Министерство транспорта Российской Федерации
Федеральное агентство железнодорожного транспорта
ГОУ ВПО «Дальневосточный государственный университет
путей сообщения»

Кафедра «Высшая математика»

М. И. Войтюк В. Г. Гамалей

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИЙ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

Методическое пособие

Хабаровск
Издательство ДВГУПС
2007

УДК 517.2(075.8)
ББК В 161.54 я 73
В 656

Рецензент:
доцент кафедры «Высшая математика»,
кандидат физико-математических наук
Виноградова П.В.

Войтюк М.И.

В 656 Дифференциальное исчисление функций одной переменной. Методическое пособие. / М.И. Войтюк, В.Г. Гамалей, – Хабаровск : изд-во ДВГУПС, 2007. –75 с.

Методическое пособие соответствует ГОС ВПО дисциплины “Высшая математика”, “Математический анализ” всех направлений и специальностей.

Изложены краткие теоретические сведения по дифференциальному исчислению функции одной переменной, рассмотрены примеры исследования и построения графиков функции с помощью производной, приведены варианты индивидуальных заданий.

Пособие предназначено для студентов инженерных и экономических специальностей первого курса дневной формы обучения, изучающих дисциплину “Высшая математика”, “Математический анализ” Рекомендуется преподавателям для проведения практических занятий и самостоятельной работы студентов.

УДК 517.2(075.8)
ББК В 161.54 я 73

© ГОУ ВПО «Дальневосточный государственный университет путей сообщения» (ДВГУПС), 2007

ВВЕДЕНИЕ

Пособие содержит весь необходимый материал по дифференциальному исчислению функций одной переменной, изучаемый студентами инженерно-технических и экономических специальностей университетов. Для углубленного изучения этого раздела в конце пособия приведен список рекомендуемой учебной литературы.

Пособие состоит из восьми параграфов, в каждом из которых содержатся необходимые теоретические сведения и подробно разобранные примеры.

В последнем параграфе приведены варианты индивидуальных заданий для студентов всех специальностей дневной формы обучения.

1. ПОНЯТИЕ ПРОИЗВОДНОЙ, ЕЁ ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ СМЫСЛ

1.1. Понятие производной

Пусть функция $y=f(x)$ определена в точке x_0 и некоторой ее окрестности, x–точка из этой окрестности. Разность $x–x_0$ обозначим через Δx и назовем ***приращением аргумента***, а разность $f(x)–f(x_0)$ обозначим через Δy и назовем ***приращением функции***.

Итак, $\Delta x = x–x_0$, $\Delta y = f(x)–f(x_0)$. Из равенства $\Delta x = x–x_0$ получаем равенство $x = x_0 +\Delta x$, тогда $\Delta y = f(x_0 + \Delta x)– f(x_0)$.

Производной функции $y=f(x)$ в точке x_0 в обозначении $f'(x_0)$ называется предел отношения приращения функции к приращению аргумента, когда приращение аргумента стремится к нулю, т. е.

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}.$$

Производные элементарных функций представлены в табл. 1.

Таблица 1

1. $\left(x^{\alpha}\right)' = \alpha x^{\alpha-1}$.	6. $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.	10. $\left(a^x\right)' = a^x \cdot \ln a$.
2. $(\sin x)' = \cos x$.	7. $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.	11. $\left(e^x\right)' = e^x$.
3. $(\cos x)' = -\sin x$.	8. $\left(\operatorname{arctg} x\right)' = \frac{1}{1+x^2}$.	12. $\left(\log_a x\right)' = \frac{1}{x\cdot \ln a}$.
4. $\left(\operatorname{tg} x\right)' = \frac{1}{\cos^2 x}$	9. $(\operatorname{arcctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}$.	13. $\left(\ln x\right)' = \frac{1}{x}$.
5. $(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$.		

1.2. Геометрический смысл производной

Рассмотрим геометрический смысл производной.

На рис. 1 изображен график непрерывной функции $y=f(x)$. Точка M_0 на графике имеет координаты (x_0, $f(x_0)$). Прямая M_0M является касательной для линии $y=f(x)$ и наклонена к оси Ox под углом α.

Геометрическое истолкование производной состоит в том, что угловой коэффициент касательной к графику функции $y=f(x)$ в точке с абсциссой x_0 равен производной этой функции в точке x_0:

$$f'(x_0) = k = tg\alpha \qquad (1.1)$$

Очевидно, что уравнение касательной M_0K имеет вид:

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0) \qquad (1.2)$$

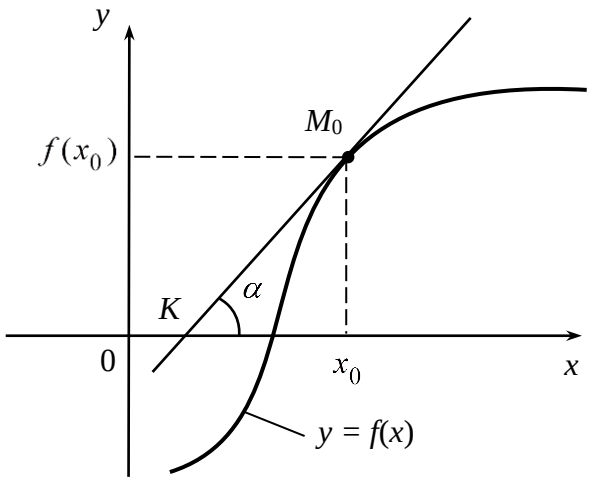

Рис. 1.

Пример 1.1. Составить уравнение касательной к параболе $y = x^2 - 4x$ в точке, где *x = 1*.

Решение.

Подставляя в уравнение параболы заданную абсциссу точки касания $x = 1$, найдем её ординату: *y = -3*.

Для определения углового коэффициента касательной находим производную *y′(x)* и вычисляем её значение в точке $x = 1$:

$y' = 2x - 4;\ y'_0 = y'(1) = 2.$

Подставляя значения x_0, y_0 и y'_0 в уравнение (1.2), получим уравнение касательной

$y + 3 = -2(x - 1)$ или $2x + y + 1 = 0$.

Пример 1.2. Составить уравнение касательной, проведенной к кривой $y = -\frac{2}{3}x^3 - 2x^2 + 4x + 3$, параллельно прямой $8x + 4y + 11 = 0$.

Решение.

По условию, касательная к заданной кривой параллельна прямой $8x + 4y + 11 = 0$, следовательно угловые коэффициенты этих прямых должны быть равны.

Угловой коэффициент касательной для кривой:

$y'(x) = -2x^2 - 4x + 4$.

Найдем угловой коэффициент касательной прямой. Для этого сведем уравнение к виду $y = kx + b$.

$y = -2x - \frac{11}{4}$, $k = -2$.

Приравняем угловые коэффициенты и решим полученное квадратное уравнение:

$-2x^2 - 4x + 4 = -2$, $x_1 = 1$, $x_2 = -3$.

Найденные корни являются абсциссами точек, через которые проходит касательная к графику функции $y = -\frac{2}{3}x^3 - 2x^2 + 4x + 3$. Найдем ординаты этих точек:

$y(1) = \frac{13}{3}$, $y(-3) = -9$.

Составим уравнения касательных по формуле (1.2)

$y - \frac{13}{3} = -2(x-1)$, $y = -2x + \frac{19}{3}$

$y + 9 = -2(x+3)$, $y = -2x - 15$.

2. ПРАВИЛА ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ. ПРОИЗВОДНАЯ СЛОЖНОЙ ФУНКЦИИ

2.1. Правила дифференцирования

Правила дифференцирования позволяют находить производные суммы (разности), произведения и частного двух функций:

1. $(C \cdot u(x))' = Cu'(x)$.
2. $(u(x) \pm v(x))' = u'(x) \pm v'(x)$.
3. $(u(x)v(x))' = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x)$.
4. $\left(\frac{u(x)}{v(x)}\right)' = \frac{u'(x) \cdot v(x) - u(x) \cdot v'(x)}{v^2(x)}$, $v(x) \neq 0$.

Замечание. Свойство 2 выполняется для алгебраической суммы любого количества функций.

Пример 2.1. Пользуясь формулами дифференцирования, найти производные следующих функций: а) $y = x^2 - 5x + 4$; б) $y = \sqrt{x} + \frac{5}{\sqrt[3]{x}} - \frac{1}{x^2} + \frac{1}{3x^3}$

Решение.

а) Используя таблицу производных, первое и второе свойства получим:

$y' = (x^2 - 5x + 4)' = (x^2)' - (5x)' + (4)' = 2x - 5 \cdot 1 + 0 = 2x - 5$;

б) Вводя дробные и отрицательные показатели, преобразуем данную функцию:

$y = x^{\frac{1}{2}} + 5x^{\frac{-1}{3}} - x^{-2} + \frac{1}{3}x^{-3}$.

Тогда, используя производную степенной функции, свойства 1 и 2 будем иметь:

$$y' = (x^{\frac{1}{2}} + 5x^{\frac{-1}{3}} - x^{-2} + \frac{1}{3}x^{-3})' = (x^{\frac{1}{2}})' + (5x^{\frac{-1}{3}})' - (x^{-2})' + (\frac{1}{3}x^{-3})' =$$

$$= \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} + 5\cdot(-\frac{1}{3})x^{-\frac{4}{3}} - (-2)x^{-3} + \frac{1}{3}(-3)x^{-4} = \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{5}{3\sqrt[3]{x^4}} + \frac{2}{x^3} - \frac{1}{x^4}.$$

Пример 2.2. Найти производную функции $y = \cos x \cdot 5^x$:

Решение.

Воспользовавшись свойством 3 получим:

$$y' = (\cos x \cdot 5^x)' = (\cos x)' \cdot 5^x + \cos x \cdot (5^x)' = -\sin x \cdot 5^x + \cos x \cdot 5^x \ln 5.$$

Пример 2.3. Найти производную функции $y = \dfrac{x^2 + x + 1}{2x^3 + 1}$.

Решение.

Для решения примера используем свойство 4 производных.

$$y' = \left(\frac{x^2 + x + 1}{2x^3 + 1}\right)' = \frac{\left(x^2 + x + 1\right)' \cdot \left(2x^3 + 1\right) - \left(x^2 + x + 1\right) \cdot \left(2x^3 + 1\right)'}{\left(2x^3 + 1\right)^2} =$$

$$= \frac{(2x + 1) \cdot \left(2x^3 + 1\right) - \left(x^2 + x + 1\right) \cdot 6x^2}{\left(2x^3 + 1\right)^2} = \frac{4x^4 + 2x^3 + 2x + 1 - 6x^4 - 6x^3 - 6x^2}{\left(2x^3 + 1\right)^2} =$$

$$= \frac{-2x^4 - 4x^3 - 6x^2 + 2x + 1}{\left(2x^3 + 1\right)^2}.$$

2.2. Производная сложной функции

Рассмотрим дифференцирование сложной функции.

Пусть $y = f(u(x))$ является ***сложной функцией***, составленной из функции $y = f(u)$, $u = u(x)$, где u – промежуточный аргумент. Покажем, как найти производную сложной функции, зная производную для функции $y = f(u(x))$ (её будем обозначать через y'_u) и производную u'_x для функции $u = u(x)$.

Теорема 1. Если функция $u = u(x)$ имеет производную u'_x в точке x, а функция $y = f(u)$ имеет производную y'_u в точке $u\,(u = u(x))$, то сложная функция $y = f(u(x))$ в точке x имеет производную y'_x , причем

$$y'_x = y'_u\, u'_x.$$

Иначе, производная сложной функции равна произведению производной данной функции по промежуточному аргументу на производную промежуточного аргумента.

Пример 2.4. Найти производную функции $y = \left(e^{arctgx} + \cos^4 x\right)^3$.

Решение.

$$\left(\left(e^{arctgx} + \cos^4 x\right)^3\right)' = 3 \cdot \left(e^{arctgx} + \cos^4 x\right)^2 \cdot \left(e^{arctgx} + \cos^4 x\right)' =$$

$$= 3 \cdot \left(e^{arctgx} + \cos^4 x\right)^2 \cdot \left(e^{arctgx} \cdot (arctgx)' + 4\cos^3 x \cdot (\cos x)'\right) =$$

$$= 3 \cdot \left(e^{arctgx} + \cos^4 x\right)^2 \cdot \left(e^{arctgx} \cdot \frac{1}{1+x^2} + 4\cos^3 x \cdot (-\sin x)\right) =$$

$$= 3 \cdot \left(e^{arctgx} + \cos^4 x\right)^2 \cdot \left(\frac{e^{arctgx}}{1+x^2} - 4\sin x \cdot \cos^3 x\right).$$

Пример 2.5. Найти производную функции $y = \ln\left[\sin\left(x^5 + 2x + 1\right)\right]$.

Решение.

$$\left(\ln\left[\sin\left(x^5 + 2x + 1\right)\right]\right)' = \frac{1}{\sin\left(x^5 + 2 \cdot x + 1\right)} \cdot \left[\sin\left(x^5 + 2x + 1\right)\right]' =$$

$$= \frac{\cos\left(x^5 + 2x + 1\right)}{\sin\left(x^5 + 2x + 1\right)} \cdot \left(x^5 + 2x + 1\right)' = ctg\left(x^5 + 2x + 1\right) \cdot \left(5x^4 + 2\right) =$$

$$= \left(5x^4 + 2\right) \cdot ctg\left(x^5 + 2x + 1\right).$$

3. ДИФФЕРЕНЦИАЛ ФУНКЦИИ

Пусть функция в точке x_0 имеет производную. По определению производной (п.1.1) $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0)$, поэтому по свойствам предела можно записать $\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0) + \alpha$, где $\alpha = \alpha(\Delta x)$ – бесконечно малая при $\Delta x \to 0$. Отсюда

$$\Delta y = f'(x_0)\Delta x + \alpha \cdot \Delta x. \qquad (3.1)$$

При $\Delta x \to 0$ второе слагаемое в равенстве (3.1) является бесконечно малой высшего порядка, по сравнению с Δx: $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\alpha \cdot \Delta x}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \alpha(\Delta x) = 0$, поэтому Δy и $f'(x_0) \cdot \Delta x$ – эквивалентные бесконечно малые (при $f'(x_0) \neq 0$).

Таким образом, приращение функции Δy состоит из двух слагаемых, первое из которых $f'(x_0) \cdot \Delta x$ является ***главной частью*** приращения Δy, линейной относительно Δx (при $f'(x_0) \neq 0$).

Дифференциалом функции $y = f(x)$ в точке x_0 называется главная часть приращения функции и обозначается: dy или $df(x_0)$. Следовательно,

$$dy = df(x_0) = f'(x_0) \cdot \Delta x . \qquad (3.2)$$

Пример 3.1. Найти дифференциал и приращение функции $y = x^2$ при: 1) произвольных x и Δx; 2) $x_0 = 20$, $\Delta x = 0{,}1$.

Решение.

1) $\Delta y = (x + \Delta x)^2 - x^2 = x^2 + 2x \cdot \Delta x + (\Delta x)^2 - x^2 = 2x\Delta x + (\Delta x)^2$, $dy = 2x\Delta x$.

2) Если $x_0 = 20$, $\Delta x = 0{,}1$, то $\Delta y = 40 \cdot 0{,}1 + (0{,}1)^2 = 4{,}01$; $dy = 40 \cdot 0{,}1 = 4$

Запишем равенство (3.1) в виде:

$$\Delta y = dy + \alpha \cdot \Delta x \qquad (3.3)$$

Приращение Δy отличается от дифференциала dy на бесконечно малую высшего порядка, по сравнению с Δx, поэтому в приближенных вычислениях пользуются приближенным равенством $\Delta y \approx dy$, если Δx достаточно мало.

Учитывая, что $\Delta y = f(x + x_0) - f(x_0)$, получаем приближенную формулу:

$$f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0)\Delta x \qquad (3.4)$$

Пример 3.2. Вычислить приближенно $\sqrt{4{,}1}$.

Решение. Рассмотрим: функцию $f(x) = \sqrt{x}$, при $x_0 = 4$, $\Delta x = 0{,}1$. Тогда $\sqrt{4{,}1} = f(x_0 + \Delta x)$.

$f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$, $f'(x_0) = f'(4) = \dfrac{1}{2\sqrt{4}} = \dfrac{1}{4} = 0{,}25$

$f(x_0) = \sqrt{4} = 2$.

Используя формулу (3.4), получим:

Значит $\sqrt{4{,}1} = 2 + 0{,}25 \cdot 0{,}1 = 2{,}025$

4. ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ ОБРАТНОЙ ФУНКЦИИ, ФУНКЦИЙ ЗАДАННЫХ НЕЯВНО, ПАРАМЕТРИЧЕСКИ.

ЛОГАРИФМИЧЕСКОЕ ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ

4.1. Дифференцирование обратной функции

Введем правило для нахождения производной обратной функции.

Теорема. Пусть функция $y=f(x)$ определена на промежутке X, непрерывна, монотонна (возрастает или убывает) и дифференцируема на X. Если ее производная y'_x в точке x не равна нулю, то ***обратная функция*** $x = f(y)$ имеет производную x'_y в точке $y = f(x)$, причем

$$x'_y = \frac{1}{y'_x} \qquad (4.1)$$

Доказательство. Функция $y = f(x)$ определена, непрерывна и монотонна на промежутке X, тогда она имеет обратную функцию $x = \varphi(y)$, определенную, непрерывную и монотонную на промежутке Y.

Если значение аргумента y получает приращение Δy, отличное от нуля, то в силу монотонности функции $x = \varphi(y)$ функция x получает приращение Δx и $\Delta x \to 0$. В силу непрерывности функции $x = \varphi(y)$: $\lim\limits_{\Delta y \to 0} \Delta x = 0$.

Следовательно, $x'_y = \lim\limits_{\Delta y \to 0} \dfrac{\Delta x}{\Delta y} = \lim\limits_{\Delta y \to 0} \dfrac{1}{\Delta y / \Delta x} = \dfrac{1}{\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta y / \Delta x} = \dfrac{1}{y'_x}$.

Итак, $x'_y = \dfrac{1}{y'_x}$.

Теорема доказана.

Пример 4.1. Если $x \in [-1;1]$, $y \in [-\pi/2; \pi/2]$, то функции $y = \arcsin x$, $x = \sin y$ являются взаимно обратными, причем $x'_y = (\sin y)' = \cos y$. Если $-\pi/2 < y < \pi/2$ (при этом $-1 < x < 1$), то $\cos y > 0$, поэтому $\cos y = +\sqrt{1 - \sin^2 y} = \sqrt{1 - x^2}$.

По формуле (4.1) имеем: $y'_x = \dfrac{1}{x'_y}$, тогда

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{(\sin y)'} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}, \ (-1 < x < 1).$$

4.2. Дифференцирование функций, заданных неявно

Не всегда функция бывает представлена в виде $y = f(x)$. Например, уравнение $y^3 - 5x^2 - 3x = 0$ задает функцию y, которую можно из этого уравнения выразить через x: $y = \sqrt[3]{3x + 5x^2}$.

Пусть переменные x, y связаны между собой некоторым уравнением

$$F(x, y) = 0 \qquad (4.2)$$

причем y является функцией от x. Тогда говорят, что функция y задана **неявно** уравнением (4.2).

Не всегда функции, заданные неявно могут быть выражены явно через элементарные функции. Так, из уравнения $y + x = 2\sin y$, которое неявно задает функцию y, нельзя выразить y явно через элементарные функции.

Для того чтобы найти производную y' для функции, заданной неявно уравнением (4.2) надо найти производные по x от обеих частей этого уравнения, помня,

что y – функция от x и приравнять эти производные. Из полученного уравнения найти y'.

Пример 4.2. Найти производную функции, заданной неявно уравнением $x^2 + y^2 = a^2$.

Решение.

$(x^2 + y^2)'_x = (a^2)'_x$.

$2x + 2y \cdot y' = 0$.

Отсюда $y' = -x / y$.

4.3. Дифференцирование функций, заданных параметрически

Рассмотрим задание линии на плоскости, при котором переменные x, y являются функциями третьей переменной t (называемой параметром):

$$\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases} \qquad (4.3)$$

Каждому значению t из некоторого интервала соответствуют определенные значения x и y, а, следовательно, определенная точка $M(x,y)$ плоскости. Когда t пробегает все значения из заданного интервала, то точка $M(x,y)$ описывает некоторую линию L. Уравнения (4.3) называются ***параметрическими*** уравнениями линии L.

Если функция $x = \varphi(t)$ на некотором интервале изменения t имеет обратную функцию $t = \Phi(x)$, то подставляя это выражение в уравнение $y = \psi(t)$, получим $y = \psi(\varphi(x))$, которое задает y как функцию от x.

Пусть $x = \varphi(t)$, $y = \psi(\varphi(x))$ имеют производные, причем $x'_t \neq 0$. По правилу дифференцирования сложной функции $y'_x = \psi'_t \cdot t'_x$. На основании правила дифференцирования обратной функции $t'_x = \dfrac{1}{\varphi'_t}$, имеем:

$$y'_x = \frac{\psi'_t}{\varphi'_t} \qquad (4.4)$$

Полученная формула (4.4) позволяет находить производные для функций, заданных параметрически.

Пример 4.3. Пусть функция y, зависящая от x, задана параметрически:

$$\begin{cases} x = a\cos t, \\ y = b\sin t, \end{cases} \quad 0 \le t \le \pi/2.$$

Найти y'_x.

Решение.

$$y'_x = \frac{\psi'_t}{\varphi'_t} = \frac{b\cos t}{-a\sin t} = -\frac{b}{a}\,\mathrm{ctg}t$$

Пример 4.4. Найти y'_x, если переменные x и y связаны соотношением $\ln\left[\cos(xy)\right] = x \cdot tg\left(x^3 + y^2\right)$.

Решение.

Явно выразить одну из переменных через другую невозможно, поэтому находим производные левой и правой частей данного равенства и приравниваем их:

$$\frac{cos'(xy)}{cos(xy)} = tg\left(x^3 + y^2\right) + x \cdot tg'\left(x^3 + y^2\right).$$

Далее имеем:

$$\frac{\left[-\sin(xy)\right](xy)'}{\cos(xy)} = tg\left(x^3 + y^2\right) + \frac{x\left(x^3 + y^2\right)'}{\cos\left(x^3 + y^2\right)};$$

$$-\left(y + xy'\right) \cdot tg\left(xy\right) = tg\left(x^3 + y^2\right) + \frac{x \cdot \left(3x^2 + 2yy'\right)}{\cos^2\left(x^3 + y^2\right)}.$$

Перенося слагаемые, содержащие y'_x, в одну часть равенства, вынося y'_x за скобку, а остальные слагаемые – в другую и деля на коэффициент при y'_x, получаем:

$$y' = -\left(ytg\left(xy\right) + tg\left(x^3 + y^2\right) + \frac{3x^3}{cos^2\left(x^3 + y^2\right)} \right) : \left(xtg\left(xy\right) + \frac{2xy}{cos^2\left(x^3 + y^2\right)} \right).$$

Пример 4.5. Найти y'_x и y''_x для функции, заданной параметрически:

$$\begin{cases} x = 3\cos^2 t \\ y = 3\cos t^2 \end{cases}.$$

Решение

$$x'_t(t) = 3 \cdot 2(\cos t)(-\sin t) = -3\sin(2t); x''_{tt}(t) = -3\left[\cos(2t)\right]2 = -6\cos(2t);$$

$$y'_t(t) = 3\left(-\sin t^2\right)2t = -6t\sin t^2;$$

$$y''_{tt}(t) = -6\left(\sin t^2 + t\left(\cos t^2\right)2t\right) = -6\left(\sin t^2 + 2t^2\cos t^2\right);$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{-6t\sin t^2}{-3\sin(2t)} = \frac{2t\sin t^2}{\sin(2t)};$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{y''_{tt}x'_t - y'_t x''_{tt}}{\left[x'_t(t)\right]^3} =$$

$$\frac{-6\left(\sin t^2 + 2t^2\cos t^2\right)\left[-3\sin(2t)\right] - \left(-6t\sin t^2\right)\left[-6\cos(2t)\right]}{9\sin^2(2t)} =$$

$$= \frac{18\sin(2t)\left(\sin t^2 + 2t^2\cos t^2\right) - 36t\sin t^2\cos(2t)}{9\sin^2(2t)} =$$

$$= \frac{2\left[\sin(2t)\left(\sin t^2 + 2t^2\cos t^2\right) - 2t\sin t^2\cos(2t)\right]}{\sin^2(2t)}.$$

4.4. Логарифмическое дифференцирование

Рассмотрим показательно-степенную функцию $y = u(x)^{v(x)}$, где $u(x) > 0$, $u(x)$, $v(x)$ – дифференцируемые функции.

Прологарифмируем равенство $y = u^v$, получим: $\ln y = v \ln u$ (по свойствам логарифмов). Дифференцируем обе части полученного равенства как неявную функцию, помня, что y – функция от x:

$$\frac{1}{y}y' = v'\ln u + v\cdot\frac{1}{u}\cdot u',$$

откуда $y' = y(v'\ln u + v\cdot\frac{1}{u}\cdot u')$.

Подставляя сюда $y = u^v$, имеем:

$$y' = u^v \ln u\cdot v' + v\cdot u^{v-1}\cdot u'.$$

Этот прием нахождения производной называется ***логарифмическим дифференцированием***.

Пример 4.6. Найти $\left((\arcsin x)^{tgx}\right)'$.

Решение.

Вначале прологарифмируем данное равенство

$$\ln y = tgx\cdot\ln(\arcsin x),$$

и найдем производные от обеих частей полученного равенства, приравнивая их:

$$\frac{y'}{y} = (tgx)'\cdot\ln(\arcsin x) + (tgx)\cdot\left[\ln(\arcsin x)\right]';$$

$$\frac{y'}{y} = \frac{\ln(\arcsin x)}{\cos^2 x} + tgx\cdot\frac{(\arcsin x)'}{\arcsin x};$$

$$\frac{y'}{y} = \frac{\ln(\arcsin x)}{\cos^2 x} + \frac{tgx}{\sqrt{1-x^2} \times \arcsin x};$$

Учитывая, что $y = (\arcsin x)^{tgx}$, имеем:

$$y' = (\arcsin x)^{tgx} \cdot \left(\frac{\ln(\arcsin x)}{\cos^2 x} + \frac{tgx}{\sqrt{1-x^2} \cdot \arcsin x} \right).$$

Пример 4.7. $y = x^{\sin x}$, ($x > 0$). Найти производную функции y'.

Решение.

$$\ln y = \sin x \cdot \ln x, (\ln y)' = (\sin x \cdot \ln x)',$$

$$\frac{1}{y} y' = \cos x \cdot \ln x + \sin x \cdot \frac{1}{x},$$

$$y' = x^{\sin x}(\cos x \cdot \ln x + \sin x \cdot \frac{1}{x}) \text{ или } y' = x^{\sin x} \cos x \cdot \ln x + \sin x \cdot x^{\sin x - 1}.$$

5. ПРОИЗВОДНЫЕ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ

5.1. Понятие производной высшего порядка

Пусть функция $y = f(x)$ определена и дифференцируема на некотором промежутке X, тогда ее производная $f'(x)$ также является функцией от x на этом промежутке. Если $f'(x)$ имеет производную на промежутке X, то эта производная называется ***производной второго порядка*** функции $y = f(x)$ и обозначается: y'' или $f''(x)$.

Итак, $f''(x) = (f'(x))'$

Производная от производной второго порядка называется ***производной третьего порядка*** и обозначается: y''' или $f'''(x)$.

Вообще, ***производной n-го порядка*** называется производная от производной $(n-1)$-го порядка и обозначается: $y^{(n)}$ или $f^{(n)}(x)$. Итак,

$f^{(n)}(x) = (f^{(n-1)}(x))'$.

Производные y'', y''', ... называются ***производными высших порядков***.

Пример 5.1. $f(x) = \sqrt{x}$. Найти $f'''(x)$ и $f'''(4)$.

Решение.

$$f'(x) = \left(x^{1/2}\right)' = \frac{1}{2} x^{-1/2},$$

$$f''(x) = -\frac{1}{4} x^{-3/2},$$

$$f'''(x) = \frac{3}{8} x^{-5/2} = = \frac{3}{8\sqrt{x^5}},$$

$$f'''(4) = \frac{3}{8\sqrt{4^5}} = \frac{3}{8 \cdot 2^5} = \frac{3}{256}.$$

Пример 5.2. Найти производную *n*-го порядка для функции $y = e^{3x}$.

Решение.

$y' = 3e^{3x}$,

$y'' = 3 \cdot 3 \cdot e^{3x} = 9e^{3x}$,

$y''' = 3^3 \cdot e^{3x}$.

По аналогии находим: $y^n = 3^n e^{3x}$.

5.2. Производные высших порядков от функций, заданных параметрически

Пусть функция *y*, зависящая от *x*, задана параметрически на интервале *T*:

$$\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases}, \; t \in T$$

Найдем $\frac{d^2y}{dx^2}$. Известно, что $\frac{dy}{dx} = y'_x = \frac{y'_t}{x'_t}$ (п. 4.3), поэтому

$$\frac{d^2y}{dx^2} = (y'_x)'_x = \frac{(y'_x)'_t}{x'_t} = \frac{\left(y'_t / x'_t\right)'_t}{x'_t} = \frac{y''_t x'_t - x''_t y'_t}{(x'_t)^3}.$$

Аналогично будет вычисляться $\frac{d^3y}{dx^3}$ и т. д.

Пример 5.3. Найти y'_x и y''_x для функции, заданной параметрически:

$$\begin{cases} x = 3\cos^2 t \\ y = 3\cos t^2 \end{cases}.$$

Решение.

$x'_t(t) = 3 \cdot 2(\cos t)(-\sin t) = -3\sin(2t)$;

$x''_{tt}(t) = -3\left[\cos(2t)\right]2 = -6\cos(2t)$;

$y'_t(t) = 3\left(-\sin t^2\right)2t = -6t\sin t^2$;

$y''_{tt}(t) = -6\left(\sin t^2 + t\left(\cos t^2\right)2t\right) = -6\left(\sin t^2 + 2t^2\cos t^2\right)$;

$\frac{dy}{dx} = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{-6t\sin t^2}{-3\sin(2t)} = \frac{2t\sin t^2}{\sin(2t)}$;

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{y''_{tt}x'_t - y'_t x''_{tt}}{\left[x'_t(t)\right]^3}=$$

$$=\frac{-6\left(\sin t^2+2t^2\cos t^2\right)\left[-3\sin(2t)\right]-\left(-6t\sin t^2\right)\left[-6\cos(2t)\right]}{9\sin^2(2t)}=$$

$$=\frac{18\sin(2t)\left(\sin t^2+2t^2\cos t^2\right)-36t\sin t^2\cos(2t)}{9\sin^2(2t)}=$$

$$=\frac{2\left[\sin(2t)\left(\sin t^2+2t^2\cos t^2\right)-2t\sin t^2\cos(2t)\right]}{\sin^2(2t)}.$$

Пример 5.4. Функция *y* от *x* задана параметрически уравнениями:

$$\begin{cases} x=a\cos^3 t \\ y=a\sin^3 t \end{cases},\ 0\le t\le\frac{\pi}{2}.$$

Найти $\frac{d^2y}{dx^2}$.

Решение.

$$\frac{dy}{dx}=y'_x=\frac{y'_t}{x'_t}=\frac{3a\sin^2 t\cos t}{-3a\cos^2 t\sin t}=tgt;$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{(y'_x)'_t}{x'_t}=\frac{(-tgt)'}{(a\cos^3 t)'}=-\frac{1}{\cos^2 t(-3a\cos^2 t\sin t)}=\frac{1}{3a\cos^4 t\sin t}.$$

5.3. Производные высших порядков от функций, заданных неявно

Нахождение производных высших порядков от функций, заданных неявно, рассмотрим на примере.

Пример 5.5. Найти $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$ для функции, заданной неявно уравнением: $e^y+xy=e$. Вычислить *y*′(0), *y*″(0).

Решение.

Найдем сначала *y*′, как описано в п.4.2.

$(e^y+xy)'=(e)'$,

$e^y\cdot y'+y+xy'=0$,

$y'(e^y+x)=-y$,

$y'=-\frac{y}{e^y+x}$.

Для нахождения y'' будем дифференцировать равенство $e^y \cdot y' + y + xy' = 0$, получим:

$e^y \cdot (y')^2 + e^y y'' + y' + y' + xy'' = 0$.

Отсюда найдем y'' и подставим найденное выражение для y': $y''(e^y + x) = -e^y \cdot (y')^2 - 2y'$,

$$y''=-\frac{e^y (y')^2 + 2y'}{e^y + x}=-\frac{e^y\left(-\frac{y}{e^y + x}\right)^2 + 2\left(-\frac{y}{e^y + x}\right)}{e^y + x}=\frac{-e^y y^2 + 2y(e^y + x)}{(e^y + x)^3}=$$

$$=\frac{-e^y y^2 + 2e^y y + 2yx}{(e^y + x)^3}.$$

Итак, $y'=-\frac{y}{e^y + x}$,

$y''=\frac{-e^y y^2 + 2e^y y + 2yx}{(e^y + x)^3}$.

Подставим $x=0$ в исходное уравнение $e^y + xy = e$, получим:

$e^0 + 0 \cdot y = e$, откуда $y=1$, значит,

$y(0)=1$; $y'(0)=-\frac{1}{e}$; $y''(0)=\frac{e}{(e)^3}=\frac{1}{e^2}$.

6. ПРАВИЛО ЛОПИТАЛЯ

Рассмотрим новый способ нахождения пределов отношения двух бесконечно малых или бесконечно больших функций, т.е. раскрытия неопределенностей типа $\left(\frac{0}{0}\right)$ и $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$, так называемое ***правило Лопиталя***.

Теорема Лопиталя 1 (*раскрытие неопределенностей типа* $\left(\frac{0}{0}\right)$). Пусть функции $f(x)$, $g(x)$ определены, непрерывны и дифференцируемы в точке x_0 и некоторой ее окрестности, причем $g'(x) \neq 0$ для любого x из этой окрестности, и пусть $f(x_0) = 0$, $g(x_0) = 0$ (следовательно, $f(x)$, $g(x)$– бесконечно малые при $x \to x_0$). Если $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ существует, то существует $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ и

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}. \qquad (6.1)$$

Пример 6.1. Найти $\lim\limits_{x \to 0} \frac{e^{7x} - 1}{tg(3x)}$.

Решение.

Так как при $x \to 0$ функции $e^{7x} \to 1$ и $tg(3x) \to 0$, то имеем неопределенность типа $\left(\frac{0}{0}\right)$. Числитель и знаменатель данной дроби непрерывны дифференцируемы и стремятся к нулю. Это означает, что можно применить правило Лопиталя:

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{7x}-1}{tg(3x)} = \lim_{x\to 0} \frac{\left(e^{7x}-1\right)'}{\left(tg(3x)\right)'} = \lim_{x\to 0} \frac{7e^{7x}}{3/\cos^2 3x} =$$

$$= \frac{7}{3} \lim_{x\to 0} \cos^2(3x) \cdot e^{7x} = \frac{7}{3} \cdot 1 = \frac{7}{3}.$$

Пример 6.2. Найти $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1-\cos 3x}{2x}$.

Решение.

Поскольку функции $f(x) = 1-\cos 3x$, $g(x)=2x$ удовлетворяют условиям теоремы Лопиталя, то $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1-\cos 3x}{2x} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{(1-\cos 3x)'}{(2x)'} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{3\sin 3x}{2} = 0$.

Замечание 1. Теорема Лопиталя справедлива и в том случае, когда функции $f(x)$, $g(x)$ не определены в точке x_0, но $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$ и $\lim\limits_{x\to 0} g(x) = 0$.

В самом деле, если доопределить $f(x)$, $g(x)$, положив $f(x_0) = g(x_0) = 0$, тогда $f(x)$, $g(x)$ будут непрерывны в точке x_0, а потому теорема Лопиталя будет применима к ним.

Замечание 2. Правило Лопиталя применимо и в том случае, когда $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 0$, $\lim\limits_{x\to\infty} g(x) = 0$.

Действительно, введя новую переменную $y = 1/x$, видим, что $y \to 0$ при $x \to \infty$. Тогда $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(1/y)}{g(1/y)} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{f'(1/y)}{g'(1/y)} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$.

Теорема Лопиталя (раскрытие неопределенностей типа $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$).

Пусть функции $f(x)$, $g(x)$ дифференцируемы в окрестности точке x_0, за исключением самой точки x_0, причем $g'(x) \neq 0$, и пусть $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \infty$, $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = \infty$. Если существует $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ то существует и $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$, причем

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Замечание 3. Предел отношения двух функций может существовать, в то время как предел отношения их производных не существует.

Например, $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x+\sin x}{x}=1$, а $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(x+\sin x)'}{(x)'}=\lim\limits_{x\to\infty}(1+\cos x)$ – не существует, так как $\lim\limits_{x\to\infty}\cos x$ не существует.

Пример 6.3. Найти $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln x}{\operatorname{ctg} x}$.

Решение.

При $x \to 0$ и $x > 0$ $\lim\limits_{x\to 0}\ln x=\infty$, $\lim\limits_{x\to 0} ctgx=\infty$, следовательно, имеем отношение двух бесконечно больших при $x\to 0$ и неопределенность типа $\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)$. Вычислим:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln x}{\operatorname{ctg} x}=\lim_{x\to 0}\frac{1/x}{-1/\sin^2 x}=-\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{x}=-\lim_{x\to 0}\frac{2\sin x\cos x}{1}=0.$$

Пример 6.4. Найти $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln x}{1+2\cdot\ln(\sin x)}$.

Решение.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln x}{1+2\ln(\sin x)}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{(\ln x)'}{(1+2\ln(\sin x))'}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1/x}{2\cdot(1/\sin x)\cdot\cos x}=\frac{1}{2}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x\cdot\cos x}=\frac{1}{2}$$

Замечание 4. Если $\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ при $x\to x_0$ $(x\to\infty)$ является неопределенностью типа $\left(\dfrac{0}{0}\right)$ или $\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)$, и $f'(x)$, $g'(x)$ удовлетворяют условиям теоремы Лопиталя, то

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{f''(x)}{g''(x)}.$$

Таким образом, для раскрытия неопределенностей типа $\left(\dfrac{0}{0}\right)$ или $\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)$ иногда приходится применять правило Лопиталя несколько раз.

Замечание 5. Теорема Лопиталя остается верной и тогда, когда $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}=\infty$.

Пример 6.5. Найти $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{e^x}{x^2}$.

Решение.

Имеем неопределенность типа $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$. Применяя теорему Лопиталя два раза, получим: $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{e^x}{x^2}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{e^x}{2x}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{e^x}{2}=\infty$.

Пример 6.6. Найти $\lim\limits_{x\to 0}x^2\ln x$.

Решение.

Так как $\lim\limits_{x\to 0}\ln x=\infty$, то имеем неопределенность типа (0·∞). Преобразуем ее к виду $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$:

$\lim\limits_{x\to 0}x^2\ln x=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln x}{1/x^2}$, затем применим правило Лопиталя:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln x}{1/x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{(\ln x)'}{\left(1/x^2\right)'}=\lim_{x\to 0}\frac{1/x}{-2/x^3}=\lim_{x\to 0}\left(-\frac{x^2}{2}\right)=0.$$

Итак, $\lim\limits_{x\to 0}x^2\ln x=0$.

Пример 6.7. Найти $\lim\limits_{x\to+\infty}x^2e^{-x}$.

Решение.

$$\lim_{x\to+\infty}x^2e^{-x}=(0\cdot\infty)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{e^x}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(x^2\right)'}{\left(e^x\right)'}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x}{e^x}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{(2x)'}{\left(e^x\right)'}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2}{e^x}=0.$$

Пример 6.8. Найти $\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{x}{x-1}-\frac{1}{\ln x}\right)$.

Решение.

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{x}{x-1}-\frac{1}{\ln x}\right)=(\infty-\infty)=\lim_{x\to 1}\left(\frac{x\ln x-x+1}{\ln x\cdot(x-1)}\right)=$$

$$=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 1}\frac{(x\ln x-x+1)'}{(\ln x\cdot(x-1))'}=\lim_{x\to 1}\frac{\ln x+x\cdot\frac{1}{x}-1}{\frac{1}{x}\cdot(x-1)+\ln x}=$$

$$= \lim_{x\to 1}\frac{\ln x}{\ln(x-1/x+1)} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x\to 1}\frac{(\ln x)'}{\ln(x-1/x+1)'} = \lim_{x\to 1}\frac{1/x}{1/x+1/x^2} = \frac{1}{2}.$$

Пример 6.9. Найти $\lim\limits_{x\to+\infty}(\frac{2}{x}+1)^x$.

Решение.

В данном случае имеем неопределенность типа $\left(1^{\infty}\right)$, поэтому для раскрытия этой неопределенности применим метод логарифмирования.

Пусть $A = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{2}{x}+1\right)^x$. Тогда с учетом того, что логарифмическая функция не-

$$\ln A = \ln \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2}{x}+1\right)^x = \lim_{x\to+\infty}\ln\left(\frac{2}{x}+1\right)^x = \lim_{x\to+\infty} x\cdot(\frac{2}{x}+1) = (0\cdot\infty) =$$

прерывна, имеем $= \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(\frac{2}{x}+1)}{\frac{1}{x}} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\left(\ln(\frac{2}{x}+1)\right)'}{\left(\frac{1}{x}\right)'} = \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\frac{1}{2/x+1}\cdot(-2/x^2)}{-\frac{1}{x^2}} =$

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{2}{2/x+1} = 2$$

Так как $\ln A = 2$, то $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(2/x+1\right)^x = e^2$.

7. ПРИМЕНЕНИЕ ПРОИЗВОДНОЙ ДЛЯ ИССЛЕДОВАНИЯ СВОЙСТВ ФУНКЦИЙ.

7.1. Возрастание и убывание функций

Функция $y = f(x)$ называется ***возрастающей*** (***убывающей***) на некотором интервале (a,b), если большему значению аргумента из этого интервала соответствует ***большее*** (***меньшее***) значение функции, т. е. при $x_2 > x_1$ выполняется неравенство $f(x_2) > f(x_1)$ $\left(f(x_2) < f(x_1)\right)$.

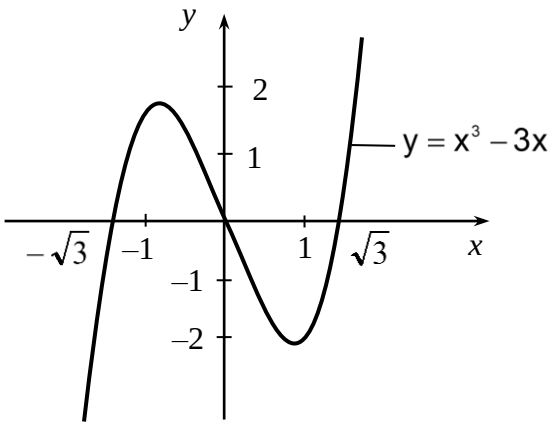

Рис. 2.

Интервалы, в которых функция возрастает или убывает, называются интервалами монотонности функции.

Рассмотрим применение производной для нахождения интервалов монотонности функций.

Теорема 1 (*достаточное условие возрастания функции*). Если функция $y = f(x)$ непрерывна на отрезке $[a;b]$ и дифференцируема на интервале (a,b), причем $f'(x) > 0$ $(f'(x) < 0)$ для любого $x \in (a,b)$, то эта функция возрастает (убывает) на отрезке $[a;b]$.

Пример 7.1. Исследовать на монотонность (т. е. возрастание и убывание) функцию: $f(x) = x^3 - 3x$

Решение.

$f'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x^2 - 1)$.

Неравенство $f'(x) > 0$, т. е. $3(x^2 - 1) > 0$, справедливо для $x<-1$ и для $x>1$. Следовательно, функция $f(x)$ возрастает на интервалах $(-\infty, -1)$ и $(1, +\infty)$.

Поскольку неравенство $f'(x) < 0$, т. е. $3(x^2 - 1) < 0$ справедливо для $x \in (-1, 1)$, то на интервале $(-1, 1)$ функция $f(x)$ убывает.

7.2. Экстремумы функции

Дадим точные определения точкам максимума и минимума функции. Пусть функция $f(x)$ определена на промежутке X и $x_0 \in X$. Говорят, что в точке x_0 функция $f(x)$ имеет ***максимум (минимум)***, если существует такая окрестность точки x_0, что для любого x из этой окрестности $f(x) < f(x_0)$ $(f(x) > f(x_0))$.

Точки максимума и минимума называются точками ***экстремума***.

Замечание 1. Точки экстремума всегда являются внутренними точками промежутка, т. е. не могут быть его концом.

Теорема 2 (*необходимое условие экстремума*). Если функция $f(x)$ дифференцируема в точке x_0 и некоторой ее окрестности и x_0 – точка экстремума, то $f'(x_0) = 0$.

Следствие. Если x_0 – точка экстремума, то $f'(x_0) = 0$ или $f'(x_0)$ не существует.

В качестве примера приведем функцию $f(x) = |x|$ (рис. 3).

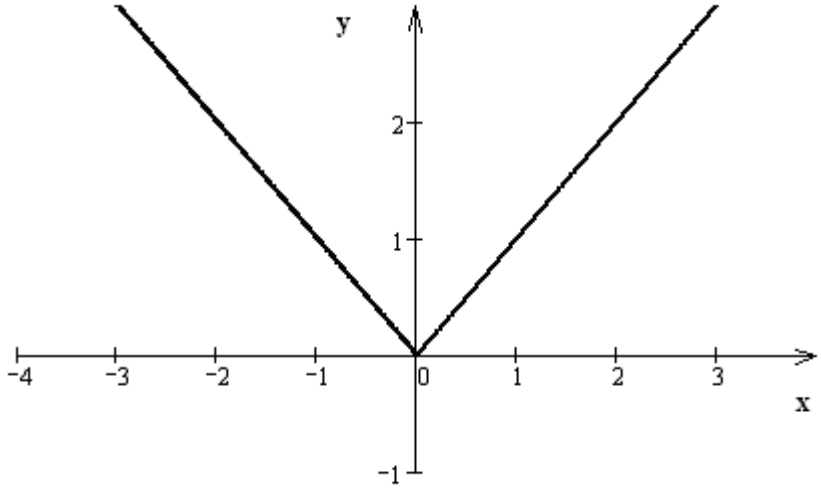

Рис. 3

Очевидно, что $x_0 = 0$ является точкой минимума, так как |0| < |x| для любого $x \neq 0$. А в точке $x_0 = 0$ производной $f'(0)$ не существует.

Если $f'(x_0) = 0$ или $f'(x_0)$ не существует, то точку x_0 будем называть ***критической*** (или подозрительной на экстремум). Критическая точка может и не быть точкой экстремума.

Теорема 3 (*первое достаточное условие экстремума*). Пусть функция $f(x)$ определена и непрерывна в точке x_0 и некоторой ее окрестности, дифференцируема в этой окрестности, за исключением, быть может самой точки x_0, и точка x_0 – критическая точка для функции $f(x)$ (т. е. $f'(x_0) = 0$ или $f'(x_0)$ не существует). Тогда:

1) если при $x < x_0$ производная $f'(x) > 0$, а для $x > x_0$: $f'(x) < 0$, то x_0 – точка максимума;

2) если при $x < x_0$: $f'(x) < 0$, а при $x > x_0$: $f'(x) > 0$, то x_0 – точка минимума.

Пример 7.2. Исследовать на монотонность и экстремумы функцию $f(x) = x^2 e^{-x}$. Построить её график.

Решение.

Заданная функция определена и непрерывна на всей числовой оси $(-\infty; +\infty)$. Найдем производную: $f'(x) = 2xe^{-x} - x^2 e^{-x} = xe^{-x}(2 - x)$.

Тогда $f'(x) = 0$ при x_1=0 и x_2 =2. Точки x_1, x_2 – критические точки. Эти точки разбивают всю числовую ось на три интервала: (–∞; 0), (0; 2), (2; +∞). Составим таблицу, в первой строке которой поместим указанные точки и интервалы, во второй строчке – сведения о производной $f'(x)$ в точках и на интервалах, а в третьей – поведение данной функции $f(x)$ (табл. 2).

Таблица 2

x	$(-\infty, 0)$	0	$(0, 2)$	0	$(2, +\infty)$

$f'(x)$	$f'(x)<0$	0	$f'(x)>0$	0	$f'(x)<0$
$f(x)$	убывает	$y_{min}(0)=0$	возрастает	$y_{\max}(2)=4/e^2$	убывает

Определим знак $f'(x)$ на каждом из интервалов: если $x\in(-\infty, 0)$, то $f'(x)<0$; если $x\in(0, 2)$, то $f'(x)>0$; если $x\in(2, +\infty\ \infty)$, то $f'(x)<0$. Отсюда определяется поведение функции $f(x)$: на первом и последнем интервалах функция $f(x)$ убывает, а на втором – возрастает (рис.4).

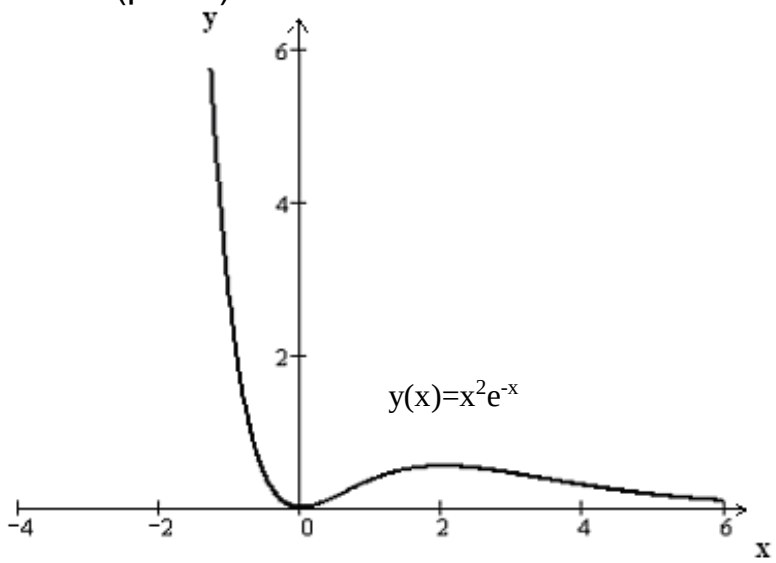

Рис. 4

Отсюда следует, что $x_1 = 0$ является точкой минимума, $y_{\min}(0)=0$, а $x_2=2$ – точка максимума, $y_{\max}(2)=\dfrac{4}{e^2}\approx 0{,}54$.

7.3. Наибольшее и наименьшее значения функции на отрезке

Известно, что если функция непрерывна на отрезке, то она достигает на этом отрезке своего наименьшего и наибольшего значения. Иногда требуется найти наименьшее или наибольшее значение такой функции.

Если на отрезке $[a;b]$ есть точки минимума и максимума функции $f(x)$, то наименьшее значение функция будет принимать либо в одной из точек минимума, либо на конце отрезка $[a;b]$. Аналогично для наибольшего значения.

Сформулируем алгоритм нахождения наибольшего и наименьшего значения функции $f(x)$, непрерывной на отрезке:

1. Найти критические точки $x_1, x_2, ..., x_n$ функции $f(x)$. Для этого необходимо решить уравнение $f'(x)=0$.
2. Отобрать все критические точки, принадлежащие отрезку $[a;b]$.

3. Вычислить значения функции $f(x)$ в этих критических точках и на концах отрезка.

4. Из этих значений выбрать самое большое и самое малое. Эти числа и будут наибольшим и наименьшим значениями $f(x)$ на отрезке $[a;b]$.

Пример 7.3. Найти наименьшее и наибольшее значения функции $f(x) = x^4 - 2x^2 + 5$ *на отрезке* $[-2;2]$

Решение.

1. Найдем критические точки для данной функции:

$f'(x) = 4x^3 - 4x = 4x(x^2 - 1)$;

$f'(x) = 0$ при $x_1=0$, $x_2=-1$, $x_3=+1$.

2. Все три критические точки принадлежат данному отрезку.

3. Вычислим значения функции в точках: -2; -1; 0; 1; 2:

$f(-2) = (-2)^4 - 2(-2)^2 + 5 = 16 - 8 + 5 = 13$;

$f(-1) = (-1)^4 - 2(-1)^2 + 5 = 1 - 2 + 5 = 4$;

$f(0) = (0)^4 - 2(0)^2 + 5 = 5$;

$f(1) = 4$;

$f(2) = 13$.

4. Из найденных значений самое малое число 4, а самое большое число 13.

Таким образом, наименьшее значение функции равно 4, в точке $x = 1$, наибольшее значение равно 13, в точке $x = 2$ и в точке $x = -2$.

Пример 7.4. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $y = x - 2\sin x$ на отрезке $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

Решение.

1. $y' = 1 - 2\cos x$, y' определена во всех точках; $y' = 0$ при $\cos x = \frac{1}{2}$.

2. На отрезке $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, $\cos x = \frac{1}{2}$ при $x = \frac{\pi}{3}$.

3. Имеем три точки: $x = 0$, $x = \frac{\pi}{3}$, $x = \frac{\pi}{2}$, в которых может достигаться наибольшее и наименьшее значения.

$f(0) = 0 - 2\sin 0 = 0$;

$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2} - 2\sin\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2} - 2 = \frac{\pi - 4}{2}$;

$f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\pi}{3} - 2\sin\frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{3} - 2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Итак, $f_{наиб} = f(0) = 0$, $f_{наим} = f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\pi}{3} - 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \approx \frac{3{,}14}{3} - \sqrt{3} \approx -0{,}58$.

Пример 7.5. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $y = 3x^4 - 4x^3 - 24x^2 + 48x + 12$ на отрезке $[-1;\ 4]$.

Решение.

1. Найдем критические точки функции из условия, что $y'(x) = 0$ или такие, при которых $y'(x)$ не существует:

$$y'(x) = \left(3x^4 - 4x^3 - 24x^2 + 48x + 12\right)' = 12x^3 - 12x^2 - 48x + 48.$$

Производная $y'(x)$ во всех точках существует, $y'(x) = 0$, когда $x^3 - x^2 - 4x + 4 = 0$.

Раскладывая левую часть на множители, получаем:

$$x^3 - x^2 - 4x + 4 = x^2(x-1) - 4(x-1) = (x-1)(x^2 - 4).$$

Отсюда находим критические точки: $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = -2$.

2. Из этих точек отрезку $[-1,\ 4]$ принадлежат только две: $x_1 = 1$ и $x_2 = 2$.

3. Найдем значения функции в этих точках и на концах отрезка, т. е. при $x = -1$, $x = 4$, $x = 1$, $x = 2$:

$$f(-1) = 3(-1)^4 - 4(-1)^3 - 24(-1)^2 + 48(-1) + 12 =$$
$$= 3 + 4 - 24 - 48 + 12 = 19 - 72 = -53;$$
$$f(1) = 3 \cdot 1^4 - 4 \cdot 1^3 - 24 \cdot 1^2 + 48 \cdot 1 + 12 = 63 - 28 = 35;$$
$$f(2) = 3 \cdot 2^4 - 4 \cdot 2^3 - 24 \cdot 2^2 + 48 \cdot 2 + 12 =$$
$$= 48 - 32 - 96 + 96 + 12 = 60 - 32 = 28;$$
$$f(4) = 3 \cdot 4^4 - 4 \cdot 4^3 - 24 \cdot 4^2 + 48 \cdot 4 + 12 =$$
$$= 2 \cdot 4^4 - 6 \cdot 4^3 + 3 \cdot 4^3 + 3 \cdot 4 = 4 \cdot 83 = 252.$$

Итак, получили $f_{наиб} = f(4) = 252$, $f_{наим} = f(-1) = -53$.

Среди многих применений производной функции одной переменной важное значение имеет решение так называемых задач на максимум (минимум).

Пример 7.6. Найти прямоугольный треугольник наибольшей площади, у которого сумма катета и гипотенузы равна k.

Решение.

Обозначим один из катетов треугольника через x, тогда гипотенуза будет равна $k - x$, а другой катет, по теореме Пифагора будет равен:

$$\sqrt{(k-x)^2 - x^2} = \sqrt{k^2 - 2kx}.$$

Площадь треугольника $S(x)=\frac{1}{2}x\sqrt{k^2-2kx}$, так как $S(x_0)$ должна быть максимальной, то $S'(x_0)=0$ или $S'(x)$ не существует. Находим производную:

$$S'(x)=\frac{1}{2}\left(\sqrt{k^2-2kx}+\frac{x(-2k)}{2\sqrt{k^2-2kx}}\right)=\frac{k^2-2kx-kx}{2\sqrt{k^2-2kx}}=\frac{k^2-3kx}{2\sqrt{k^2-2kx}}.$$

$S'(x)$ не существует, если $x=k/2$, но тогда катет окажется равным гипотенузе, что невозможно. $S'(x)=0$, если $k(k-3x)=0$. Тогда $x=\frac{k}{3}$.

Проверяем является ли эта точка точкой максимума. При $x\in\left(0;\frac{k}{3}\right)$ $S'(x)>0$, а при $x\in\left(\frac{k}{3};\frac{k}{2}\right)$ $S'(x)<0$. Таким образом при $x=\frac{k}{3}$ площадь треугольника будет наибольшей.

Гипотенуза будет равна $k-\frac{k}{3}=\frac{2k}{3}$, т. е. $\cos\alpha=\frac{k/3}{2k/3}=\frac{1}{2}$, где α – угол, прилежащий к катету x. Значит, $\alpha=\frac{\pi}{3}$; другой угол будет $\frac{\pi}{6}$.

Следовательно, искомый треугольник – это прямоугольный треугольник с углами $\frac{\pi}{3}$, $\frac{\pi}{6}$ и сторонами $\frac{1}{3}k$, $\frac{2}{3}k$ и $\frac{\sqrt{3}k}{3}$.

Пример 7.7. Из трех одинаковых досок изготовить симметричный желоб с наибольшей площадью поперечного сечения.

Решение.

Ширину данных досок обозначим через a. Поперечное сечение желоба изображено на рис. 5,.

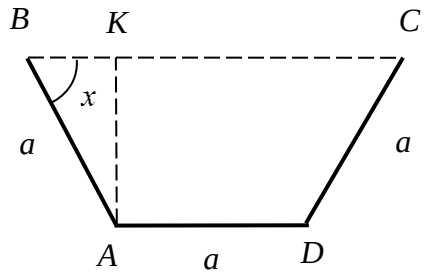

Рис. 5.

Обозначим через x угол ABK $(0<x<\pi)$, тогда $AK=a\sin x$, $BK=a\cos x$.

Площадь поперечного сечения (площадь трапеции) будет:

$$S_{mp}=\frac{BC+AD}{2}AK=\frac{2a+2a\cos x}{2}a\sin x=$$

$$= a^2(1+\cos x)\sin x = a^2\left(\sin x + \frac{1}{2}\sin(2x)\right).$$

Наибольшее значение эта функция принимает в точке максимума, а необходимым условием того, что точка x является точкой максимума функции $S(x)$, является то, что $S'(x)=0$ или $S'(x)$ не существует. Найдем $S'(x)$:

$$S'(x) = a^2\left[\cos x + \frac{1}{2}2\cos(2x)\right] = a^2\left(\cos x + 2\cos^2 x - 1\right).$$

Но $\cos x + 2\cos^2 x - 1$ всегда существует. Точки, в которых $S'(x)=0$, находятся из уравнения: $\cos x + 2\cos^2 x - 1 = 0$. Тогда $\cos x = -1$ или $\cos x = \frac{1}{2}$. Если $\cos x = -1$, то $x = (2k+1)\pi,\ k \in Z$.

Но в этом случае никакого желоба не получится, так как $0 < x < \pi$. Остается случай, когда, $\cos x = \frac{1}{2}$, тогда $x = \frac{\pi}{3}$, так как $0 < x < \pi$.

Проверим, является ли эта точка $x = \frac{\pi}{3}$ точкой максимума функции $S(x)$. При $x \in \left(0; \frac{\pi}{3}\right)$, производная функции принимает положительные значения, а при $x \in \left(\frac{\pi}{3}; \pi\right)$ - отрицательные. То есть при $x = \frac{\pi}{3}$ площадь поперечного сечения желоба будет наибольшей.

Таким образом, $x = \frac{\pi}{3}$ действительно точка максимума. А площадь поперечного сечения составит

$$S\left(\frac{\pi}{3}\right) = a^2\left(\sin\frac{\pi}{3} + \frac{2}{2}\sin\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{3}\right) = a^2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2\cdot 2}\right) = \frac{a^2 3\sqrt{3}}{2}.$$

7.4. Выпуклость, вогнутость графика функции, точки перегиба

Пусть $f(x)$– функция, дифференцируемая на интервале $(a;b)$. Рассмотрим кривую, являющуюся графиком функции $y = f(x)$.

Кривая, заданная функцией $y = f(x)$, называется ***выпуклой*** на интервале $(a;b)$, если все точки кривой лежат ниже любой ее касательной на этом интервале.

Кривая называется ***вогнутой*** на интервале $(a;b)$, если все точки кривой лежат выше любой ее касательной на этом интервале.

Точка кривой $M_0(x_0, f(x_0))$, отделяющая выпуклую ее часть от вогнутой, называется ***точкой перегиба***.

Теорема 4 (*достаточные условия выпуклости и вогнутости графика функции*). Если во всех точках интервала $(a;b)$ вторая производная функции $f(x)$ отрицательна, т. е. $f''(x)<0$, то кривая $y=f(x)$ на этом интервале выпукла; если во всех точках интервала $(a;b)$ – $f''(x)>0$, то кривая $y=f(x)$ на этом интервале вогнута.

Пример 7.8. Определить направление выпуклости и точки перегиба кривой $y=3x^5-5x^4+4$

Решение.

Ищем точки x из области определения функции, в которых $y''=0$ или не существует.

$$y'=15x^4-20x^3$$

$$y''=60x^3-60x^2=60x^2(x-1)$$

Вторая производная равна нулю $y''=0$ в точках $x=0$ и $x=1$. Эти точки являются искомыми, так как область определения и область непрерывности данной кривой есть вся ось абсцисс. Других точек x, которые могли бы быть абсциссами точек перегиба, нет, так как y'' существует всюду.

Исследуем найденные точки, определяя знак y'' слева и справа от каждой из них. Результаты исследования запишем в таблицу, подобную той, которая составляется при отыскании точек экстремума (табл. 3).

Таблица 3

x	$(-\infty;\ 0)$	0	(0, 1)	1	$(1,\ +\infty)$
$f''(x)$	$f''(x)<0$	0	$f''(x)<0$	0	$f''(x)>0$
$f(x)$	выпукла	нет перегиба	выпукла	точка перегиба	вогнута

Выполним построение (рис. 6).

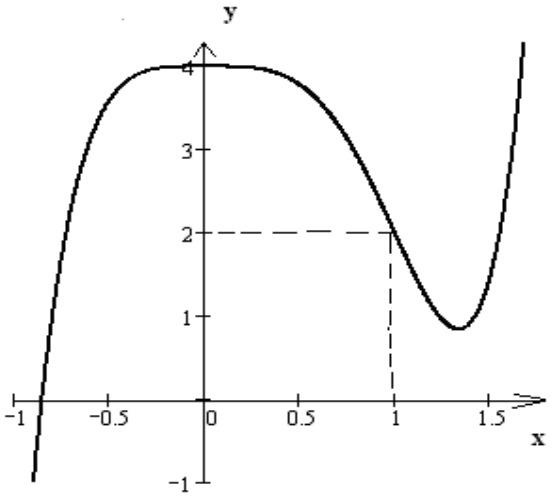

Рис. 6

7.5. Асимптоты

При исследовании функции часто приходится устанавливать вид ее графика (а значит, и характер функции) при неограниченном удалении точки графика от начала координат (при стремлении переменной точки в бесконечность). При этом важным случаем является тот, когда график функции при удалении его переменной точки в бесконечность неограниченно приближается к некоторой прямой.

Если $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = b$, то прямая $y = b$ является асимптотой графика $y = f(x)$ (при $x \to +\infty$). Эта асимптота параллельна оси *Ox* и называется ***горизонтальной асимптотой*** (рис. 7). Аналогично, прямая $y = f(x)$ является асимптотой графика $y = f(x)$ (при $x \to -\infty$), если $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = b$.

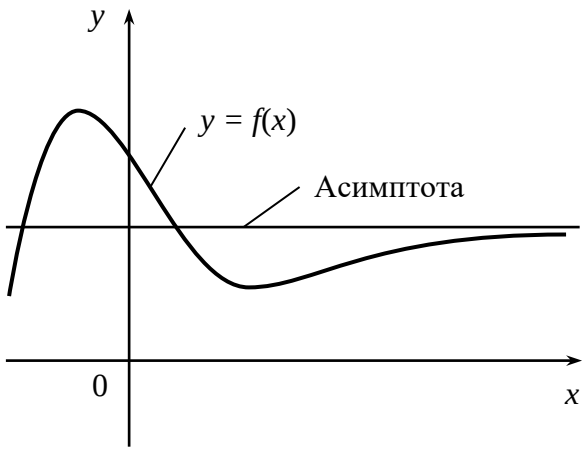

Рис. 7.

Рассмотрим асимптоты, параллельные оси *Oy*.

Прямая $x=x_0$ называется ***вертикальной асимптотой,*** если хотя бы один из пределов $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)$, $\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)$, является бесконечным (рис. 8).

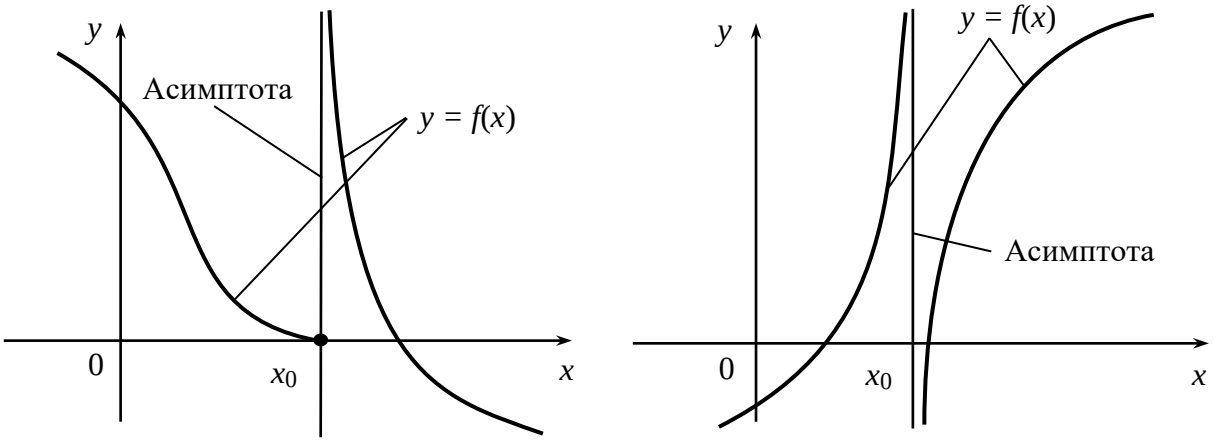

Рис. 8

Следовательно, для отыскания вертикальных асимптот нужно найти точки разрыва функции второго рода.

Пример 7.9. Найти вертикальные асимптоты для функции $y = \frac{1}{x-2}$.

Решение.

Функция $f(x) = \frac{1}{x-2}$ определена и непрерывна во всех точках числовой оси, за исключением точки $x_0 = 2$, в которой функция терпит разрыв,

$\lim\limits_{x \to 2-0} \frac{1}{x-2} = -\infty$, $\lim\limits_{x \to 2+0} \frac{1}{x-2} = +\infty$. Следовательно, прямая $x=2$ является вертикальной асимптотой для графика $y = \frac{1}{x-2}$. Кроме того, $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{x-2} = 0$ и $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{1}{x-2} = 0$, следовательно, прямая $y = 0$ является горизонтальной асимптотой при $x \to +\infty$ и при $x \to -\infty$.

Рассмотрим асимптоты, которые не параллельны координатным осям (рис. 9). Будем называть их наклонными асимптотами.

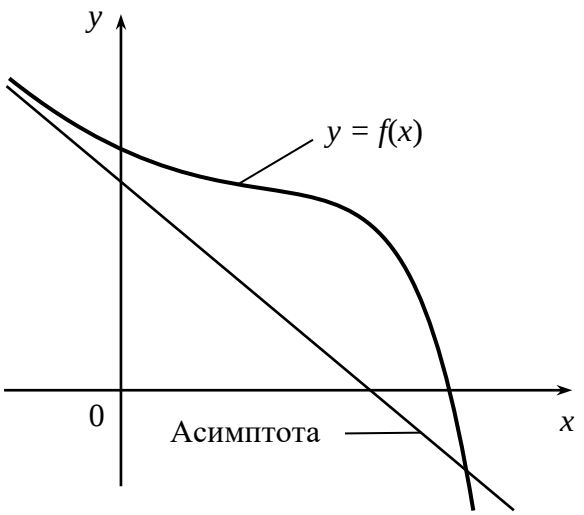

Рис. 9.

Прямая $y = kx + b$ называется ***наклонной асимптотой*** функции $y = f(x)$, если функцию можно представить в виде

$$f(x) = kx + b + \alpha(x), \qquad (7.1)$$

где $\alpha(x) \to 0$, при $x \to +\infty$.

Определим числа k и b.

Поделим обе части равенства (7.1) на x и перейдем к пределу при $x \to +\infty$:

$\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} (k + \frac{b}{x} + \frac{\alpha(x)}{x})$

Откуда:

$$k = \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} \qquad (7.2)$$

Определим коэффициент b.

Равенство (7.1) перепишем в виде:

$f(x) - kx = b + \alpha(x)$

Перейдем к пределу $x \to +\infty$, получим.

$\lim\limits_{x \to +\infty} (f(x) - kx) = \lim\limits_{x \to +\infty} (b + \alpha(x))$.

$$b = \lim_{x \to +\infty} (f(x) - kx) \qquad (7.3)$$

Если хотя бы один из пределов (7.2), (7.3) не существует, то при $x \to +\infty$ кривая не имеет наклонной асимптоты.

Аналогично решается вопрос об асимптотах при $x \to -\infty$.

Замечание. Отдельно находить горизонтальные асимптоты нет необходимости: они будут найдены при нахождении наклонных асимптот (при k=0).

Пример 7.10. Найти асимптоты линии $y = e^x - x$.

Решение.

Функция $f(x) = e^x - x$ определена, непрерывна на бесконечном интервале $(-\infty; +\infty)$ поэтому вертикальных асимптот нет.

Найдем наклонные асимптоты. Для этого вычислим пределы (7.1), (7.3) при $x \to +\infty$ и при $x \to -\infty$:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{e^x}{x} - 1\right) = +\infty,$$

так как $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$ (проверьте это по правилу Лопиталя). Отсюда следует, что при $x \to +\infty$ наклонных асимптот нет.

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to -\infty} \left(\frac{e^x}{x} - 1\right) = -1, \text{ так как } \lim_{x \to -\infty} \frac{e^x}{x} = 0,$$

отсюда $k = -1$. Далее, $\lim\limits_{x \to -\infty} (f(x) - kx) = \lim\limits_{x \to -\infty} (e^x - x + x) = \lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$ значит, b = 0.

Итак, прямая y=-x есть наклонная асимптота при $x \to -\infty$ для графика функции $y = e^x - x$ (рис. 10).

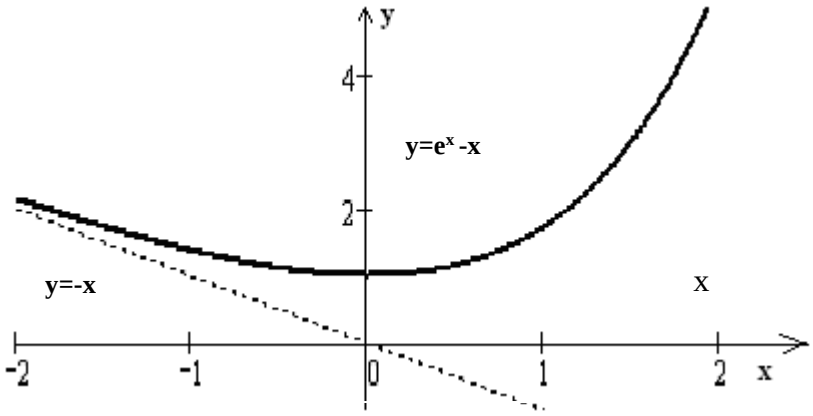

Рис. 10

8. ПОСТРОЕНИЕ ГРАФИКОВ ФУНКЦИЙ С ПОМОЩЬЮ ЭЛЕМЕНТОВ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ИСЧИСЛЕНИЯ

При полном исследовании функции $y = f(x)$ и построении ее графика можно придерживаться следующей схемы:

1) указать ***область определения*** функции;
2) исследовать функцию на ***четность***;
3) найти ***точки пересечения*** графика функции с осями координат;
4) определить ***уравнения асимптот*** графика функции: вертикальные и наклонные;
5) исследовать функцию на ***монотонность*** и ***экстремумы***;
6) определить ***интервалы выпуклости*** и ***вогнутости***, точки перегиба;
7) произвести необходимые ***дополнительные*** исследования;
8) ***построить график*** функции.

Дадим пояснения к каждому пункту приведенной схемы.

1) Если каждому элементу $x \in D$ по определенному правилу f поставлен в соответствие единственный элемент y, то говорят, что задана ***функция*** $y = f(x)$, где x называется независимой переменной или аргументом.

Множество D называется ***областью определения функции***. Поэтому, чтобы найти D, нужно определить множество точек x действительной оси, для которых выражение f имеет смысл и определяет действительные значения переменной y.

2) Если для любого x из симметричной области определения D выполняется равенство $f(-x) = f(x)$, то функция является четной, если же выполняется равенство $f(-x) = -f(x)$, то функция является нечетной. В том случае, когда $f(-x) \neq f(x)$ и $f(-x) \neq -f(x)$ – функция не является ни четной, ни нечетной.

График четной функции симметричен относительно оси Oy, а график нечетной – относительно начала координат. Таким образом, график четной функции достаточно построить лишь для $x \geq 0$, а потом, используя симметрию, достроить его на оставшейся части области определения.

3) Точки пересечения графика функции $y = f(x)$ с осью Ox определяются из условия $y = 0$, т. е. $f(x) = 0$. Точка пересечения с осью Oy определяется из условия $x = 0$, значит, $y = f(0)$.

4) Прямая $x = a$ является вертикальной асимптотой графика функции $y = f(x)$, если

$\lim\limits_{x \to a-0} f(x) = \pm\infty$, или $\lim\limits_{x \to a+0} f(x) = \pm\infty$.

Прямая $y = kx + b$ является наклонной асимптотой графика функции $y = f(x)$, если существуют конечные пределы

$$k = \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x},\ b = \lim_{x \to +\infty} \left[f(x) - kx \right]$$

или

$$k = \lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x},\ b = \lim_{x \to -\infty} \left[f(x) - kx \right].$$

В частности, при $k = 0$ получаем $b = \lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ или $b = \lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$.

Полученная прямая $y = b$ является горизонтальной асимптотой графика функции $y = f(x)$.

5) Найти производную y' и критические точки, в которых $y' = 0$ или не существует, и которые лежат внутри области определения функции. Изобразить критические точки на числовой оси и определить знак производной на каждом интервале, слева и справа от каждой критической точки.

Если при переходе аргумента x через критическую точку x_0:

а) y' меняет знак с “+” на “-”, то x_0 есть точка максимума;

б) y' меняет знак с “-” на “+”, то x_0 есть точка минимума;

в) y' не меняет знака, то в точке x_0 нет экстремума.

В промежутках где $y' > 0$ функция возрастает, где $y' < 0$ функция убывает.

Полученные результаты для наглядности можно оформить в виде таблицы. Эта таблица заполняется следующим образом:

1. В первой строке указываются интервалы, на которые все критические точки разбивают числовую ось и сами точки;

2. Во второй строке указываются знаки первой производной на этих интервалах;

3. В третьей строке описывается поведение функции на каждом интервале (↑ – функция возрастает, ↓– функция убывает).

6) Найти производную y'' и критические точки, в которых $y''=0$ или не существует, а сама функция непрерывна. Изобразить критические точки на числовой оси и определить знак производной на каждом интервале, слева и справа от каждой критической точки. Исследуемая точка x будет абсциссой точки перегиба, если по разные стороны от неё y'' имеет разные знаки.

Если на некотором интервале $y''>0$, то функция вогнута ($\cup$); если на некотором интервале $y''<0$, то функция выпукла ($\cap$).

Результаты, так же как и в п. 5 данного алгоритма для наглядности можно оформить в виде таблицы. Эта таблица заполняется следующим образом:

1. В первой строке указываются интервалы, на которые все критические точки второго рода разбивают числовую ось и сами точки.

2. Во второй строке указываются знаки второй производной на этих интервалах.

3. В третьей строке описать поведение функции на каждом интервале (выпукла или вогнута).

7) Необходимо вычислить значения функции в точках экстремума и в точках перегиба графика функции. Если информации для построения графика недостаточно, найти значения функции в произвольно выбранных вспомогательных точках.

По составленным таблицам нетрудно построить график функции. Для этого нужно данные таблиц перенести в декартову систему координат в подходяще выбранном масштабе.

Пример 8.1. Исследовать методами дифференциального исчисления функцию $y=\dfrac{x^3}{x^2-1}$ и построить ее график.

Решение.

1) Областью определения функции является вся числовая ось, за исключением точек, в которых знаменатель дроби обращается в нуль, то есть $x^2-1=0$. Отсюда $(x-1)(x+1)=0$, $x_1=1$, $x_2=-1$. Итак, область определения: $D=(-\infty,-1)\cup(-1,1)\cup(1,\infty)$.

2) Найдем $f(-x)$:

$$\mathrm{f}(-\mathrm{x})=\frac{(-\mathrm{x})^3}{(-\mathrm{x})^2-1}=-\frac{\mathrm{x}^3}{\mathrm{x}^2-1}=-\mathrm{f}(\mathrm{x}).$$

Так как $f(-x)=-f(x)$, то функция $y=\dfrac{x^3}{x^2-1}$ является нечетной, и её график симметричен относительно начала координат.

3) Точка пересечения с осью Ox определяется равенством $y=0$, т. е.

$$\frac{x^3}{x^2-1}=0,\ x=0.$$

Точка пересечения с осью Oy определяется равенством $x = 0$:

$$f(0) = \frac{0^3}{0^2 - 1} = 0,$$

т. е. $y = 0$. Итак, график функции имеет единственную точку пересечения с осями координат – начало координат $O(0,\ 0)$.

4) Так как при $x_1 = 1$ и $x_2 = -1$ не выполняется условие непрерывности функции в точке, то эти точки являются точками разрыва функции $y = \frac{x^3}{x^2 - 1}$. Причем эти точки являются точками разрыва второго рода, так как

$$\lim_{x \to 1-0} \frac{x^3}{x^2 - 1} = -\infty,\ \lim_{x \to 1+0} \frac{x^3}{x^2 - 1} = +\infty$$

и $\lim_{x \to -1-0} \frac{x^3}{x^2 - 1} = -\infty,\ \lim_{x \to -1+0} \frac{x^3}{x^2 - 1} = +\infty$.

Так как данная функция имеет точки разрыва второго рода (точки бесконечного разрыва функции), то существуют вертикальные асимптоты графика функции и их уравнения: $x = 1$ и $x = -1$.

Найдем уравнения невертикальных асимптот. Для этого вычислим коэффициенты в уравнении прямой $y = kx + b$:

$$k = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{x^3}{x \cdot (x^2 - 1)} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{x^3}{x^3 - x} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{1}{1 - x^{-2}} = 1,$$

$$b = \lim_{x \to \pm\infty} [f(x) - kx] = \lim_{x \to \pm\infty} \left[\frac{x^3}{x^2 - 1} - x \right] = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{x^3}{x^2 - 1} = 0.$$

Следовательно, прямая $y = x$ является наклонной асимптотой при $x \to +\infty$ и $x \to -\infty$.

5) Найдем производную $f'(x)$:

$$f'(x) = \left(\frac{x^3}{x^2 - 1} \right)' = \frac{3x^2 \cdot (x^2 - 1) - x^3 \cdot 2x}{(x^2 - 1)^2} = \frac{x^4 - 3x^2}{(x^2 - 1)^2}.$$

Для того чтобы найти критические точки, решим уравнение: $f'(x) = 0$ и выясним, в каких точках не существует $f'(x)$. Уравнение $\frac{x^4 - 3x^2}{(x^2 - 1)^2} = 0$ равносильно уравнению $x^4 - 3x^2 = 0$ или $x^2 \cdot (x^2 - 3) = 0$. Отсюда находим стационарные точки:

$x_1 = 0$, $x_2 = \sqrt{3}$, $x_3 = -\sqrt{3}$. Производная не существует в том случае, когда знаменатель $\left(x^2 - 1\right)^2 = 0$, т. е. при $x_4 = 1$, $x_5 = -1$. Таким образом, получили пять критических точек: $x_1 = 0$, $x_2 = \sqrt{3}$, $x_3 = -\sqrt{3}$, $x_4 = 1$, $x_5 = -1$.

Для нахождения экстремумов и интервалов монотонности функции на числовой прямой отметим все критические точки и определим знак производной в каждом из получившихся интервалов.

Для этого достаточно взять по одной произвольной точке из каждого интервала и вычислить значения производной (рис. 11).

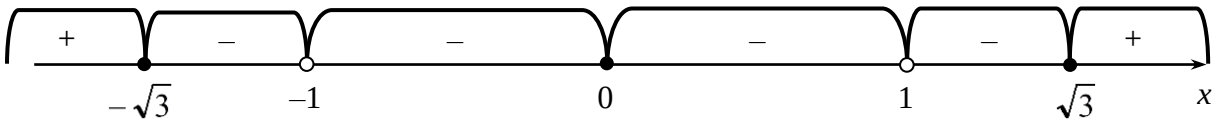

Рис. 11

Например: $f'(-2) = \dfrac{16 - 3 \cdot 4}{3^2} = \dfrac{2}{9} > 0$; $f'\left(-\sqrt{2}\right) = \dfrac{4 - 3 \cdot 2}{1} = -2 < 0$;

$f'\left(-\sqrt{1/2}\right) = \dfrac{1/4 - 3 \cdot (1/2)}{1/4} = -5 < 0$; $f'\left(\sqrt{1/2}\right) = -5 < 0$; $f'\left(\sqrt{2}\right) = -2 < 0$;

$f'(2) = 2/9 < 0$.

Так как при переходе через критические точки $x = \pm\sqrt{3}$ производная меняет знак, то эти точки являются точками экстремума функции. В частности, при $x = \sqrt{3}$ достигается минимум функции, а при $x = -\sqrt{3}$ – максимум. Кроме того, на интервалах $\left(-\infty, -\sqrt{3}\right)$ и $\left(\sqrt{3}, +\infty\right)$ функция возрастает, а на интервалах $\left(-\sqrt{3}, -1\right)$, $(-1, 1)$ и $\left(1, \sqrt{3}\right)$ – убывает.

Полученные данные занесем в таблицу:

Таблица 4

x	$(-\infty;-\sqrt{3})$	$-\sqrt{3}$	$(-\sqrt{3};-1)$	-1	$(-1;0)$	0	$(0;1)$	1	$(1;\sqrt{3})$	$\sqrt{3}$	$(\sqrt{3};+\infty)$
$f'(x)$	+	0	-	∞	-	0	-	∞	-	0	+
$f(x)$	↑	-2,6	↓	∞	↓	0	↓	∞	↓	2,6	↑

6) Найдем $f''(x)$:

$$f''(x) = \left(\frac{x^4 - 3x^2}{\left(x^2 - 1\right)^2}\right)' = \frac{\left(4x^3 - 6x\right)\left(x^2 - 1\right)^2 - \left(x^4 - 3x^2\right)2\left(x^2 - 1\right)2x}{\left(x^2 - 1\right)^4} = \frac{2x^3 + 6x}{\left(x^2 - 1\right)^3}$$

Определим критические точки. Для этого приравняем вторую производную к нулю:

$$\frac{2x^3+6x}{\left(x^2-1\right)^3}=\frac{2x\left(x^2+3\right)}{\left(x^2-1\right)^3}=0.$$

Это уравнение равносильно уравнению $2x\left(x^2+3\right)=0$, откуда $x_1=0$.

Производная второго порядка не существует при $x=\pm 1$. В итоге получили три критические точки: $x_1=0$, $x_2=1$, $x_3=-1$.

На числовой оси отложим все критические точки и определим знаки второй производной аналогично тому, как это сделано в пункте 7 (рис. 12):

$$f''(-2)=\frac{2\cdot(-8)+3\cdot(-2)}{(4-3)^3}=-\frac{22}{27}<0,$$

$$f''(-0{,}5)=\frac{2\cdot(-0{,}125)+3\cdot(-0{,}5)}{(0{,}25-1)^3}\approx 4{,}5>0,$$

$$f''(0{,}5)\approx -4{,}4<0,\ f''(2)=22/27>0.$$

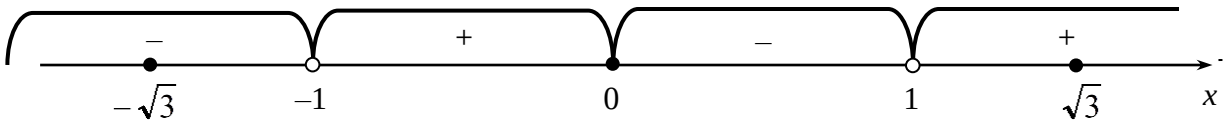

Рис. 12

При переходе через точку $x_1=0$ вторая производная меняет знак, следовательно, x_1 – точка перегиба графика функции. На интервалах $(-\infty,-1)$ и $(0,1)$ график функции является выпуклым, а на интервалах $(-1,\ 0)$ и $(1,\ +\infty)$ – вогнутым. Составим таблицу исследования на выпуклость и вогнутость.

Таблица 5

x	$(-\infty;-1)$	-1	$(-1;0)$	0	$(0;1)$	1	$(1;+\infty)$
$f''(x)$	-	∞	+	0	-	∞	+
$f(x)$	выпуклый	∞	вогнутый	0	выпуклый	∞	вогнутый

8) Вычислим значения функции в точках экстремума и перегиба:

$$f\left(-\sqrt{3}\right)=\frac{3\cdot\sqrt{3}}{3-1}\approx -2{,}6,\ f(0)=0,\ f\left(\sqrt{3}\right)\approx 2{,}6.$$

Для более точного построения графика найдем значения функции в дополнительных точках: $f(0{,}5)=\frac{0{,}125}{0{,}25-1}\approx -0{,}2$, $f(-0{,}5)\approx 0{,}2$.

Теперь построим график функции (рис. 13).

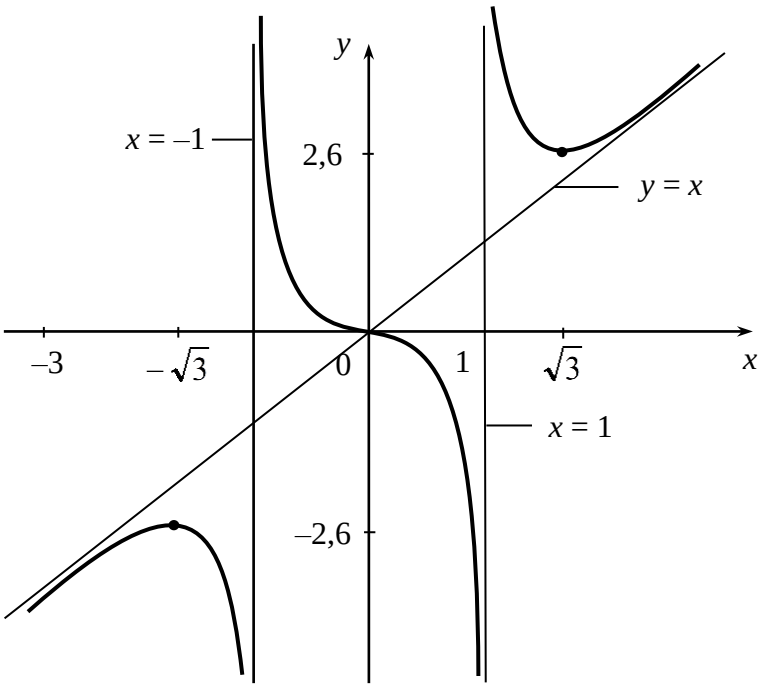

Рис. 13.

Пример 8.2. Исследовать методами дифференциального исчисления функцию $y = \dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}$ и построить ее график.

Решение.

1) Исходя из того, что известны области определения элементарных функций $y = \ln x \ \ (x > 0)$ и $y = \sqrt{x} \ \ (x \geq 0)$, получаем область определения функции: $y = \ln x / \sqrt{x}$: $D = (0, +\infty)$.

2) Так как функция определена только для положительных значений x, то она не является ни четной ни нечетной.

3) Найдем точки пересечения с осью Ox: $y = 0$ или $\ln x / \sqrt{x} = 0$, т. е. $\ln x = 0$, откуда $x = 1$. Точки пересечения с осью Oy не существует, так как x никогда не обращается в нуль. Поэтому график функции пересекается с осями координат в единственной точке – $(1, 0)$.

4) Данная функция непрерывна на всей области определения.

Изучим поведение функции на левом конце области определения, для этого вычислим предел:

$$\lim_{x \to +0} f(x) = \lim_{x \to +0} \frac{\ln x}{\sqrt{x}} = -\infty .$$

Отсюда прямая $x = 0$ (ось Oy) является вертикальной асимптотой к графику функции.

Найдем уравнения невертикальных асимптот. Для этого вычислим (используя правило Лопиталя) следующие пределы:

$$k=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x\sqrt{x}}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{(\ln x)'}{\left(\sqrt{x^3}\right)'}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1/x}{\frac{3}{2}\sqrt{x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2}{3x\sqrt{x}}=0,$$

$$b=\lim_{x\to+\infty}\left[f(x)-kx\right]=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{\sqrt{x}}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{(\ln x)'}{\left(\sqrt{x}\right)'}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{1/x}{1/\left(2\sqrt{x}\right)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2}{\sqrt{x}}=0.$$

Полученная прямая $y=0$ (ось Oy) является горизонтальной асимптотой графика функции

5) Найдем $f'(x)$:

$$f'(x)=\left(\frac{\ln x}{\sqrt{x}}\right)'=\frac{(1/x)\sqrt{x}-\ln x/\left(2\sqrt{x}\right)}{x}=\frac{2-\ln x}{2x\sqrt{x}}=\frac{2-\ln x}{2x^{3/2}}.$$

Производная равна нулю, когда $2-\ln x=0$, то есть при $x=e^2$. Производная существует на всей области определения функции $y=\frac{\ln x}{\sqrt{x}}$. Следовательно, существует только одна критическая точка.

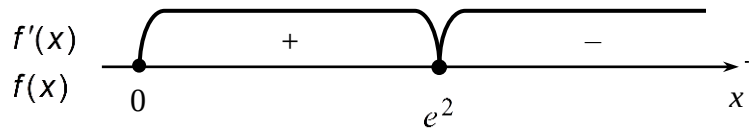

Рис. 14

Нанесем область определения и критическую точку на числовую ось и найдем знаки производной $f'(x)$ на всех интервалах (рис. 14):

$$f'(1)=\frac{2-0}{2}=1>0,\ f'(9)=\frac{2-\ln 9}{54}\approx -0{,}004<0.$$

Так как при переходе через критическую точку производная меняет знак, то $x=e^2$ – точка экстремума функции (точка максимума). На интервале $\left(0,\ e^2\right)$ функция возрастает, а на $\left(e^2,\ +\infty\right)$ – убывает.

6) Найдем $f''(x)$:

$$f''(x)=\left(\frac{2-\ln x}{2x^{3/2}}\right)'=\frac{-\frac{1}{x}2x^{3/2}-(2-\ln x)2\cdot\frac{3}{2}x^{1/2}}{4x^3}=\frac{\sqrt{x}(3\ln x-8)}{4x^3}.$$

Производная второго порядка равна нулю, если $\sqrt{x}\cdot(3\ln x-8)=0$ или $\sqrt{x}=0$, $3\ln x-8=0$. Отсюда получаем: $x_1=0$, $x_2=e^{8/3}$. Так как $x_1=0$ не входит в область определения функции, то существует только одна критическая точка второго рода.

Нанесем область определения функции и критическую точку на числовую ось (рис. 15). Найдем знаки $f''(x)$ на всех полученных интервалах:

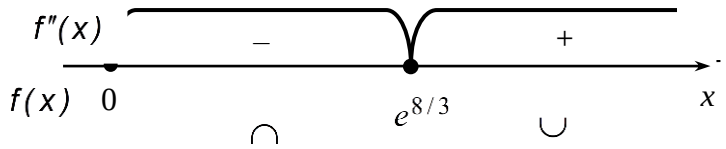

Рис. 15

$$f''(1)=\frac{1\cdot(0-8)}{4}=-2<0,\ f''\left(e^4\right)=\frac{e^2(3\cdot4-8)}{4e^{12}}=\frac{1}{e^{10}}>0.$$

При переходе через критическую точку $x=e^{8/3}$ производная второго порядка сменила знак, следовательно, это точка перегиба графика функции. На интервале $\left(0,\ e^{8/3}\right)$ график является выпуклым, а на $\left(e^{8/3},\ +\infty\right)$ – вогнутым.

7) Найдем значения функции при $x=e^2$ и $x=e^{8/3}$:

$f\left(e^2\right)\approx f(7{,}4)\approx 0{,}74$, $f\left(e^{8/3}\right)\approx f(14{,}4)\approx 0{,}7$.

Для более точного построения графика вычислим значения функции $y=\dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}$ в дополнительной точке: $f\left(e^4\right)\approx f(55)\approx 0{,}07$.

По полученным в пунктах 1–7 данным строим график функции $y=\ln x/\sqrt{x}$ (рис. 16).

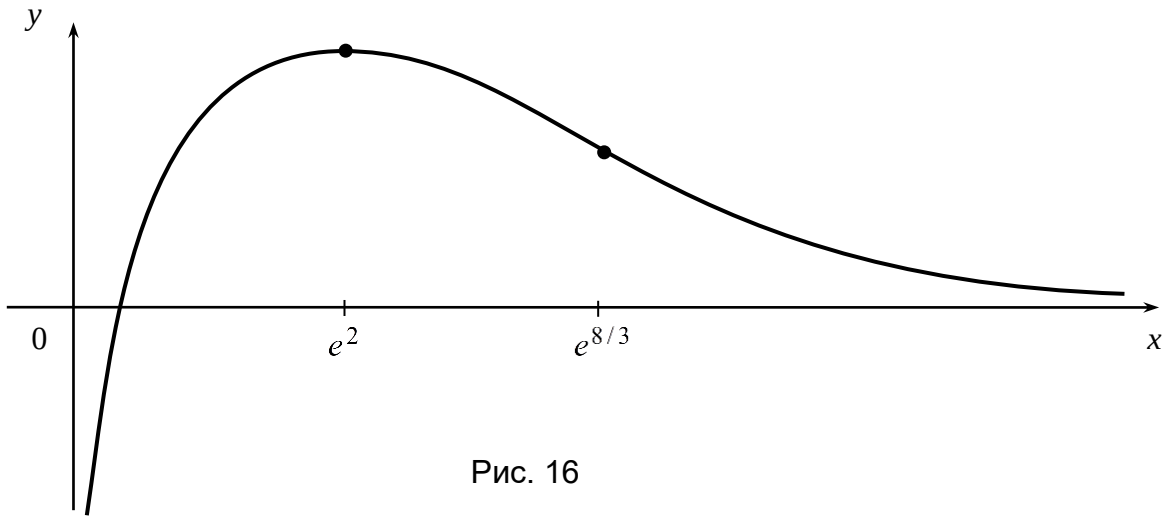

Рис. 16

9. РАСЧЕТНО-ГРАФИЧЕСКОЕ ЗАДАНИЕ

Вариант 1

Задание 1. Вычислить производные заданных функций.

1. $y=\dfrac{\cos x}{x^2-3x}$

2. $y=\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$

3. $y=\arcsin\dfrac{2x^2}{1+x^4}$

4. $y=\left(\dfrac{1-x}{1+x}\right)^4$

5. $y=\left(x\cos x-\sin x\right)\left[\ln\left(x\cos x-\sin x\right)-1\right]$

6. $y=3\sin\left(xe^x-e^x\right)-\sin^3\left(xe^x-e^x\right)$

7. $y=\arccos\left(2x\sqrt{1-x^2}\right)$

Задание 2. Логарифмическое дифференцирование. Дифференцирование неявной функции. Дифференцирование функции, заданной параметрически.

1. $y=\left(x-2\right)^{\sin x}$

2. $y=\dfrac{x^2\sqrt{x+1}}{\left(x-1\right)^3\sqrt[4]{5x-1}}$

3. $x^3+y^3=3xy$

4. $\dfrac{y}{x}+e^{\frac{y}{x}}-\sqrt[3]{\dfrac{y}{x}}=0$

5. $\begin{cases}x=t^3+3t+1\\ y=3t^5+5t^3+1\end{cases}$

Задание 3. Найдите производную функции указанного порядка.

1) $y^{(n)}$, если $y=3^x+3^{-x}$;

2) $\dfrac{d^2y}{dx^2}$, если $x=arccos\sqrt{t}, y=\sqrt{t-t^2}$.

Задание 4. Составить уравнение касательной, проведенной к кривой $y=f\left(x\right)$, параллельно прямой $Ax+By+C=0$.

$f\left(x\right)=-\dfrac{1}{6}x^3+x^2-2x-3,\quad 3x+6y-2=0$**.**

Задание 5. Найти пределы функций, используя правило Лопиталя.

1. $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{x^3-3x-2}{x^2+2x+1}$

2. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2e^x-2}{x^2-x}$

3. $\lim\limits_{x\to0}xctg2x$

4. $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{1}{x^2}-ctg^2x\right)$

5. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{e^{3x}+5}{6x^2+1}$

6. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{2e^{4x}-2}{\sin x}$

7. $\lim\limits_{x\to0}\left(1-6x\right)^{\frac{1}{x}}$

8. $\lim\limits_{x\to1}x^{\frac{1}{1-x}}$

Задание 6. Найти наименьшее и наибольшее значение функции в указанных промежутках.

$y=-3x^2+4x-8,\quad x\in\left[0;1\right]$

Задание 7. Исследовать функции и построить их графики.

1. $y=x^3-3x+2$ **2.** $y=\dfrac{2x-1}{\left(x-1\right)^2}$ **3.** $y=\ln\left(x^2+x-2\right)$

Вариант 2

Задание 1. Вычислить производные заданных функций.

1. $y = \ln tg\,\frac{x}{2}$

2. $y = 4^{arctg\sqrt{x^2-1}}$

3. $y = \left(1+\sqrt{x^2+1}\right)^5$

4. $y = e^{\arcsin\frac{1}{x}}$

5. $y = tg^3 2x\cos^2 2x$

6. $y = \frac{1}{4}tg^4 x - \ln\cos x - \frac{tg^2 x}{2}$

7. $y = x^n a^{-x^2}$

Задание 2. Логарифмическое дифференцирование. Дифференцирование неявной функции. Дифференцирование функции, заданной параметрически.

1. $y = x^x$

2. $y = \frac{(x-2)^9}{\sqrt{(x-1)^5(x-3)^{11}}}$

3. $tgy = xy$

4. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

5. $\begin{cases} x = a\cos^3 t \\ y = b\sin^3 t \end{cases}$

Задание 3. Найдите производную функции указанного порядка.

1) $y^{(n)}$, если $y = e^{-x/2}$;

2) $\frac{d^2y}{dx^2}$, если $x = a\cos t,\ y = a\sin t$.

Задание 4. Составить уравнение касательной, проведенной к кривой $y = f(x)$, параллельно прямой $Ax + By + C = 0$.

$f(x) = -2x^3 - 6x^2 + 12x + 21,\quad 6x + y + 2 = 0$.

Задание 5. Найти пределы функций, используя правило Лопиталя.

1. $\lim\limits_{x\to -1}\frac{x^3 - 2x - 1}{x^4 + 2x + 1}$

2. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x\sin 3x}{1-\cos 4x}$

3. $\lim\limits_{x\to \frac{1}{2}}\sin(2x-1)tg\pi x$

4. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln\sin 2x}{\ln\sin x}$

5. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{e^{5x} + x^2}{x + x^3}$

6. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{2e^x + e^{-x} - 3}{x^2}$

7. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}\right)^{\sin x}$

8. $\lim\limits_{x\to 0}(1-2x)^{\frac{1}{x}}$

Задание 6. Найти наименьшее и наибольшее значение функции в указанных промежутках.

$y = x^3 + 3x^2 - 9x - 7,\quad x \in [-4;3]$

Задание 7. Исследовать функции и построить их графики.

1. $y = x^3 + 3x^2 - 9x + 2$

2. $y = \frac{x^3 + 4}{x^2}$

3. $y = \frac{e^x}{e^x - 1}$

Вариант 3

Задание 1. Вычислить производные заданных функций.

1. $y=\ln\left(\sqrt{2\sin x+1}+\sqrt{2\sin x-1}\right)$

2. $y=\left(x^2+2x+2\right)e^{-x}$

3. $y=arctg\,\dfrac{\ln x}{3}$

4. $y=x\sin x\cos x+\dfrac{1}{2}\cos^2 x$

5. $y=log_a\left(x+\sqrt{x^2+9}\right)$

6. $y=\ln tg\,\dfrac{x}{2}-\dfrac{x}{\sin x}$

7. $y=e^{\frac{1}{2}tg^2x}\cos x$

Задание 2. Дифференцирование неявной функции. Логарифмическое дифференцирование. Дифференцирование функции, заданной параметрически.

1. $y=x^{-x}\cdot 2^x\cdot x^2$

2. $y=\sqrt{\dfrac{x(x-1)}{x-2}}$

3. $x^3+y^3=a^3$

4. $xy=arctg\,\dfrac{x}{y}$

5. $\begin{cases} x=\dfrac{1}{t+1} \\ y=\left(\dfrac{t}{t+1}\right)^2 \end{cases}$

Задание 3. Найдите производную функции указанного порядка.

1) $y^{(n)}$, если $y=ln\,x$;

2) $\dfrac{d^2y}{dx^2}$, если $x=a(t-sin\,t),\ y=a(1-cos\,t)$,

Задание 4. Составить уравнение касательной, проведенной к кривой $y=f\left(x\right)$, параллельно прямой $Ax+By+C=0$

$f\left(x\right)=-2x^3-6x^2+12x+21,\ \ -6x+y+2=0$.

Задание 5. Найти пределы функций, используя правило Лопиталя.

1. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{3x^2+2x-1}{x^2-1}$

2. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{6}}\dfrac{1-2\sin x}{\cos 3x}$

3. $\lim\limits_{x\to 0} x\,ctg\,7x$

4. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x\sin x}-\dfrac{1}{x^2}\right)$

5. $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{e^x+x+2}{x^4}$

6. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{e^x-e^2}{x-2}$

7. $\lim\limits_{x\to 0}\left(tgx\right)^{2x-\pi}$

8. $\lim\limits_{x\to 0}\left(1-5x\right)^{\frac{1}{x}}$

Задание 6. Найти наименьшее и наибольшее значение функции в указанных промежутках.

$y=x\ln^2 x,\quad x\in\left[e^{-1};e\right]$

Задание 7. Исследовать функции и построить их графики.

1. $y=-x^3+3x$ **2.** $y=\dfrac{2x}{\left(x-3\right)^2}$ **3.** $y=e^{-x^2}$

Вариант 4

Задание 1. Вычислить производные заданных функций.

1. $y = \sin^3 \frac{x}{3}$

2. $y = \frac{1}{2} tg^2 \sqrt{x} + \ln \cos \sqrt{x}$

3. $y = \frac{2^{3x}}{3^{5x}}$

4. $y = \frac{1}{4a} \ln \frac{x-a}{x+a} + \frac{1}{2a} arctg \frac{x}{a}$

5. $y = x^2 e^{x^2} \ln x$

6. $y = \arccos \sqrt{1-2^x}$

7. $y = \log_{x^2} 2$

Задание 2. **Дифференцирование неявной функции. Логарифмическое дифференцирование. Дифференцирование функции, заданной параметрически**.

1. $y = x^{\ln x}$

2. $y = x \cdot \sqrt[3]{\frac{x^2}{x^2+1}}$

3. $arctg(x+y) = x$

4. $x^3 + x^2 y + y^2 = 0$

5. $\begin{cases} x = a\cos^2 t \\ y = b\sin^2 t \end{cases}$

Задание 3. Найдите производную функции указанного порядка.

1) $y^{(n)}$, если $y = 1/(1+2x)$;

2) $\frac{d^2 y}{dx^2}$, если $x = t^2$, $y = t^3/2$,

Задание 4. Составить уравнение касательной, проведенной к кривой $y = f(x)$, параллельно прямой $Ax + By + C = 0$

$f(x) = x^3 + 3x^2 - 6x - 8, \quad 9x - 3y + 13 = 0$

Задание 5. Найти пределы функций, используя правило Лопиталя.

1. $\lim\limits_{x \to 2} \frac{2x^2 + x - 10}{x^2 - x - 2}$

2. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\arcsin 5x}{x}$

3. $\lim\limits_{x \to 0} x^2 e^{\frac{1}{x}}$

4. $\lim\limits_{x \to -2} \left(\frac{1}{x+2} - \frac{1}{x^2+5x+6} \right)$

5. $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{e^{4x} + x}{x^3 + 1}$

6. $\lim\limits_{x \to \pi} \frac{ctg \frac{x}{2}}{x - \pi}$

7. $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} (\sin x)^{\frac{1}{x - \pi/2}}$

8. $\lim\limits_{x \to 0} (1 - 8x)^{\frac{1}{x}}$

Задание 6. Найти наименьшее и наибольшее значение функции в указанных промежутках.

$y = \arccos x^2, \quad x \in \left[-\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2} \right]$

Задание 7. Исследовать функции и построить их графики.

1. $y = 3x^3 - \frac{9}{2} x^2$

2. $y = \frac{1 - 2x^3}{x^2}$

3. $y = (3x^2 + 4) e^{-x^2}$

Вариант 5

Задание 1. Вычислить производные заданных функций.

1. $y = \ln tg \dfrac{x}{2}$

2. $y = x^2 e^x$

3. $y = \dfrac{\sin x}{\cos^2 x} + \ln \dfrac{1+\sin x}{\cos x}$

4. $y = 2\left(tg\sqrt{x} - \sqrt{x}\right)$

5. $y = \ln \dfrac{\sqrt{x^4+1} - x^2}{\sqrt{x^4+1} + x^2}$

6. $y = arctg \dfrac{2x}{1-x^3}$

7. $y = \dfrac{x^2 e^{x^2}}{x^2+1}$

Задание 2. Дифференцирование неявной функции. Логарифмическое дифференцирование. Дифференцирование функции, заданной параметрически.

1. $y = (x+1)(2x+1)(3x+1)$

2. $y = \sqrt[x]{x}$

3. $e^y = x + y$

4. $\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{y^2} = \sqrt[3]{a^2}$

5. $\begin{cases} x = \arccos \dfrac{1}{\sqrt{1+t^2}} \\ y = \arcsin \dfrac{t}{\sqrt{1+t^2}} \end{cases}$

Задание 3. Найдите производную функции указанного порядка.

1) $y^{(n)}$, если $y = arcsin(x/2)$; 2) $\dfrac{d^2y}{dx^2}$, если $x = cos^2 t,\ y = sin^3 t$.

Задание 4. Составить уравнение касательной, проведенной к кривой $y = f(x)$, параллельно прямой $Ax + By + C = 0$

$f(x) = \dfrac{1}{6}x^3 - x^2 + 2x + 4,\ \ -2x + 4y + 3 = 0$

Задание 5. Найти пределы функций, используя правило Лопиталя.

1. $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2 - 3x + 2}{2x^2 - 5x + 2}$

2. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin 4x}{x^e}$

3. $\lim\limits_{x\to\infty} \left(x^2 e^{-x}\right)$

4. $\lim\limits_{x\to \pi/2} \left(\dfrac{x}{ctgx} - \dfrac{\pi}{2\cos x}\right)$

5. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{e^{4x} + x}{x^3 + 1}$

6. $\lim\limits_{x\to\pi} \dfrac{ctg\dfrac{x}{2}}{x - \pi}$

7. $\lim\limits_{x\to \pi/2} (\sin x)^{\frac{1}{x - \pi/2}}$

8. $\lim\limits_{x\to\infty} \left(1 + \dfrac{2}{x}\right)^x$

Задание 6. Найти наименьшее и наибольшее значение функции в указанных промежутках.

$y = \dfrac{1}{\cos x},\quad x \in \left[\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{3\pi}{2}\right]$

Задание 7. Исследовать функции и построить их графики.

1. $y = x^3 - 8x^2 + 7x$ **2.** $y = \dfrac{x}{1+x^2}$ **3.** $y = e^{-\frac{5}{x-3}}$

Вариант 6

Задание 1. Вычислить производные заданных функций.

1. $y = x^3 arctgx$

2. $y = \dfrac{\sin x - \cos x}{\sin x + \cos x} + 2^{3x}$

3. $y = 3x^3 \ln x - x^3$

4. $y = x \arccos \dfrac{x}{2} - \sqrt{4 - x^2}$

5. $y = \left(\sin \dfrac{x}{2} - \cos \dfrac{x}{2} \right)^2$

6. $y = \ln tg \dfrac{2x+1}{4}$

7. $y = tg\,2x + \dfrac{2}{3} tg^3 2x + \dfrac{1}{5} tg^5 2x$

Задание 2. Дифференцирование неявной функции. Логарифмическое дифференцирование. Дифференцирование функции, заданной параметрически.

1. $y = \dfrac{(x+2)^2}{(x+1)^3 (x+3)^4}$

2. $y = x^{\sqrt{x}}$

3. $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{a}$

4. $\ln x + e^{-\frac{y}{x}} = c$

5. $\begin{cases} x = \dfrac{2at}{1+t^2} \\ y = \dfrac{a(1-t^2)}{1+t^2} \end{cases}$

Задание 3. Найдите производную функции указанного порядка.

1) $y^{(n)}$, если $y = xe^x$;

2) $\dfrac{d^2 y}{dx^2}$, если $x = \ln t,\ y = t^2 - 1$.

Задание 4. Составить уравнение касательной, проведенной к кривой $y = f(x)$, параллельно прямой $Ax + By + C = 0$

$f(x) = 2x^3 + 6x^2 - 12x - 23,\ \ 12x - 2y + 11 = 0$

Задание 5. Найти пределы функций, используя правило Лопиталя.

1. $\lim\limits_{x \to 4} \dfrac{2x^2 - 9x + 4}{x^2 + x - 20}$

2. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{arctgx}{arctg\,2x}$

3. $\lim\limits_{x \to -2} \left(\dfrac{1}{x+2} - \dfrac{1}{x^2 + x - 2} \right)$

4. $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{2x^3 + 7x + e^x}{x^2 + 3}$

5. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln \cos 2x}{\sin 2x}$

6. $\lim\limits_{x \to \pi/4} \left(ctgx^{\frac{1}{x - \pi/4}} \right)$

7. $\lim\limits_{x \to 0} (1 - 9x)^{\frac{1}{x}}$

8. $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{e^x + 4x}{x^3 - x^2}$

Задание 6. Найти наименьшее и наибольшее значение функции в указанных промежутках.

$y = x^6 - 5x^4 + 5x^3 - 1, \quad x \in [0; 2]$

Задание 7. Исследовать функции и построить их графики.

1. $y = x^3 - 3x - 2$

2. $y = \dfrac{4x}{4 + x^2}$

3. $y = \ln(x^2 - 4x + 5)$

Вариант 7

Задание 1. Вычислить производные заданных функций.

1. $y=\ln\left(2x^3+3x^2\right)$

2. $y=\sqrt{x}\arcsin\sqrt{x}+\sqrt{1-x}$

3. $y=\cos^3\dfrac{x}{3}$

4. $y=\ln\sqrt{\dfrac{1+\sin x}{1-\sin x}}$

5. $y=\dfrac{e^x 2^{5x}}{3^{4x}}$

6. $y=\ln\left(\ln x\right)\cdot\left(\ln\ln\ln x-1\right)$

7. $y=\arccos\left(2e^{2x}-1\right)$

Задание 2. Дифференцирование неявной функции. Логарифмическое дифференцирование. Дифференцирование функции, заданной параметрически.

1. $y=\dfrac{\sqrt{x-1}}{\sqrt[3]{x-1}\cdot\sqrt[3]{(x+2)^5}\cdot\sqrt{x+3}^5}$

2. $y=x^{\sin x}$

3. $\ln y+\dfrac{x}{y}=c$

4. $y^3=\dfrac{x-y}{x+y}$

5. $\begin{cases} x=\dfrac{\cos^3 t}{\sqrt{\cos 2t}} \\ y=\dfrac{\sin^3 t}{\sqrt{\cos 2t}} \end{cases}$

Задание 3. Найдите производную функции указанного порядка.

1) $y^{(n)}$, если $y=\sin ax+\cos fx$;

2) $\dfrac{d^2y}{dx^2}$, если $x=a\cos^3 t,\ y=a\sin^2 t$.

Задание 4. Составить уравнение касательной, проведенной к кривой $y=f\left(x\right)$, параллельно прямой $Ax+By+C=0$

$f\left(x\right)=x^3-\dfrac{15}{2}x^2+9x-10,\ \ 18x+2y+15=0$

Задание 5. Найти пределы функций, используя правило Лопиталя.

1. $\lim\limits_{x\to-4}\dfrac{x^2+x-12}{x^2+2x-8}$

2. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{tg2x}{\sin 4x}$

3. $\lim\limits_{x\to2}(2-x)tg\dfrac{\pi x}{4}$

4. $\lim\limits_{x\to1}\left(\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{1}{(x-2)(x-1)}\right)$

5. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{e^{3x}+5}{2x^2}$

6. $\lim\limits_{x\to\pi/4}\dfrac{\sin 2x-\cos 2x-1}{\sin x-\cos x}$

7. $\lim\limits_{x\to1}\left(x^{\frac{1}{x-1}}\right)$

8. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{4}{x}\right)^x$

Задание 6. Найти наименьшее и наибольшее значение функции в указанных промежутках.

$y=x+\dfrac{1}{x},\quad x\in[0,01;100]$

Задание 7. Исследовать функции и построить их графики.

1. $y=2x^3+3x^2+x-6$ **2** $y=\dfrac{4x^2-9}{2x^3}$ **3** $y=x-\ln\left(x+9\right)$

Вариант 8

Задание 1. Вычислить производные заданных функций.

1. $y=\frac{1}{3}\sin^3\sqrt{x}-\frac{2}{3}\sin^5\sqrt{x}+\frac{1}{7}\sin^7\sqrt{x}$

2. $y=\ln\left(3x^2+\sqrt{9x^2+1}\right)$

3. $y=\frac{x-e^{2x}}{x+e^{2x}}$

4. $y=2xtg2x+\ln\cos 2x-2x^2$

5. $y=2^{\cos^3 x-3\cos x}$

6. $y=\frac{\ln x}{x^5}+\frac{1}{5x^5}$

7. $y=\frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2}+\frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a}$

Задание 2. Дифференцирование неявной функции. Логарифмическое дифференцирование. Дифференцирование функции, заданной параметрически.

1. $y=(\cos x)^{\sin x}$

2. $y=\frac{2^x(x+1)^3}{(x-1)^2\sqrt{2x+1}}$

3. $arctg\frac{y}{x}=\frac{1}{2}\ln\left(x^2+y^2\right)$

4. $y-0,3\sin y=x$

5. $\begin{cases}x=e^{-t}\\y=e^{2t}\end{cases}$

Задание 3. Найдите производную функции указанного порядка.

1) $y^{(n)}$, если $y=1/(ax+b)$;

2) $\frac{d^2y}{dx^2}$, если $x=a\cos^3 t,\ y=a\sin^3 t$.

Задание 4. Составить уравнение касательной, проведенной к кривой $y=f(x)$, параллельно прямой $Ax+By+C=0$

$f(x)=-\frac{x^3}{6}-\frac{x^2}{2}+x+10,\quad 2x+4y+7=0$

Задание 5. Найти пределы функций, используя правило Лопиталя.

1. $\lim\limits_{x\to-1}\frac{x^2+x-12}{x^2+2x-8}$

2. $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin 5x}{x}$

3. $\lim\limits_{x\to4}(4-x)tg\frac{\pi x}{8}$

4. $\lim\limits_{x\to3}\left(\frac{1}{x-3}-\frac{5}{x^2-x-6}\right)$

5. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{e^x+x}{x^3}$

6. $\lim\limits_{x\to0}\frac{e^x-e^{-x}}{\sin x\cos x}$

7. $\lim\limits_{x\to\pi/2}\left(tg\frac{x}{2}\right)^{\frac{1}{x-\pi/2}}$

8. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{5}{x}\right)^x$

Задание 6. Найти наименьшее и наибольшее значение функции в указанных промежутках.

$y=x+\sqrt[3]{x-1},\quad x\in[0;9]$

Задание 7. Исследовать функции и построить их графики.

1. $y=x^3-6x^2+9x-4$ **2.** $y=\frac{1}{x}+4x^2$ **3.** $y=3xe^{-\frac{3x^2}{4}}$

Вариант 9

Задание 1. Вычислить производные заданных функций.

1. $y = -ctg^2\frac{x}{2} - 2\ln\sin\frac{x}{2}$

2. $y = \ln\frac{\sqrt{4tgx+1}-2\sqrt{tgx}}{\sqrt{4tgx+1}+2\sqrt{tgx}}$

3. $y = arctg\sqrt{4x^2-1}$

4. $y = e^x - \sqrt{1-e^{2x}} - \arcsin e^x$

5. $y = \sec x\left(1+\ln\cos x\right)$

6. $y = \ln tg\frac{e^{\sin x}}{4}$

7. $y = \sqrt{1-3x^2}$

Задание 2. Дифференцирование неявной функции. Логарифмическое дифференцирование. Дифференцирование функции, заданной параметрически.

1. $y = x^{\arcsin x}$

2. $y = \frac{x^2+e^{x^2}}{x^2+1}$

3. $\sqrt{x^2+y^2} = carctg\frac{y}{x}$

4. $a\cos^2\left(x+y\right) = b$

5. $\begin{cases} x = \frac{3at}{1+t^3} \\ y = \frac{3at}{1+t^3} \end{cases}$

Задание 3. Найдите производную функции указанного порядка.

1) $y^{(n)}$, если $y = e^{ax}$;

2) $\frac{d^2y}{dx^2}$, если $x = at\cos t,\ y = at\sin t$,

Задание 4. Составить уравнение касательной, проведенной к кривой $y = f\left(x\right)$, параллельно прямой $Ax + By + C = 0$

$f\left(x\right) = -\frac{2}{3}x^3 + 4x^2 - 8x - 10,\quad 4x + 2y + 3 = 0$

Задание 5. Найти пределы функций, используя правило Лопиталя.

1. $\lim\limits_{x\to 3}\frac{x^2+x-12}{x^2-5x+6}$

2. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x\sin 2x}{1-\cos x}$

3. $\lim\limits_{x\to\infty} x\left(e^{\frac{1}{x}}-1\right)$

4. $\lim\limits_{x\to 3}\frac{\arcsin\left(3-x\right)}{\sqrt{x^2-5x+6}}$

5. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{e^{2x}+x^2}{x^3}$

6. $\lim\limits_{x\to 3}\frac{\ln\left(4-x\right)}{x-3}$

7. $\lim\limits_{x\to\pi/4}\left(\sin 2x\right)^{\frac{1}{x-\pi/4}}$

8. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{7}{x}\right)^x$

Задание 6. Найти наименьшее и наибольшее значение функции в указанных промежутках.

$y = \frac{1-x+x^2}{1+x-x^2},\quad x\in\left[0;1\right]$

Задание 7. Исследовать функции и построить их графики.

1. $y = x^3 + 5x - 6$ **2.** $y = y = \frac{4x-12}{\left(x-2\right)^2}$ **3.** $y = \ln\left(x^2-3x\right)$

Вариант 10

Задание 1. Вычислить производные заданных функций.

1. $y = arctg\dfrac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}}$

2. $y = \sqrt{2x+1}\left(\ln\left(2x+1\right) - 2\right)$

3. $y = tg^3\left(tgx\right) + 3tg\left(tgx\right)$

4. $y = e^x - \sin e^x \cos^3 e^x - \sin^3 e^x \cos e^x$

5. $y = x\left(\ln^3 x - 3\ln^2 x + 6\ln x - 6\right)$

6. $y = \dfrac{x}{\left(1+\sin x^2\right)^{\frac{1}{2}}}$

7. $y = \arcsin e^x + \arcsin\sqrt{1-e^{2x}}$

Задание 2. Дифференцирование неявной функции. Логарифмическое дифференцирование. Дифференцирование функции, заданной параметрически.

1. $y = \left(arctgx\right)^x$

2. $y = \sqrt[3]{\dfrac{x-5}{\sqrt[3]{x^3+4}}}$

3. $x^y = y^x$

4. $ye^y = e^{x+1}, x = 0, y = 1$

5. $\begin{cases} x = a\left(\ln tg\dfrac{t}{2} + \cos t - \sin t\right) \\ y = a\left(\sin t + \cos t\right) \end{cases}$

Задание 3. Найдите производную функции указанного порядка.

1) $y^{(n)}$, если $y = x\ln x$;

2) $\dfrac{d^2y}{dx^2}$, если $x = \cos 2t,\ y = \sin 3t$.

Задание 4. Составить уравнение касательной, проведенной к кривой $y = f\left(x\right)$, параллельно прямой $Ax + By + C = 0$

$f\left(x\right) = 2x^3 - 3x^2 - x + 2,\ \ 9x + 9y - 7 = 0$

Задание 5. Найти пределы функций, используя правило Лопиталя.

1. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^3 - 3x - 2}{x + x^2}$

2. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}$

3. $\lim\limits_{x\to\infty} tg\left(\ln x\right)$

4. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\sin 5x}{ctgx}$

5. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4e^x + x^2}{x^3}$

6. $\lim\limits_{x\to\pi/4}\left(tgx\right)^{\frac{1}{x-\pi/4}}$

7. $\lim\limits_{x\to\pi/4}\dfrac{\sin 2x - 1}{\sin x - \cos x}$

8. $\lim\limits_{x\to 0}\left(1+7x\right)^{\frac{1}{x}}$

Задание 6. Найти наименьшее и наибольшее значение функции в указанных промежутках.

$y = \dfrac{x-1}{x+1},\quad x \in \left[0;4\right]$

Задание 7. Исследовать функции и построить их графики.

1. $y = x^3 - 9x$

2. $y = \dfrac{8}{x^2 - 4}$

3. $y = \dfrac{e^{3x} + e^{-3x}}{6}$

Вариант 11

Задание 1. Вычислить производные заданных функций.

1. $y = arctg\dfrac{1-\sqrt{1-x^2}}{x}$

2. $y = \ln\left(\sin\sqrt{x}\right)tg\sqrt{x} - \sqrt{x}$

3. $y = \ln\dfrac{\sqrt{1+x}-1}{\sqrt{1+x}+1}$

4. $y = 3x\sin^3 x + 3\cos x - \cos^3 x$

5. $y = e^{\sqrt{2x}}\left(\sqrt{2x}-1\right)$

6. $y = \ln\dfrac{x^5}{x^5+2}$

7. $y = \left(\dfrac{\sin x}{1+\cos x}\right)^2$

Задание 2. Дифференцирование неявной функции. Логарифмическое дифференцирование. Дифференцирование функции, заданной параметрически.

1. $y = \left(tg\,2x\right)^{ctgx\frac{x}{2}}$

2. $y = \dfrac{xe^x arctgx}{\ln^5 x}$

3. $2^x + 2^y = 2^{x+y}$

4. $y = \cos\left(x+y\right)$

5. $\begin{cases} x = \sqrt{t} \\ y = \sqrt[3]{t} \end{cases}$

Задание 3. Найдите производную функции указанного порядка.

1) $y^{(n)}$, если $y = ln(ax+b)$;

2) $\dfrac{d^2y}{dx^2}$, если $x = cos\,t,\ y = sin\,5t$.

Задание 4. Составить уравнение касательной, проведенной к кривой $y = f\left(x\right)$, параллельно прямой $Ax + By + C = 0$.

$f\left(x\right) = -\dfrac{2}{3}x^3 - 2x^2 + 4x + 3,\ \ 8x + 4y + 11 = 0$

Задание 5. Найти пределы функций, используя правило Лопиталя.

1. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2x^2+5x-7}{3x^2-x-2}$

2. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\sin x}{1-\cos 6x}$

3. $\lim\limits_{x\to 0}\left(xctg\,4x\right)$

4. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\ln x}{x^2}$

5. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{2x}+6x}{x^2}$

6. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2e^x-2}{x^2}$

7. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\cos x\right)^{\frac{1}{x}}$

8. $\lim\limits_{x\to 0}\left(1-3x\right)^{\frac{1}{x}}$

Задание 6. Найти наименьшее и наибольшее значение функции в указанных промежутках.

$y = 2x^3 + 3x^2 - 12x + 1,\quad x\in\left[-1;5\right]$

Задание 7. Исследовать функции и построить их графики.

1. $y = 4x^3 - 12x + 8$

2. $y = \dfrac{x^4+3}{2x^2}$

3. $y = xe^{-x}$

Вариант 12

Задание 1. Вычислить производные заданных функций.

1. $y = \dfrac{arctgx}{x} - \ln \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$

2. $y = x^2 + 2x\sin x\cos x + \cos^2 x$

3. $y = \arcsin\sqrt{1-\dfrac{x^2}{5}}$

4. $y = \left(x^5+3\right)\left(\ln\left(x^5+3\right)-1\right)$

5. $y = -\cos ec^2\dfrac{x}{2}$

6. $y = \dfrac{2\ln^2\sin x + 3}{\left(2\ln^2\sin x - 3\right)^2}$

7. $y = -\ln\left(\cos ecx + ctgx\right)$

Задание 2. Дифференцирование неявной функции. Логарифмическое дифференцирование. Дифференцирование функции, заданной параметрически.

1. $y = \dfrac{\left(1-x^2\right)e^{3x-1}\cos x}{\left(\arccos x\right)^3}$

2. $y = x^{x^2}$

3. $2y\ln y = x$

4. $x + arctgy = y$

5. $\begin{cases} x = \sqrt{t^2+1} \\ y = \dfrac{t-1}{\sqrt{t^2+1}} \end{cases}$

Задание 3. Найдите производную функции указанного порядка.

1) $y^{(n)}$, если $y = e^{-x}$;

2) $\dfrac{d^2y}{dx^2}$, если $x = t^2\cos t,\ y = t\sin t$.

Задание 4. Составить уравнение касательной, проведенной к кривой $y = f(x)$, параллельно прямой $Ax + By + C = 0$

$f(x) = -x^3 + \dfrac{3}{2}x^2 + 9x + 2,\ \ 15x - 5y + 4 = 0$

Задание 5. Найти пределы функций, используя правило Лопиталя.

1. $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{3x+6}{x^3+8}$

2. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tg4x}{\sin x}$

3. $\lim\limits_{x\to 0}\left(xctg5x\right)$

4. $\lim\limits_{x\to \pi/4}\dfrac{\ln tgx}{x-\pi/4}$

5. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{e^{3x}+4x}{2x^2-x}$

6. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{2x}-1}{\arcsin 3x}$

7. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\sin x\right)^x$

8. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{3x}\right)^x$

Задание 6. Найти наименьшее и наибольшее значение функции в указанных промежутках.

$y = 4x^6 - x^3 + 3,\quad x\in[0;1]$

Задание 7. Исследовать функции и построить их графики.

1. $y = x^3 - 2x^2 + 3x + 4$ **2.** $y = \dfrac{x^3}{x^3+8}$ **3.** $y = x + \ln\left(x^2-4\right)$

Вариант 13

Задание 1. Вычислить производные заданных функций.

1. $y = ctgx\cos ecx + \ln\left(ctgx + \cos ecx\right)$

2. $y = \arcsin\dfrac{\sin x}{\sqrt{1+\sin^2 x}}$

3. $y = 1 - e^{\sin^2 3x}\cos^2 3x$

4. $y = arctg\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}$

5. $y = \arccos\dfrac{9-x^2}{9+x^2}$

6. $y = e^{-x} - \sin\left(e^{-x}\right)\cos\left(e^{-x}\right)$

7. $y = -ctg^2\dfrac{x}{2} - 2\ln\sin\dfrac{x}{2}$

Задание 2. Дифференцирование неявной функции. Логарифмическое дифференцирование. Дифференцирование функции, заданной параметрически.

1. $y = x\sqrt{x^2+1}\cdot\sin x$

2. $y = \left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x$

3. $y = 1 + xe^x$

4. $x\sin y - \cos y + \cos 2y = 0$

5. $\begin{cases} x = a\left(\cos t + t\sin t\right) \\ y = a\left(\sin t - t\cos t\right) \end{cases}$

Задание 3. Найдите производную функции указанного порядка.

1) $y^{(n)}$, если $y = log_a x$;

2) $\dfrac{d^2y}{dx^2}$, $x = 3^t$, $y = t^3 ln3$.

Задание 4. Составить уравнение касательной, проведенной к кривой $y = f\left(x\right)$, параллельно прямой $Ax + By + C = 0$

$f\left(x\right) = \dfrac{2}{3}x^3 - 4x^2 + 8x + 10,\ \ 6x - 3y - 1 = 0$

Задание 5. Найти пределы функций, используя правило Лопиталя.

1. $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^2+x-2}{x^2-x-6}$

2. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin 4x}{x}$

3. $\lim\limits_{x\to 0}\left(x^2\ln x\right)$

4. $\lim\limits_{x\to \pi/4}\dfrac{\ln\sin 2x}{x-\pi/4}$

5. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x}{\ln\left(1+x\right)}$

6. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x + e^{-x} - 2}{1-\cos 2x}$

7. $\lim\limits_{x\to 0} x^{\sin x}$

8. $\lim\limits_{x\to 0}\left(1+5x\right)^{\frac{1}{x}}$

Задание 6. Найти наименьшее и наибольшее значение функции в указанных промежутках.

$y = \sqrt[3]{x^2} - x,\quad x\in\left[0;1\right]$

Задание 7. Исследовать функции и построить их графики.

1. $y = x^3 - 3x^2$

2. $y = \dfrac{x^3}{\left(x^2-4\right)}$

3. $y = \ln\dfrac{x}{x-1}$

Вариант 14

Задание 1. Вычислить производные заданных функций.

1. $y=\ln\left(3x^2+\sqrt{9x^4+1}\right)$

2. $y=\frac{1}{64}\left(tg^4\frac{x}{2}-ctg^4\frac{x}{2}\right)+\frac{1}{8}\left(tg^3\frac{x}{2}-ctg^2\frac{x}{2}\right)+\frac{3}{8}\ln tg\frac{x}{2}$

3. $y=-\frac{2\cos\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}+3\cos\frac{x}{2}}$

4. $y=\arccos\left(2e^{2x}-1\right)$

5. $y=\operatorname{arc}tg\frac{3x-x^3}{1-3x^2}$

6. $y=\frac{a}{2}\sin^2 x+\frac{b}{2}\cos^2 x-\frac{a+b}{4}\cos 2x$

7. $y=\ln\left(1-\frac{1}{x}\right)+\frac{1}{x}$

Задание 2. Дифференцирование неявной функции. Логарифмическое дифференцирование. Дифференцирование функции, заданной параметрически.

1. $y=\frac{\sqrt{x+2}\left(3-x\right)^4}{\left(x+1\right)^5}$

2. $y=\left(\cos x\right)^{\sin x}$

3. $tg\frac{y}{2}=\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\cdot tg\frac{x}{2}$

4. $y\sin x-\cos\left(x-y\right)=0$

5. $\begin{cases}x=\ln\left(1+t^2\right)\\ y=t-arctgt\end{cases}$

Задание 3. Найдите производную функции указанного порядка.

1) $y^{(n)}$, если $y=(log_a x)^2$;

2) $\frac{d^2y}{dx^2}$, если $x=\cos t-\sin t,\ y=\sin t+\cos t$.

Задание 4. Составить уравнение касательной, проведенной к кривой $y=f\left(x\right)$, параллельно прямой $Ax+By+C=0$

$f\left(x\right)=\frac{1}{3}x^3-2x^2+5x,\quad 6x-3y-11=0$

Задание 5. Найти пределы функций, используя правило Лопиталя**.**

1. $\lim\limits_{x\to-3}\frac{x^2+x-6}{2x^2-x-21}$

2. $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin 3x}{\sin 5x}$

3. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(x\sin\frac{9}{x}\right)$

4. $\lim\limits_{x\to0}\frac{\ln tgx}{x}$

5. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{e^x+4}{x^3}$

6. $\lim\limits_{x\to0}\frac{e^{2x}-1}{\sin x}$

7. $\lim\limits_{x\to0}x^{3tgx}$

8. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-4x\right)^{\frac{1}{x}}$

Задание 6. Найти наименьшее и наибольшее значение функции в указанных промежутках.

$y=x^3e^{-x},\quad x\in\left[-1;4\right]$

Задание 7. Исследовать функции и построить их графики.

1. $y=\left(x-1\right)^2\left(x+2\right)$ **2.** $y=\frac{x^2+2x-3}{x-5}$ **3.** $y=xe^{2x-1}$

Вариант 15

Задание 1. Вычислить производные заданных функций.

1. $y = \ln tg\,\frac{x}{2} + \cos x + \frac{1}{3}\cos^2 x$

2. $y = \frac{1}{2}tg^2 \sin x + \ln\cos(\sin x)$

3. $y = \ln\frac{\sqrt{x^2+2x}}{x+1}$

4. $y = \left(1+\sqrt[3]{x}\right)^3$

5. $y = 3\cos^2 x - \cos^3 x$

6. $y = 5tg\,\frac{x}{5} + tg\,\frac{\pi}{8}$

7. $y = \sin x \cdot e^{\cos x}$

Задание 2. Дифференцирование неявной функции. Логарифмическое дифференцирование. Дифференцирование функции, заданной параметрически**.**

1. $y = \sqrt{x\sin x\sqrt{1-e^x}}$

2. $y = \left(x^2+1\right)^{\sin x}$

3. $x^3 + y^3 - 3axy = 0$

4. $x - y = \arcsin x - \arcsin y$

5. $\begin{cases} x = a(\varphi - \sin\varphi) \\ y = a(1-\cos\varphi) \end{cases}$

Задание 3. Найдите производную функции указанного порядка.

1) $y^{(n)}$, если $y = a^{2x}$; 2) $\frac{d^2y}{dx^2}$, если $x = \pi\, arcsin\, 2t$, $y = arccos\, 2t$. **Задание 4.**

Составить уравнение касательной, проведенной к кривой $y = f(x)$, параллельно прямой $Ax + By + C = 0$

$f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 6x - 5,\ \ 12x + 2y + 15 = 0$

Задание 5. Найти пределы функций, используя правило Лопиталя.

1. $\lim\limits_{x\to 1/2}\frac{8x^3-1}{6x^2-5x+1}$

2. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{\sin 3x}$

3. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\sqrt[4]{x}\ln x\right)$

4. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln\cos x}{2x}$

5. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{e^{4x}-x}{x^2}$

6. $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2-\sqrt{8x}}{x-2}$

7. $\lim\limits_{x\to\pi/2}(\sin x)^{tgx}$

8. $\lim\limits_{x\to 0}(1+2x)^{\frac{1}{x}}$

Задание 6. Найти наименьшее и наибольшее значение функции в указанных промежутках.

$y = xe^{-x^2/2},\quad x\in[-2;2]$

Задание 7. Исследовать функции и построить их графики.

1. $y = \frac{(x-2)^2(x+4)}{4}$ **2.** $y = \frac{x^3}{8-x^3}$ **3.** $y = \ln\left(x^2+2x+2\right)$

Вариант 16

Задание 1. Вычислить производные заданных функций.

1. $y = \ln \dfrac{x \ln x - 1}{x \ln x + 1}$

2. $y = \dfrac{1}{\sqrt[3]{x + \sqrt{x}}}$

3. $y = e^{-x^2} \ln x$

4. $y = arctg \dfrac{x+1}{x-1}$

5. $y = \dfrac{tg\dfrac{x}{2} + ctg\dfrac{x}{2}}{x}$

6. $y = \cos 2x + \ln x$

7. $y = \lg(x - \cos x)$

Задание 2. Дифференцирование неявной функции. Логарифмическое дифференцирование. Дифференцирование функции, заданной параметрически.

1. $y = \sqrt{\dfrac{1 - \arcsin x}{1 + \arcsin x}}$

2. $y = 2x^{\sqrt{x}}$

3. $x^7 + y^7 = x^2 y^2$

4. $\sin(xy) + \cos(xy) = tg(x + y)$

5. $\begin{cases} x = e^t \sin t \\ y = e^t \cos t \end{cases}$

Задание 3. Найдите производную функции указанного порядка.

а) $y = (1 + x)^m$, $y^{(n)} - ?$; б) $x = arctg\, 2t$, $y = arcctg\, 2t$, $\dfrac{d^2 y}{dx^2} - ?$

Задание 4. Составить уравнение касательной, проведенной к кривой $y = f(x)$, параллельно прямой $Ax + By + C = 0$

$f(x) = -\dfrac{1}{3}x^3 - x^2 + 2x + 1, \quad 7x + 7y - 4 = 0$

Задание 5. Найти пределы функций, используя правило Лопиталя.

1. $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{3x^2 - x - 2}{3x^2 - 4x + 1}$

2. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{arctg\, 5x}{x}$

3. $\lim\limits_{x \to \infty} \left(x\, tg \dfrac{9}{x} \right)$

4. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln \cos x}{\sin x}$

5. $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{x^2 + 5e^x}{2x^2 + 6}$

6. $\lim\limits_{x \to \infty} ctgx \ln(x + e^x)$

7. $\lim\limits_{x \to 0} (tgx)^x$

8. $\lim\limits_{x \to 0} (1 + 4x)^{\frac{1}{x}}$

Задание 6. Найти наименьшее и наибольшее значение функции в указанных промежутках.

$y = \dfrac{4 - x^2}{4 + x^2}, \quad x \in [-1; 3]$

Задание 7. Исследовать функции и построить их графики.

1. $y = (x-2)(x-1)(x+1)$ **2.** $y = \dfrac{x^3}{x^2 - 4}$ **3.** $y = \ln \dfrac{x-1}{x-2}$

Вариант 17

Задание 1. Вычислить производные заданных функций.

1. $y = \ln(x - \cos x)$

2. $y = x^2 \sqrt[3]{x^6 - 8}$

3. $y = \frac{1}{\sqrt{3}} arctg \frac{x\sqrt{3}}{1 - x^2}$

4. $y = \sin^2 \frac{x}{3} ctg \frac{x}{2}$

5. $y = \ln\left(x + \sqrt{a^2 + x^2}\right)$

6. $y = \frac{\sqrt[3]{4x^5 + 2}}{3x^4}$

7. $y = x\sqrt{arctgx}$

Задание 2. Дифференцирование неявной функции. Логарифмическое дифференцирование. Дифференцирование функции, заданной параметрически.

1. $y = (\ln x)^x$

2. $y = x^3 e^x \sin 2x$

3. $y^3 - 3y^2 + 2ax = 0$

4. $\cos(xy) = x$

5. $\begin{cases} x = 1 - t^2 \\ y = t - t^3 \end{cases}$

Задание 3. Найдите производную функции указанного порядка.

1) $y^{(n)}$, если $y = 2x/(x^2 - 1)$; 2) $\frac{d^2 y}{dx^2}$, если $x = e^{2t}$, $y = e^{3t}$.

Задание 4. Составить уравнение касательной, проведенной к кривой $y = f(x)$, параллельно прямой $Ax + By + C = 0$

$f(x) = -x^3 + 6x^2 - 12x + 12, \quad 6x + 3y - 2 = 0$

Задание 5. Найти пределы функций, используя правило Лопиталя.

1. $\lim\limits_{x \to -1} \frac{x^3 - 3x - 2}{x^2 - x - 2}$

2. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{e^{2x} - 1}{\sin x}$

3. $\lim\limits_{x \to \infty} \left(x^4 e^{-x}\right)$

4. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\ln tg 3x}{\ln \sin 6x}$

5. $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{e^{5x} + x}{x^2 - 1}$

6. $\lim\limits_{x \to 4} \frac{e^x - e^4}{x - 4}$

7. $\lim\limits_{x \to \pi/4} (tgx)^{tg 2x}$

8. $\lim\limits_{x \to 0} (1 - x)^{\frac{1}{x^2 + 2x}}$

Задание 6. Найти наименьшее и наибольшее значение функции в указанных промежутках.

$y = x^3 \cdot \sqrt[3]{(x-1)^2}, \quad x \in [-2; 2]$

Задание 7. Исследовать функции и построить их графики.

1. $y = x^3 + 3x^2$ **2.** $y = \sqrt[3]{1 - x^3}$ **3.** $y = (2x - 3)e^{-\frac{x}{2}}$

Вариант 18

Задание 1. Вычислить производные заданных функций.

1. $y=\sqrt{1+tg^2x+tg^4x}$

2. $y=\frac{2}{3}arctg\sqrt{x}+\frac{1}{3}arctg\frac{x}{1-x^2}$

3. $y=\frac{1}{18}\sin^6 3x-\frac{1}{24}\sin^8 3x$

4. $y=\log_3\left(x^2-\sin x\right)$

5. $y=tg\frac{1-e^x}{1+e^x}$

6. $y=x\cdot 10^{\sqrt{x}}$

7. $y=\ln arctg\frac{1}{1+x}$

Задание 2. Дифференцирование неявной функции. Логарифмическое дифференцирование. Дифференцирование функции, заданной параметрически.

1. $y=x^{x^3}$

2. $x\cdot\sqrt[3]{\frac{x^2}{x^2+1}}=y$

3. $tgy=xy$

4. $x^3+x^2y+y^2=0$

5. $\begin{cases}x=t^3+3t^2+1\\ y=3t^5+5t^3+1\end{cases}$

Задание 3. Найдите производную функции указанного порядка.

1а) $y^{(n)}$, если $y=x/(x^2-1)$; 2) $\frac{d^2y}{dx^2}$, если $x=a(\sin t-t\cos t),\ y=a(\cos t+t\sin t)$.

Задание 4. Составить уравнение касательной, проведенной к кривой $y=f\left(x\right)$, параллельно прямой $Ax+By+C=0$

$f\left(x\right)=\frac{2}{3}x^3+2x^2-4x-5,\ \ 10x-5y+13=0$

Задание 5. Найти пределы функций, используя правило Лопиталя.

1. $\lim\limits_{x\to -4}\frac{x^2+x-12}{x^2+2x-8}$

2. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{xtgx}$

3. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x\ln\left(1+x\right)}$

4. $\lim\limits_{x\to 0}xe^{\frac{1}{x}}$

5. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{e^x-x}{x^2}$

6. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln\cos 6x}{x}$

7. $\lim\limits_{x\to 0}\left(1-4x\right)^{\frac{1}{x}}$

8. $\lim\limits_{x\to\infty}\cos x^{\sin x}$

Задание 6. Найти наименьшее и наибольшее значение функции в указанных промежутках.

$y=x^3\left(8-x\right),\quad x\in\left[0;7\right]$

Задание 7. Исследовать функции и построить их графики.

1. $y=\left(x+1\right)\left(x+2\right)\left(x+3\right)$ **2.** $y=\frac{x^2-5x+6}{x+2}$ **3.** $y=\ln\left(2x^2+3\right)$

Вариант 19

Задание 1. Вычислить производные заданных функций.

1. $y=\arcsin\sqrt{\sin x}$

5. $y=\cos x\cdot\sqrt{1+\sin^2 x}$

2. $y = x - \sqrt{1-x^2} \cdot \arcsin x$

3. $y = \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}$

4. $y = \sin^2\left(\frac{1-\ln x}{x}\right)$

6. $y = e^{\frac{1}{\ln x}}$

7. $y = \ln\frac{1-e^x}{e^x}$

Задание 2. Дифференцирование неявной функции. Логарифмическое дифференцирование. Дифференцирование функции, заданной параметрически.

1. $y = x^{-x} \cdot 5^x \cdot x^3$

2. $y = \frac{(x-2)^{10}}{\sqrt{(x-1)^5 (x-3)^{11}}}$

3. $\frac{y}{x} + e^{\frac{y}{x}} - \sqrt[3]{\frac{y}{x}} = 0$

4. $arctg(x+y) = x$

5. $\begin{cases} x = a\cos^3 t \\ y = b\sin^3 t \end{cases}$

Задание 3. Найдите производную функции указанного порядка.

1) $y^{(n)}$, если $y = 2\sin x$;

2) $\frac{d^2y}{dx^2}$, если $x = e^t$, $y = arc\sin t$.

Задание 4. Составить уравнение касательной, проведенной к кривой $y = f(x)$, параллельно прямой $Ax + By + C = 0$

$f(x) = x^3 - 6x^2 + 12x - 12, \quad 6x - 5y + 5 = 0$

Задание 5. Найти пределы функций, используя правило Лопиталя.

1. $\lim\limits_{x\to -2} \frac{x^2 + x - 2}{x^2 + 2x}$

2. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{tg\,4x}{x}$

3. $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\sqrt{x}\ln x\right)$

4. $\lim\limits_{x\to 1} \left(\ln x - \ln(x-1)\right)$

5. $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{e^{\frac{x}{2}} + x}{4x^2 - 1}$

6. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^{x^2} - 1}{\cos x - 1}$

7. $\lim\limits_{x\to 0} (\cos 2x)^{\frac{1}{x^2}}$

8. $\lim\limits_{x\to 0} (1 - 9x)^{\frac{1}{x}}$

Задание 6. Найти наименьшее и наибольшее значение функции в указанных промежутках.

$y = 2\sin x - \sin 2x, \quad x \in \left[0; \frac{3\pi}{2}\right]$

Задание 7. Исследовать функции и построить их графики.

1. $y = 3x^3 + 6x^2$

2. $y = \frac{x}{(x-1)^2}$

3. $y = \ln\left(x^2 + 5x\right)$

Вариант 20

Задание 1. Вычислить производные заданных функций.

1. $y = \cos\frac{\arcsin x}{2}$

5. $y = \sqrt[3]{1 + x\sqrt{x+3}}$

2. $y = \arccos\sqrt{1-3x}$

3 $y = \ln\dfrac{x+\sqrt{1-x^2}}{x}$

4. $y = 0,4\left(\cos\dfrac{2x+1}{2} - \sin 0,8x\right)^2$

6. $y = \dfrac{\ln\sin x}{\ln\cos x}$

7. $y = 2^{\frac{x}{\ln x}}$

Задание 2. Дифференцирование неявной функции. Логарифмическое дифференцирование. Дифференцирование функции, заданной параметрически.

1. $y = (\cos x)^{\sin x}$

2. $y = \dfrac{(x+2)^2}{(x+1)^3(x+3)^4}$

3. $e^y = x + y$

4. $arctg\dfrac{y}{x} = \dfrac{1}{2\ln(x^2+y^2)}$

5. $\begin{cases} x = \dfrac{\cos^2 t}{\sqrt{\cos 2t}} \\ y = \dfrac{\sin^3 t}{\sqrt{\cos 2t}} \end{cases}$

Задание 3. Найдите производную функции указанного порядка.

1) $y^{(n)}$, если $y = ln(x+1)$;

2) $\dfrac{d^2y}{dx^2}$, если $x = e^t\cos t,\ y = e^t\sin t$.

Задание 4. Составить уравнение касательной, проведенной к кривой $y = f(x)$, параллельно прямой $Ax + By + C = 0$

$f(x) = x^3 - \dfrac{3}{2}x^2 + 3x + 5,\ \ 15x + 5y - 1 = 0$

Задание 5. Найти пределы функций, используя правило Лопиталя.

1. $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x^2-5x+4}{x^2-2x-8}$

2. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 10x}{x^2}$

3. $\lim\limits_{x\to\infty}(\sin x\ln x)$

4. $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{x}{x-1} - \dfrac{1}{\ln x}\right)$

5. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^4}{e^x}$

6. $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{e^x - e}{x-a}$

7. $\lim\limits_{x\to 1}(1-x)^{\cos\frac{\pi x}{2}}$

8. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x}\right)^{tgx}$

Задание 6. Найти наименьшее и наибольшее значение функции в указанных промежутках.

$y = 3x^4 - 16x^3 + 2,\quad x \in [-3;1]$

Задание 7. Исследовать функции и построить их графики.

1. $y = x^3 - 4x$

2. $y = \dfrac{x^4}{x^3 - 27}$

3. $y = \dfrac{e^x}{e^x - 1}$

Вариант 21

Задание 1. Вычислить производные заданных функций.

1. $y = \ln\dfrac{1}{x+\sqrt{x^2-1}}$

5. $y = \dfrac{\arcsin 4x}{1-4x}$

2. $y = x^2\sqrt{1+\sqrt{x}}$

3. $y = x^3 arctgx^3$

4. $y = \arcsin x + \sqrt{1-x^2}$

6. $y = \sin^2 x \cdot \sin x^2$

7. $y = e^{\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}}$

Задание 2. Дифференцирование неявной функции. Логарифмическое дифференцирование. Дифференцирование функции, заданной параметрически.

1. $y = \dfrac{\sqrt{x-1}}{\sqrt[3]{(x+2)^2}\sqrt{(x+3)^3}}$

2. $y = \sqrt[y]{(x-3)}$

3. $\ln y + \dfrac{x}{y} = c$

4. $y = 0,5\sin y + x$

5. $\begin{cases} x = e^{-2t} \\ y = e^{2t} \end{cases}$

Задание 3. Найдите производную функции указанного порядка.

1) $y^{(n)}$, если $y = cos^2 x$;

2) $\dfrac{d^2y}{dx^2}$, если $x = lnt,\ y = t^3$.

Задание 4. Составить уравнение касательной, проведенной к кривой $y = f(x)$, параллельно прямой $Ax + By + C = 0$

$f(x) = -x^3 - 3x^2 + 6x + 10,\ \ 6x + 2y + 9 = 0$

Задание 5. Найти пределы функций, используя правило Лопиталя.

1. $\lim\limits_{x\to 5} \dfrac{x^2 - 2x - 15}{2x^2 - 7x - 15}$

2. $\lim\limits_{x\to \pi/2} \dfrac{tgx}{tg3x}$

3. $\lim\limits_{x\to 0} tg2x \ln x$

4. $\lim\limits_{x\to \pi/2} (tgx - \sec x)$

5. $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{2x^2 + 7}{x^2 + 1 + e^x}$

6. $\lim\limits_{x\to 4} \dfrac{\ln(x-3)}{x-4}$

7. $\lim\limits_{x\to 1} x^{\frac{1}{1-x}}$

8. $\lim\limits_{x\to \infty} \left(1 + \dfrac{6}{x}\right)^x$

Задание 6. Найти наименьшее и наибольшее значение функции в указанных промежутках.

$y = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+4}},\quad x \in [-4;4]$

Задание 7. Исследовать функции и построить их графики**.**

1. $y = x^2 + 6x - 7$

2. $y = \dfrac{3x^3}{x^2 - 9}$

3. $y = (3x + 5)e^{-x^2}$

Вариант 22

Задание 1. Вычислить производные заданных функций.

1. $y = \dfrac{2\cos x}{\sqrt{\cos 2x}}$

5. $y = \sqrt{x^2+1} - \ln\left(\dfrac{1}{x} + \sqrt{1 + \dfrac{1}{x^2}}\right)$

2. $y = x \cdot \sqrt{\dfrac{1-x}{1+x^2}}$

3. $y = \dfrac{1}{4}\ln\dfrac{1+x}{1-x} + \dfrac{1}{2}arctgx$

4. $y = \sqrt{a^2 - x^2} - a\arccos\dfrac{x}{a}$

6. $y = xe^{1-\cos x}$

7. $y = \dfrac{1}{arctge^{-2x}}$

Задание 2. Дифференцирование неявной функции. Логарифмическое дифференцирование. Дифференцирование функции, заданной параметрически.

1. $y = \dfrac{x^2 e^{x^2}}{x^2 - 1}$

2. $y = (tg2x)^{ctg\frac{x}{2}}$

3. $2y\ln y = x^2$

4. $a\cos^2(x+y) = b$

5. $\begin{cases} x = \sqrt{t} \\ y = \sqrt[3]{t} \end{cases}$

Задание 3. Найдите производную функции указанного порядка.

1) $y^{(n)}$, если $y = lg\,x$;

2) $\dfrac{d^2y}{dx^2}$, если $x = a\,rctgt,\ y = ln(1+t^2)$.

Задание 4. Составить уравнение касательной, проведенной к кривой $y = f(x)$, параллельно прямой $Ax + By + C = 0$

$f(x) = -\dfrac{2}{3}x^3 + x^2 - 2x + 3,\ \ 14x - 7y + 3 = 0$

Задание 5. Найти пределы функций, используя правило Лопиталя.

1 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{3x^2 - 4x + 1}{x^2 - 3x + 2}$

2. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tg2x}{x}$

3. $\lim\limits_{x\to 3}(3-x)tg\dfrac{\pi x}{6}$

4. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{\sin x} - \dfrac{1}{x}\right)$

5. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{e^x - 3x - 1}{x^3 + x}$

6. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\cos 4x}{x}$

7. $\lim\limits_{x\to 0} x^x$

8. $\lim\limits_{x\to 0}(1+5x)^{\frac{1}{x}}$

Задание 6. Найти наименьшее и наибольшее значение функции в указанных промежутках.

$y = \dfrac{\sqrt{3}}{2}x + \cos x, \quad x \in \left[0; \dfrac{\pi}{2}\right]$

Задание 7. Исследовать функции и построить их графики.

1. $y = x^3 - 12x + 3$

2. $y = \dfrac{3x}{x^2 + 5}$

3. $y = xe^{-x}$

Вариант 23

Задание 1. Вычислить производные заданных функций.

1. $y = \dfrac{\sin 3x}{2\sin^2 x\cos x}$

5. $y = e^x(\sin 3x - 3\cos 3x)$

2. $y=\ln\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)-\dfrac{x}{\sqrt{x^2-1}}$

3. $y=\dfrac{\sin^2 x}{1+ctgx}+\dfrac{\cos^2 x}{1+tgx}$

4. $y=e^{ax}\left(a\sin x-\cos x\right)$

6. $y=3x^3\arcsin x+\left(x^2+2\right)\sqrt{1-x^2}$

7. $y=\dfrac{1}{\sqrt{1+e^{-\sqrt{x}}}}$

Задание 2. Дифференцирование неявной функции. Логарифмическое дифференцирование. Дифференцирование функции, заданной параметрически.

1. $y=x^{\arcsin x}$

2. $y=\sqrt[3]{\dfrac{x-5}{\sqrt[5]{x^2+4}}}$

3. $2^x+2^y=2^{x+y}$

4. $y=x+arctgy$

5. $\begin{cases} x=a\left(\ln tg\dfrac{t}{2}+\cos t-\sin t\right) \\ y=a\left(\sin t+\cos t\right) \end{cases}$

Задание 3. Найдите производную функции указанного порядка.

1) $y^{(n)}$, если $y=xe^x$;

2) $\dfrac{d^2y}{dx^2}$, если $x=cos^2 t,\ y=sin2t$.

Задание 4. Составить уравнение касательной, проведенной к кривой $y=f\left(x\right)$, параллельно прямой $Ax+By+C=0$

$f\left(x\right)=\dfrac{2}{3}x^3-5x^2+6x-2,\ \ 12x+2y+11=0$

Задание 5. Найти пределы функций, используя правило Лопиталя.

1. $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{x^2+4x-21}{2x^2-7x+3}$

2. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{tgx-\sin x}{x-\sin x}$

3. $\lim\limits_{x\to0}\left(tg3x\ln x\right)$

4. $\lim\limits_{x\to4}\left(\dfrac{1}{x-4}-\dfrac{1}{x^2-5x+4}\right)$

5. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{e^{3x}-x}{x^3}$

6. $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\ln\left(2-x\right)}{1-x}$

7. $\lim\limits_{x\to0}\left(\cos x\right)^{\frac{1}{x}}$

8. $\lim\limits_{x\to0}\left(1-7x\right)^{\frac{1}{x}}$

Задание 6. Найти наименьшее и наибольшее значение функции в указанных промежутках.

$y=\dfrac{5x}{1+x^2},\quad x\in\left[-2;2\right]$

Задание 7. Исследовать функции и построить их графики.

1.	$y=\left(x-3\right)^2\left(x+1\right)$	2.	$y=\dfrac{4x^2}{6+x^2}$	3.	$y=e^{\frac{1}{2-x}}$

Вариант 24

Задание 1. Вычислить производные заданных функций.

1. $y=2\arcsin\dfrac{x-2}{\sqrt{6}}-\sqrt{2+4x-x^2}$

5. $y=\sqrt[11]{9+6\sqrt[5]{x^9}}$

2. $y = \ln\left(e^x \cos x + e^{-x} \sin x\right)$

3. $y = \dfrac{1 + x\,arctgx}{\sqrt{x^2 + 1}}$

4. $y = e^x \sin x \cos^3 x$

6. $y = \ln tg\dfrac{x}{2} - ctgx \ln\left(1 + \sin x\right) - x$

7. $y = e^{arctg\sqrt{1+\ln(2x+3)}}$

Задание 2. Дифференцирование неявной функции. Логарифмическое дифференцирование. Дифференцирование функции, заданной параметрически.

1. $y = \sqrt{x \sin x \sqrt{1 - e^x}}$

2. $y = \left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^x$

3. $x^3 + y^3 - 3axy = 0$

4. $y \sin x = \cos\left(x - y\right)$

5. $\begin{cases} x = a\left(\cos t + t \sin t\right) \\ y = a\left(\sin t - t \cos t\right) \end{cases}$

Задание 3. Найдите производную функции указанного порядка.

1) $y^{(n)}$, если $y = sin^4 x + cos^4 x$;

2) $\dfrac{d^2 y}{dx^2}$, если $x = arctgt,\ y = t^2/2$.

Задание 4. Составить уравнение касательной, проведенной к кривой $y = f\left(x\right)$, параллельно прямой $Ax + By + C = 0$

$f\left(x\right) = \dfrac{1}{6}x^3 + \dfrac{1}{2}x^2 - x + 2,\ \ 3x - 6y + 4 = 0$

Задание 5. Найти пределы функций, используя правило Лопиталя.

1. $\lim\limits_{x \to \frac{1}{2}} \dfrac{2x^2 - 7x + 3}{4x - 2}$

2. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x - x - 1}{\sin 2x}$

3. $\lim\limits_{x \to 1} \left(x - 1\right) \ln\left(x - 1\right)$

4. $\lim\limits_{x \to 3} \left(\dfrac{1}{x - 3} - \dfrac{1}{x^2 - 5x + 6} \right)$

5.. $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{e^{4x} + x^2 + x}{x^3 + 1}$

6. $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{x^2 - \sqrt{a^3 x}}{\sqrt{ax} - x}$

7. $\lim\limits_{x \to \infty} \left(1 + \dfrac{1}{x^2}\right)^x$

8. $\lim\limits_{x \to 0} \left(\cos 2x\right)^{\frac{5}{x^2}}$

Задание 6. Найти наименьшее и наибольшее значение функции в указанных промежутках.

$y = 2x + \cos 2x, \quad x \in \left[-\dfrac{3\pi}{4}; \pi \right]$

Задание 7. Исследовать функции и построить их графики.

1. $y = \left(x + 2\right)\left(x + 3\right)^2$

2. $y = \dfrac{8x^3 + 1}{3x^2}$

3. $y = \left(x + 4\right)e^{2x}$

Вариант 25

Задание 1. Вычислить производные заданных функций.

1. $y = \dfrac{1}{\cos\left(x - \cos x\right)}$

5. $y = \dfrac{3x^2 - 1}{3x^3} + \ln\sqrt{x^2 + 1} + arctgx$

2. $y = x - \ln\left(2e^x + 1 + \sqrt{e^{2x} + 4e^x + 1}\right)$

3. $y = \dfrac{e^{x^2}}{e^x + e^{-x}}$

4. $y = 2\ln\left(2x - 3\sqrt{1 - 4x^2}\right) - 6\arcsin 2x$

6. $y = x\sqrt{x^2 + 1}\cdot \sin x$

7. $y = \sqrt[6]{\left(1 + xe^{\sqrt{x}}\right)^3}$

Задание 2. Дифференцирование неявной функции. Логарифмическое дифференцирование. Дифференцирование функции, заданной параметрически.

1. $y = \dfrac{\sqrt{x+2}\cdot(3-x)^4}{(x+1)^5}$

2. $y = \left(x^2 + 1\right)^{\sin 2x}$

3. $y = 1 + xe^y$

4. $\cos(xy) = x$

5. $\begin{cases} x = \ln\left(1 + t^2\right) \\ y = t - arctgt \end{cases}$

Задание 3. Найдите производную функции указанного порядка.

1) $y^{(n)}$, если $y = e^{-\frac{x}{2}}$;

2) $\dfrac{d^2y}{dx^2}$, если $x = a\cos t,\ y = a\sin t$.

Задание 4. Составить уравнение касательной, проведенной к кривой $y = f(x)$, параллельно прямой $Ax + By + C = 0$

$f(x) = 3x^3 - 12x^2 + 10x - 2,\ \ 24x + 12y - 5 = 0$

Задание 5. Найти пределы функций, используя правило Лопиталя.

1. $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^3 - 3x - 2}{x - 2}$

2. $\lim\limits_{x\to \pi/4} \dfrac{1 - tgx}{x - 2}$

3. $\lim\limits_{x\to 0} \sqrt{x}\ln x$

4. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\ln x}{1 - x^3}$

5. $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{x^2 + 4x}{e^{3x}}$

6. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{3e^{4x} - 3}{x^3}$

7. $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{1}{x}\right)^{tgx}$

8. $\lim\limits_{x\to 0} (1 + 8x)^{\frac{1}{x}}$

Задание 6. Найти наименьшее и наибольшее значение функции в указанных промежутках**.**

$y = \dfrac{1}{\sin x},\quad x \in \left[\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{3\pi}{2}\right]$

Задание 7. Исследовать функции и построить их графики.

1. $y = (x-1)(x+2)(x-3)$

2. $y = \dfrac{-3}{x^2 - 6x + 9}$

3. $y = x^2 e^{-2x}$

Вариант 26

Задание 1. Вычислить производные заданных функций.

1. $y = \dfrac{x^2 - 3x}{x^3}$

5. $y = (\sin x - x\cos x)\left[\ln(\sin x - x\cos x) - 1\right]$

2. $y=\ln\left(x-2\sqrt{x^4+1}\right)$

3. $y=3\cos\left(e^x-xe^x\right)-\cos^2\left(xe^x-e^x\right)$

4. $y=\arcsin\left(4x\sqrt{1-x^2}\right)$

6. $y=\arcsin\dfrac{2+x^2}{x}$

7. $y=\left(\dfrac{1+2x}{1-2x}\right)^4$

Задание 2. Дифференцирование неявной функции. Логарифмическое дифференцирование. Дифференцирование функции, заданной параметрически.

1. $y=(x+1)^{x^2}$

2. $y=\dfrac{x^4\sqrt{x+1}}{(x-1)^2\sqrt[4]{x-1}}$

3. $x^3-2y^3=3x^2y$

4. $4\dfrac{y}{x}-2e^{\frac{y}{x}}+\sqrt[3]{\dfrac{y}{x}}=0$

5. $\begin{cases}x=t^3-2t+3\\ y=3t^5-4t^3+3\end{cases}$

Задание 3. Найдите производную функции указанного порядка.

1) $y^{(n)}$, если $y=\sin x+\cos x$;

2) $\dfrac{d^2y}{dx^2}$, если $x=e^{-t}$, $y=t^3$.

Задание 4. Составить уравнение касательной, проведенной к кривой $y=f(x)$, параллельно прямой $Ax+By+C=0$

$f(x)=-2x^3-6x^2+12x+21,\ \ x-6y+2=0$

Задание 5. Найти пределы функций, используя правило Лопиталя.

1. $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^4-1}{2x^4-x^2-1}$

2. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x-\sin x}{x^3}$

3. $\lim\limits_{x\to0}\sqrt[3]{x}\ln x$

4. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{2x}-1}{\ln(1+2x)}$

5. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2-1}{e^x}$

6. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^x+e^{-x}-2}{\sin x}$

7. $\lim\limits_{x\to0}\left(e^x+x\right)^{\frac{1}{x}}$

8. $\lim\limits_{x\to0}\left(tg4x\right)^{2x}$

Задание 6. Найти наименьшее и наибольшее значение функции в указанных промежутках.

$y=\sin3x-3\sin x,\quad x\in\left[0;\dfrac{3\pi}{2}\right]$

Задание 7. Исследовать функции и построить их графики.

1. $y=x^3-6x^2$

2. $y=\dfrac{x^2+6}{x^2-9}$

3. $y=\ln\left(x^2-5x+4\right)$

Вариант 27

Задание 1. Вычислить производные заданных функций.

1. $y=\dfrac{\cos 2x}{x^3+2x^2}$

5. $y=(x\cos x-\sin x)\left[\ln(x\cos x-\sin x)-1\right]$

2. $y = \ln(x + \sqrt[3]{x^2 - 1})$

3. $y = \arccos\dfrac{1 + X^4}{3X}$

4. $y = \left(\dfrac{1-x}{1+x}\right)^4$

6. $y = 3\sin\left(xe^x - e^x\right) - \sin^3\left(xe^x - e^x\right)$

7. $y = \arccos\left(2x\sqrt{1-x^2}\right)$

$y = (\sin x - x\cos\dfrac{1}{\sqrt{x}})$

Задание 2. Дифференцирование неявной функции. Логарифмическое дифференцирование. Дифференцирование функции, заданной параметрически.

1. $y = (x-2)^{\sin x}$

2. $y = \dfrac{x^2\sqrt{x+1}}{(x-1)^3\sqrt[4]{5x-1}}$

3. $x^3 + y^3 = 3xy$

4. $\dfrac{y}{x} + e^{\frac{y}{x}} - \sqrt[3]{\dfrac{y}{x}} = 0$

5. $\begin{cases} x = t^3 + 3t + 1 \\ y = 3t^5 + 5t^3 + 1 \end{cases}$

Задание 3. Найдите производную функции указанного порядка.

1) $y^{(n)}$, если $y = e^{\frac{x}{2}}$;

2) $\dfrac{d^2y}{dx^2}$, если $x = a(t - \sin t),\ y = a(1 - \cos t)$.

Задание 4. Составить уравнение касательной, проведенной к кривой $y = f(x)$, параллельно прямой $Ax + By + C = 0$

$f(x) = \dfrac{1}{3}x^3 - x^2 + 1$, $y + 4x = 1$

Задание 5. Найти пределы функций, используя правило Лопиталя.

1. $\lim\limits_{x\ 5} \dfrac{x^3 + 5x + 3x + 15}{2x^2 + 6x - 20}$

2. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2e^x - 2}{x^2 - x}$

3. $\lim\limits_{x\to 0} x\,ctg\,2x$

4. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x^2} - ctg^2 x\right)$

5. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{e^{3x} + 5}{6x^2 + 1}$

6. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2e^{4x} - 2}{\sin x}$

7. $\lim\limits_{x\to 0}(1 - 6x)^{\frac{1}{x}}$

8. $\lim\limits_{x\to 1} x^{\frac{1}{1-x}}$

Задание 6. Найти наименьшее и наибольшее значение функции в указанных промежутках.

$y = x + \ln(-x),\quad [-4; -0{,}5]$

Задание 7. Исследовать функции и построить их графики.

1. $y = x^3 + 3x + 2$ **2.** $y = \dfrac{2x-1}{(x-1)^2}$ **3.** $y = \ln\left(x^2 + x - 2\right)$

Вариант 28

Задание 1. Вычислить производные заданных функций.

1. $y = \ln tg\dfrac{x}{2}$

2. $y = 4^{arctg\sqrt{x^2-1}}$

5. $y = tg^3 2x\cos^2 2x$

6. $y = \dfrac{1}{4}tg^4 x - \ln\cos x - \dfrac{tg^2 x}{2}$

3. $y=\left(1+\sqrt{x^2+1}\right)^5$

4. $y=e^{\arcsin\frac{1}{x}}$

7. $y=x^n a^{-x^2}$

Задание 2. Дифференцирование неявной функции. Логарифмическое дифференцирование. Дифференцирование функции, заданной параметрически.

1. $y=x^x$

2. $y=\dfrac{(x-2)^9}{\sqrt{(x-1)^5(x-3)^{11}}}$

3. $tgy=xy$

4. $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$

5. $\begin{cases} x=a\cos^3 t \\ y=b\sin^3 t \end{cases}$

Задание 3. Найдите производную функции указанного порядка.

1) $y^{(n)}$ $y=e^{-\sqrt{2}x}$;

2) $\dfrac{d^2y}{dx^2}$, если $x=arc\cos t,\ y=(1-t^2)^3$.

Задание 4. Составить уравнение касательной, проведенной к кривой $y=f(x)$, параллельно прямой $Ax+By+C=0$

$f(x)=\dfrac{1}{9}x^3+x^2-x$, $2y+4x=1$

Задание 5. Найти пределы функций, используя правило Лопиталя.

1. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^3-2x-1}{x^4+2x+1}$

2. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\sin 3x}{1-\cos 4x}$

3. $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}}\sin(2x-1)tg\pi x$

4. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\sin 2x}{\ln\sin x}$

5. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{e^{5x}+x^2}{x+x^3}$

6. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2e^x+e^{-x}-3}{x^2}$

7. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x}\right)^{\sin x}$

8. $\lim\limits_{x\to 0}(1-2x)^{\frac{1}{x}}$

Задание 6. Найти наименьшее и наибольшее значение функции в указанных промежутках.

$y=x+e^{-x}$, $[-\ln 4;\ \ln 2]$.

Задание 7. Исследовать функции и построить их графики.

1. $y=x^2-4x$

2. $y=\dfrac{x^3+8}{3x}$

3. $y=\dfrac{e^x}{e^x-1}$

Вариант 29

Задание 1. Вычислить производные заданных функций.

1. $y=\ln\left(\sqrt{2\sin x+1}+\sqrt{2\sin x-1}\right)$

2. $y=\left(x^2+2x+2\right)e^{-x}$

5. $y=log_a\left(x+\sqrt{x^2+9}\right)$

6. $y=\ln tg\dfrac{x}{2}-\dfrac{x}{\sin x}$

3. $y = arctg\dfrac{\ln x}{3}$

4. $y = x\sin x\cos x + \dfrac{1}{2}\cos^2 x$

7. $y = e^{\frac{1}{2}tg^2 x}\cos x$

Задание 2. Дифференцирование неявной функции. Логарифмическое дифференцирование. Дифференцирование функции, заданной параметрически.

1. $y = x^{-x}\cdot 2^x \cdot x^2$

2. $y = \sqrt{\dfrac{x(x-1)}{x-2}}$

3. $x^3 + y^3 = a^3$

4. $xy = arctg\dfrac{x}{y}$

5. $\begin{cases} x = \dfrac{1}{t+1} \\ y = \left(\dfrac{t}{t+1}\right)^2 \end{cases}$

Задание 3. Найдите производную функции указанного порядка.

1) $y^{(n)}$, если $y = a/x^n$;

2) $\dfrac{d^2y}{dx^2}$, если $x = at\cos t,\ y = at\sin t$.

Задание 4. Составить уравнение касательной, проведенной к кривой $y = f(x)$, параллельно прямой $Ax + By + C = 0$

$f(x) = \dfrac{1}{6}x^3 + 2x^2 - 2x$, $2y + 20x = 2$.

Задание 5. Найти пределы функций, используя правило Лопиталя.

1. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{3x^2+2x-1}{x^2-1}$

2. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{6}}\dfrac{1-2\sin x}{\cos 3x}$

3. $\lim\limits_{x\to 0} x\,ctg\,7x$

4. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x\sin x} - \dfrac{1}{x^2}\right)$

5. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{e^x + x + 2}{x^4}$

6. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{e^x - e^2}{x-2}$

7. $\lim\limits_{x\to 0}(tgx)^{2x-\pi}$

8. $\lim\limits_{x\to 0}(1-5x)^{\frac{1}{x}}$

Задание 6. Найти наименьшее и наибольшее значение функции в указанных промежутках.

$y = x\ln^2 x,\quad x\in\left[e^{-1}; e\right]$.

Задание 7. Исследовать функции и построить их графики.

1. $y = x^2 - 12x + 21$ **2.** $y = \dfrac{2x}{(x-3)^2}$ **3.** $y = xe^{\frac{-x^2}{2}}$

Вариант 30

Задание 1. Вычислить производные заданных функций.

1. $y = \sin^3\dfrac{x}{3}$

2. $y = \dfrac{1}{2}tg^2\sqrt{x} + \ln\cos\sqrt{x}$

5. $y = x^2 e^{x^2}\ln x$

6. $y = \arccos\sqrt{1-2^x}$

3. $y=\dfrac{2^{3x}}{3^{5x}}$

4. $y=\dfrac{1}{4a}\ln\dfrac{x-a}{x+a}+\dfrac{1}{2a}arctg\dfrac{x}{a}$

7. $y=\log_{x^2}2$

Задание 2. Дифференцирование неявной функции. Логарифмическое дифференцирование. Дифференцирование функции, заданной параметрически.

1. $y=x^{\ln x}$

2. $y=x\cdot\sqrt[3]{\dfrac{x^2}{x^2+1}}$

3. $arctg\left(x+y\right)=x$

4. $x^3+x^2y+y^2=0$

5. $\begin{cases}x=a\cos^2 t\\ y=b\sin^2 t\end{cases}$

Задание 3. Найдите производную функции указанного порядка.

1) $y^{(n)}$, если $y=arctgx$;

2) $\dfrac{d^2y}{dx^2}$, если $x=a\log_b t,\ y=a\ln t$.

Задание 4. Составить уравнение касательной, проведенной к кривой $y=f\left(x\right)$, параллельно прямой $Ax+By+C=0$

$\mathrm{f(x)}=\dfrac{1}{12}\mathrm{x}^3-\mathrm{x}^2+4\mathrm{x}$, $2\mathrm{y}-14\mathrm{x}=2$

Задание 5. Найти пределы функций, используя правило Лопиталя.

1. $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{2x^2+x-10}{x^2-x-2}$

2. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\arcsin5x}{x}$

3. $\lim\limits_{x\to0}x^2e^{\frac{1}{x}}$

4. $\lim\limits_{x\to-2}\left(\dfrac{1}{x+2}-\dfrac{1}{x^2+5x+6}\right)$

5. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{e^{4x}+x}{x^3+1}$

6. $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{ctg\dfrac{x}{2}}{x-\pi}$

7. $\lim\limits_{x\to\pi/2}\left(\sin x\right)^{\frac{1}{x-\pi/2}}$

8. $\lim\limits_{x\to0}\left(1-8x\right)^{\frac{1}{x}}$

Задание 6. Найти наименьшее и наибольшее значение функции в указанных промежутках.

$y=\arccos x^2,\quad x\in\left[-\sqrt{2}/2;\sqrt{2}/2\right]$

Задание 7. Исследовать функции и построить их графики.

1. $y=x^3+6x+14$

2. $y=\dfrac{4x^2}{x^3-1}$

3. $y=\left(3x^2+4\right)e^{-x^2}$

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Данко, П.Г. Высшая математика в упражнениях и задачах [текст] / П.Г. Данко, А.Г. Попов, Т.Я. Кожевникова. – М. :ОНИКС 21 век, 2002. –304с.

2. Запорожец, Г.И. Руководство к решению задач по математическому анализу [текст] / Г.И. Запорожец. – М. : Высшая школа,1966. – 459 с.

3. Мышкис, А.Д. Лекции по высшей математике / А.Д. Мышкис. – М. : Наука,1967. – 639с.
4. Методические указания и индивидуальные задания по теме «Дифференцирование» / Сост. : Т.Г. Гартман, М.В. Кудряшова – Хабаровск, 1990. – 59 с.
5. Пискунов, Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисления [текст] / Н.С. Пискунов. – М. : Наука, 1978. – 452 с.
6. Шипачев, В.С. Высшая математика [текст] / В.С. Шипачев. – М.: Высшая школа, 1990. – 479с.

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ 3
1. ПОНЯТИЕ ПРОИЗВОДНОЙ, ЕЁ ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ СМЫСЛ..... 4
1.1. Понятие производной 4
1.2. Геометрический смысл производной 4
2. ПРАВИЛА ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ.
ПРОИЗВОДНАЯ СЛОЖНОЙ ФУНКЦИИ 6

2.1. Правила дифференцирования.....6
2.2. Производная сложной функции 7
3. ДИФФЕРЕНЦИАЛ ФУНКЦИИ 8
4. ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ ОБРАТНОЙ ФУНКЦИИ,
ФУНКЦИЙ ЗАДАННЫХ НЕЯВНО, ПАРАМЕТРИЧЕСКИ.
ЛОГАРИФМИЧЕСКОЕ ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ 9
4.1. Дифференцирование обратной функции 9
4.2 Дифференцирование функций, заданных неявно 10
4.3. Дифференцирование функций, заданных параметрически.....11
4.4. Логарифмическое дифференцирование 13
5. ПРОИЗВОДНЫЕ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ 14
5.1. Понятие производной высшего порядка.....14
5.2 Производные высших порядков от функций, заданных параметрически 15
5.3. Производные высших порядков от функций, заданных неявно.....16
6. ПРАВИЛО ЛОПИТАЛЯ.....17
7. ПРИМЕНЕНИЕ ПРОИЗВОДНОЙ ДЛЯ ИССЛЕДОВАНИЯ
СВОЙСТВ ФУНКЦИЙ.....21
7.1. Возрастание и убывание функций 21
7.2 Экстремумы функции.....22
7.3. Наибольшее и наименьшее значения функции на отрезке.....24
7.4. Выпуклость, вогнутость графика функции, точки перегиба.....28
7.5. Асимптоты 30
8. ПОСТРОЕНИЕ ГРАФИКОВ ФУНКЦИЙ С ПОМОЩЬЮ
ЭЛЕМЕНТОВ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ИСЧИСЛЕНИЯ 33
9. РАСЧЕТНО-ГРАФИЧЕСКОЕ ЗАДАНИЕ.....42
БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК 74
ОГЛАВЛЕНИЕ 75

Учебное издание

Войтюк Маргарита Ивановна
Гамалей Вероника Геннадьевна

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИЙ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

Методическое пособие

Технический редактор *А.А. Курилко*

Отпечатано методом прямого репродуцирования

План 2007 г. Поз.9.9.
Сдано в набор 15.12.2006. Подписано в печать 7.03.2007.
Формат 60x84 $^{1}/_{16}$. Бумага тип. № 2. Гарнитура Arial. Печать плоская.
Усл. Изд. 1.5 Усл. печ. л. 4.4. Зак. 93. Тираж 300 экз. Цена 26 р.

Издательство ДВГУПС
680021, г. Хабаровск, ул. Серышева, 47