_1 = R_{11}E_1^2$; $\Delta a_2 = \Delta a_3 = R_{12}E_1^2$ и уравнение оптической индикатрисы принимает вид:

$$(a^0 + R_{11}E_1^2)x_1^2 + (a^0 + R_{12}E_1^2)x_2^2 + (a^0 + R_{12}E_1^2)(x_2^2 + x_3^2) = 1.$$

Как следует из последнего уравнения, под действием поля кристалл становится оптически одноосным с оптической осью, совпадающей с направлением поля; при этом главные оси оптических индикатрис кристалла до и после наложения поля совпадают.

Найдем значения новых главных показателей преломления:

$$\frac{1}{(n'_1)^2} = \frac{1}{n_0^2} + R_{11}E^2 = \frac{1 + R_{11}E^2 n_0^2}{n_0^2}; \quad n'_1 = n_0 \left(1 - \frac{R_{11}E^2 n_0^2}{2}\right).$$

Аналогично $n'_2 = n'_3 = n_0 \left(1 - \frac{R_{12}E^2 n_0^2}{2}\right)$.

Поскольку $n'_2 = n'_3$, то при использовании продольного электрооптического эффекта двулучепреломление пластинки X-среза будет нулевым. Пластинка X-среза, как и пластинки Y- и Z-срезов, будет работать только в режиме поперечного квадратичного электрооптического эффекта, когда направление поля и направление распространения света взаимно перпендикулярны. Двулучепреломление в этом случае $n'_2 - n'_1 = \frac{n_0^3}{2} E^2 (R_{11} - R_{12})$.

Разность хода $\frac{\lambda}{2} = \frac{n_0^3}{2} E^2 (R_{11} - R_{12}) d$. Для данного случая $d = 0,3$ см;

$\lambda = 5460 \cdot 10^{-8}$ см; $n_0 = 2,4$; $R_{11} - R_{12} = 1,44 \cdot 10^{-12}$ ед. СГСЭ; $U_{\lambda/2} \approx 1,6$ кВ.

Пример 13.2. Для измерения коэффициентов, характеризующих электрооптические свойства кристаллической пластинки Z-среза кристалла KDP (рис. 13.1), в ней наблюдался продольный электрооптический эффект. При использовании монохроматического света с $\lambda = 5460 \text{ \AA}$ разность хода, равная $\lambda/2$, достигалась при напряжении 7,9 кВ. Рассчитать значение электрооптического коэффициента, который может быть получен по дан-

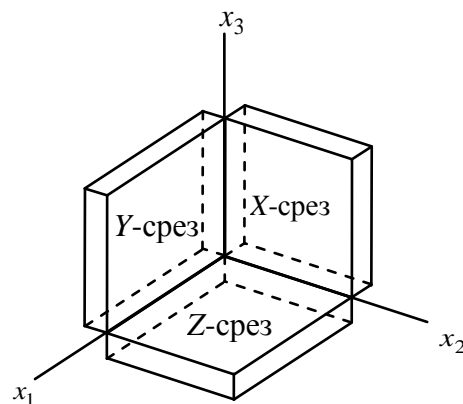


Рис. 13.1

ным измерений.

Решение. Для кристаллов KDP матрица коэффициентов линейного электрооптического эффекта имеет три компоненты, отличные от нуля (прил. 2, 3): r_{41} , r_{52} , r_{63} .

При отсутствии поля уравнение оптической индикатрисы записывается в виде:

$$a_1^0(x_1^2 + x_2^2) + a_3^0x_3^2 = 1,$$

где $a_1^0 = 1/n_o^2$; $a_3^0 = 1/n_e^2$; n_o и n_e – соответственно показатели преломления обыкновенной и необыкновенной волн.

Поле приложено к граням пластинки Z-среза, следовательно, $E_1 = E_2 = 0$, $E_3 = |E|$. Отсюда, согласно $\Delta a_i = r_{ij}E_j$ ($i, j = 1, 2, \dots, 6; j = 1, 2, 3$), $\Delta a_6 = a_6 - r_{63}E_3$. В этом случае уравнение оптической индикатрисы принимает вид:

$$a_1^0(x_1^2 + x_2^2) + a_3^0x_3^2 + 2r_{63}E_3x_1x_2 = 1.$$

Поскольку свет распространяется в направлении оси x_3 , значения показателей преломления равны величинам полуосей сечения оптической индикатрисы, перпендикулярного оси x_3 .

Сечение индикатрисы координатной плоскостью x_1x_2 – эллипс, полуоси которого не совпадают с кристаллофизическими осями x_1 и x_2 .

Так как уравнение эллипса $\frac{x_1^2 + x_2^2}{n_0^2} + 2r_{63}x_1x_2E_3 = 1$ симметрично относительно перестановки координатных осей x_1 и x_2 , можно сделать вывод о том, что полуоси эллипса составляют с кристаллофизическими осями координат углы 45° (рис. 13.2).

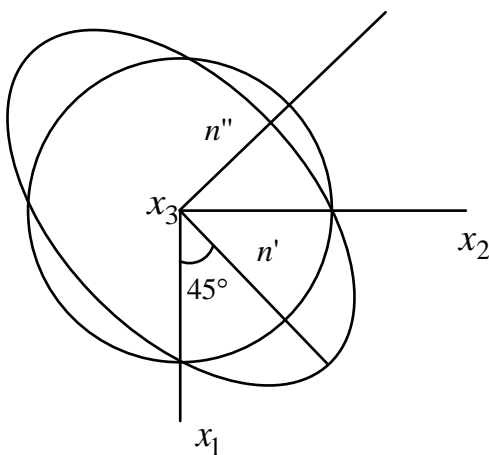


Рис. 13.2

Этот результат может быть получен также из принципа Кюри. При отсутствии электрического поля главные оси x_1 и x_2 кристалла с симметрией $\bar{4}2m$ совпадают с осями 2. При наложении поля вдоль $[001]$ получаем кристалл с симметрией mm , главные оси которого совпадают с положениями нормалей к плоскостям m , располагающимся под углом 45° по отношению к главным осям кристалла при отсутствии поля.

Вычислим новые главные показатели преломления в плоскости x_1x_2 . Для этого приведем уравнение эллипса к главным осям:

$$\left(\frac{1}{n_0^2} + r_{63}E_3\right)(x'_1)^2 + \left(\frac{1}{n_0^2} - r_{63}E_3\right)(x'_2)^2 = 1.$$

Очевидно, новые коэффициенты преломления будут иметь значения

$$\frac{1}{(n')^2} = \frac{1}{n_0^2} + r_{63}E_3; \quad \frac{1}{(n'')^2} = \frac{1}{n_0^2} - r_{63}E_3.$$

Отсюда

$$(n')^2 = \frac{n_0^2}{1 + r_{63}E_3n_0^2}; \quad (n'')^2 = \frac{n_0^2}{1 - r_{63}E_3n_0^2},$$

$$n' = \sqrt{\frac{n_0^2}{1 + r_{63}E_3n_0^2}} = n_0 \sqrt{\frac{1}{1 + r_{63}E_3n_0^2}};$$

$$n'' = \sqrt{\frac{n_0^2}{1 - r_{63}E_3n_0^2}} = n_0 \sqrt{\frac{1}{1 - r_{63}E_3n_0^2}}.$$

Используем известное соотношение, справедливое для случая малых α $\sqrt{\frac{1}{1+\alpha}} \approx 1 - \frac{1}{2}\alpha$. Так как $\frac{n_0^2}{1 - r_{63}E_3n_0^2}$ – величина малая, то

$$n' = n_0 \left(1 - \frac{1}{2} r_{63}E_3n_0^2\right) = n_0 - \frac{1}{2} r_{63}E_3n_0^3,$$

$$n'' = n_0 \left(1 + \frac{1}{2} r_{63}E_3n_0^2\right) = n_0 + \frac{1}{2} r_{63}E_3n_0^3.$$

В итоге получим двуосный кристалл с главными коэффициентами преломления

$$n' = n_0 + \frac{1}{2} r_{63}E_3n_0^3, \quad n'' = n_0 - \frac{1}{2} r_{63}E_3n_0^3.$$

Величина двулучепреломления для света, распространяющегося в пластинке Z-среза перпендикулярно к ее граням, $n' - n'' = r_{63}E_3n_0^3$. Следовательно, $r_{63}E_3n_0^3d = \lambda/2$, откуда $r_{63} = \lambda / (2U_{\lambda/2}n_0^3)$. Для $\lambda = 5460 \text{ \AA}$; $n_0 = 1,51152$;

$$U_{\lambda/2} = 7,9 \text{ кВ и } |r_{63}| = \frac{5460 \cdot 10^{-8} \cdot 300}{2 \cdot 7,9 \cdot 10^3 \cdot 3,4566} \approx 30 \cdot 10^{-8} \text{ ед. СГСЭ.}$$

Пример 13.3. Найти вид матрицы пьезомодулей для сегнетовой соли.

Решение. Для решения задачи воспользуемся методом прямой проверки. Рассмотрим сначала ось симметрии 2, совпадающую с осью x_3 кристаллофизической системы координат. Ось $2 \parallel x_3$ преобразует координат-

ные оси следующим образом: $x_1 \rightarrow x_1, x_2 \rightarrow x_2, x_3 \rightarrow x_3$ или в краткой записи: $1 \rightarrow 1, 2 \rightarrow 2, 3 \rightarrow 3$. Будем все модули поочередно преобразовывать согласно $d_{qlm} = C_{qi}C_{li}C_{mk}d_{ijk}$. Если знак модуля при этом изменится на обратный, то соответствующий модуль равен нулю, если же знак модуля остается неизменным, то модуль остается в матрице пьезомодулей. Очевидно, сохраняются только те модули d_{ij} , которые имеют в индексах либо одну, либо три цифры 3. Поэтому

$$\begin{aligned} d_{111} = 0, d_{112} = 0, d_{113} \neq 0, d_{211} = 0, d_{212} = 0, d_{213} \neq 0, \\ d_{123} \neq 0, d_{133} = 0, d_{222} = 0, d_{233} = 0, d_{223} \neq 0, d_{331} = 0, \\ d_{323} = 0, d_{311} \neq 0, d_{312} \neq 0, d_{122} = 0, d_{322} \neq 0, d_{333} \neq 0 \end{aligned}$$

или в матричных обозначениях

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & d_{14} & d_{15} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d_{24} & d_{25} & 0 \\ d_{31} & d_{32} & d_{33} & 0 & 0 & d_{36} \end{pmatrix}.$$

Далее возьмем следующую ось второго порядка, совпадающую с x_2 . Эта ось симметрии преобразует координатные оси следующим образом:

$$x_1 \rightarrow x_1, x_2 \rightarrow x_2, x_3 \rightarrow x_3, 1 \rightarrow 1, 2 \rightarrow 2, 3 \rightarrow 3.$$

Из оставшихся восьми пьезомодулей сохраняются лишь те, которые имеют в индексах либо одну, либо три цифры 2, т. е. пьезомодули $d_{132} = d_{123}(d_{14})$; $d_{231} = d_{213}(d_{25})$; $d_{321} = d_{312}(d_{36})$. Рассматривать действие третьей оси второго порядка, совпадающей с x_1 , не имеет смысла: по теореме Эйлера она является порожденным элементом симметрии и ее действие сводится к действию уже рассмотренных осей $2 \parallel x_3$ и $2 \parallel x_2$.

В окончательном виде матрица пьезомодулей кристаллов класса симметрии 222 имеет вид

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & d_{14} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & d_{25} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & d_{36} \end{pmatrix}.$$

Пример 13.4. Найти расщепление линий водорода для уровня $n = 2$ при напряженности электрического поля $E = 10^4$ В/см.

Решение. Расщепление при линейном эффекте Штарка

$$\Delta v = \frac{3}{8\pi^2} \cdot \frac{h}{m_e e z} \cdot (n_1 - n_2) n E,$$

так как $n_1 + n_2 < n$, то в данном случае $n_1 + n_2 < 2$. Следовательно, $n_1 + n_2$ может принимать значения 1, 0, -1, а разность $n_1 - n_2$ — значения 1, 0 или -1, т. е. $|n_1 - n_2| < 1$; $z = 1$.

В гауссовой системе $h = 6,63 \cdot 10^{-27}$ эрг·с; $m_e = 9,1 \cdot 10^{-28}$ г; $e = 4,8 \cdot 10^{-10}$ ед. СГСЭ; $E = 10^4 = 3 \cdot 10^4$ ед. СГСЭ.

$$\Delta\nu = \frac{3}{8\pi^2} \cdot \frac{6,63 \cdot 10^{-27}}{9,1 \cdot 10^{-28} \cdot 4,8 \cdot 10^{-10} \cdot 1} \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 10^4 = 3,46 \cdot 10^{13} \text{ с}^{-1}.$$

Замечание: так как $|n_1 - n_2|$ принимает значения 0 или 1, то линия ν_0 расщепляется на три линии с частотами $\nu_0 - \Delta\nu_1$, ν_0 и $\nu_0 + \Delta\nu_1$.

13.3. Задачи для самостоятельного решения

13.1. Рассчитать значение электрооптического коэффициента сфалерита, если для пластинки, вырезанной перпендикулярно направлению [110], при распространении света в направлении [110] $U_{\lambda/2} = 12,3$ кВ. (Ответ: $5 \cdot 10^{-8}$ ед. СГСЭ).

13.2. Кристаллическая пластинка X-среза сегнетовой соли помещается в электрическое поле напряженностью E . Найти выражения для новых коэффициентов преломления, а также угол, на который поворачивается оптическая индикатриса при наложении поля. (Ответ: $n'_1 = n_1$;

$\frac{1}{(n'_2)^2} = \frac{1}{n_2^2} + \frac{r_{41}^2 E_1^2}{(1/n_2^2) - (1/n_3^2)}$. Поворот оптической индикатрисы происхо-

дит вокруг оси x_1 в плоскости x_2x_3 на угол $\varphi = \frac{r_{41} E_1}{(1/n_2^2) - (1/n_3^2)}$).

13.3. Какой полуширины должна быть пластина, вырезанная из кристалла KDP перпендикулярно направлению [001], чтобы при приложении электрического поля $E = 10000$ В/см к ее противоположным граням пластина давала разность хода $\lambda/4$ для света с длиной волны $\lambda = 5460 \text{ \AA}$, при его распространении вдоль направления [001]? (Ответ: $d = 0,4$ см).

13.4. Измерение величины продольного электрооптического эффекта механически свободной пластинки Z-среза KDP дало значение коэффициента $r_{63} = 30 \cdot 10^{-8}$ ед. СГСЭ. Оценить значение этого коэффициента для случая работы такой пластинки в переменном поле высокой частоты (в предположении, что частота поля и крепление пластинки выбраны так, что резонанса не возникает). (Ответ: $r_{63} = 27,8 \cdot 10^{-8}$ ед. СГСЭ).

13.5. Можно ли наблюдать продольный электрооптический эффект на пластинках Z-среза кристаллов с симметрией $\bar{4}2m$ и $4mm$? (Ответ: первая пластинка будет вести себя как пластинка двуосного кристалла, вторая – как одноосного).

13.6. Можно ли наблюдать продольный линейный или квадратичный электрооптический эффект в турмалиновой пластинке Z-среза? (Ответ: невозможно).

13.7. Какой из коэффициентов квадратичного электрооптического эффекта титаната бария кубической модификации может быть определен по результатам эксперимента, в котором определяется величина разности хода в направлении $[001]$, индуцированного наложением поля по направлению $[110]$? (Ответ: R_{44}).

13.8. Какой толщины должна быть пластинка арсенида галлия, рабочие грани которой перпендикулярны направлению $[110]$, если при наблюдении поперечного электрооптического эффекта разность хода $\lambda/4$ для света с длиной волны $\lambda = 5460 \text{ \AA}$ должна достигаться при поле 5250 В/см ? (Ответ: $d = 0,2 \text{ см}$).

13.9. Какое напряжение необходимо подать на рабочие грани пластинки X-среза ADP толщиной 1 см , чтобы с ее помощью получить для света с $\lambda = 5460 \text{ \AA}$ волновую разность хода $4 \cdot 10^{-3}$? (Ответ: $U = 25 \text{ кВ}$).

13.10. Коэффициенты линейного электрооптического эффекта кристаллов LiNbO_3 , измеренные в переменном электрическом поле высокой частоты, $r_{22} = 0,1 \cdot 10^{-8}$ ед. СГСЭ; $r_{33} = 0,9 \cdot 10^{-8}$ ед. СГСЭ; $r_{13} = 0,25 \cdot 10^{-8}$ ед. СГСЭ. Вычислить соответствующие коэффициенты, характеризующие электрооптические свойства LiNbO_3 в статических и медленно меняющихся полях. Указание: коэффициенты P_{44} и P_{14} принять равными $0,1$. (Ответ: $r_{22} \approx 0,21 \cdot 10^{-8}$; $r_{13} \approx 0,27 \cdot 10^{-8}$; $r_{33} \approx 0,944 \cdot 10^{-8}$ ед. СГСЭ).

13.11. Показать, что кристаллы, относящиеся к классу 4, обладают осью симметрии бесконечного порядка в отношении пьезоэлектрических свойств. Назвать классы симметрии, кристаллы которых обладают таким же свойством.

13.12. Показать, что для классов симметрии 422 и 622 не существует продольного пьезоэлектрического эффекта ни в одном направлении.

13.13. Кварцевый параллелепипед с ребрами a , b , c , параллельными соответственно кристаллофизическим осям x_1 , x_2 , x_3 , подвергается действию растягивающего усилия F вдоль его ребер. Найти выражение для ве-

личины зарядов, возникающих на гранях параллелепипеда. (Ответ: $q = Fd_{11}$; $q = -d_{11}F(b/a)$; $q = 0$).

13.14. Определить относительные деформации ребер пластинки сегнетовой соли $45^\circ X$ -среза, если к ее рабочим граням приложено постоянное электрическое поле напряженностью 10^3 В/см. Можно ли использовать этот срез для получения продольных колебаний по толщине? (Ответ: $r_2' = -11,9 \cdot 10^{-5}$; $r_3' = -r_2'$).

13.15. К кубику дигидрофосфата аммония, ориентированному своими ребрами вдоль кристаллофизических осей, по направлению его плоской диагонали приложено электрическое поле $E = 2000$ В/см. Определить величину и характер деформаций, испытываемых кубиком. (Ответ: $r_4 = r_5 = 0,248 \cdot 10^{-6}$).

13.16. Какие абсолютные смещения испытывает край кварцевой пластинки X -среза размерами: $x_1 = 0,1$ см; $x_2 = 5$ см, если к электродам, нанесенным на ее рабочие грани, приложено напряжение 3 кВ? (Ответ: $\Delta x_1 = -6,7 \cdot 10^{-7}$ см; $\Delta x_2 = 3,38 \cdot 10^{-5}$ см).

13.17. Найти выражение для поверхности продольного пьезоэлектрического эффекта кварца. Используя полярные координаты, построить сечение этой поверхности координатной плоскостью x_1x_2 и определить симметрию полученного сечения. (Ответ: $r = n_1(n_1^2 - 3n_2^2)d_{11}$).

13.18. Как должна быть ориентирована пластинка сфалерита, чтобы она испытывала максимально возможную деформацию в направлении приложенного электрического поля? (Ответ: единичный вектор нормали к пластинке в кристаллофизической системе координат должен задаваться компонентами $n_1 = n_2 = n_3 = 0,5774$).

13.19. В каком направлении по отношению к оси ∞ следует растянуть пластинку пьезоэлектрической текстуры с симметрией $\infty 2$, чтобы получить максимальную плотность зарядов на ее торцах? (Ответ: под углом 45°).

13.20. Пластинка из сфалерита вырезана так, что ее рабочие грани перпендикулярны направлению $[110]$. Каким пьезомодулем определяются деформации сдвига по толщине такой пластинки, если электрическое поле приложено к ее рабочим граням? (Ответ: d_{14}).

13.21. На сколько компонентов расщепляется линия He серии Бальмера в спектре водорода? (Ответ: 15).

13.22. На сколько компонентов расщепляется самая длинноволновая линия серии Лаймана в спектре водорода? (Ответ: 3).

13.23. На сколько подуровней расщепляется уровень $n = 4$ при линейном эффекте Штарка? (Ответ: 7).

13.24. Во сколько раз расщепление линии, соответствующей переходу между уровнями $n_1 = 3$ и $n_2 = 2$ (n – главные квантовые числа), в атоме водорода больше, чем в двукратно ионизированном атоме Li? (Ответ: в 3 раза).

13.25. Во сколько раз изменится расщепление спектральной линии в спектре атома водорода, если напряженность поля увеличится в 1,5 раза? (Ответ: увеличится в 1,5 раза).

13.26. Во сколько раз и в какую сторону надо изменить напряженность поля, чтобы расщепление линий в спектре ионов He было таким же, как в спектре водорода? (Ответ: для He надо увеличить E в 2 раза).

13.27. Найти частоту основной линии и частоту спутников для первой линии в серии Лаймана в спектре водорода при $E = 10^3$ В/см. (Ответ: $\nu_0 = 2,468 \cdot 10^{15}$ с⁻¹; $\nu_1 = 3,06 \cdot 10^{15}$ с⁻¹; $\nu_2 = 1,875 \cdot 10^{15}$ с⁻¹).

13.28. Найти частоту основной линии и частоты спутников при переходе электрона с уровня $n = 2$ на уровень $n = 1$ в спектре иона He при $E = 2,103$ В/см. (Ответ: $\nu_0 = 9,87 \cdot 10^{15}$ с⁻¹; $\nu_1 = 1,05 \cdot 10^{15}$ с⁻¹; $\nu_2 = 9,25 \cdot 10^{15}$ с⁻¹).

13.29. Найти средний дипольный момент P_e , обусловленный линейным эффектом Штарка, если $z = 3$, $n_1 - n_2 = 1$ и $n = 2$. (Ответ: $P_e = 5,31 \cdot 10^{-9}$ CGSq · см).

13.30. Атом водорода находится в поле с напряженностью $E = 2 \cdot 10^5$ В/см. Найти расщепление линий вследствие квадратичного эффекта Штарка, считая $n = 2$; $n_1 - n_2 = 1$; $m = 1$. (Ответ: $\Delta\nu_2 = -6,1 \cdot 10^{18}$ с⁻¹).

Глава 14. СТАТИСТИЧЕСКИЕ ЗАКОНОМЕРНОСТИ В ПРОВОДНИКОВЫХ МАТЕРИАЛАХ

14.1. Основные формулы

Распределение Ферми по энергиям для свободных электронов в металле:
– при $T \neq 0$ К

$$dn(\varepsilon) = \frac{1}{2\pi^2} \cdot \left(\frac{2m}{\hbar}\right)^{3/2} \cdot \frac{\sqrt{\varepsilon} d\varepsilon}{\exp\left(\frac{\varepsilon - \varepsilon_f}{kT}\right) + 1};$$

– при $T = 0$ К

$$dn(\varepsilon) = \frac{1}{2\pi^2} \cdot \left(\frac{2m}{\hbar}\right)^{3/2} \cdot \sqrt{\varepsilon} d\varepsilon,$$

где $dn(\varepsilon)$ – концентрация электронов, приходящихся на энергетический интервал от ε до $\varepsilon + d\varepsilon$; m – масса электрона; ε – энергия электрона; ε_f – энергия (уровень) Ферми; T – абсолютная термодинамическая температура.

Общая концентрация электронов в металле:

$$n = \int_0^{\varepsilon_f} dn(\varepsilon) = \int_0^{\varepsilon_f} N(\varepsilon) \cdot f(\varepsilon) \cdot d\varepsilon,$$

где $N(\varepsilon)$ – плотность состояний в зоне проводимости, т. е. число состояний, приходящихся на единичный интервал энергий; $f(\varepsilon)$ – вероятность заполнения квантовых состояний электронами.

Плотность состояний в зоне проводимости (число состояний, приходящихся на единичный интервал энергий):

$$N(\varepsilon) = 4\pi \left(\frac{2m}{\hbar^2}\right)^{3/2} \cdot \sqrt{\varepsilon},$$

где m – масса электрона; ε – энергия электрона.

Вероятность заполнения энергетических состояний:

– при $T \neq 0$ К

$$f(\varepsilon) = \frac{1}{\exp\left(\frac{\varepsilon - \varepsilon_f}{kT}\right) + 1};$$

– при $T = 0$ К

$$f(\varepsilon) = 1,$$

где ε – энергия электрона; ε_f – энергия (уровень) Ферми; T – абсолютная термодинамическая температура.

Уровень Ферми в металле при $T = 0$ К:

$$\varepsilon_f = \frac{\hbar^2}{2m} (3\pi^2 n)^{2/3}, \quad (14.1)$$

где m – масса электрона; n – концентрация электронов.

Концентрация электронов проводимости:

$$n = \frac{N_A}{A} \cdot \rho, \quad (14.2)$$

где N_A – число Авогадро; A – относительная атомная масса металла, ρ – плотность металла.

Среднее энергетическое расстояние между разрешёнными уровнями:

$$d\varepsilon = \frac{\varepsilon_f}{N},$$

где ε_f – энергия Ферми; N – число уровней, заполненных электронами.

Средняя скорость дрейфа электронов:

$$\bar{v}_d = \frac{eE\tau}{2m} = \frac{I}{enS},$$

где e – заряд электрона; m – масса электрона; τ – время свободного пробега; E – напряжённость поля в проводнике; n – концентрация электронов в проводнике; I – сила тока в проводнике; S – площадь поперечного сечения проводника.

Длина свободного пробега электронов в металлах

$$\lambda_e = \bar{v}_d \cdot \tau.$$

Максимальная скорость за время свободного пробега

$$v_{\max} = 2 \cdot \bar{v}_d.$$

Подвижность носителей заряда в проводнике

$$\mu = \frac{\bar{v}_d}{E} = \frac{e\tau}{m}.$$

Удельное сопротивление:

$$\rho = \frac{2m}{e^2 n \tau}.$$

Связь между удельным сопротивлением проводника и длиной свободного пробега электронов

$$\rho = \left(\frac{3}{8\pi} \right)^{1/3} \cdot \frac{h}{e^2 \cdot n^{3/2} \cdot \lambda_e}.$$

Плотность тока в металлах

$$\vec{j} = -n \cdot e \cdot \vec{v}_d.$$

Температурный коэффициент сопротивления проволоки

$$\alpha_R = \frac{R_2 - R_1}{R_1(T_2 - T_1)},$$

через удельное сопротивление

$$\alpha_\rho = \frac{\rho_2 - \rho_1}{\rho_1(T_2 - T_1)},$$

где R – сопротивление проводника; ρ – удельное сопротивление проводника; T – температура проводника.

14.2. Примеры решения задач

Пример 14.1. Доказать, что средняя энергия свободных электронов в металле вблизи $T = 0$ К составляет $3/5$ энергии Ферми ε_f .

Решение. При низкой температуре уровень Ферми ε_f характеризует максимальную энергию электронов проводимости в металле.

Распределение электронов по энергиям

$$dn(\varepsilon) = N(\varepsilon) \cdot f(\varepsilon) \cdot d\varepsilon, \quad (14.3)$$

где $dn(\varepsilon)$ – концентрация электронов, приходящихся на энергетический интервал от ε до $\varepsilon + d\varepsilon$; $N(\varepsilon)$ – плотность состояний в зоне проводимости, т. е. число состояний, приходящихся на единичный интервал энергий; $f(\varepsilon)$ – вероятность заполнения квантовых состояний электронами.

В соответствии с распределением Ферми–Дирака для всех состояний с энергией $\varepsilon < \varepsilon_f$ функция $f(\varepsilon) = 1$, а для состояний с энергией $\varepsilon > \varepsilon_f$ функция $f(\varepsilon) = 0$. В рассматриваемой задаче $f(\varepsilon) = 1$.

Для определения средней энергии электронов необходимо суммарную энергию всех электронов, находящихся в единице объёма, разделить на их концентрацию. С учётом выражения (14.3), получим:

$$\bar{\varepsilon} = \frac{1}{n} \int_0^{\varepsilon_f} \varepsilon \cdot dn(\varepsilon) = \frac{1}{n} \int_0^{\varepsilon_f} \varepsilon \cdot N(\varepsilon) \cdot d\varepsilon. \quad (14.4)$$

Число состояний $N(\varepsilon)$, приходящихся на единичный интервал энергий, можно определить по формуле

$$N(\varepsilon) = 4\pi \left(\frac{2m}{h^2} \right)^{3/2} \cdot \varepsilon^{1/2}. \quad (14.5)$$

Концентрацию электронов получим из выражения (14.1) для энергии Ферми при $T = 0$ К:

$$\varepsilon_f = \frac{\hbar^2}{2m} (3\pi^2 n)^{2/3} \Rightarrow n = \frac{8\pi}{3} \left(\frac{2m}{\hbar^2} \right)^{3/2} \cdot \varepsilon_f^{3/2}, \quad (14.6)$$

где m – масса электрона. Подставим выражения (14.5) и (14.6) в выражение (14.4) и после преобразования получим искомый ответ:

$$\bar{\varepsilon} = \frac{3}{2\varepsilon_f^{3/2}} \int_0^{\varepsilon_f} \varepsilon \cdot \varepsilon^{1/2} \cdot d\varepsilon = \frac{3}{5} \varepsilon_f.$$

Ответ: $\bar{\varepsilon} = \frac{3}{5} \varepsilon_f$.

Пример 14.2. Рассчитать положение уровня Ферми серебра при температуре вблизи абсолютного нуля, полагая, что число электронов равно количеству атомов серебра.

Решение. Концентрация свободных электронов (14.2) равна концентрации атомов, поэтому

$$n = \frac{N_A}{A} \cdot \rho, \quad (14.7)$$

где N_A – число Авогадро; A – относительная атомная масса металла; ρ – плотность металла.

Энергию Ферми можно определить по формуле (14.1):

$$\varepsilon_f = \frac{h^2}{2m} (3\pi^2 n)^{2/3}. \quad (14.8)$$

Подставляя в формулу (14.8) выражение для концентрации (14.7), получим следующее соотношение:

$$\varepsilon_f = \frac{h^2}{8m} \left(\frac{3N_A \rho}{\pi A} \right)^{2/3}.$$

Произведём расчёт:

$$\varepsilon_f = \frac{(6,62 \cdot 10^{-34})^2}{8 \cdot 9,31 \cdot 10^{-31}} \cdot \left(\frac{3 \cdot 6,02 \cdot 10^{23} \cdot 10490}{3,14 \cdot 107,87 \cdot 10^{-3}} \right)^{2/3} = 8,8 \cdot 10^{-19} \text{ Дж} = 5,5 \text{ эВ}$$

Ответ: $\varepsilon_f = 8,8 \cdot 10^{-19}$ Дж = 5,5 эВ.

Пример 14.3. Кусок металла объёмом 20 см^3 находится при температуре $T = 0 \text{ К}$. Определить число свободных электронов, импульсы которых заключены в интервале от p_{\max} до $0,1 \cdot p_{\max}$. Энергия Ферми ε_f равна 5 эВ.

Решение. Выведем закономерность, устанавливающую распределение свободных электронов в металле по импульсам. Для этого воспользуемся распределением Ферми по энергиям для свободных электронов в металле при $T = 0 \text{ К}$:

$$dn(\varepsilon) = \frac{1}{2\pi^2} \cdot \left(\frac{2m}{\hbar} \right)^{3/2} \cdot \sqrt{\varepsilon} d\varepsilon. \quad (14.9)$$

Так как $dn(\varepsilon)$ есть число частиц в единице объёма, энергии которых заключены в интервале значений от ε до $\varepsilon + d\varepsilon$ ($\varepsilon < \varepsilon_f$), то оно должно быть равно числу электронов $dn(p)$ в единице объёма, заключённых в интервале значений импульса от p до $p + dp$, т. е.

$$dn(p) = dn(\varepsilon). \quad (14.10)$$

При этом должно соблюдаться следующее условие: каждой энергии соответствует определённый импульс $\left(\varepsilon = \frac{p^2}{2m}\right)$ и интервалу энергий соответствует определённый интервал импульсов $\left(d\varepsilon = \frac{p}{m} dp\right)$.

Из связи энергии и импульса видим, что $\left(\varepsilon^{1/2} = \frac{p}{\sqrt{2m}}\right)$. Перепишем выражение (14.10) с учётом выражения (14.9), причём в выражении (14.9) заменим ε на p и $d\varepsilon$ на dp :

$$dn(p) = \frac{1}{2\pi^2} \cdot \left(\frac{2m}{\hbar}\right)^{3/2} \cdot \frac{p}{\sqrt{2m}} \frac{p}{m} dp = \frac{1}{\pi^2 \hbar^3} \cdot p^2 dp. \quad (14.11)$$

Число свободных электронов в единице объёма, импульсы которых заключены в интервале от p_{\max} до $0,1p_{\max}$, найдём интегрированием выражения (14.11) в соответствующих пределах

$$\Delta n = \frac{1}{\hbar^3 \pi^2} \cdot \int_{0,1p_{\max}}^{p_{\max}} p^2 dp = \frac{1}{3\pi^2 \hbar^3} \cdot p_{\max}^3 (1 - 0,9^3) = \frac{0,271 p_{\max}^3}{3\pi^2 \hbar^3}.$$

Учитывая, что $p_{\max}^2 = 2m\varepsilon_f$ и $\Delta N = \Delta n \cdot V$, найдём искомое число свободных электронов в металле

$$\Delta N = \frac{0,271}{3\pi^2} \cdot \left(\frac{2m\varepsilon_f}{\hbar^3}\right)^{3/2} V.$$

Подставим в формулу числовые значения величин и произведём расчёт

$$\Delta N = \frac{0,271}{3 \cdot 3,14^2} \cdot \left(\frac{2 \cdot 9,1 \cdot 10^{-31} \cdot 5 \cdot 1,6 \cdot 10^{-19}}{1,05^3 \cdot 10^{-68}}\right)^{3/2} \cdot 20 \cdot 10^{-6} = 2,9 \cdot 10^{23}.$$

Ответ: $\Delta N = 2,9 \cdot 10^{23}$.

Пример 14.4. Вычислить длину свободного пробега электронов в меди при $T = 300$ К, если её удельное сопротивление при этой температуре $0,017$ мкОм·м.

Решение. Согласно представлениям квантовой теории, удельное сопротивление металлов связано с длиной свободного пробега электронов $\bar{\lambda}_e$ соотношением

$$\rho = \left(\frac{3}{8\pi}\right)^{1/3} \cdot \frac{h}{e^2 \cdot n^{2/3} \cdot \bar{\lambda}_e}. \quad (14.12)$$

Концентрация свободных электронов в меди

$$n = \rho \cdot \frac{N_A}{A} = \frac{8920 \cdot 6,02 \cdot 10^{23}}{63,54 \cdot 10^{-3}} = 8,45 \cdot 10^{28} \text{ м}^{-3}, \quad (14.13)$$

где N_A – число Авогадро; A – относительная атомная масса металла; ρ – плотность металла.

Подставляя в выражение (14.12) числовое значение, полученное в выражении (14.13), рассчитаем длину свободного пробега

$$\bar{\lambda}_e = \left(\frac{3}{8 \cdot 3,14}\right)^{1/3} \frac{6,62 \cdot 10^{-34}}{(1,6 \cdot 10^{-19})^2 \cdot (8,45 \cdot 10^{28})^{1/3} \cdot 0,017 \cdot 10^{-6}} = 3,89 \cdot 10^{-8} \text{ м}.$$

Ответ: $\bar{\lambda}_e = 3,89 \cdot 10^{-8} \text{ м}$.

14.3. Задачи для самостоятельного решения

14.1. Вычислить максимальную энергию ε_f (энергию Ферми), которую могут иметь свободные электроны меди при температуре $T = 0 \text{ К}$. Принять, что на каждый атом меди приходится по одному валентному электрону. (Ответ: $\varepsilon_f = 1,18 \cdot 10^{-18} \text{ Дж} = 7,4 \text{ эВ}$).

14.2. Металл находится при температуре $T = 0 \text{ К}$. Определить относительное число электронов, энергии которых отличаются от энергии Ферми не более чем на 2%. (Ответ: $N = 0,03$).

14.3. Определить долю свободных электронов в металле при температуре $T = 0 \text{ К}$, энергия которых заключена в интервале значений от $\frac{1}{2} \varepsilon_{\max}$ до ε_{\max} . (Ответ: 1,6).

14.4. Определить вероятность заполнения электронами энергетического уровня в металле, расположенного на 10 кТ выше уровня Ферми. (Ответ: $f(\varepsilon) = 4,5 \cdot 10^{-5}$).

14.5. Определить температуру, при которой вероятность нахождения электрона с энергией $\varepsilon = 0,5$ эВ выше уровня Ферми в металле равна 1%. (Ответ: $T = 1262$ К).

14.6. Определить, как и во сколько раз изменится вероятность заполнения электронами в металле энергетического уровня, расположенного на $0,1$ эВ выше уровня Ферми, если температуру металла повысить от 300 до 1000 К. (Ответ: увеличится в $11,4$ раза).

14.7. Оценить среднее энергетическое расстояние $\delta\varepsilon$ между разрешенными энергетическими уровнями зоны проводимости в кристалле серебра объёмом 1 см^3 , если энергия Ферми равна $5,5$ эВ. (Ответ: $\delta\varepsilon = 3 \cdot 10^{-41}$ Дж = $189 \cdot 10^{-22}$ эВ).

14.8. Вычислить концентрацию свободных электронов в кристалле меди, если известно, что плотность меди $8,92 \cdot 10^3$ кг/м³. При рассмотрении полагать, что на каждый атом кристаллической решётки приходится один электрон. (Ответ: $n = 8,45 \cdot 10^{28}$ м⁻³).

14.9. Определить концентрацию свободных электронов в металле при температуре $T = 0$ К. Энергию Ферми принять равной 1 эВ. (Ответ: $n = 4,47 \cdot 10^{27}$ м⁻³).

14.10. Определить отношение концентраций $\frac{n_1}{n_2}$ свободных электронов при температуре $T = 0$ К в литии и цезии, если известно, что уровни Ферми в этих металлах соответственно равны $4,72$ эВ и $1,53$ эВ. (Ответ: $\frac{n_1}{n_2} = 5,41$).

14.11. Определить число свободных электронов, которые приходятся на один атом натрия при температуре $T = 0$ К. Уровень Ферми для натрия равен $3,12$ эВ. Плотность натрия равна 970 кг/м³. (Ответ: $n = 0,9$).

14.12. Исходя из функции распределения электронов в металле по энергиям, получить функцию их распределения по скоростям при температуре вблизи абсолютного нуля. (Ответ: $dn(v) = 8\pi \left(\frac{m}{h}\right)^3 v^2 dv$).

14.13. Как изменится интервал $d\varepsilon$ между соседними уровнями энергии свободных электронов в металле, если объём кристалла уменьшится в 10 раз? (Ответ: увеличится в 10 раз).

14.14. Положению уровня Ферми для алюминия при $T \approx 0$ К соответствует энергия 11,7 эВ. Рассчитать число свободных электронов, приходящихся на один атом металла. (Ответ: $n = 18,1 \cdot 10^{28} \text{ м}^{-3}$).

14.15. Зная распределение Ферми электронов в металле по энергиям $dn(\varepsilon)$, установить распределение электронов по импульсам $dn(p)$ при температуре, близкой к абсолютному нулю. (Ответ: $dn(p) = \frac{1}{\pi^2 \hbar^3} \cdot p^2 dp$).

14.16. Электроны в металле находятся при температуре $T = 0$ К. Найти относительное число свободных электронов, кинетическая энергия которых отличается от энергии Ферми не более чем на 10%. (Ответ: $\frac{\Delta N}{N} = 0,03$).

14.17. Определить максимальную скорость электронов в металле при температуре $T = 0$ К, если энергия Ферми равна 5 эВ. (Ответ: $v_{\max} = 1,32 \cdot 10^6$ м/с).

14.18. Металл находится при температуре, близкой к абсолютному нулю. Определить, во сколько раз число электронов со скоростями от $0,5v_{\max}$ до v_{\max} больше числа электронов со скоростями от 0 до $0,5v_{\max}$. (Ответ: в 7 раз).

14.19. Удельное сопротивление серебра при комнатной температуре равно $0,015$ мкОм·м, а температурный коэффициент удельного сопротивления составляет $4,1 \cdot 10^{-3} \text{ К}^{-1}$. Определить, как и во сколько раз изменится длина свободного пробега электронов при нагревании проводника от 300 до 1000 К. (Ответ: уменьшится в 3,87 раз).

14.20. В медном проводнике под действием электрического поля проходит электрический ток плотностью $1 \frac{\text{А}}{\text{мм}^2}$. Определить скорость дрейфа электронов при температуре 300 К. (Ответ: $v_{\delta} = 7,4 \cdot 10^{-5}$ м/с).

14.21. Определить время дрейфа электрона по медному проводнику длиной 1 км, если удельное сопротивление меди $0,017$ мкОм·м, а разность потенциалов на концах проводника равна 220 В. (Ответ: $t_{\text{д}} = 10^6$ с).

14.22. Вычислить удельное сопротивление металлического проводника, имеющего плотность 970 кг/м^3 и молярную массу $0,023 \text{ кг/моль}$, если известно, что средняя скорость дрейфа электронов в электрическом поле напряжённостью $0,1 \text{ В/м}$ составляет $5 \cdot 10^{-4} \text{ м/с}$. Можно полагать, что на каждый атом кристаллической решётки приходится один электрон. (Ответ: $\rho = 4,92 \cdot 10^{-8} \text{ Ом} \cdot \text{м}$).

14.23. В металлическом проводнике с площадью поперечного сечения 10^{-2} мм^2 и сопротивлением 10 Ом концентрация свободных электронов равна $8,5 \cdot 10^{28} \text{ м}^{-3}$. Определить среднюю скорость дрейфа электронов при напряжении $0,1 \text{ В}$. (Ответ: $v_d = 7,4 \cdot 10^{-5} \text{ м/с}$).

14.24. К медной проволоке длиной 6 м и диаметром $0,56 \text{ мм}$ приложено напряжение $0,1 \text{ В}$. Сколько электронов пройдёт через поперечное сечение проводника за 10 с , если удельное сопротивление меди равно $0,017 \text{ мкОм} \cdot \text{м}$? (Ответ: $N = 1,5 \cdot 10^{19}$).

14.25. Определить температурный коэффициент расширения нихромовой проволоки, если известно, что при повышении температуры от 20 до $1000 \text{ }^\circ\text{C}$ электрическое сопротивление проволоки изменяется от 50 до $56,6 \text{ Ом}$. (Ответ: $\alpha_R = 1,34 \cdot 10^{-4} \text{ К}^{-1}$).

14.26. Вычислить удельную теплопроводность меди при комнатной температуре по значению её удельного сопротивления $0,017 \text{ мкОм} \cdot \text{м}$. (Ответ: $\lambda_T = 422 \text{ Вт/м} \cdot \text{К}$).

14.27. Определить термоэдс, возникающую в зазоре между пластинами плоского конденсатора, если одна из пластин алюминиевая, а вторая изготовлена из платины. Пластины соединены между собой медным проводом, а зазор между пластинами составляет 5 мм . Работа выхода для алюминия равна $4,24 \text{ эВ}$, для платины – $5,32 \text{ эВ}$. (Ответ: $E = 214 \text{ В/м}$).

14.28. Определить работу выхода электронов из меди, если известно, что термоэдс, возникающая в зазоре между пластинами плоского конденсатора (одна из которых алюминиевая, а другая медная), равна 30 В/м . Пластины соединены между собой медным проводом, а зазор между пластинами составляет 5 мм . (Ответ: $A_{\text{вых}} = 4,4 \text{ эВ}$).

14.29. Медный и алюминиевый провода равной длины имеют одинаковые сопротивления. Определить отношения диаметров этих проводов. Вычислить, во сколько раз масса алюминиевого провода меньше массы медного провода. (Ответ: $\frac{d_{\text{Al}}}{d_{\text{Cu}}} = 1,28$; $\frac{m_{\text{Al}}}{m_{\text{Cu}}} = 0,5$).

14.30. Найти количество теплоты, которое выделяется каждую секунду в единице объёма медного провода при плотности тока 10 А/м^2 . (Ответ: $\omega = 1,7 \cdot 10^4 \text{ Дж/с} \cdot \text{м}^3$).

14.31. Определить суммарную кинетическую энергию свободных электронов в 1 см^3 золота, полагая, что на каждый атом приходится один свободный электрон. (Ответ: $E = 341,2 \text{ кДж/см}^3$).

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В настоящий сборник задач по курсу физики входят главы по темам: электростатика, постоянный ток в различных средах, электрооптические и квантооптические явления.

В указанных главах приведены типовые задачи на расчеты электрических полей и параметров среды при воздействии электрических полей. Решение типовых задач обеспечит получение студентами необходимых знаний о физических явлениях, лежащих в основе принципа действия современных приборов, и об использовании физических закономерностей для реализации потенциальных возможностей материалов при проектировании и создании новых приборов и устройств.

Решение задач по данным темам требует достаточно высокого уровня математической подготовки (дифференциальное и интегральное исчисление, векторный анализ).

Решения всех примеров, кроме главы 13, приведены в Международной системе единиц (СИ). В главе 13 задачи удобнее решать в системе СГСЭ.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Волькенштейн, В.С. Сборник задач по общему курсу физики / В.С. Волькенштейн. – СПб. : Книжный мир, 2003.
2. Чертов, А.Г. Задачник по физике : учеб. пособие для вузов / А.Г. Чертов, А.А. Воробьев. – М. : Изд-во физико-математической литературы, 2003.
3. Переломова, Н.В. Задачник по кристаллофизике / Н.В. Переломова, М.М. Тагиева. – М. : Наука, 1982.
4. Иродов, И.Е. Задачи по общей физике / И.Е. Иродов. – 3-е изд. – М., 2002.
5. Савельев, И.В. Курс общей физики : учебник. В 2 кн. Кн. 2. Электричество и магнетизм / И.В. Савельев. – М. : Астрель ; АСТ, 2002. – 336 с.
6. Трофимова, Т.И. Курс физики : учеб. пособие для вузов / Т.И. Трофимова. – 6-е изд. – М. : Высш. шк., 2004. – 542 с.
7. Бондарев, Б.В. Курс общей физики. Электромагнетизм. Оптика. Квантовая физика / Б.В. Бондарев, Н.П. Калашников, Г.Г. Спирин. – М. : Высш. шк., 2003.
8. Сивухин, Д.В. Общий курс физики. Электричество / Д.В. Сивухин. – М. : ФИЗМАТЛИТ, Изд-во МФТИ, 2002.
9. Тамм, И.Е. Основы теории электричества : учеб. пособие для вузов / И.Е. Тамм. – М. : ФИЗМАТЛИТ, 2003. – 616 с.

ПРИЛОЖЕНИЕ 1

РАБОТА ВЫХОДА ЭЛЕКТРОНА ИЗ МЕТАЛЛА

Металл	W	W+Cs	Mo	Cu	Al	Fe	Ni	Pt	Cs
Работа выхода, эВ	4,54	1,6	4,1	4,4	4,2	4,31	4,5	5,3	1,9

ПРИЛОЖЕНИЕ 2

ФОРМА МАТРИЦ КОЭФФИЦИЕНТОВ ЛИНЕЙНОГО ЭЛЕКТРООПТИЧЕСКОГО ЭФФЕКТА (r_{ji})

Триклинная сингония

$$\begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \\ r_{41} & r_{42} & r_{43} \\ r_{51} & r_{52} & r_{53} \\ r_{61} & r_{62} & r_{63} \end{pmatrix} \quad (18)$$

Моноклинная сингония

Класс 2

$2 \parallel x_2$

$$\begin{pmatrix} 0 & r_{12} & 0 \\ 0 & r_{22} & 0 \\ 0 & r_{32} & 0 \\ r_{41} & 0 & r_{43} \\ 0 & r_{12} & 0 \\ r_{61} & 0 & r_{63} \end{pmatrix} \quad (8)$$

$2 \parallel x_3$

$$\begin{pmatrix} 0 & r_{12} & 0 \\ 0 & r_{22} & 0 \\ 0 & r_{32} & 0 \\ r_{41} & 0 & r_{43} \\ 0 & r_{12} & 0 \\ r_{61} & 0 & r_{63} \end{pmatrix} \quad (8)$$

Класс m

$m \perp x_2$

$$\begin{pmatrix} r_{11} & 0 & r_{13} \\ r_{21} & 0 & r_{23} \\ r_{31} & 0 & r_{33} \\ 0 & r_{42} & 0 \\ r_{51} & 0 & r_{53} \\ 0 & r_{62} & 0 \end{pmatrix} \quad (10)$$

$m \perp x_3$

$$\begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} & 0 \\ r_{21} & r_{22} & 0 \\ r_{31} & r_{32} & 0 \\ 0 & 0 & r_{43} \\ 0 & 0 & r_{53} \\ r_{61} & r_{62} & 0 \end{pmatrix} \quad (10)$$

Ромбическая сингония

Класс 222

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ r_{41} & 0 & 0 \\ 0 & r_{52} & 0 \\ 0 & 0 & r_{63} \end{pmatrix} \quad (3)$$

Класс $mm2$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & r_{13} \\ 0 & 0 & r_{23} \\ 0 & 0 & r_{33} \\ 0 & r_{42} & 0 \\ r_{51} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (5)$$

Тетрагональная сингония

Класс 4

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & r_{13} \\ 0 & 0 & r_{13} \\ 0 & 0 & r_{33} \\ r_{41} & r_{51} & 0 \\ r_{51} & -r_{41} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (4)$$

Класс $\bar{4}$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & r_{13} \\ 0 & 0 & -r_{13} \\ 0 & 0 & 0 \\ r_{41} & -r_{52} & 0 \\ r_{52} & r_{41} & 0 \\ 0 & 0 & r_{13} \end{pmatrix} \quad (4)$$

Класс 422

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ r_{41} & 0 & 0 \\ 0 & -r_{41} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (1)$$

Класс $4mm$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & r_{13} \\ 0 & 0 & r_{13} \\ 0 & 0 & r_{33} \\ 0 & r_{51} & 0 \\ r_{51} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (3)$$

Класс $\bar{4}2m, 2 \parallel x_1$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ r_{41} & 0 & 0 \\ 0 & r_{41} & 0 \\ 0 & 0 & r_{63} \end{pmatrix} \quad (2)$$

Тригональная сингония

Класс 3

$$\begin{pmatrix} r_{11} & -r_{22} & r_{13} \\ -r_{11} & r_{22} & r_{13} \\ 0 & 0 & r_{33} \\ r_{41} & r_{51} & 0 \\ r_{51} & -r_{41} & 0 \\ -r_{22} & r_{11} & 0 \end{pmatrix} \quad (6)$$

Класс 32

$$\begin{pmatrix} r_{11} & 0 & 0 \\ -r_{11} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ r_{41} & 0 & 0 \\ 0 & -r_{41} & 0 \\ 0 & -r_{11} & 0 \end{pmatrix} \quad (2)$$

Класс $3m$, $m \perp x_1$

$$\begin{pmatrix} 0 & -r_{22} & r_{13} \\ 0 & r_{22} & r_{13} \\ 0 & 0 & r_{33} \\ 0 & r_{51} & 0 \\ r_{51} & 0 & 0 \\ -r_{22} & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (4)$$

Класс $3m$, $m \perp x_2$

$$\begin{pmatrix} r_{11} & 0 & r_{13} \\ -r_{11} & 0 & r_{13} \\ 0 & 0 & r_{33} \\ 0 & r_{51} & 0 \\ r_{51} & 0 & 0 \\ 0 & -r_{11} & 0 \end{pmatrix} \quad (4)$$

Гексагональная сингония

Класс 6

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & r_{13} \\ 0 & 0 & r_{13} \\ 0 & 0 & r_{33} \\ r_{41} & r_{51} & 0 \\ r_{51} & -r_{41} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (4)$$

Класс $6mm$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & r_{13} \\ 0 & 0 & r_{13} \\ 0 & 0 & r_{33} \\ 0 & r_{51} & 0 \\ r_{51} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (3)$$

Окончание прил. 2

Класс 622

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ r_{41} & 0 & 0 \\ 0 & -r_{41} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} (1)$$

Класс $\bar{6}$

$$\begin{pmatrix} r_{11} & -r_{22} & 0 \\ -r_{11} & r_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -r_{22} & -r_{11} & 0 \end{pmatrix} (2)$$

Класс $\bar{6}m2, m \perp x_1$

$$\begin{pmatrix} 0 & r_{12} & 0 \\ 0 & -r_{12} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ r_{12} & 0 & 0 \end{pmatrix} (1)$$

Класс $\bar{6}m2, m \perp x_2$

$$\begin{pmatrix} r_{11} & 0 & 0 \\ -r_{11} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -r_{11} & 0 \end{pmatrix} (1)$$

Кубическая сингония

Класс 432

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} (0)$$

Класс $\bar{4}3m$ и класс 23

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ r_{41} & 0 & 0 \\ 0 & r_{41} & 0 \\ 0 & 0 & r_{41} \end{pmatrix} (1)$$

ПРИЛОЖЕНИЕ 3

СПРАВОЧНЫЕ ДАННЫЕ О КРИСТАЛЛАХ, НЕОБХОДИМЫЕ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

ADP, дигидрофосфат аммония, NH₄H₂PO₄, $\bar{4}2m$

$$n_o = 1,52662, n_e = 1,48072 \text{ для } \lambda = 5460 \text{ \AA};$$

$$d_{14} = 5,27 \cdot 10^{-8} \text{ ед. СГСЭ}, d_{36} = -145 \cdot 10^{-8} \text{ ед. СГСЭ},$$

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 56,4, \varepsilon_3 = 16,4.$$

Арсенид галлия, GaAs, $\bar{4}3m$

$$n = 3,15 \text{ для } \lambda = 5460 \text{ \AA};$$

$$r_{14} = 12,5 \cdot 10^{-8} \text{ ед. СГСЭ для } \lambda = 5460 \text{ \AA}.$$

Кварц, SiO₂

Симметрия низкотемпературной модификации 32, симметрия высокотемпературной модификации 622.

$$n_o = 1,544, n_e = 1,553 \text{ для } \lambda = 5460 \text{ \AA};$$

$$r_{11} = 0,59 \cdot 10^{-8} \text{ ед. СГСЭ}, r_{41} = 1,4 \cdot 10^{-8} \text{ ед. СГСЭ для } \lambda = 5460 \text{ \AA};$$

$$d_{11} = -6,76 \cdot 10^{-8} \text{ ед. СГСЭ}, d_{14} = 2,56 \cdot 10^{-8} \text{ ед. СГСЭ};$$

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 4,5, \varepsilon_3 = 4,6.$$

KDP, дигидрофосфат калия, KH₂PO₄, $\bar{4}2m$.

Сегнетоэлектрик

$$n_o = 1,511, n_e = 1,469 \text{ для } \lambda = 5460 \text{ \AA};$$

$$r_{41} = +25 \cdot 10^{-8} \text{ ед. СГСЭ}, r_{63} = -30 \cdot 10^{-8} \text{ ед. СГСЭ для } \lambda = 5460 \text{ \AA};$$

$$d_{14} = 4,2 \cdot 10^{-8} \text{ ед. СГСЭ}, d_{36} = 69,6 \cdot 10^{-8} \text{ ед. СГСЭ};$$

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 4,6, \varepsilon_3 = 21,8.$$

Ниобат лития, LiNbO₃, 3m

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 99,5, \varepsilon_3 = 38,5;$$

$$r_{41} = 0,1 \cdot 10^{-8} \text{ ед. СГСЭ}, r_{33} = 0,9 \cdot 10^{-8} \text{ ед. СГСЭ},$$

$$r_{13} = 0,25 \cdot 10^{-8} \text{ ед. СГСЭ}, r_{51} = 0,9 \cdot 10^{-8} \text{ ед. СГСЭ для } \lambda = 5460 \text{ \AA}.$$

Продолжение прил. 3

Сегнетова соль, $\text{NaKC}_4\text{H}_4\text{O}_6 \cdot 4\text{H}_2\text{O}$

Сегнетоэлектрик, симметрия сегнетофазы 2, симметрия парафазы 222.

$$n_g = 1,4954, n_m = 1,4920, n_p = 1,4900;$$

$$d_{14} = 1150 \cdot 10^{-8} \text{ ед. СГСЭ}, d_{25} = -160 \cdot 10^{-8} \text{ ед. СГСЭ}, d_{36} = 35 \cdot 10^{-8} \text{ ед.}$$

$$\text{СГСЭ}, g_{14} = 31 \cdot 10^{-8} \text{ ед. СГСЭ}, g_{25} = -170 \cdot 10^{-8} \text{ ед. СГСЭ}, g_{36} = 44 \cdot 10^{-8} \text{ ед. СГСЭ};$$

$$\varepsilon_1^t = 480, \varepsilon_2^t = 12, \varepsilon_3^t = 10, \varepsilon_1^t = 220, \varepsilon_2^t = 11, \varepsilon_3^t = 9,8.$$

Сфалерит, кубическая модификация ZnS, $\bar{4}3m$

$$n = 2,37 \text{ для } \lambda = 5460 \text{ \AA}; \varepsilon = 8,37;$$

$$r_{41} = 5,0 \cdot 10^{-8} \text{ ед. СГСЭ для } \lambda = 5460 \text{ \AA};$$

$$d_{14} = 9,54 \cdot 10^{-8} \text{ ед. СГСЭ},$$

Титанат бария, BaTiO_3

Выше 120 °С имеет симметрию $m\bar{3}m$. Между 120 °С и 5 °С стабильной является тетрагональная фаза с симметрией $4mm$. Направление спонтанной поляризации параллельно $\langle 100 \rangle$ исходной кубической ячейки. Ниже 5 °С возникает новая сегнетоэлектрическая фаза, направление спонтанной поляризации в этом случае параллельно $\langle 110 \rangle$ исходной кубической ячейки. Симметрия этой фазы mm , она стабильна между 5 °С и минус 90 °С. При минус 90 °С наблюдается третий фазовый переход, направление спонтанной поляризации параллельно $\langle 111 \rangle$ исходной кубической ячейки. Симметрия этой фазы $3m$.

$$r_{41} = +25 \cdot 10^{-8} \text{ ед. СГСЭ}, r_{63} = -30 \cdot 10^{-8} \text{ ед. СГСЭ для } \lambda = 5460 \text{ \AA};$$

$$d_{14} = 4,2 \cdot 10^{-8} \text{ ед. СГСЭ}, d_{36} = 69,6 \cdot 10^{-8} \text{ ед. СГСЭ};$$

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 4,6, \varepsilon_3 = 21,8.$$

Для кубической модификации $n = 2,4$,

$$R_{11} = R_{18} = 1,44 \cdot 10^{-12} \text{ ед. СГСЭ}, R_{33} = 1,88 \cdot 10^{-12} \text{ ед. СГСЭ}.$$

Турмалин, $3m$

$$d_{15} = 10,9 \cdot 10^{-8} \text{ ед. СГСЭ}, d_{22} = 1,0 \cdot 10^{-8} \text{ ед. СГСЭ};$$

$$d_{31} = 1,03 \cdot 10^{-8} \text{ ед. СГСЭ}, d_{33} = 5,5 \cdot 10^{-8} \text{ ед. СГСЭ};$$

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 8,2, \varepsilon_3 = 7,5.$$

Окончание прил. 3

Обозначения: n – показатель преломления; ε – относительные диэлектрические проницаемости; ε^t – диэлектрическая проницаемость механически свободного кристалла, измеренная в условиях, когда напряжения равны нулю; ε_r – диэлектрическая проницаемость «зажатого» кристалла, измеренная при условии, когда деформации кристалла равны нулю; d_{ij} – пьезоэлектрические модули; e_{ij} , h_{ij} , g_{ij} – пьезоэлектрические постоянные; r_{ij} – коэффициенты линейного электрооптического эффекта; R_{kl} – коэффициенты квадратичного электрооптического эффекта.

ПРИЛОЖЕНИЕ 4

ПРАВИЛА ВЫБОРА КРИСТАЛЛОФИЗИЧЕСКИХ ОСЕЙ

Сингония	X_1	X_2	X_3
Триклинная	[001]	В плоскости, перпендикулярной к направлению [001]	
Моноклинная	[001]	[010]	В плоскости (100)
Ромбическая	[001]	[010]	[100]
Тетрагональная	[001]	[010]	[100]
Тригональная и гексагональная	[0001]	[0110]	[2110]
Кубическая	[001]	[010]	[100]

ПРИЛОЖЕНИЕ 5

ФОРМА МАТРИЦ ПЬЕЗОМОДУЛЕЙ d_{ij} И ПЬЕЗОЭЛЕКТРИЧЕСКИХ КОЭФФИЦИЕНТОВ g_{ij}

Центросимметричные классы: все модули равны нулю.

Нецентросимметричные классы:

Триклинная сингония.

Класс 1

$$\begin{pmatrix} d_{11} & d_{12} & d_{13} & d_{14} & d_{15} & d_{16} \\ d_{21} & d_{22} & d_{23} & d_{24} & d_{25} & d_{26} \\ d_{31} & d_{32} & d_{33} & d_{34} & d_{35} & d_{36} \end{pmatrix} \quad (18)$$

Моноклинная сингония

Класс 2, $2 \parallel x_2$

(обычная ориентация)

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & d_{14} & 0 & d_{16} \\ d_{21} & d_{22} & d_{23} & 0 & d_{25} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d_{34} & 0 & d_{36} \end{pmatrix} \quad (8)$$

Класс 2, $2 \parallel x_3$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & d_{14} & d_{15} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d_{24} & d_{25} & 0 \\ d_{31} & d_{32} & d_{33} & 0 & 0 & d_{36} \end{pmatrix} \quad (8)$$

Класс m , $m \perp x_2$

(обычная ориентация)

$$\begin{pmatrix} d_{11} & d_{12} & d_{13} & 0 & d_{15} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d_{24} & 0 & d_{26} \\ d_{31} & d_{32} & d_{33} & 0 & d_{35} & 0 \end{pmatrix} \quad (10)$$

Класс m , $m \perp x_3$

$$\begin{pmatrix} d_{11} & d_{12} & d_{13} & 0 & 0 & d_{16} \\ d_{21} & d_{22} & d_{23} & 0 & 0 & d_{26} \\ 0 & 0 & 0 & d_{34} & d_{35} & d_{36} \end{pmatrix} \quad (10)$$

Ромбическая сингония

Класс 222

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & d_{14} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & d_{25} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & d_{36} \end{pmatrix} \quad (3)$$

Класс $mm2$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & d_{15} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d_{24} & 0 & 0 \\ d_{31} & d_{32} & d_{33} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (5)$$

Тетрагональная сингония

Класс 4

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & d_{14} & d_{15} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d_{15} & -d_{14} & 0 \\ d_{31} & d_{32} & d_{33} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (4)$$

Класс $\bar{4}$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & d_{14} & d_{15} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -d_{15} & d_{14} & 0 \\ d_{31} & -d_{31} & 0 & 0 & 0 & d_{36} \end{pmatrix} \quad (4)$$

Класс 422

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & d_{14} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -d_{14} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (1)$$

Класс $4mm$

(обычная ориентация)

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & d_{15} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d_{15} & 0 & 0 \\ d_{31} & d_{32} & d_{33} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (3)$$

Класс $\bar{4}2m, 2 \parallel x_1$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & d_{14} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & d_{14} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & d_{36} \end{pmatrix} \quad (2)$$

Тригональная сингония

Класс 3

$$\begin{pmatrix} d_{11} & -d_{11} & 0 & d_{14} & d_{15} & -2d_{22} \\ -d_{22} & d_{22} & 0 & d_{15} & -d_{14} & 2d_{11} \\ d_{31} & d_{31} & d_{33} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (6)$$

Класс 32

$$\begin{pmatrix} d_{11} & -d_{11} & 0 & d_{14} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -d_{14} & -2d_{11} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (2)$$

Окончание прил. 5

Класс $3m$, $m \perp x_1$
(обычная ориентация)

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & d_{15} & -2d_{22} \\ -d_{22} & d_{22} & 0 & d_{15} & 0 & 0 \\ d_{31} & d_{31} & d_{33} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} (4)$$

Класс $3m$, $m \perp x_2$

$$\begin{pmatrix} d_{11} & -d_{11} & 0 & 0 & d_{15} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d_{15} & 0 & -2d_{11} \\ d_{31} & d_{31} & d_{33} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} (4)$$

Гексагональная сингония

Класс 6

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & d_{14} & d_{15} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & d_{15} & -d_{14} & 0 \\ d_{31} & d_{31} & d_{33} & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} (4)$$

Класс $6mm$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & d_{15} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d_{15} & 0 & 0 \\ d_{31} & d_{31} & d_{33} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} (3)$$

Так же, как класс 422; класс 622

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & d_{14} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -d_{14} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} (1)$$

Класс $\bar{6}$

$$\begin{pmatrix} d_{11} & -d_{11} & 0 & 0 & 0 & -2d_{22} \\ -d_{22} & d_{22} & 0 & 0 & 0 & 2d_{11} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} (2)$$

Класс $\bar{6}2m$, $m \perp x_1$
(обычная ориентация)

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2d_{22} \\ -d_{22} & d_{22} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} (1)$$

класс $\bar{6}2m$, $m \perp x_2$

$$\begin{pmatrix} d_{11} & -d_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2d_{11} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} (1)$$

Кубическая сингония

Класс 432

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} (0)$$

Класс $\bar{4}3m$ и класс 23

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & d_{14} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & d_{14} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & d_{14} \end{pmatrix} (1)$$

ПРИЛОЖЕНИЕ 6

ФОРМА МАТРИЦ ПЬЕЗОЭЛЕКТРИЧЕСКИХ КОЭФФИЦИЕНТОВ h_{ij} И e_{ij}
 ДЛЯ КРИСТАЛЛОВ, ИМЕЮЩИХ ЭТИ МАТРИЦЫ,
 ОТЛИЧНЫЕ ОТ МАТРИЦ d_{ij} И g_{ij}

Класс 3

$$\begin{pmatrix} h_{11} & -h_{11} & 0 & h_{14} & h_{15} & -h_{22} \\ -h_{22} & h_{22} & 0 & h_{15} & -h_{14} & -h_{11} \\ h_{31} & h_{31} & h_{33} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (6)$$

Класс 32

$$\begin{pmatrix} h_{11} & -h_{11} & 0 & h_{14} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -h_{14} & -h_{11} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (2)$$

Класс 6

$$\begin{pmatrix} h_{11} & -h_{11} & 0 & 0 & 0 & -h_{22} \\ -h_{22} & h_{22} & 0 & 0 & 0 & -h_{11} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (3)$$

Класс $3m, m \perp x_1$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & h_{15} & -h_{22} \\ -h_{22} & h_{22} & 0 & h_{15} & 0 & 0 \\ h_{31} & h_{31} & h_{33} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (4)$$

Класс $\bar{6}2m$

$$\begin{pmatrix} h_{11} & -h_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -h_{11} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (1)$$

ФОРМА МАТРИЦ ПЬЕЗОМОДУЛЕЙ d_{ij}
 ДЛЯ НЕКОТОРЫХ ПЬЕЗОЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ТЕКСТУР

Группа ∞

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & d_{14} & d_{15} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d_{15} & -d_{14} & 0 \\ d_{31} & d_{31} & d_{33} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (4)$$

Группа ∞m

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & d_{15} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d_{15} & 0 & 0 \\ d_{31} & d_{31} & d_{33} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (3)$$

Группа $\infty 2$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & d_{14} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -d_{14} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (1)$$

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ	3
ОБЩИЕ МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ...	5
ТРЕБОВАНИЯ К ОФОРМЛЕНИЮ ТИПОВОГО РАСЧЕТА.....	5
Глава 1. ЭЛЕКТРИЧЕСКОЕ ПОЛЕ. ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ЗАРЯДОВ. ЗАКОН КУЛОНА. ТЕОРЕМА ОСТРОГРАДСКОГО–ГАУССА ..	6
Глава 2. ПОТЕНЦИАЛЬНАЯ ЭНЕРГИЯ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЗАРЯДОВ. РАЗНОСТЬ ПОТЕНЦИАЛОВ ...	18
Глава 3. РАБОТА СИЛ ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКОГО ПОЛЯ. ДВИЖЕНИЕ ЗАРЯДОВ В ЭЛЕКТРИЧЕСКОМ ПОЛЕ	29
Глава 4. ЭЛЕКТРИЧЕСКАЯ ЕМКОСТЬ. КОНДЕНСАТОРЫ.....	38
Глава 5. ЗАКОНЫ ПОСТОЯННОГО ТОКА	48
Глава 6. ЗАВИСИМОСТЬ СОПРОТИВЛЕНИЯ ОТ ТЕМПЕРАТУРЫ	57
Глава 7. ЗАКОН ОМА ДЛЯ НЕОДНОРОДНОЙ ЦЕПИ.....	58
Глава 8. РАЗВЕТВЛЕНИЕ ЦЕПИ. ПРАВИЛА КИРХГОФА	61
Глава 9. ЗАКОН ДЖОУЛЯ–ЛЕНЦА	72
Глава 10. ТЕРМОЭЛЕКТРОННАЯ И АВТОЭЛЕКТРОННАЯ ЭМИССИИ...78	
Глава 11. ЗАКОНЫ ЭЛЕКТРОЛИЗА. ЗАКОНЫ ФАРАДЕЯ.....	83
Глава 12. ЭЛЕКТРИЧЕСКИЙ ТОК В ГАЗАХ	88
Глава 13. ЭФФЕКТЫ ПОККЕЛЬСА, КЕРРА, ШТАРКА И ПЬЕЗОЭЛЕКТРИЧЕСКИЙ	94
Глава 14. СТАТИСТИЧЕСКИЕ ЗАКОНОМЕРНОСТИ В ПРОВОДНИКОВЫХ МАТЕРИАЛАХ	106
ЗАКЛЮЧЕНИЕ	117
БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК	118
Приложение 1. РАБОТА ВЫХОДА ЭЛЕКТРОНА ИЗ МЕТАЛЛА	119
Приложение 2. ФОРМА МАТРИЦ КОЭФФИЦИЕНТОВ ЛИНЕЙНОГО ЭЛЕКТРООПТИЧЕСКОГО ЭФФЕКТА (r_{ji}).....	120
Приложение 3. СПРАВОЧНЫЕ ДАННЫЕ О КРИСТАЛЛАХ, НЕОБХОДИМЫЕ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ	124
Приложение 4. ПРАВИЛА ВЫБОРА КРИСТАЛЛОФИЗИЧЕСКИХ ОСЕЙ	126
Приложение 5. ФОРМА МАТРИЦ ПЬЕЗОМОДУЛЕЙ d_{ij} И ПЬЕЗОЭЛЕКТРИЧЕСКИХ КОЭФФИЦИЕНТОВ g_{ij} ..	127
Приложение 6. ФОРМА МАТРИЦ ПЬЕЗОЭЛЕКТРИЧЕСКИХ КОЭФФИЦИЕНТОВ h_{ij} И e_{ij} ДЛЯ КРИСТАЛЛОВ, ИМЕЮЩИХ ЭТИ МАТРИЦЫ, ОТЛИЧНЫЕ ОТ МАТРИЦ d_{ij} И g_{ij}	130
Приложение 7. ФОРМА МАТРИЦ ПЬЕЗОМОДУЛЕЙ d_{ij} ДЛЯ НЕКОТОРЫХ ПЬЕЗОЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ТЕКСТУР	130

Учебное издание

ЭЛЕКТРОСТАТИКА. ПОСТОЯННЫЙ ТОК

Сборник задач по курсу физики

Под редакцией
Литвиновой Ман Нен

Редактор *Н.В. Смышляева*
Технический редактор *С.С. Заикина*

План 2015 г. Поз. 9.17. Подписано в печать 24.04.2015.
Уч.-изд. л. 8,2. Усл. печ. л. 7,6. Зак. 61. Тираж 100 экз. Цена 266 руб.

Издательство ДВГУПС
680021, г. Хабаровск, ул. Серышева, 47.